УДК 519.83
ББК 22.18

МНОГОШАГОВАЯ МОДЕЛЬ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ С ЭЛЕМЕНТАМИ ПЕРЕГОВОРОВ И СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ[1]

Пьяных А.И.[2]
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоновосова, Москва)

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями в течение n шагов. Игрок 1 (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из $\mathbb{Z}_+$. В то же время игрок 2 знает только вероятностное распределение $\bar{\mathrm{p}}$ цены акции. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший бóльшую ставку покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок. Получено решение игры неограниченной продолжительности для распределений $\bar{\mathrm{p}}$ с конечной дисперсией.

Ключевые слова: многошаговые игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции $s \in S$ на весь

[1] *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-01-00353а. Автор признателен своему научному руководителю к.ф.-м.н., доценту В.В. Морозову за помощь в написании данной статьи.*

[2] *Артем Игоревич Пьяных, аспирант (artem.pyanykh@gmail.com).*

период торгов в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s,\ s \in S)$. Выбранная цена сообщается игроку 1 (инсайдеру). Игрок 2 при этом знает только вероятностное распределение $\bar{p}$ и не осведомлен о настоящем значении цены. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший бóльшую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. Задачей игроков является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа купленных акций и суммы денег, полученных в результате торгов. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Модель, в которой цена акции может принимать только значения 0 и m, была рассмотрена в [7]. Задача сводится к анализу антагонистической повторяющейся игры с неполной информацией, как описано в [5]. В [7] показано, что последовательность верхних значений n-шаговых игр ограничена, что позволило определить и решить игру с бесконечным количеством шагов. Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в частных случаях: в [4] найдено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значении m; в [2] решение n-шаговых игр построено при $m \leqslant 3$.

В работе [1] рассмотрено обобщение модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение $s \in S = \mathbb{Z}_+$. Решение игры с бесконечным количеством шагов найдено в предположении конечности дисперсии цены акции.

В работах [1, 7] сделка осуществляется по цене, равной наибольшей предложенной ставке. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [6], и положить цену сделки, равную выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом $\beta \in [0, 1]$, т.е. если игроками были сделаны ставки $p_1 \neq p_2$, то акция будет продана по цене $\beta \max(p_1, p_2) + (1 - \beta) \min(p_1, p_2)$. Фактически, в [1, 7] коэффициент β равен 1. Обобщение модели с двумя возможными значениями цены акции на случай произвольного β было дано в [3]. В данной работе это обобщение проведено для модели со счетным множеством возможных значений цены акции. Доказательства утверждений вынесены в приложение.

1. Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s,\ s \in S)$ таким, что дисперсия состояния $\mathbb{D}\,\bar{p} < \infty$. На каждом шаге игры $t = \overline{1,n},\ n \leqslant \infty$ игроки делают ставки $i_t \in I$, $j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. Выплата игроку 1 в состоянии s равна

$$a^s(i_t, j_t) = \begin{cases} (1-\beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1-\beta) j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

Обозначим через $\Delta(X)$ совокупность всех вероятностных распределений на множестве X.

Определение 1. *Стратегией игрока 1 является последовательность ходов $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$. Множество стратегий игрока 1 обозначим* Σ.

Определение 2. *Стратегией игрока 2 является последовательность ходов $\bar{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. Множество стратегий игрока 2 обозначим* T.

Таким образом, игрок 1 на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка s и истории ставок. Игрок 2, в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка s, опирается только на историю ставок инсайдера.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, т.е. торги не могут закончиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Кроме того, будем считать, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

При использовании игроками стратегий $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$, ожидаемый выигрыш игрока 1 равен

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = \mathbb{E}_{(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})} \sum_{t=1}^{n} a^s(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной $\bar{p}$, $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$. Заданную таким образом игру обозначим $G_n(\bar{p})$.

