Многошаговая модель биржевых торгов с элементами переговоров: расширение на случай счетного множества состояний

Артем Пьяных*
Московский университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
artem.pyanykh@gmail.com

11 апреля 2016 г.

Аннотация

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции в течение n шагов. Игрок 1 (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из $\mathbb{Z}_+$. В то же время игрок 2 знает только вероятностное распределение $\bar{p}$ цены акции. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший бо́льшую ставку покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок. Получено решение игры неограниченной продолжительности для распределений $\bar{p}$ с конечной дисперсией.

Ключевые слова: многошаговые игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

1 Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции $s \in S$ на весь период торгов в соответствии с вероятностным распределением

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проект №16-01-00353а.

$\bar{p} = (p^s,\ s \in S)$. Выбранная цена сообщается игроку 1 (инсайдеру). Игрок 2 при этом знает только вероятностное распределение $\bar{p}$ и не осведомлен о настоящем значении цены. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший большую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. Задачей игроков является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Модель, в которой цена акции может принимать только значения 0 и m, была рассмотрена в [1]. Задача сводится к анализу антагонистической повторяющейся игры с неполной информацией, как описано в [2]. В рамках данной модели неосведомленный игрок 2 использует историю ставок игрока 1 для пересчета апостериорных вероятностей значения цены акции. Остюда, задачей игрока 1 является поиск стратегии, которая позволит ему контролировать последовательность апостериорных вероятностей таким образом, чтобы игрок 2 как можно дольше не мог догадаться о настоящем значении цены. В [1] показано, что последовательность верхних значений n-шаговых игр ограничена, что позволило определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой были найдены оптимальные стратегии игроков и значение. Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в ограниченном количестве случаев: в [3] получено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значения m; в [4] получено решение n-шаговых игр при $m \leqslant 3$. Аналитическое решение игр с конечным количеством шагов в общем случае остается открытой проблемой. В работе [5] рассмотрено обобщение модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение $s \in S = \mathbb{Z}_+$. Показано, что если $\mathbb{D}\bar{p} < \infty$, то последовательность верхних значений игры ограничена, что снова позволяет определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой авторами найдено решение.

В работах [1, 5] сделка осуществляется по цене, равной наибольшей предложенной ставке. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [6], и положить цену сделки равной выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом $\beta \in [0, 1]$, т.е. если игроками были сделаны ставки $p_1 \neq p_2$, то акция будет продана по цене $\beta \max(p_1, p_2) + (1-\beta)\min(p_1, p_2)$. Фактически в [1, 5] коэффициент β равен 1. Обобщение модели с двумя возможными значениями цены на случай произвольного β было проведено в [7]. В данной работе обобщение на случай произвольного β проведено для модели со счетным множеством возможных значений цены.

2 Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s,\ s \in S)$. На каждом шаге игры $t = \overline{1, n}$, $n \leqslant \infty$ игроки делают ставки $i_t \in I$, $j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. Выплата игроку 1 в состоянии s равна

$$a^s(i_t, j_t) = \begin{cases} (1-\beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1-\beta)j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

Обозначим через $\Delta(X)$ множество вероятностных распределений над X.

Определение 1. *Стратегией игрока 1 является последовательность ходов $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$. Множество стратегий игрока 1 обозначим Σ.*

Определение 2. *Стратегией игрока 2 является последовательность ходов $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. Множество стратегий игрока 2 обозначим T.*

То есть, игрок 1 на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка s и истории ставок. Игрок 2 в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка s, опирается только на историю ставок инсайдера.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, т.е. торги не могут закончиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Кроме того, будем считать, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

Определение 3. *При использовании игроком 1 стратегии σ, игроком 2 – стратегии τ, ожидаемый выигрыш игрока 1 равен*

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = \mathbb{E}_{(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})} \sum_{t=1}^{n} a^s(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной $\bar{p}$, $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$.

Заданную таким образом игру обозначим $G_n(\bar{p})$.

Определение 4. *Если для некоторых $\bar{\sigma}^* \in \Sigma$, $\bar{\tau}^* \in \mathrm{T}$ выполняется*

$$\sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} \inf_{\bar{\tau} \in \mathrm{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}^*) = \inf_{\bar{\tau} \in \mathrm{T}} \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = V_n(\bar{p}),$$

то игра $G_n(\bar{p})$ имеет значение $V_n(\bar{p})$, а стратегии $\bar{\sigma}^*$ и $\bar{\tau}^*$ являются оптимальными.

