

Многошаговая модель биржевых торгов с элементами переговоров: расширение на случай счетного множества состояний

Артем Пьяных*

Московский университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
artem.pyanykh@gmail.com

12 апреля 2016 г.

Аннотация

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции в течение n шагов. Игрок 1 (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из \mathbb{Z}_+ . В то же время игрок 2 знает только вероятностное распределение \bar{p} цены акции. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший бóльшую ставку покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок. Получено решение игры неограниченной продолжительности для распределений \bar{p} с конечной дисперсией.

Ключевые слова: многошаговые игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

1 Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции на протяжении $n \leq \infty$ шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции $s \in S$ на весь период торгов в соответствии с вероятностным распределением

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-01-00353а.

$\bar{p} = (p^s, s \in S)$. Выбранная цена сообщается игроку 1 (инсайдеру). Игрок 2 при этом знает только вероятностное распределение \bar{p} и не осведомлен о настоящем значении цены. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший большую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. Задачей игроков является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Модель, в которой цена акции может принимать только значения 0 и m , была рассмотрена в [1]. Задача сводится к анализу антагонистической повторяющейся игры с неполной информацией, как описано в [2]. В рамках данной модели неосведомленный игрок 2 использует историю ставок игрока 1 для пересчета апостериорных вероятностей значения цены акции. Остюда, задачей игрока 1 является поиск стратегии, которая позволит ему контролировать последовательность апостериорных вероятностей таким образом, чтобы игрок 2 как можно дольше не мог догадаться о настоящем значении цены. В [1] показано, что последовательность верхних значений n -шаговых игр ограничена, что позволило определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой были найдены оптимальные стратегии игроков и значение. Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в ограниченном количестве случаев: в [3] получено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значении m ; в [4] получено решение n -шаговых игр при $m \leq 3$. Аналитическое решение игр с конечным количеством шагов в общем случае остается открытой проблемой. В работе [5] рассмотрено обобщение модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение $s \in S = \mathbb{Z}_+$. Показано, что если $\mathbb{D}\bar{p} < \infty$, то последовательность верхних значений игры ограничена, что снова позволяет определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой авторами найдено решение.

В работах [1, 5] сделка осуществляется по цене, равной наибольшей предложенной ставке. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [6], и положить цену сделки равной выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом $\beta \in [0, 1]$, т.е. если игроками были сделаны ставки $p_1 \neq p_2$, то акция будет продана по цене $\beta \max(p_1, p_2) + (1 - \beta) \min(p_1, p_2)$. Фактически в [1, 5] коэффициент β равен 1. Обобщение модели с двумя возможными значениями цены на случай произвольного β было проведено в [7]. В данной работе обобщение на случай произвольного β проведено для модели со счетным множеством возможных значений цены.

2 Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s, s \in S)$. На каждом шаге игры $t = \overline{1, n}$, $n \leq \infty$ игроки делают ставки $i_t \in I$, $j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. Выплата игроку 1 в состоянии s равна

$$a^s(i_t, j_t) = \begin{cases} (1 - \beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1 - \beta)j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

Обозначим через $\Delta(X)$ множество вероятностных распределений над X .

Определение 1. Стратегией игрока 1 является последовательность ходов $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \rightarrow \Delta(I)$. Множество стратегий игрока 1 обозначим Σ .

Определение 2. Стратегией игрока 2 является последовательность ходов $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, где $\tau_t : I^{t-1} \rightarrow \Delta(J)$. Множество стратегий игрока 2 обозначим \mathcal{T} .

То есть, игрок 1 на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка s и истории ставок. Игрок 2 в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка s , опирается только на историю ставок инсайдера.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рискованных и безрисковых активов, т.е. торги не могут закончиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Кроме того, будем считать, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

Определение 3. При использовании игроком 1 стратегии σ , игроком 2 – стратегии τ , ожидаемый выигрыш игрока 1 равен

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = \mathbb{E}_{(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})} \sum_{t=1}^n a^s(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной \bar{p} , $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$.

Заданную таким образом игру обозначим $G_n(\bar{p})$.