Определение 3. *Если для некоторых* $\bar{\sigma}^* \in \Sigma$, $\bar{\tau}^* \in \mathrm{T}$ *выполняется*

$$\inf_{\bar{\tau} \in \mathrm{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}) = K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}^*) = \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}^*) = V_n(\bar{p}),$$

то игра $G_n(\bar{p})$ *имеет значение* $V_n(\bar{p})$, *а стратегии* $\bar{\sigma}^*$ *и* $\bar{\tau}^*$ *называются оптимальными.*

Следуя [1], опишем рекурсивную структуру игры $G_n(\bar{p})$. Представим стратегию игрока 1 в виде $\bar{\sigma} = (\sigma, \bar{\sigma}^i, i \in I)$, где σ — ход игрока на первом шаге, а $\bar{\sigma}^i$ — стратегия в игре продолжительности $n-1$ в зависимости от ставки i на первом шаге. Аналогично, стратегию игрока 2 представим в виде $\bar{\tau} = (\tau, \bar{\tau}^i,\ i \in I)$. Далее, обозначим q^i полную вероятность, с которой игрок 1 делает ставку $i \in I$, и $\bar{q} = (q^i,\ i \in I)$ — соответствующее распределение. Также обозначим $p^{s|i}$ апостериорную вероятность состояния s в зависимости от ставки i игрока 1, и $\bar{p}^i = (p^{s|i},\ s \in S)$ — соответствующее апостериорное распределение. Тогда для функции выигрыша в игре $G_n(\bar{p})$ будет справедлива формула

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_1(\bar{p}, \sigma, \tau) + \sum_{i \in I} q^i K_{n-1}(\bar{p}^i, \bar{\sigma}^i, \bar{\tau}^i). \tag{1}$$

2. *Оценки выигрыша в игре* $\mathrm{G}_\infty(\bar{\mathbf{p}})$

Следуя [1], рассмотрим чистую стратегию $\bar{\tau}^k$ игрока 2:

$$\tau_1^k = k, \quad t_t^k = \begin{cases} j_{t-1}, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_t, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t+1}, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

При использовании этой стратегии игрок 2 делает ставку равную k на первом шаге, а далее подражает инсайдеру. Обозначим $x^+ = \max(0, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *При применении стратегии $\bar{\tau}^k$ в игре $G_n(\bar{p})$ игрок 2 в состоянии s гарантирует себе проигрыш не более*

$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (k - s - t - 1 + \beta)^+, \ s \leqslant k,$$
$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (s - k - t - \beta)^+, \ s > k.$$

Последовательность $\left\{h_n^s(\bar{\tau}^k), \ n = \overline{1, \infty}\right\}$ не убывает, ограничена сверху и сходится к

(2) $$h_\infty^s(\bar{\tau}^k) = (s - k + 1 - 2\beta)(s - k)/2.$$

Введем следующие обозначения для множества распределений на S с заданным математическим ожиданием состояния:

$$\Theta(x) = \left\{\bar{p}' \in \Delta(S) : \mathbb{E}\,\bar{p}' = x\right\},$$
$$\Lambda(x, y) = \left\{\bar{p}' \in \Delta(S) : x < \mathbb{E}\,\bar{p}' \leqslant y\right\}.$$

Пусть $\bar{\tau}^*$ — стратегия игрока 2, состоящая в применении $\bar{\tau}^k$ при $\bar{p} \in \Lambda(k - 1 + \beta, k + \beta)$.

Теорема 1. *При использовании игроком 2 стратегии $\bar{\tau}^*$, выигрыш игрока 1 в игре $G_\infty(\bar{p})$ ограничен сверху функцией*

$$H_\infty(\bar{p}) = \min_{k \in J} \sum_{s \in S} p^s h_\infty^s(\bar{\tau}^k).$$

Функция $H_\infty(\bar{p})$ является кусочно-линейной с областями линейности $\Lambda(k - 1 + \beta, k + \beta)$ и областями недифференцируемости $\Theta(k + \beta)$ при $k \in S$. Для распределений $\bar{p}$ таких, что $\mathbb{E}\,\bar{p} = k - 1 + \beta + \xi$, $\xi \in (0, 1]$, ее значение равно

(3) $$H_\infty(\bar{p}) = \left(\mathbb{D}\,\bar{p} + \beta(1 - \beta) - \xi(1 - \xi)\right)/2.$$

Заметим, что как и в [3], в данном случае наблюдается сдвиг областей линейности на β относительно $\mathbb{E}\,\bar{p}$ в сравнении с результатами из [1].

