УДК 519.83
ББК 22.18

МНОГОШАГОВАЯ МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ БИРЖЕВОЙ ИГРЫ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ[1]

Пьяных А.И.[2]
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва)

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями в течение некоторой последовательности шагов. Первый игрок (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из $\mathbb{Z}_+$. В то же время второй игрок знает только вероятностное распределение $\bar{\mathrm{p}}$ цены акции и что первый игрок — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок с некоторым коэффициентом β. После каждого хода сделанные ставки становятся известны обоим игрокам. В работе получено решение повторяющейся антагонистической игры неограниченной продолжительности, отвечающей данной модели, для распределений $\bar{\mathrm{p}}$ с конечной дисперсией.

Ключевые слова: многошаговые антагонистические игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

---

[1] *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-01-00353а. Автор признателен своему научному руководителю к.ф.-м.н., доценту В.В. Морозову за помощь в написании данной статьи.*

[2] *Артем Игоревич Пьяных, аспирант (artem.pyanykh@gmail.com).*

Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка, изученная, в частности, в работах [10, 1], на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции $s \in S$ на весь период торгов в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s,\ s \in S)$. Выбранная цена сообщается первому игроку (инсайдеру). Второй игрок при этом знает только вероятностное распределение $\bar{p}$ и не осведомлен о настоящем значении цены. Второй игрок знает, что первый игрок — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший бо́льшую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. После каждого шага торгов выбранные ставки сообщаются игрокам. Задачей каждого игрока является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа купленных акций и суммы денег, полученных в результате торгов. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Впервые подобная задача была рассмотрена Б. Де Мейером и Х. Салей в [9]. В их модели цена акции может принимать два значения 0 и 1, а игроки могут делать произвольные вещественные ставки из отрезка $[0, 1]$. Эту модель мы будем называть непрерывной. В рамках такой модели торгов на финансовом рынке авторами была продемонстрирована возможность стратегического происхождения броуновского движения в эволюции цен на финансовые активы.

Позднее В.К. Доманским в [10] была исследована модель, в которой цена акции также может принимать два значения 0 и 1, но игроки могут делать ставки только из конечного множества $\{i/m, i = \overline{0, m}\},\ m \in \mathbb{N}$. Эту модель мы будем называть дискретной. Формально дискретная модель описывается повторяющейся игрой с неполной информацией (см. [7]). В работе [10] показано, что последовательность верхних значений n-шаговых игр ограничена, что позволяет определить и решить игру с бесконечным количеством шагов. Установлено, что при применении игроками оптимальных стратегий последовательность ожидаемых ликвидных цен акции образует симметричное случайное блуждание по множеству допустимых ставок с поглощением в крайних точках. В момент поглощения оценка вторым игроком ликвидной цены акции совпадает с истинным значением этой цены. В этот момент торги могут быть остановлены, так как последующий выигрыш первого игрока равен нулю.

Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в частных случаях: М.С. Сандомирской и В.К. Доманским в [6] найдено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значении m, В.Л. Крепс в [2] построено решение n-шаговых игр при $m \leqslant 3$.

В работе [1] рассмотрено обобщение дискретной модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение $s \in S = \mathbb{Z}_+$. Решение игры с бесконечным количеством шагов найдено в предположении конечности дисперсии цены акции. Авторами установлено, что в данном случае оптимальная стратегия инсайдера так же порождает симметричное случайное блуждание цен сделок.

В указанных выше работах сделка осуществляется по цене, равной наибольшей предложенной ставке. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [8], и положить цену сделки равной выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом $\beta \in [0, 1]$, т.е. если игроками были сделаны ставки $i \neq j$, то акция будет продана по цене

$$\beta \max(i, j) + (1 - \beta) \min(i, j).$$

Фактически, в [10, 1] коэффициент β равен 1. Дискретная модель с двумя возможными ценами акции и $\beta = 1/2$ рассмотрена в [4], ее обобщение на случай произвольного $\beta \in [0, 1]$ см. в [5].

В данной работе это обобщение проведено для дискретной модели со счетным множеством возможных значений цены акции. Установлено, что оптимальная стратегия инсайдера порождает случайное блуждание последовательности ликвидных цен акции, которое, однако, уже не является симметричным. Описание возникающих в рассматриваемой модели случайных блужданий дается в п. 4. Появление случайного блуждания в более общей модели подтверждает гипотезу Б. Де Мейера и Х. Салей о возможном стратегическом происхождении случайных флуктуаций цен на фондовых рынках.

Доказательства утверждений вынесены в приложение.

1. Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s,\ s \in S)$, имеющим конечную дисперсию состояния $\mathbb{D}\,\bar{p} < \infty$. Множество всевозможных таких распределений обозначим $\overline{P}$.

На каждом шаге игры $t = \overline{1,n},\ n \leqslant \infty$, игроки делают ставки $i_t \in I$, $j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. В силу того, что игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает акцию у другого по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок, выплата первому игроку в состоянии s равна

$$a^{s,\beta}(i_t, j_t) = \begin{cases} (1-\beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1-\beta) j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

На шаге t обоим игрокам достаточно принимать в расчет лишь последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_{t-1})$ действий первого игрока на предыдущих ходах. Это связано с тем, что информация, получаемая вторым игроком относительно состояния s, может передаваться лишь посредством действий первого игрока. Подробное обсуждение данного факта можно найти в [11].

Обозначим через $\Delta(X)$ совокупность всех вероятностных распределений на множестве X.

