УДК 519.83
ББК 22.18

МНОГОШАГОВАЯ МОДЕЛЬ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ И БОЛЕЕ ОБЩИМ ТОРГОВЫМ МЕХАНИЗМОМ[1]

Пьяных А.И.[2]
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоновосова, Москва)

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями в течение n шагов. Игрок 1 (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из $\mathbb{Z}_+$. В то же время игрок 2 знает только вероятностное распределение $\bar{p}$ цены акции и то, что первый игрок — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок с некоторым коэффициентом β. После каждого хода сделанные ставки оглашаются игрокам. Получено решение повторяющейся игры неограниченной продолжительности, отвечающей данной модели, для распределений $\bar{p}$ с конечной дисперсией.

Ключевые слова: многошаговые игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка, изученная, в частности, в работах [9, 1], на ко-

[1] *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-01-00353а. Автор признателен своему научному руководителю к.ф.-м.н., доценту В.В. Морозову за помощь в написании данной статьи.*

[2] *Артем Игоревич Пьяных, аспирант (artem.pyanykh@gmail.com).*

тором два игрока ведут торговлю однотипными акциями на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции $s \in S$ на весь период торгов в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s,\ s \in S)$. Выбранная цена сообщается игроку 1 (инсайдеру). Игрок 2 при этом знает только вероятностное распределение $\bar{p}$ и не осведомлен о настоящем значении цены. Также игрок 2 знает, что игрок 1 — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший бо́льшую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. После каждого шага торгов сделанные ставки оглашаются игрокам. Задачей игроков является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа купленных акций и суммы денег, полученных в результате торгов. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Впервые подобная задача была рассмотрена Б. Де Мейером в [8]. В модели, рассмотренной автором, цена акции могла принимать два значения 0 и 1, а игроки могли делать произвольные вещественные ставки из сегмента $[0, 1]$. Данную модель мы будет называть непрерывной. При помощи такой упрощенной модели торгов на финансовом рынке автором была продемонстрирована возможность стратегического происхождения броуновского движения в эволюции цен на финансовые активы — авторами была получена асимптотика случайной последовательности цен сделок, порождаемых оптимальным поведением игроков, и продемонстрировано наличие в этой асимптотике винеровской компоненты.

Позднее В.К. Доманским в [9] была исследована модель, в рамках которой цена акции, так же, могла принимать два значения 0 и 1, но игроки могли делать ставки из дискретного множества $\{i/m, i = \overline{0, m}\}, m \in \mathbb{N}$. Данную модель мы будем называть дискретной. Формально дискретная модель описывается повторяющейся игрой с неполной информацией (см. [6]). В работе [9] показано, что последовательность верхних значений n-шаговых игр ограничена, что позволяет определить и решить игру с бесконечным количеством шагов. Установлено, что в дискретном случае при применении игроками оптимальных стратегий последовательность ожидаемых ликвидных цен акции образует симметричное случайное блуждание по множеству допустимых ставок с поглощением в крайних точках. Момент поглощения представляет собой момент, когда оценка игроком 2 ликвидной цены акции совпадает с истинным значением этой цены. В этот момент торги могут быть остановлены, так как последующий выигрыш игрока 1 равен нулю.

Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в частных случаях: М.С. Сандомирской и В.К. Доманским в [5] найдено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значении m, В.Л. Крепс в [2] построено решение n-шаговых игр при $m \leqslant 3$.

В работе [1] рассмотрено обобщение дискретной модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение $s \in S = \mathbb{Z}_+$. Решение игры с бесконечным количеством шагов найдено в предположении конечности дисперсии цены акции. Авторами установлено, что в данном случае оптимальная стратегия инсайдера так же порождает симметричное случайное блуждание цен сделок. Поглощение при этом может произойти после каждого шага, начиная с нулевого. Последнее происходит в ситуации, когда выбранная перед началом игры случайным ходом цена акции совпадает со своим математическим ожиданием, что невозможно для распределений с двухточечным носителем.

В указанных выше работах сделка осуществляется по цене, равной наибольшей предложенной ставке. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [7], и положить цену сделки, равную выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом $\beta \in [0, 1]$, т.е. если игроками были сделаны ставки $i \neq j$, то акция будет продана по цене

$$\beta \max(i, j) + (1 - \beta) \min(i, j).$$

Фактически, в [9, 1] коэффициент β равен 1. Обобщение дискретной модели с двумя возможными значениями цены акции на случай $\beta = 1/2$ получено в работе [3], обобщение на случай произвольного $\beta \in [0, 1]$ построено в работе [4].

В данной работе это обобщение проведено для дискретной модели со счетным множеством возможных значений цены акции. Установлено, что оптимальная стратегия инсайдера порождает случайное блуждание последовательности ликвидных цен акции, которое, однако, уже не является симметричным и происходит по более широкому набору множеств. Более подробное описание возникающих в рассматриваемой модели случайных блужданий дается в п. ??. Появление случайного блуждания в более общей модели подтверждает гипотезу о возможном стратегическом происхождении случайных флуктуаций цен на фондовых рынках.