Перейдем к описанию стратегии игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш не менее $H_\infty(\bar{p})$. Пусть σ_i^s — компонента хода σ игрока 1, т.е. вероятность сделать ставку i в состоянии s. По правилу Байеса $\sigma_i^s = p^{s|i}q^i/p^s$. В частности, справедливо $\sum_{s\in S}\sigma_i^s p^s = q^i,\ i \in I$. Таким образом, ход игрока 1 можно определить, задав следующие параметры: полные вероятности q^i сделать ставку i и апостериорные вероятности $p^{s|i}$ для $i \in I$. Тогда в терминах $\bar{q}$, $\bar{p}^i$ его одношаговый выигрыш выражается следующим образом:

$$K_1(\bar{p},\sigma,j) = \sum_{i\in I}\sum_{s\in S} q^i p^{s|i} a^s(i,j). \tag{4}$$

Обозначим через $L_n(\bar{p})$ — максимальный выигрыш, который может гарантировать себе игрок 1 в игре $G_n(\bar{p})$.

Лемма 2. *Пусть $\bar{p}_k$ — распределение из $\Delta(S)$, $\bar{\sigma}_k$ — стратегия игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш $L_n(\bar{p}_k)$ в игре $G_n(\bar{p}_k)$, и $\bar{q}_k = (q_k^1,\dots,q_k^n)$, $\bar{p}_k^i = (p_k^{1|i}, p_k^{2|i},\dots)$ — векторы полных вероятностей ставок и апостериорных вероятностей состояния, соответствующие первому ходу стратегии $\bar{\sigma}_k,\ k = 1,2$. Тогда для $\bar{p} = \lambda\bar{p}_1 + (1-\lambda)\bar{p}_2,\ \lambda \in [0,1]$, стратегия $\bar{\sigma}_c$, первый ход которой задается параметрами*

$$q^i = \lambda q_1^i + (1-\lambda)q_2^i, \quad p^{s|i} = \left(\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1-\lambda) q_2^i p_2^{s|i}\right)/q^i, \tag{5}$$

гарантирует игроку 1 выигрыш $\lambda L_n(\bar{p}_1) + (1-\lambda)L_n(\bar{p}_2)$.

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что для доказательства совпадения верхней и нижней оценок выигрыша в игре $G_\infty(\bar{p})$ можно ограничиться рассмотрением распределений $\bar{p} \in \Theta(k+\beta),\ k \in S$. Как показано в [1], любое $\bar{p}$ может быть представлено в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечным носителем. Обозначим $\bar{p}^x(l,r) \in \Theta(x)$ распределение с математическим ожиданием x и носителем $\{l,r\}$. Таким образом, достаточно доказать выполнение равенства $L_\infty(\bar{p}) = H_\infty(\bar{p})$ для $\bar{p} = \bar{p}^{k+\beta}(l,r),\ k \in S$. Построим соответствующую стратегию игрока 1.

Обозначим $\hat{\sigma}_k$ ход игрока 1, состоящий в применении действий k и $k+1$. Ход $\hat{\sigma}_k$ определяется заданием полных вероятностей q^k, q^{k+1} и апостериорных распределений $\bar{p}^k, \bar{p}^{k+1}$, причем $q^k + q^{k+1} = 1$. Следующая лемма является обобщением утверждения 2 из [3].