Определение 1. *Стратегией первого игрока является последовательность ходов $\overline{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$. Множество стратегий первого игрока обозначим Σ.*

Определение 2. *Стратегией второго игрока является последовательность ходов* $\bar\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, *где* $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. *Множество стратегий второго игрока обозначим* T.

Таким образом, первый игрок на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка s и истории своих ставок. Второй игрок, в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка s, опирается только на историю ставок инсайдера.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рискового и безрискового активов, т.е. торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся акции или деньги. Кроме того, предположим, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

При использовании игроками стратегий $\bar\sigma$ и $\bar\tau$ ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$K_n^\beta(\bar p, \bar\sigma, \bar\tau) = \mathbb{E}_{(\bar p, \bar\sigma, \bar\tau)} \sum_{t=1}^{n} a^{s,\beta}(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной $\bar p$, $\bar\sigma$ и $\bar\tau$ на множестве $S \times I^n \times J^n$. Заданную таким образом игру обозначим $G_n^\beta(\bar p)$.

Определение 3. *Если для некоторых* $\bar\sigma^* \in \Sigma$, $\bar\tau^* \in \mathrm{T}$ *выполняются равенства*

$$\inf_{\bar\tau \in \mathrm{T}} K_n^\beta(\bar p, \bar\sigma^*, \bar\tau) = K_n^\beta(\bar p, \bar\sigma^*, \bar\tau^*) = \sup_{\bar\sigma \in \Sigma} K_n^\beta(\bar p, \bar\sigma, \bar\tau^*) \stackrel{\mathrm{def}}{=} V_n^\beta(\bar p),$$

то говорят, что игра $G_n^\beta(\bar p)$ *имеет значение* $V_n^\beta(\bar p)$, *а стратегии* $\bar\sigma^*$ *и* $\bar\tau^*$ *называются оптимальными.*

Нижнее и верхнее значение игры $G_n^\beta(\bar p)$ обозначим соответственно

$$\underline{V}_n^\beta(\bar p) = \sup_{\bar\sigma \in \Sigma} \inf_{\bar\tau \in \mathrm{T}} K_n^\beta(\bar p, \bar\sigma, \bar\tau), \quad \overline{V}_n^\beta(\bar p) = \inf_{\bar\tau \in \mathrm{T}} \sup_{\bar\sigma \in \Sigma} K_n^\beta(\bar p, \bar\sigma, \bar\tau).$$

Данные функции являются вогнутыми на $\overline{P}$. Доказательство этого утверждения проводится аналогично [10].

Следуя [1], опишем рекурсивную структуру игры $G_n^\beta(\bar{p})$. Представим стратегию первого игрока в виде $\bar{\sigma} = (\sigma, \bar{\sigma}^i, i \in I)$, где σ — его ход на первом шаге, а $\bar{\sigma}^i$ — его стратегия в игре продолжительности $n-1$ в зависимости от ставки i, выбранной им на первом шаге. Аналогично, стратегию второго игрока представим в виде $\bar{\tau} = (\tau, \bar{\tau}^i,\ i \in I)$. Далее, обозначим q^i полную вероятность, с которой первый игрок делает ставку $i \in I$, а $\bar{q} = (q^i,\ i \in I)$ — соответствующее распределение. Также обозначим $p^{s|i}$ апостериорную вероятность состояния s в зависимости от ставки i первого игрока, и $\bar{p}^i = (p^{s|i},\ s \in S)$ — соответствующее апостериорное распределение. Тогда для функции выигрыша первого игрока в игре $G_n^\beta(\bar{p})$ справедлива формула

$$K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_1^\beta(\bar{p}, \sigma, \tau) + \sum_{i \in I} q^i K_{n-1}^\beta(\bar{p}^i, \bar{\sigma}^i, \bar{\tau}^i). \tag{1}$$

2. Оценка сверху выигрыша первого игрока в игре $\mathbf{G}_\infty^\beta(\bar{\mathbf{p}})$

Следуя [1], рассмотрим следующую чистую стратегию второго игрока $\bar{\tau}^k = (\tau_t^k,\ t = \overline{1, \infty})$:

$$\tau_1^k = k, \quad \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

Другими словами, второй игрок делает ставку равную k на первом шаге, а далее либо подражает инсайдеру, либо смещается на единицу к ставке инсайдера предыдущего шага. Положим $x^+ = \max(0, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *При применении стратегии $\bar{\tau}^k$ в игре $G_n^\beta(\bar{p})$ второй игрок в состоянии s гарантирует себе проигрыш не более*

$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{n-1} (k - s - t - 1 + \beta)^+,\ s \leqslant k, \\ \sum\limits_{t=0}^{n-1} (s - k - t - \beta)^+,\ s > k. \end{cases}$$

Для любого $s \in S$ *последовательность* $\left\{h_n^s(\bar\tau^k),\ n = \overline{1,\infty}\right\}$ *не убывает, ограничена сверху и сходится к*

(2) $$h_\infty^s(\bar\tau^k) = (s-k+1-2\beta)(s-k)/2.$$

Следующие множества распределений зададим ограничениями на математическое ожидание состояния:

$$\Theta(x) = \left\{\bar p \in \overline{P} : \mathbb{E}\,\bar p = x\right\},$$
$$\Lambda(x,y) = \left\{\bar p \in \overline{P} : x < \mathbb{E}\,\bar p \leqslant y\right\}.$$

Пусть $\bar\tau^*$ — стратегия второго игрока, состоящая в применении $\bar\tau^k$ при $\bar p \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$. Отметим, что при заданном распределении $\bar p$ выбор k зависит от значения β. Отсюда следует, что стратегия $\bar\tau^*$ также зависит от β.