Определение 4. Если для некоторых $\bar{\sigma}^* \in \Sigma$, $\bar{\tau}^* \in \mathcal{T}$ выполняется

$$\sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} \inf_{\bar{\tau} \in \mathcal{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}^*) = \inf_{\bar{\tau} \in \mathcal{T}} \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = V_n(\bar{p}),$$

то игра $G_n(\bar{p})$ имеет значение $V_n(\bar{p})$, а стратегии $\bar{\sigma}^*$ и $\bar{\tau}^*$ являются оптимальными.

Следуя [5], опишем рекурсивную структуру игры $G_n(\bar{p})$. Представим стратегию игрока 1 в виде $\bar{\sigma} = (\sigma, \bar{\sigma}^i, i \in I)$, где σ — ход игрока на первом шаге, а $\bar{\sigma}^i$ — стратегия в игре продолжительности $n - 1$ в зависимости от ставки i на первом шаге. Аналогично, стратегию игрока 2 представим в виде $\bar{\tau} = (\tau, \bar{\tau}^i, i \in I)$. Далее, обозначим q^i полную вероятность, с которой игрок 1 делает ставку $i \in I$, и $\bar{q} = (q^i, i \in I)$ — соответствующее распределение. Также обозначим $p^{s|i}$ апостериорную вероятность состояния s в зависимости от ставки i игрока 1 и $\bar{p}^i = (p^{s|i}, s \in S)$ — соответствующее апостериорное распределение. Тогда для значения выигрыша будет справедлива формула

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_1(\bar{p}, \sigma, \tau) + \sum_{i \in I} q_i K_{n-1}(\bar{p}^i, \bar{\sigma}^i, \bar{\tau}^i).$$

Таким образом, определить стратегию в игре произвольной продолжительности можно, задав ход игрока для любого значения \bar{p} .

3 Оценки на выигрыш в игре $G_\infty(\bar{p})$

Следуя [5], рассмотрим следующую чистую стратегию игрока 2.

Определение 5. Стратегия $\bar{\tau}^k$ игрока 2 определяется следующим образом:

$$\tau_1^k = k, \quad t_t^k = \begin{cases} j_{t-1}, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_t, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t+1}, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

При использовании этой стратегии игрок 2 делает ставку равную k на первом шаге, а далее подражает инсайдеру. Введем обозначение $x^+ = \max(0, x)$.

Лемма 1. При применении стратегии $\bar{\tau}^k$ в игре $G_n(\bar{p})$ игрок 2 в состоянии s гарантирует себе проигрыш не более

$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (k - s - t - 1 + \beta)^+, \quad s \leq k, \quad h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (s - k - t - \beta)^+, \quad s \geq k.$$

Последовательность $\{h_n^s(\bar{\tau}^k), n = \overline{1, \infty}\}$ монотонна, ограничена сверху и сходится к $h_\infty^s(\bar{\tau}^k) = (s - k + 1 - 2\beta)(s - k)/2$.

Введем следующие обозначения для множества распределений на S с заданным математическим ожиданием

$$\Theta(x) = \{\bar{p}' \in \Delta(S) : \mathbb{E} \bar{p}' = x\}, \quad \Lambda(x, y) = \{\bar{p}' \in \Delta(S) : x < \mathbb{E} \bar{p}' \leq y\}.$$

Теорема 1. *Выигрыш в игре $G_\infty(\bar{p})$ ограничен сверху функцией*

$$H_\infty(\bar{p}) = \min_{k \in J} \sum_{s \in S} p_s h_\infty^s(\bar{\tau}^k).$$

Функция $H_\infty(\bar{p})$ является кусочно-линейной с областями недифференцируемости $\Theta(k + \beta)$ и областями линейности $\Lambda(k - 1 + \beta, s + \beta)$ при $k \in S$. Для распределений \bar{p} таких, что $\mathbb{E} \bar{p} = k - 1 + \beta + \xi$, $\xi \in (0, 1]$ ее значение равно

$$H_\infty(\bar{p}) = (\mathbb{D} \bar{p} + \beta(1 - \beta) - \xi(1 - \xi)) / 2.$$

Стратегия $\bar{\tau}^$, которая позволяет игроку 2 обеспечить данную оценку, состоит в применении $\bar{\tau}^k$ при $\bar{p} \in \Lambda(k - 1 + \beta, k + \beta)$.*

Заметим, что как и в [7], в данном случае наблюдается сдвиг областей линейности на β относительно $\mathbb{E} \bar{p}$ в сравнении с результатами в [5].