Лемма 3. *При использовании $\hat{\sigma}_k$ одношаговый выигрыш игрока 1 равен*

$$K_1(\bar{p}, \hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} \mathbb{E}\,\bar{p} - \beta k - (1-\beta)j - \beta q^{k+1}, & j < k, \\ (\mathbb{E}\,\bar{p}^{k+1} - k - \beta)q^{k+1}, & j = k, \\ (k + \beta - \mathbb{E}\,\bar{p}^k)q^k, & j = k, \\ (1-\beta)k + \beta j - \mathbb{E}\,\bar{p} + (1-\beta)q^{k+1}, & j > k+1. \end{cases}$$

Распространяя результаты [3] на случай $\bar{p}^{k+\beta}(l,r)$, определим следующую стратегию игрока 1 в игре $G_\infty(\bar{p})$. Введем обозначение

$$P(l,r) = \left\{ \bar{p}^k(l,r),\, \bar{p}^{s+\beta}(l,r),\, k = \overline{l,r}, s = \overline{l, r-1} \right\}.$$

При $\bar{p} \in P(l,r)$ первый ход стратегии $\bar{\sigma}^*$ определяется следующим образом: если $\bar{p} = \bar{p}^l(l,r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l,r)$ игрок 1 использует ставки l и r, соответственно, с вероятностью 1; иначе игрок 1 использует $\hat{\sigma}_k$ с параметрами

$$\begin{array}{lll} \bar{p}^k(l,r): & q^k = \beta, & q^{k+1} = 1-\beta, \\ & \bar{p}^k = \bar{p}^{k-1+\beta}(l,r), & \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+\beta}(l,r); \\ \bar{p}^{k+\beta}(l,r): & q^k = 1-\beta, & q^{k+1} = \beta, \\ & \bar{p}^k = \bar{p}^k(l,r), & \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+1}(l,r). \end{array}$$

На последующих шагах игры таким образом определенный ход применяется рекурсивно для соответствующих значений апостериорных вероятностей. Для остальных распределений $\bar{p}$ стратегия $\bar{\sigma}^*$ определяется конструкцией леммы 2.

Обозначим $L^x_{l,r} = L_\infty(\bar{p}^x(l,r))$. Следующая теорема является обобщением утверждения 5 из [3].

Теорема 2. *При использовании стратегии $\bar{\sigma}^*$ в игре $G_\infty(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} \in P(l,r)$ гарантированный выигрыш игрока 1 удовлетворяет следующей системе:*

$$
\begin{gathered}
L_{l,r}^{k+\beta} = \beta(1-\beta) + (1-\beta)L_{l,r}^{k} + \beta L_{l,r}^{k+1},\ k \in \overline{l, r-1}, \\
L_{l,r}^{k} = \beta L_{l,r}^{k-1+\beta} + (1-\beta)L_{l,r}^{k+\beta},\ k \in \overline{l+1, r-1}, \\
L_{l,r}^{l} = L_{l,r}^{r} = 0.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Ее решение дает нижнюю оценку выигрыша игрока 1 равную

$$L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l,r)) = ((r-k-\beta)(k+\beta-l) + \beta(1-\beta))/2.$$

Так как $\mathbb{D}\, p^{k+\beta}(l,r) = (r-k-\beta)(k+\beta-l)$ получаем, что выражения для $H_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l,r))$ и $L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l,r))$ совпадают. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Игра $G_\infty(\bar{p})$ имеет значение $V_\infty(\bar{p}) = H_\infty(\bar{p}) = L_\infty(\bar{p})$. Стратегии $\bar{\tau}^*$ и $\bar{\sigma}^*$, определенные ранее, являются оптимальными.*

В заключение сделаем несколько замечаний. Нужно отметить, что стратегия неосведомленного игрока является устойчивой по отношению к изменению функции выигрыша игрока 1. В то же время оптимальная стратегия инсайдера существенно меняется. В [1] при применении оптимальной стратегии игроком 1, апостериорные распределения образуют симметричное случайное блуждание по множествам $\Theta(s)$, $s \in S$, т.е. для $\bar{p} \in \Theta(s)$ апостериорное распределение $\bar{p}'$ будет принадлежать либо $\Theta(k-1)$, либо $\Theta(k+1)$ с вероятностями равными $1/2$. В случае $\beta \in (0,1)$ блуждание происходит по более широкому набору множеств $\{\Theta(s), \Theta(s+\beta)\}$, кроме того оно больше не является симметричным, кроме случая $\beta = 1/2$. Отметим также, что оптимальная стратегия $\bar{\sigma}^*$ не сводится к стратегии из [1] при $\beta \to 1$.