Теорема 1. *При использовании вторым игроком стратегии* $\bar\tau^*$*, выигрыш первого игрока в игре* $G_\infty^\beta(\bar p)$ *ограничен сверху функцией*

$$H_\infty^\beta(\bar p) = \inf_{k\in J} \sum_{s\in S} p^s h_\infty^s(\bar\tau^k).$$

Функция $H_\infty^\beta(\bar p)$ *является кусочно-линейной вогнутой с областями линейности* $\Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ *и областями недифференцируемости* $\Theta(k+\beta)$ *при* $k \in S$*. Для распределений* $\bar p$ *с* $\mathbb{E}\,\bar p = k-1+\beta+\eta,\ \eta \in (0,1]$*, ее значение равно*

(3) $$H_\infty^\beta(\bar p) = \left(\mathbb{D}\,\bar p + \beta(1-\beta) - \eta(1-\eta)\right)/2.$$

Заметим, что в данном случае наблюдается сдвиг областей линейности на β относительно $\mathbb{E}\,\bar p$ в сравнении с областями из [1].

3. Оценка снизу выигрыша первого игрока в игре $\mathbf{G}_\infty^\beta(\bar{\mathbf{p}})$

Перейдем к описанию стратегии первого игрока, гарантирующей ему выигрыш не менее $H_\infty^\beta(\bar p)$. Пусть σ_i^s — компонента хода σ первого игрока, т.е. вероятность сделать ставку i в состоянии s. По правилу Байеса $\sigma_i^s = p^{s|i} q^i / p^s$. В частности, справедливы равенства $\sum_{s\in S} \sigma_i^s p^s = q^i,\ i \in I$. Таким образом, ход σ первого игрока можно определить, задав следующие параметры: полные вероятности q^i сделать ставку i и апостериорные вероятности $p^{s|i}$ для $i \in I$. Тогда его одношаговый выигрыш выражается следующим образом:

$$K_1^\beta(\bar{p}, \sigma, j) = \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} q^i p^{s|i} a^{s,\beta}(i, j). \tag{4}$$

Обозначим $L_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma})$ гарантированный выигрыш первого игрока, использующего стратегию $\bar{\sigma}$ в игре $G_n^\beta(\bar{p})$, т.е.

$$L_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}) = \inf_{\bar{\tau} \in \mathrm{T}} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}).$$

<u>Лемма 2.</u> *Пусть* $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \in \overline{P}$, $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2 \in \Sigma$ *— стратегии первого игрока. Тогда для* $\bar{p} = \lambda \bar{p}_1 + (1-\lambda)\bar{p}_2,\ \lambda \in [0,1]$, *найдется такая стратегия* $\bar{\sigma}_c \in \Sigma$, *что*

$$L_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c) \geqslant \lambda L_n^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1) + (1-\lambda) L_n^\beta(\bar{p}_2, \bar{\sigma}_2).$$

Обозначим e^s вырожденное вероятностное распределение с носителем в точке s. Также обозначим $\bar{p}^x(l, r) \in \Theta(x)$ распределение с математическим ожиданием x и носителем $\{l, r\}$, где $l < r$. При этом распределении вероятности реализации состояний l и r равны $(r-x)/(r-l)$ и $(x-l)/(r-l)$ соответственно, а дисперсия

$$\mathbb{D}\,\bar{p}^x(l, r) = (x-l)(r-x).$$

Как показано в [1], любое распределение $\bar{p} = (p^s,\ s \in S) \in \Theta(x)$ может быть представлено в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечными носителями следующим образом:

$$\bar{p} = \begin{cases} p^x e^x + \sum\limits_{r=x+1}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^x(l, r), & x \in S, \\ \sum\limits_{r=\lfloor x+1 \rfloor}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{\lceil x-1 \rceil} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^x(l, r), & x \notin S, \end{cases} \tag{5}$$

$$\alpha_{l,r}(\bar{p}) = (r-l) p^l p^r \Big/ \sum_{t=0}^{\lceil x-1 \rceil} p^t (x-t), \tag{6}$$

где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть x, а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое $y \geqslant x$.

Обозначим через $L^1(\{s^2\})$ банахово пространство последовательностей $(l^s,\ s\in S)$ с нормой $\|l\| = \sum_{s=0}^{\infty} s^2|l^s|$. Множества $\overline{P}$ и $\Theta(x)$ являются выпуклыми замкнутыми подмножествами $L^1(\{s^2\})$.

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{l_n\}\subset L^1(\{s^2\})$ такая, что для любых $s\in S$ и $n\geqslant 1$ верно $l_n^s\geqslant 0,\ l_n^s\leqslant l_{n+1}^s$. Тогда если существует ее сходящаяся по норме подпоследовательность $\{l_{j_n}\}$, то и сама последовательность $\{l_n\}$ сходится по норме.*

Лемма 4. *Для любого распределения $\bar{p}\in\Theta(x)$ ряд в разложении (5) сходится к $\bar{p}$ по норме.*

В силу того, что функционал $\underline{\mathrm{V}}_n^{\beta}(\bar{p})$ вогнут на $\overline{P}$ и по теореме 1 ограничен на данном множестве, то он непрерывен на $\overline{P}$ (см. [3, Теорема 1.7.1]). Отсюда и из леммы 4 следует, что для распределений $\bar{p}\in\Theta(x)$ выполнено