Следуя [5], опишем рекурсивную структуру игры $G_n(\bar{p})$. Представим стратегию игрока 1 в виде $\bar{\sigma} = (\sigma, \bar{\sigma}^i, i \in I)$, где σ — ход игрока на первом шаге, а $\bar{\sigma}^i$ — стратегия в игре продолжительности $n-1$ в зависимости от ставки i на первом шаге. Аналогично, стратегию игрока 2 представим в виде $\bar{\tau} = (\tau, \bar{\tau}^i,\ i \in I)$. Далее, обозначим q_i полную вероятность, с которой игрок 1 делает ставку $i \in I$, и $\bar{q} = (q_i,\ i \in I)$ — соответствующее распределение. Также обозначим $p^{s|i}$ апостериорную вероятность состояния s в зависимости от ставки i игрока 1 и $\bar{p}^i = (p^{s|i}, s \in S)$ — соответствующее апостериорное распределение. Тогда для значения выигрыша будет справедлива формула

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_1(\bar{p}, \sigma, \tau) + \sum_{i \in I} q_i K_{n-1}(\bar{p}^i, \bar{\sigma}^i, \bar{\tau}^i).$$

Таким образом, определить стратегию в игре произвольной продолжительности можно, задав ход игрока для любого значения $\bar{p}$.

3 Оценки на выигрыш в игре $\mathbf{G}_\infty(\bar{\mathbf{p}})$

Следуя [5] рассмотрим чистую стратегию $\bar{\tau}^k$ игрока 2, определенную следующим образом:

$$\tau_1^k = k, \quad t_t^k = \begin{cases} j_{t-1}, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_t, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t+1}, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

При использовании этой стратегии игрок 2 делает ставку равную k на первом шаге, а далее подражает инсайдеру. Введем обозначение $x^+ = \max(0, x)$.

Лемма 1. *При применении стратегии $\bar{\tau}^k$ в игре $G_n(\bar{p})$ игрок 2 в состоянии s гарантирует себе проигрыш не более*

$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (k - s - t - 1 + \beta)^+,\ s \leqslant k, \quad h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (s - k - t - \beta)^+,\ s \geqslant k.$$

Последовательность $\left\{h_n^s(\bar{\tau}^k),\ n = \overline{1, \infty}\right\}$ монотонна, ограничена сверху и сходится к $h_\infty^s(\bar{\tau}^k) = (s - k + 1 - 2\beta)(s - k)/2$.

Введем следующие обозначения для множества распределений на S с заданным математическим ожиданием

$$\Theta(x) = \left\{\bar{p}' \in \Delta(S) : \mathbb{E}\,\bar{p}' = x\right\}, \quad \Lambda(x, y) = \left\{\bar{p}' \in \Delta(S) : x < \mathbb{E}\,\bar{p}' \leqslant y\right\}.$$

Теорема 1. *Выигрыш в игре $G_\infty(\bar{p})$ ограничен сверху функцией*

$$H_\infty(\bar{p}) = \min_{k \in J} \sum_{s \in S} p_s h^s_\infty(\bar{\tau}^k).$$

Функция $H_\infty(\bar{p})$ является кусочно-линейной с областями недифференцируемости $\Theta(k+\beta)$ и областями линейности $\Lambda(k-1+\beta, s+\beta)$ при $k \in S$. Для распределений $\bar{p}$ таких, что $\mathbb{E}\,\bar{p} = k-1+\beta+\xi$, $\xi \in [0,1)$ ее значение равно

$$H_\infty(\bar{p}) = \mathbb{D}\,\bar{p} + \beta(1-\beta) - \xi(1-\xi).$$

Стратегия $\bar{\tau}^*$, которая позволяет игроку 2 обеспечить данную оценку, состоит в применении $\bar{\tau}^k$ при $\bar{p} \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$.

Заметим, что как и в [7], в данном случае наблюдается сдвиг областей линейности на β относительно $\mathbb{E}\,\bar{p}$ в сравнении с результатами в [5].

Перейдем к описании стратегии игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш не менее $H_\infty(\bar{p})$. Пусть σ^s_i — компонента хода игрока 1, т.е. вероятность сделать ставку i в состоянии s. По правилу Байеса $\sigma^s_i = p^{s|i} q_i / p^s$. Таким образом ход игрока 1 можно определить, задав полные вероятности q_i сделать ставку i и апостериорные вероятности $p^{s|i}$ для $i \in I$.

Приложение

Доказательство леммы 1. TODO □

Доказательство теоремы 1. TODO □

Список литературы

[1] Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257.

[2] Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. The MIT Press, Cambridge, London.

[3] Сандомирская М.С., Доманский В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. 4. №1. С. 32-54.

[4] Крепс В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 109–120.

[5] Доманский В.К., Крепс В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011. Вып. 11. С. 39—62.

[6] Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851.

[7] Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 2016. №1. С. 34—40.