Приложение

Доказательство. [Лемма 1] Проведем доказательство по индукции для случая $s > k$. Для $n = 1$ оптимальный ответ игрока 1 на $\bar{\tau}^k$ будет $i = k + 1$. Тогда его выигрыш в игре $G_1(\bar{p})$ равен

$$h_1^s(\bar{\tau}^k) = s - \beta(k+1) - (1-\beta)k = s - k - \beta.$$

База индукции проверена. Предположим, что утверждение верно при $n \leqslant N$. При $n = N + 1$ игрок 1 имеет два разумных ответа на $\bar{\tau}^k$: ставка $i = k + 1$, что соответствует покупке акции по наименьшей возможной цене, и ставка $i = k - 1$, что соответствует продаже акции за наибольшую возможную цену. Найдем оценки выигрыша в каждом из случаев. Для $i = k + 1$ выигрыш игрока 1 не превосходит величины

$$s - k - \beta + h_N^s(\bar{\tau}^{k+1}) = \sum_{t=0}^{N} (s - k - t - \beta)^+.$$

Аналогично для $i = k - 1$ тот же выигрыш не превосходит

$$\beta k + (1-\beta)(k-1) - s + h_N^s(\bar{\tau}^{k-1}) = \sum_{t=0}^{N-2} (s - k - t - \beta)^+.$$

При $s \leqslant k$ формула для $h_n^s(\bar{\tau}^k)$ доказывается аналогично. Сходимость $h_n^s(\bar{\tau}^k)$ к $h_\infty^s(\bar{\tau}^k)$ следует из равенства $h_n^s(\bar{\tau}^k) = h_{n+1}^s(\bar{\tau}^k)$ при $n \geqslant s - k$.

Доказательство. [Теорема 1] Воспользовавшись (2), получим

$$\sum_{s \in S} p^s h_\infty^s(\bar{\tau}^j) = \big(j^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar{p})j - \\ -(2\beta - 1)\,\mathbb{E}\,\bar{p} + \mathbb{E}\,\bar{p}^2\big)/2. \tag{П.1}$$

Квадратичная функция $f(x) = x^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar{p})x$ достигает минимума при $x = \mathbb{E}\,\bar{p} - \beta + 1/2$. Отсюда при $\bar{p} \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ выражение (П.1) достигает минимума при $j = k$. Равенство (3) проверяется непосредственной подстановкой $\mathbb{E}\,\bar{p} = k - 1 + \beta + \xi$ в (П.1).

Доказательство. [Лемма 2] Проведем доказательство по индукции. Покажем, что справедливо равенство

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) = \lambda K_n(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) + (1-\lambda)K_n(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}). \tag{П.2}$$

Подставив (5) в (4), получим

$$K_1(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, j) = \sum_{i\in I,\, s\in S} q^i \frac{\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1-\lambda) q_2^i p_2^{s|i}}{q^i} a^s(i,j) =$$

$$= \lambda \sum_{i\in I,\, s\in S} q_1^i p_1^{s|i} a^s(i,j) + (1-\lambda) \sum_{i\in I, s\in S} q_2^i p_2^{s|i} a^s(i,j) =$$

$$= \lambda K_1(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, j) + (1-\lambda) K_n(\bar{p}_2, \bar{\sigma}_2, j).$$