Доказательства утверждений вынесены в приложение.

1. Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s,\ \ s \in S)$ таким, что дисперсия состояния $\mathbb{D}\,\bar{p} < \infty$. На каждом шаге игры $t = \overline{1, n}$, $n \leqslant \infty$ игроки делают ставки $i_t \in I$, $j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. В силу того, что игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает акцию у другого по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок, выплата игроку 1 в состоянии s равна

$$a^s(i_t, j_t) = \begin{cases} (1-\beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1-\beta) j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

На шаге t обоим игрокам достаточно принимать в расчет лишь последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_{t-1})$ действий игрока 1 на предыдущих ходах. Это связано с тем, что информация, получаемая игроком 2 относительно состояния s, может передаваться лишь посредством действий игрока 1. Подробное обсуждение данного факта можно найти в [10].

Обозначим через $\Delta(X)$ совокупность всех вероятностных распределений на множестве X.

Определение 1. *Стратегией игрока 1 является последовательность ходов* $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, *где* $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$. *Множество стратегий игрока 1 обозначим* Σ.

Определение 2. *Стратегией игрока 2 является последовательность ходов* $\bar{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, *где* $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. *Множество стратегий игрока 2 обозначим* T.

Таким образом, игрок 1 на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка s и истории ставок. Игрок 2, в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка s, опирается только на историю ставок инсайдера.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, т.е. торги не могут закончиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Кроме того, будем считать, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

При использовании игроками стратегий $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$, ожидаемый выигрыш игрока 1 равен

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = \mathbb{E}_{(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})} \sum_{t=1}^{n} a^s(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной $\bar{p}$, $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$. Заданную таким образом игру обозначим $G_n(\bar{p})$.

Определение 3. *Если для некоторых* $\bar{\sigma}^* \in \Sigma$, $\bar{\tau}^* \in \mathrm{T}$ *выполняется*

$$\inf_{\bar{\tau} \in \mathrm{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}) = K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}^*) = \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}^*) = V_n(\bar{p}),$$

то игра $G_n(\bar{p})$ *имеет значение* $V_n(\bar{p})$, *а стратегии* $\bar{\sigma}^*$ *и* $\bar{\tau}^*$ *называются оптимальными.*

Следуя [1], опишем рекурсивную структуру игры $G_n(\bar{p})$. Представим стратегию игрока 1 в виде $\bar{\sigma} = (\sigma, \bar{\sigma}^i, i \in I)$, где σ

— ход игрока на первом шаге, а $\bar{\sigma}^i$ — стратегия в игре продолжительности $n-1$ в зависимости от ставки i на первом шаге. Аналогично, стратегию игрока 2 представим в виде $\bar{\tau} = (\tau, \bar{\tau}^i,\ i \in I)$. Далее, обозначим q^i полную вероятность, с которой игрок 1 делает ставку $i \in I$, и $\bar{q} = (q^i,\ i \in I)$ — соответствующее распределение. Также обозначим $p^{s|i}$ апостериорную вероятность состояния s в зависимости от ставки i игрока 1, и $\bar{p}^i = (p^{s|i},\ s \in S)$ — соответствующее апостериорное распределение. Тогда для функции выигрыша в игре $G_n(\bar{p})$ будет справедлива формула

(1) $$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_1(\bar{p}, \sigma, \tau) + \sum_{i \in I} q^i K_{n-1}(\bar{p}^i, \bar{\sigma}^i, \bar{\tau}^i).$$

2. Оценки выигрыша в игре $\mathbf{G}_\infty(\bar{\mathbf{p}})$

Следуя [1], рассмотрим следующую чистую стратегию неосведомленного игрока $\bar{\tau}^k = (\tau_t^k,\ t = \overline{1, \infty})$:

$$\tau_1^k = k, \quad \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

При использовании этой стратегии игрок 2 делает ставку равную k на первом шаге, а далее подражает инсайдеру. Обозначим $x^+ = \max(0, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *При применении стратегии $\bar{\tau}^k$ в игре $G_n(\bar{p})$ игрок 2 в состоянии s гарантирует себе проигрыш не более*

$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (k - s - t - 1 + \beta)^+,\ s \leqslant k,$$
$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (s - k - t - \beta)^+,\ s > k.$$

Последовательность $\left\{h_n^s(\bar{\tau}^k),\ n = \overline{1, \infty}\right\}$ не убывает, ограничена сверху и сходится к

(2) $$h_\infty^s(\bar{\tau}^k) = (s - k + 1 - 2\beta)(s - k)/2.$$

Введем следующие обозначения для множества распределений на S с заданным математическим ожиданием состояния:

$$\Theta(x) = \left\{\bar{p}' \in \Delta(S) : \mathbb{E}\,\bar{p}' = x\right\},$$
$$\Lambda(x,y) = \left\{\bar{p}' \in \Delta(S) : x < \mathbb{E}\,\bar{p}' \leqslant y\right\}.$$

Пусть $\bar{\tau}^*$ — стратегия игрока 2, состоящая в применении $\bar{\tau}^k$ при $\bar{p} \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$.