Перейдем к описанию стратегии игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш не менее $H_\infty(\bar{p})$. Пусть σ_i^s — компонента хода игрока 1, т.е. вероятность сделать ставку i в состоянии s . По правилу Байеса $\sigma_i^s = p^{s|i} q^i / p^s$. Таким образом ход игрока 1 можно определить, задав полные вероятности q^i сделать ставку i и апостериорные вероятности $p^{s|i}$ для $i \in I$. Тогда в терминах \bar{q} , \bar{p}^i одношаговый выигрыш выражается следующим образом:

$$K_1(\bar{p}, \sigma, j) = \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} q^i p^{s|i} a^s(i, j).$$

Обозначим $L_n(\bar{p})$ — минимальный выигрыш, который может гарантировать себе игрок 1 в игре $G_n(\bar{p})$.

Лемма 2. *Пусть $\bar{q}_l = (q_l^1, \dots, q_l^n)$, $\bar{p}_l^i = (p_l^{1|i}, p_l^{2|i}, \dots)$ отвечают первому ходу стратегии игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш $L_n(\bar{p}_l)$, $l = 1, 2$. Тогда для $\bar{p} = \lambda \bar{p}_1 + (1 - \lambda) \bar{p}_2$, $\lambda \in [0, 1]$, стратегия, первый ход которой задается параметрами*

$$q^i = \lambda q_1^i + (1 - \lambda) q_2^i, \quad p^{s|i} = (\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1 - \lambda) q_2^i p_2^{s|i}) / q^i,$$

гарантирует игроку 1 выигрыш $\lambda L_n(\bar{p}_1) + (1 - \lambda) L_n(\bar{p}_2)$.

Из леммы 2 следует, что для доказательства совпадения верхней и нижней оценок на выигрыш в $G_\infty(\bar{p})$ можно ограничиться рассмотрением для распределений $\bar{p} \in \Theta(k + \beta)$, $k \in S$. Как показано в [5], любое \bar{p} может быть представлено в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечным носителем. Обозначим $\bar{p}^x(l, r) \in \Theta(x)$ такое распределение с математическим

ожиданием x , которое принимает только значения l и r . Таким образом, достаточно доказать выполнение равенства $L_\infty(\bar{p}) = H_\infty(\bar{p})$ для $\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$, $k \in S$. Построим соответствующую стратегию игрока 1.

Обозначим $\hat{\sigma}_k$ ход игрока 1, состоящий в применении действий k и $k+1$. Ход $\hat{\sigma}_k$ определяется заданием q_k, q_{k+1} и \bar{p}^k, \bar{p}^{k+1} . Следующая лемма является обобщением [7, Утверждение 2].

Лемма 3. При использовании $\hat{\sigma}_k$ одношаговый выигрыш игрока 1 равен

$$K_1(\bar{p}, \hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} \mathbb{E} \bar{p} + \beta k - (1 - \beta)j - \beta q_{k+1}, & j < k, \\ (\mathbb{E} \bar{p}^{k+1} - k - \beta)q_{k+1}, & j = k, \\ (k + \beta - \mathbb{E} \bar{p}^k)q_k, & j = k, \\ (1 - \beta)k + \beta j - \mathbb{E} \bar{p} + (1 - \beta)q_{k+1}, & j > k + 1. \end{cases}$$

Распространяя результаты [7] на случай $\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$, получим следующую стратегию игрока 1 в игре $G_\infty(\bar{p})$.