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{V}}_n^{\beta}(\bar{p}) \geqslant p^x\underline{\mathrm{V}}_n^{\beta}(e^x) + \displaystyle\sum_{r=x+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{x-1}\alpha_{l,r}(\bar{p})\underline{\mathrm{V}}_n^{\beta}\left(\bar{p}^x(l,r)\right), & x\in S,\\ \underline{\mathrm{V}}_n^{\beta}(\bar{p}) \geqslant \displaystyle\sum_{r=\lfloor x+1\rfloor}^{\infty}\sum_{l=0}^{\lceil x-1\rceil}\alpha_{l,r}(\bar{p})\underline{\mathrm{V}}_n^{\beta}\left(\bar{p}^x(l,r)\right), & x\notin S. \end{cases}$$

Из данных неравенств, теоремы 1 и леммы 2 следует, что для доказательства совпадения верхней и нижней оценок выигрыша в игре $G_{\infty}^{\beta}(\bar{p})$ можно ограничиться рассмотрением только распределений $\bar{p}=\bar{p}^{k+\beta}(l,r)\in\Theta(k+\beta),\ k\in S,\ l=\overline{0,k},\ r=\overline{k+1,\infty}$. Для таких распределений мы построим стратегию первого игрока $\overline{\sigma}^*$, для которой $L_{\infty}^{\beta}(\bar{p},\overline{\sigma}^*) = H_{\infty}^{\beta}(\bar{p})$. Отсюда будет следовать, что $V_{\infty}^{\beta}(\bar{p}) = H_{\infty}^{\beta}(\bar{p})$, а $\overline{\sigma}^*$ и $\overline{\tau}^*$ — оптимальные стратегии игроков в игре $G_{\infty}^{\beta}(\bar{p})$.

Обозначим $\hat{\sigma}_k$ ход первого игрока, состоящий в выборе ставки из множества $\{k,k+1\}$. Ход $\hat{\sigma}_k$ определяется заданием полных вероятностей q^k,q^{k+1} и апостериорных распределений $\bar{p}^k,\bar{p}^{k+1}$, причем $q^k+q^{k+1}=1$. Следующая лемма является обобщением утверждения 2 из [5].

Лемма 5. *При использовании $\hat{\sigma}_k$ одношаговый выигрыш первого игрока равен*

$$K_1^{\beta}(\bar{p}, \hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} \mathbb{E}\,\bar{p} - \beta k - (1-\beta)j - \beta q^{k+1}, & j < k, \\ (\mathbb{E}\,\bar{p}^{k+1} - k - \beta)q^{k+1}, & j = k, \\ (k + \beta - \mathbb{E}\,\bar{p}^{k})q^{k}, & j = k+1, \\ (1-\beta)k + \beta j - \mathbb{E}\,\bar{p} + (1-\beta)q^{k+1}, & j > k+1. \end{cases}$$

Определим стратегию $\bar{\sigma}^*$ первого игрока в игре $G_{\infty}^{\beta}(\bar{p})$. Введем множество распределений

$$P(l, r) = \left\{\bar{p}^k(l, r),\, \bar{p}^{s+\beta}(l, r),\, k = \overline{l, r}, s = \overline{l, r-1}\right\}.$$

При $\bar{p} \in P(l, r)$ первый ход стратегии $\bar{\sigma}^*$ определяется следующим образом. Если $\bar{p} = \bar{p}^l(l, r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l, r)$, то первый игрок использует ставки l и r, соответственно, с вероятностью 1. В противном случае он использует $\hat{\sigma}_k$ с параметрами из таблицы 1.

Таблица 1. Параметры стратегии $\bar{\sigma}^*$ при $\bar{p} \in P(l, r)$

$\bar{p}$	q^k	q^{k+1}	$\bar{p}^k$	$\bar{p}^{k+1}$
$\bar{p}^k(l, r)$	β	$1-\beta$	$\bar{p}^{k-1+\beta}(l, r)$	$\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$
$\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$	$1-\beta$	β	$\bar{p}^k(l, r)$	$\bar{p}^{k+1}(l, r)$

На последующих шагах игры таким образом определенный ход применяется рекурсивно для соответствующих значений апостериорных вероятностей.

Обозначим $L_n^x(\bar{\sigma}) = L_n^{\beta}(\bar{p}^x(l, r), \bar{\sigma}),\ \bar{\sigma} \in \Sigma$. Следующая теорема является обобщением утверждения 5 из [5].

Теорема 2. *Пусть $\beta \in (0, 1)$. При использовании стратегии $\bar{\sigma}^*$ в игре $G_{\infty}^{\beta}(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} \in P(l, r)$ гарантированный выигрыш первого игрока удовлетворяет следующей системе:*

(7a) $$L_{\infty}^{k}(\bar{\sigma}^*) = \beta L_{\infty}^{k-1+\beta}(\bar{\sigma}^*) + (1-\beta)L_{\infty}^{k+\beta}(\bar{\sigma}^*),\ k = \overline{l+1, r-1},$$

(7b) $$L_{\infty}^{k+\beta}(\bar{\sigma}^*) = \beta(1-\beta) + (1-\beta)L_{\infty}^{k}(\bar{\sigma}^*) + \beta L_{\infty}^{k+1}(\bar{\sigma}^*),\ k = \overline{l, r-1}.$$

$$L^l_\infty(\bar\sigma^*) = L^r_\infty(\bar\sigma^*) = 0. \tag{7c}$$

Ее решение дает нижнюю оценку выигрыша первого игрока, равную

$$L^\beta_\infty(\bar p^{k+\beta}(l,r), \bar\sigma^*) = ((r-k-\beta)(k+\beta-l) + \beta(1-\beta))/2.$$

Поскольку $\mathbb{D}\,\bar p^{k+\beta}(l,r) = (r-k-\beta)(k+\beta-l)$, а распределение $\bar p^{k+\beta}(l,r)$ удовлетворяет условию теоремы 1 с $\eta = 1$, выражения для $H^\beta_\infty(\bar p^{k+\beta}(l,r))$ и $L^\beta_\infty(\bar p^{k+\beta}(l,r), \bar\sigma^*)$ совпадают.