Таким образом, утверждение справедливо при $n = 1$. Пусть утверждение имеет место при $n \leqslant N$. Тогда из (1) вытекает

$$K_{N+1}(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) = K_1(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) + \sum_{i\in I} q_i K_N(\bar{p}^i, \bar{\sigma}_c^i, \tau^i) =$$

$$= \lambda K_1(\bar{p}_1, \sigma_1, \tau) + (1-\lambda) K_1(\bar{p}_2, \sigma_2, \tau) +$$

$$+ \sum_{i\in I} q^i \left(\frac{\lambda q_1^i}{q^i} K_N(\bar{p}_1^i, \bar{\sigma}_1^i, \bar{\tau}^i) + \frac{(1-\lambda) q_2^i}{q^i} K_N(\bar{p}_2^i, \bar{\sigma}_2^i, \bar{\tau}^i) \right) =$$

$$= \lambda K_{N+1}(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) + (1-\lambda) K_{N+1}(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}).$$

Справедливость равенства (П.2) доказана. Отсюда получаем

$$L_n(\bar{p}) = \min_{\bar{\tau}\in \mathrm{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, j) \geqslant \lambda \min_{\bar{\tau}\in \mathrm{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}_1, j) +$$

$$+ (1-\lambda) \min_{\bar{\tau}\in \mathrm{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}_2, j) = \lambda L_n(\bar{p}_1) + (1-\lambda) L_n(\bar{p}_2).$$

Получили, что стратегия $\bar{\sigma}_c$ обеспечивает игроку 1 в игре $G_n(\bar{p})$ соответствующую выпуклую комбинацию гарантированных выигрышей в играх $G_n(\bar{p}_1)$ и $G_n(\bar{p}_2)$.

Доказательство. [Лемма 3] По аналогии с [3] можно показать, что

$$a^s(\hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} s - \beta k - (1-\beta) j - \beta \sigma_{k+1}^s, & j < k, \\ (s - k - \beta) \sigma_{k+1}^s, & j = k, \\ (k + \beta - s) \sigma_k^s, & j = k+1, \\ (1-\beta) k + \beta j - s + (1-\beta) \sigma_{k+1}^s, & j > k+1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Доказательство. [Теорема 2] Для $\bar{p} \in P(l, r)$ определение стратегия $\bar{\sigma}^*$ аналогично определению оптимальной стратегии игрока 1 из [3] с заменой $0, m$ на l, r соответственно.

Параметры $\bar{q}$ и $\bar{p}^i$ подобраны таким образом, чтобы выполнялись равенства $L_1(\bar{p}^k(l, r)) = 0$, $L_1(\bar{p}^{k+\beta}(l, r)) = \beta(1 - \beta)$, а апостериорные распределения принадлежали тому же множеству $P(l, r)$. Полученная система (6) является системой с трехдиагональной матрицей и решается методом прогонки аналогично тому, как это было сделано в [3].

Литература

1. ДОМАНСКИЙ В.К., КРЕПС В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2011. – Вып. 11. – С. 39-62.
2. КРЕПС В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 4. – С. 109-120.
3. ПЬЯНЫХ А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. – 2016. – №1. – С. 34—40.
4. САНДОМИРСКАЯ М.С., ДОМАНСКИЙ В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, №1. – С. 32-54.
5. AUMANN R.J., MASCHLER M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1995.
6. CHATTERJEE K., SAMUELSON W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. – 1983. – Vol. 31. №, 5. – P. 835-851.

7. DOMANSKY V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 36, № 2. – P. 241-257.

MULTISTAGE BIDDING MODEL WITH ELEMENTS OF BARGAINING AND COUNTABLE SET OF STATES

Artem Pyanykh, Lomonosov Moscow State University, Moscow, post-graduate student (artem.pyanykh@gmail.ru).

Abstract: A simplified financial market model with two players bidding for one unit of a risky asset for n consequtive stages is considered. Player 1 (an insider) is informed about the liquidation price of the asset which can take any value in $\mathbb{Z}_+$. At the same time Player 2 knows only probability distribution $\bar{\mathrm{p}}$ of the price. At each bidding stage players place integer bids. The higher bid wins and one unit of the asset is transacted to the winning player at the cost equal to a convex combination of the bids. A solution for an infinitely long game with distribution $\bar{\mathrm{p}}$ having finite variation is obtained.

Keywords: repeated games, asymmetric information, insider trading.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...
Дата опубликования ...