Определение 6. Первый ход стратегии $\bar{\sigma}^*$ определяется следующим образом. При $\bar{p} = \bar{p}^l(l, r)$ и $\bar{p} = \bar{p}^r(l, r)$ игрок 1 использует ставки l и r , соответственно, с вероятностью 1. Для $\bar{p} \in \{\bar{p}^k(l, r), \bar{p}^{k+\beta}(l, r)\}$ игрок 1 использует $\hat{\sigma}_k$ с параметрами

$$\begin{aligned} \bar{p}^k(l, r) : \quad q^k &= \beta, \quad q^{k+1} = 1 - \beta, \quad \bar{p}^k = \bar{p}^{k-1+\beta}(l, r), \quad \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+\beta}(l, r); \\ \bar{p}^{k+\beta}(l, r) : \quad q^k &= 1 - \beta, \quad q^{k+1} = \beta, \quad \bar{p}^k = \bar{p}^k(l, r), \quad \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+1}(l, r). \end{aligned}$$

На последующих шагах игры, таким образом определенный ход применяется рекурсивно для соответствующих значений апостериорных вероятностей. Для остальных распределений \bar{p} стратегия $\bar{\sigma}^*$ определяется конструкцией леммы 2.

Следующая лемма является обобщением [7, Утверждение 5].

Теорема 2. При использовании стратегии $\bar{\sigma}^*$ в игре $G_\infty(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} \in \{\bar{p}^k(l, r), \bar{p}^{k+\beta}(l, r)\}$ гарантированный выигрыш игрока 1 удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{aligned} L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l, r)) &= \beta(1 - \beta) + (1 - \beta)L_\infty(\bar{p}^k(l, r)) + \beta L_\infty(\bar{p}^{k+1}(l, r)), \quad k \in \overline{l, r-1}, \\ L_\infty(\bar{p}^k(l, r)) &= \beta L_\infty(\bar{p}^{k-1+\beta}(l, r)) + (1 - \beta)L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l, r)), \quad k \in \overline{l+1, r-1}, \\ L_\infty(\bar{p}^l(l, r)) &= L_\infty(\bar{p}^r(l, r)) = 0. \end{aligned}$$

Ее решение дает нижнюю оценку выигрыша игрока 1 равную

$$L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l, r)) = ((r - k - \beta)(k + \beta - l) + \beta(1 - \beta))/2.$$

Так как $\mathbb{D}p^{k+\beta}(l, r) = (r - k - \beta)(k + \beta - l)$, то выражения для $H_\infty(\bar{p})$ и $L_\infty(\bar{p})$ совпадают. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Игра $G_\infty(\bar{p})$ имеет значение $V_\infty(\bar{p}) = H_\infty(\bar{p}) = L_\infty(\bar{p})$. Стратегии $\bar{\tau}^*$ и $\bar{\sigma}^*$, определенные ранее, являются оптимальными.*

В заключение, сделаем несколько замечаний. Во-первых, нужно отметить, что стратегия неосведомленного игрока является удивительно устойчивой по отношению к изменению функции выигрыша. Вероятно, ее применение может быть распространено на более широкий класс задач. В то же время, оптимальная стратегия инсайдера существенно меняется. В [5] при применении оптимальной стратегии игроком 1, апостериорные распределения образуют симметричное случайное блуждание по множествам $\Theta(s)$, $s \in S$, т.е. для $\bar{p} \in \Theta(s)$ апостериорное распределение \bar{p}' будет принадлежать либо $\Theta(k - 1)$, либо $\Theta(k + 1)$ с вероятностями равными $1/2$. В случае $\beta \in (0, 1)$ блуждание происходит по более широкому набору множеств $\{\Theta(s), \Theta(s + \beta)\}$, кроме того оно больше не является симметричным, кроме случая $\beta = 1/2$. Отметим также, что оптимальная стратегия $\bar{\sigma}^*$ не сходится к стратегии из [5] при $\beta \rightarrow 1$.

Приложение

Доказательство леммы 1. TODO	□
Доказательство теоремы 1. TODO	□
Доказательство леммы 2. TODO	□
Доказательство леммы 3. TODO	□
Доказательство теоремы 2. TODO	□

Список литературы

- [1] Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257.
- [2] Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. The MIT Press, Cambridge, London.

- [3] Сандомирская М.С., Доманский В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. 4. №1. С. 32-54.
- [4] Крепс В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 109–120.
- [5] Доманский В.К., Крепс В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011. Вып. 11. С. 39–62.
- [6] Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851.
- [7] Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 2016. №1. С. 34–40.