Для произвольного распределения $\bar p \in \Theta(k),\ k \in S$ стратегию $\bar\sigma^*$ определим следующим образом. Если реализуется состояние $s = k$, то гарантированный выигрыш первого игрока не превышает 0, и стратегия $\bar\sigma^*$ прекращает игру. Таким образом, первый игрок, следуя стратегии $\bar\sigma^*$ прекращает игру с вероятностью p^k. В противном случае игрок использует конструкцию леммы 2 для построения стратегии, соответствующей выпуклой комбинации распределений $\bar p^k(l,r)$ в разложении $\bar p$. Первый ход такой стратегии использует две ставки k и $k+1$ с полными вероятностями $(1-p^k)\beta$ и $(1-p^k)(1-\beta)$ соответственно. Апостериорные вероятностные распределения являются выпуклыми комбинациями соответствующих апостериорных двухточечных распределений и даются следующими формулами:

$$\bar p^k = \frac{1}{1-p^k} \sum_{r=k+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l,r}(\bar p) \bar p^{k-1+\beta}(l,r),$$

$$\bar p^{k+1} = \frac{1}{1-p^k} \sum_{r=k+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l,r}(\bar p) \bar p^{k+\beta}(l,r).$$

Для распределений $\bar p$ со счетным носителем сходимость данных рядов устанавливается аналогично доказательству леммы 4.

Аналогичные рассуждения справедливы и для распределений $\bar p \in \Theta(k+\beta) \cup \Lambda(k, k+\beta),\ k \in S$.

4. Решение игры $\mathbf{G}^\beta_\infty(\bar{\mathbf{p}})$

Подчеркнем, что приведенная в п. 3 стратегия инсайдера σ^* определена только при $\beta \in (0,1)$.

Нетрудно проверить справедливость следующего равенства:

$$a^{r,\beta}(i,j) = a^{l,1-\beta}(r+l-i, r+l-j).$$

Из него вытекает, что решение игры $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p}^{x}(l,r))$ сводится к решению игры $G^{1-\beta}_{\infty}(\bar{p}^{l+r-x}(l,r))$. При этом ставки, используемые в соответствующих смешанных стратегиях инсайдера, симметричны относительно точки $(l+r)/2$. Аналогичные рассуждения справедливы для игры $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$ при любом распределении $\bar{p}$.

Оптимальная стратегия $\bar{\sigma}^*$ инсайдера в игре $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$ при $\beta = 1$ найдена в [1]. Решение $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$ при $\beta = 0$ может быть получено при помощи описанной выше конструкции из решения $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$ при $\beta = 1$. Таким образом, при любом $\beta \in [0,1]$ справедлива следующая

Теорема 3. *Игра $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$ имеет значение*

$$V^{\beta}_{\infty}(\bar{p}) = H^{\beta}_{\infty}(\bar{p}) = L^{\beta}_{\infty}(\bar{p}),$$

а $\bar{\sigma}^*$ и $\bar{\tau}^*$ — оптимальные стратегии игроков.

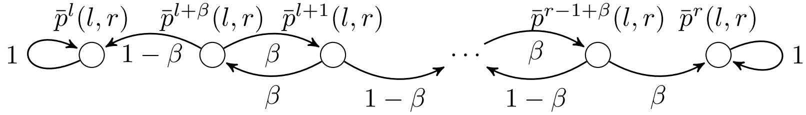

Рис. 1. Случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, порожденное $\bar{\sigma}^*$

Применение первым игроком стратегии $\bar{\sigma}^*$ при $\bar{p} \in P(l,r)$ порождает случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, изображенное на рисунке 1, которое в отличие от [1] происходит по более широкому множеству и уже не является симметричным, за исключением случая $\beta = 1/2$.

В дополнение к стратегии $\bar{\sigma}^*$ построим еще одну оптимальную стратегию $\bar{\xi}^*$ инсайдера. Введем множество распределений

$$P'(l,r) = \{\bar{p}^{l}(l,r), \bar{p}^{r}(l,r)\} \cup \left\{\bar{p}^{k+\beta}(l,r),\, k = \overline{l, r-1}\right\}.$$

При $\bar{p} \in P'(l,r)$ первый ход стратегии $\bar{\xi}^*$ определяется следующим образом. Если $\bar{p} = \bar{p}^l(l,r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l,r)$, то первый игрок использует ставки l и r, соответственно, с вероятностью 1. В противном случае он использует $\hat{\sigma}_k$ с параметрами из таблицы 2.

Таблица 2. Параметры стратегии $\bar{\xi}^*$ при $\bar{p} \in P(l,r)$

$\bar{p}$	q^k	q^{k+1}	$\bar{p}^k$	$\bar{p}^{k+1}$
$\bar{p}^{l+\beta}(l,r)$	$\frac{1}{1+\beta}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$\bar{p}^l(l,r)$	$\bar{p}^{l+1+\beta}(l,r)$
$\bar{p}^{r-1+\beta}(l,r)$	$\frac{1-\beta}{2-\beta}$	$\frac{1}{2-\beta}$	$\bar{p}^{r-2+\beta}(l,r)$	$\bar{p}^r(l,r)$
$\bar{p}^{k+\beta}(l,r)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\bar{p}^{k-1+\beta}(l,r)$	$\bar{p}^{k+1+\beta}(l,r)$

Для остальных распределений $\bar{p}$ стратегия $\bar{\xi}^*$ определяется конструкцией леммы 2.

