

# Многошаговая модель биржевых торгов с элементами переговоров: расширение на случай счетного множества состояний

Артем Пьяных\*

Московский университет им. М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
artem.pyanykh@gmail.com

9 апреля 2016 г.

## Аннотация

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции в течение  $n$  шагов. Игрок 1 (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из  $\mathbb{Z}_+$ . В то же время Игрок 2 знает только вероятностное распределение  $p$  цены акции. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший бóльшую ставку покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок. Получено решение игры неограниченной продолжительности для распределений  $p$  с конечной дисперсией.

**Ключевые слова:** многошаговые игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

## 1 Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции на протяжении  $n \leq \infty$  шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции  $s \in S$  на весь период торгов в соответствии с вероятностным распределением

---

\*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-01-00353а.

$p = (p_x, x \in S)$ . Выбранная цена сообщается Игроку 1 (инсайдеру). Игрок 2 при этом знает только вероятностное распределение  $p$  и не осведомлен о настоящем значении цены. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший большую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. Задачей игроков является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Модель, в которой цена акции может принимать только значения 0 и  $m$ , была рассмотрена в [1]. Задача сводится к анализу антагонистической повторяющейся игры с неполной информацией, как описано в [2]. В рамках данной модели неосведомленный Игрок 2 использует историю ставок Игрока 1 для пересчета апостериорных вероятностей значения цены акции. Остюда, задачей Игрока 1 является поиск стратегии, которая позволит ему контролировать последовательность апостериорных вероятностей таким образом, чтобы Игрок 2 как можно дольше не мог догадаться о настоящем значении цены. В [1] показано, что последовательность верхних значений  $n$ -шаговых игр ограничена, что позволило определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой были найдены оптимальные стратегии игроков и значение. Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в ограниченном количестве случаев: в [3] получено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значении  $m$ ; в [4] получено решение  $n$ -шаговых игр при  $m \leq 3$ . Аналитическое решение игр с конечным количеством шагов в общем случае остается открытой проблемой. В работе [5] рассмотрено обобщение модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение  $s \in S = \mathbb{Z}_+$ . Показано, что если  $\mathbb{D}p < \infty$ , то последовательность верхних значений игры ограничена, что снова позволяет определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой авторами найдено решение.

В работах [1, 5] сделка осуществляется по цене, равной наибольшей предложенной ставке. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [6], и положить цену сделки равной выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом  $\beta \in [0, 1]$ , т.е. если игроками были сделаны ставки  $p_1 \neq p_2$ , то акция будет продана по цене  $\beta \max(p_1, p_2) + (1 - \beta) \min(p_1, p_2)$ . Фактически в [1, 5] коэффициент  $\beta$  равен 1. Обобщение модели с двумя возможными значениями цены на случай произвольного  $\beta$  было проведено в [7]. В данной работе обобщение на случай произвольного  $\beta$  проведено для модели со счетным множеством возможных значений цены.

## 2 Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка  $S = \mathbb{Z}_+$ . Перед началом игры случай выбирает  $s \in S$  в соответствии с вероятностным распределением  $p = (p_x, x \in S)$ . На каждом шаге игры  $t = \overline{1, n}$ ,  $n \leq \infty$  игроки делают ставки  $i_t \in I$ ,  $j_t \in J$ , где  $I = J = \mathbb{Z}_+$ . Выплата Игроку 1 в состоянии  $s$  равна

$$a^s(i_t, j_t) = \begin{cases} (1 - \beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1 - \beta)j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

Обозначим через  $\Delta(X)$  множество вероятностных распределений над множеством  $X$ .

**Определение 1.** Стратегией Игрока 1 является последовательность ходов  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , где  $\sigma_t : S \times I^{t-1} \rightarrow \Delta(I)$ .

**Определение 2.** Стратегией Игрока 2 является последовательность ходов  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ , где  $\tau_t : I^{t-1} \rightarrow \Delta(J)$ .

То есть, Игрок 1 на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка  $s$  и истории ставок. Игрок 2 в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка  $s$ , опирается только на историю ставок инсайдера.

## Список литературы

- [1] Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257.
- [2] Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. The MIT Press, Cambridge, London.
- [3] Сандомирская М.С., Доманский В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. 4. №1. С. 32-54.
- [4] Крепс В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 109–120.

- [5] Доманский В.К., Крепс В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011. Вып. 11. С. 39—62.
- [6] Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835—851.
- [7] Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 2016. №1. С. 34—40.