Использование стратегии $\bar{\xi}^*$ порождает случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, изображенное на рисунке 2. Данное блуждание симметрично с вероятностями перехода в соседние состояния равными $1/2$, симметрия нарушается только в крайних и соседних к ним состояниях.

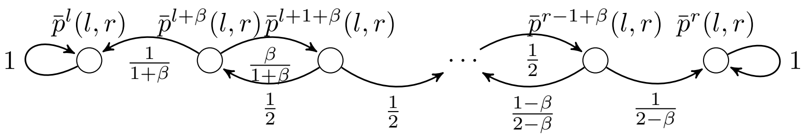

Рис. 2. Случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, порожденное $\bar{\xi}^*$

Из леммы 4 можно вывести, что

$$L_1^{l+\beta}(\bar{\xi}^*) = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad L_1^{r-1+\beta}(\bar{\xi}^*) = \frac{1-\beta}{2-\beta},$$
$$L_1^{k+\beta}(\bar{\xi}^*) = \frac{1}{2}, \ k = \overline{l+1, r-2}.$$

Отсюда при использовании стратегии $\bar{\xi}^*$ в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} \in P'(l,r)$ гарантированный выигрыш первого игрока удовлетворяет следующей системе:

(8a) $L_\infty^{l+\beta}(\bar{\xi}^*) = \dfrac{\beta}{1+\beta} + \dfrac{1}{1+\beta} L_\infty^{l}(\bar{\xi}^*) + \dfrac{\beta}{1+\beta} L_\infty^{l+1+\beta}(\bar{\xi}^*),$

(8b) $L_\infty^{r-1+\beta}(\bar{\xi}^*) = \dfrac{1-\beta}{2-\beta} + \dfrac{1-\beta}{2-\beta} L_\infty^{r-2+\beta}(\bar{\xi}^*) + \dfrac{1}{2-\beta} L_\infty^{r}(\bar{\xi}^*),$

(8c) $L_\infty^{k+\beta}(\bar{\xi}^*) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} L_\infty^{k-1+\beta}(\bar{\xi}^*) +$

$+ \dfrac{1}{2} L_\infty^{k+1+\beta}(\bar{\xi}^*),\ k = \overline{l+1, r-2},$

(8d) $L_\infty^{l}(\bar{\xi}^*) = L_\infty^{r}(\bar{\xi}^*) = 0.$

Нетрудно проверить, что подстановкой

$$H_\infty^\beta(\bar{p}^{k+\beta}(l,r)) = \frac{(r-k-\beta)(k+\beta-l) + \beta(1-\beta)}{2}$$

вместо $L_\infty^{k+\beta}(\bar{\xi}^*)$ данные равенства обращаются в тождества. Отсюда, как и для стратегии $\bar{\sigma}^*$, следует, что стратегия $\bar{\xi}^*$ является оптимальной.

Отметим, что в отличие от стратегии $\bar{\sigma}^*$ стратегия $\bar{\xi}^*$ определена при $\beta \in [0,1]$ и совпадает с оптимальной стратегией инсайдера из [1] при $\beta = 1$. При этом обе стратегии $\bar{\sigma}^*$ и $\bar{\xi}^*$ порождают существенно различные случайные блуждания апостериорных вероятностей.

Приложение

Доказательство. [Лемма 1] Проведем доказательство индукцией по n для случая $s > k$. При $n = 1$ оптимальный ответ первого игрока на $\bar{\tau}^k$ будет $i = k+1$. Тогда его выигрыш в игре $G_1^\beta(\bar{p})$ равен

$$h_1^s(\bar{\tau}^k) = s - \beta(k+1) - (1-\beta)k = s - k - \beta.$$

База индукции проверена. Предположим, что утверждение верно при $n \leqslant N$. При $n = N+1$ первый игрок имеет два разумных ответа на $\bar{\tau}^k$: ставка $i = k+1$, что соответствует покупке акции по наименьшей возможной цене, и ставка $i = k - 1$, что соответствует продаже акции за наибольшую возможную цену. Найдем оценки выигрыша в каждом из случаев. Для $i = k + 1$ выигрыш первого игрока не превосходит величины

$$s - k - \beta + h_N^s(\bar{\tau}^{k+1}) = \sum_{t=0}^{N} (s - k - t - \beta)^+.$$

Аналогично для $i = k - 1$ тот же выигрыш не превосходит

$$\beta k + (1 - \beta)(k - 1) - s + h_N^s(\bar{\tau}^{k-1}) = \sum_{t=0}^{N-2} (s - k - t - \beta)^+.$$

При $s \leqslant k$ формула для $h_n^s(\bar{\tau}^k)$ доказывается аналогично. Сходимость $h_n^s(\bar{\tau}^k)$ к $h_\infty^s(\bar{\tau}^k)$ следует из равенства $h_n^s(\bar{\tau}^k) = h_{n+1}^s(\bar{\tau}^k)$ при $n \geqslant s - k$.

<u>**Доказательство.** [Теорема 1]</u> Воспользовавшись (2), получим

$$\sum_{s \in S} p^s h_\infty^s(\bar{\tau}^j) = \big(j^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar{p})j - \qquad \text{(П.1)}$$
$$-(2\beta - 1)\,\mathbb{E}\,\bar{p} + \mathbb{E}\,\bar{p}^2\big)/2.$$

Квадратичная функция $f(x) = x^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar{p})x$ достигает минимума при $x = \mathbb{E}\,\bar{p} - \beta + 1/2$. Отсюда при $\bar{p} \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ выражение (П.1) достигает минимума при $j = k$. Равенство (3) проверяется непосредственной подстановкой $\mathbb{E}\,\bar{p} = k - 1 + \beta + \xi$ в (П.1).

<u>**Доказательство.** [Лемма 2]</u> Докажем следующее утверждение: найдется такая стратегия $\bar{\sigma}_c = (\sigma_c, \bar{\sigma}_c^i) \in \Sigma$, что при всех $\bar{\tau} \in \mathrm{T}$ справедливо неравенство

$$K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) = \lambda K_n^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) + (1 - \lambda) K_n^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}). \qquad \text{(П.2)}$$

Доказательство проведем по индукции. Пусть $\bar{q}_h = (q_h^i,\ i \in I)$ и $\bar{p}_h^i = (\bar{p}_h^{s|i},\ s \in S)$ — векторы полных и апостериорных вероятностей, соответствующие первому ходу σ_h стратегии $\bar{\sigma}_h,\ h = 1, 2$. Определим первый ход σ_c стратегии $\bar{\sigma}_c$ параметрами

$$q^i = \lambda q_1^i + (1 - \lambda) q_2^i,\ i \in I,$$

$$p^{s|i} = \left(\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1 - \lambda) q_2^i p_2^{s|i}\right) / q^i,\ i \in I,\ s \in S.$$

Подставив эти выражения в (4), для любого $j \in J$ имеем:

$$K_1^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, j) = \sum_{i\in I}\sum_{s\in S} q^i p^{s|i} a^{s,\beta}(i,j) =$$

$$\sum_{i\in I,\, s\in S} q^i \frac{(\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1-\lambda) q_2^i p_2^{s|i})}{q^i} a^{s,\beta}(i,j) =$$

$$= \lambda K_1^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, j) + (1-\lambda) K_n^\beta(\bar{p}_2, \bar{\sigma}_2, j).$$

Осредняя это равенство по произвольному $\tau \in \Delta(J)$, получим (П.2) при $n = 1$. Предположим, что утверждение имеет место при любых $n \leqslant N$. Поскольку для каждого $i \in I$

$$\bar{p}^i = \frac{\lambda q_1^i}{q^i} \bar{p}_1^i + \frac{(1-\lambda) q_2^i}{q^i} \bar{p}_2^i,$$

для $\bar{\sigma}_1^i$, $\bar{\sigma}_2^i$ найдется такая стратегия первого игрока $\bar{\sigma}_c^i$ в игре $G_N^\beta(\bar{p}^i)$, что для любой стратегии $\bar{\tau}^i$

$$K_N^\beta(\bar{p}^i, \bar{\sigma}_c^i, \tau^i) = \frac{\lambda q_1^i}{q^i} K_N^\beta(\bar{p}_1^i, \bar{\sigma}_1^i, \bar{\tau}^i) + \frac{(1-\lambda) q_2^i}{q^i} K_N^\beta(\bar{p}_2^i, \bar{\sigma}_2^i, \bar{\tau}^i).$$

В результате для $\bar{\sigma}_c = (\sigma_c, \sigma_c^i) \in \Sigma$ и любой стратегии $\bar{\tau} = (\tau, \tau^i) \in \mathrm{T}$ в игре $G_{N+1}^\beta(\bar{p})$ справедливо равенство

$$K_{N+1}^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) = K_1^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) + \sum_{i\in I} q_i K_N^\beta(\bar{p}^i, \bar{\sigma}_c^i, \tau^i) =$$

$$= \lambda K_1^\beta(\bar{p}_1, \sigma_1, \tau) + (1-\lambda) K_1^\beta(\bar{p}_2, \sigma_2, \tau) +$$

$$+ \sum_{i\in I} q^i \left(\frac{\lambda q_1^i}{q^i} K_N^\beta(\bar{p}_1^i, \bar{\sigma}_1^i, \bar{\tau}^i) + \frac{(1-\lambda) q_2^i}{q^i} K_N^\beta(\bar{p}_2^i, \bar{\sigma}_2^i, \bar{\tau}^i) \right) =$$

$$= \lambda K_{N+1}^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) + (1-\lambda) K_{N+1}^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}).$$

Утверждение доказано. Из него следует

$$L_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c) = \inf_{\bar{\tau}\in\mathrm{T}} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, j) \geqslant \lambda \min_{\bar{\tau}\in\mathrm{T}} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_1, j) +$$

$$+ (1-\lambda) \min_{\bar{\tau}\in\mathrm{T}} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_2, j) = \lambda L_n^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1) + (1-\lambda) L_n^\beta(\bar{p}_2, \bar{\sigma}_2).$$

Доказательство. [Лемма 3] Пусть подпоследовательность $\{l_{j_n}\}$ сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует M такое, что для любых $f, g \geqslant M$ выполнено $\left\|l_{j_f} - l_{j_g}\right\| \leqslant \varepsilon$. Положим N равное j_M.

Для любых $m \geqslant n \geqslant N$ можно найти q такое, что $j_q \geqslant m$. В силу покомпонентной монотонности последовательности $\{l_n\}$ выполнено неравенство

$$\|l_m - l_n\| = \sum_{s=0}^{\infty} s^2 |l_m^s - l_n^s| \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} s^2 |l_{j_q}^s - l_{j_M}^s| = \left\|l_{j_q} - l_{j_M}\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда последовательность $\{l_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства $L^1(\{s^2\})$ сходится.

Доказательство. [Лемма 4] Проведем доказательство для $x \in S$. Рассмотрим последовательность

$$s_n = p^x e^x + \sum_{r=x+1}^{n} \sum_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^x(l, r).$$

Тогда для $m \geqslant n$ справедливо

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{r=n+1}^{m} \left(p^r (r - x) \frac{\sum_{l=0}^{x-1} p^l e^l}{\sum_{t=0}^{x-1} p^t (x - t)} + p^r e^r \right) \right\| =$$
$$= \sum_{r=n+1}^{m} p^r \left(r^2 + (r - x) \frac{\sum_{t=0}^{x-1} p^t t^2}{\sum_{t=0}^{x-1} p^t (x - t)} \right)$$

Так как $\mathbb{D}\,\bar{p} < \infty$, последовательность s_n — фундаментальна. Ее сходимость к $\bar{p}$ следует из покомпонентного равенства векторов вероятностных распределений:

$$\sum_{r=x+1}^{\infty} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \frac{r - x}{r - l} = p^l, \ l = \overline{0, x-1},$$
$$\sum_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \frac{x - l}{r - l} = p^r, \ r = \overline{x+1, \infty}.$$

Отсюда в силу леммы 3 получаем, что ряд в разложении (5) сходится к $\bar{p}$ по норме.

Доказательство для нецелых значений x проводится аналогично.

Доказательство. [Лемма 5] Можно показать, что

$$a^{s,\beta}(\hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} s - \beta k - (1-\beta)j - \beta\sigma^s_{k+1}, & j < k, \\ (s - k - \beta)\sigma^s_{k+1}, & j = k, \\ (k + \beta - s)\sigma^s_k, & j = k+1, \\ (1-\beta)k + \beta j - s + (1-\beta)\sigma^s_{k+1}, & j > k+1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Доказательство. [Теорема 2] Для $\bar{p} \in P(l, r)$ стратегия $\bar{\sigma}^*$ определяется аналогично работе [5] с заменой 0 и m на l и r соответственно. Из леммы 4 нетрудно вывести, что

$$L^k_1(\bar{\sigma}^*) = 0, \quad L^{k+\beta}_1(\bar{\sigma}^*) = \beta(1-\beta).$$

Для $k = \overline{l+1, r-1}$ имеем

$$L^k_\infty(\bar{\sigma}^*) = L^k_1(\bar{\sigma}^*) + q^k L^{k-1+\beta}_\infty(\bar{\sigma}^*) + q^{k+1} L^{k+\beta}_\infty(\bar{\sigma}^*) = \\ = \beta L^{k-1+\beta}_\infty(\bar{\sigma}^*) + (1-\beta) L^{k+\beta}_\infty(\bar{\sigma}^*).$$

Аналогично для $k = \overline{l, r-1}$ получаем

$$L^{k+\beta}_\infty(\bar{\sigma}^*) = L^{k+\beta}_1(\bar{\sigma}^*) + q^k L^k_\infty(\bar{\sigma}^*) + q^{k+1} L^{k+1}_\infty(\bar{\sigma}^*) = \\ = \beta(1-\beta) + (1-\beta) L^k_\infty(\bar{\sigma}^*) + \beta L^{k+1}_\infty(\bar{\sigma}^*).$$

Полученная система (7) является системой с трехдиагональной матрицей и решается методом прогонки (см. [5]).

Литература

1. ДОМАНСКИЙ В.К., КРЕПС В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2011. – Вып. 11. – С. 39–62.

2. КРЕПС В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 4. – С. 109–120.
3. ПОЛОВИНКИН Е.С., БАЛАШОВ М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*.М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. ПЬЯНЫХ А.И. *Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2014. – Т. 6, №4. - С. 68–84.
5. ПЬЯНЫХ А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. – 2016. – №1. – С. 34—-40.
6. САНДОМИРСКАЯ М.С., ДОМАНСКИЙ В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, №1. – С. 32–54.
7. AUMANN R.J., MASCHLER M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1995.
8. CHATTERJEE K., SAMUELSON W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. – 1983. – Vol. 31, № 5. – P. 835–851.
9. DE MEYER B. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // International Journal of Game Theory. – 2002. – Vol. 31, №2. – P. 285–319.
10. DOMANSKY V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 36, № 2. – P. 241–257.
11. MERTENS J.–F., SORIN S., ZAMIR S. *Repeated games*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

MULTISTAGE MODIFIED BIDDING MODEL WITH A

COUNTABLE SET OF STATES

Artem Pyanykh, Lomonosov Moscow State University, Moscow, post-graduate student (artem.pyanykh@gmail.ru).

Abstract: A simplified financial market model with two players bidding for one unit of a risky asset for several consecutive stages is considered. First Player (an insider) is informed about the liquidation price of the asset which can take any value in $\mathbb{Z}_+$. At the same time Second Player knows only probability distribution $\bar{\mathrm{p}}$ of the price and that First Player is an insider. At each bidding stage players place integer bids. The higher bid wins and one unit of the asset is transacted to the winning player at the cost equal to a convex combination of the bids with some coefficient β. After each stage the bids are announced to the players. In this paper we obtain a solution to an infinitely long zero-sum game corresponding to the described model for distributions $\bar{\mathrm{p}}$ with finite variation.

Keywords: repeated zero-sum games, asymmetric information, insider trading.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...
Дата опубликования ...