Теорема 1. *При использовании игроком 2 стратегии $\bar{\tau}^*$, выигрыш игрока 1 в игре $G_\infty(\bar{p})$ ограничен сверху функцией*

$$H_\infty(\bar{p}) = \min_{k\in J} \sum_{s\in S} p^s h_\infty^s(\bar{\tau}^k).$$

Функция $H_\infty(\bar{p})$ является кусочно-линейной с областями линейности $\Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ и областями недифференцируемости $\Theta(k+\beta)$ при $k \in S$. Для распределений $\bar{p}$ таких, что $\mathbb{E}\,\bar{p} = k-1+\beta+\xi,\ \xi \in (0,1]$, ее значение равно

(3) $$H_\infty(\bar{p}) = \left(\mathbb{D}\,\bar{p} + \beta(1-\beta) - \xi(1-\xi)\right)/2.$$

Заметим, что как и в [4], в данном случае наблюдается сдвиг областей линейности на β относительно $\mathbb{E}\,\bar{p}$ в сравнении с результатами из [1].

Перейдем к описанию стратегии игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш не менее $H_\infty(\bar{p})$. Пусть σ_i^s — компонента хода σ игрока 1, т.е. вероятность сделать ставку i в состоянии s. По правилу Байеса $\sigma_i^s = p^{s|i}q^i/p^s$. В частности, справедливо $\sum_{s\in S}\sigma_i^s p^s = q^i,\ i \in I$. Таким образом, ход игрока 1 можно определить, задав следующие параметры: полные вероятности q^i сделать ставку i и апостериорные вероятности $p^{s|i}$ для $i \in I$. Тогда в терминах $\bar{q}$, $\bar{p}^i$ его одношаговый выигрыш выражается следующим образом:

(4) $$K_1(\bar{p},\sigma,j) = \sum_{i\in I}\sum_{s\in S} q^i p^{s|i} a^s(i,j).$$

Обозначим через $L_n(\bar{p})$ — максимальный выигрыш, который может гарантировать себе игрок 1 в игре $G_n(\bar{p})$.

<u>Лемма 2.</u> *Пусть $\bar{p}_k$ — распределение из $\Delta(S)$, $\bar{\sigma}_k$ — стратегия игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш $L_n(\bar{p}_k)$ в игре $G_n(\bar{p}_k)$, и $\bar{q}_k = (q_k^1, \ldots, q_k^n)$, $\bar{p}_k^i = (p_k^{1|i}, p_k^{2|i}, \ldots)$ — векторы полных вероятностей ставок и апостериорных вероятностей состояния, соответствующие первому ходу стратегии $\bar{\sigma}_k$, $k = 1, 2$. Тогда для $\bar{p} = \lambda\bar{p}_1 + (1-\lambda)\bar{p}_2$, $\lambda \in [0, 1]$, стратегия $\bar{\sigma}_c$, первый ход которой задается параметрами*

$$(5) \quad q^i = \lambda q_1^i + (1-\lambda) q_2^i, \quad p^{s|i} = \left(\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1-\lambda) q_2^i p_2^{s|i}\right) / q^i,$$

гарантирует игроку 1 выигрыш $\lambda L_n(\bar{p}_1) + (1-\lambda) L_n(\bar{p}_2)$.

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что для доказательства совпадения верхней и нижней оценок выигрыша в игре $G_\infty(\bar{p})$ можно ограничиться рассмотрением распределений $\bar{p} \in \Theta(k+\beta)$, $k \in S$. Как показано в [1], любое $\bar{p}$ может быть представлено в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечным носителем. Обозначим $\bar{p}^x(l, r) \in \Theta(x)$ распределение с математическим ожиданием x и носителем $\{l, r\}$. Таким образом, достаточно доказать выполнение равенства $L_\infty(\bar{p}) = H_\infty(\bar{p})$ для $\bar{p} = \bar{p}^{k+\beta}(l, r)$, $k \in S$. Построим соответствующую стратегию игрока 1.

Обозначим $\hat{\sigma}_k$ ход игрока 1, состоящий в применении действий k и $k+1$. Ход $\hat{\sigma}_k$ определяется заданием полных вероятностей q^k, q^{k+1} и апостериорных распределений $\bar{p}^k, \bar{p}^{k+1}$, причем $q^k + q^{k+1} = 1$. Следующая лемма является обобщением утверждения 2 из [4].

<u>Лемма 3.</u> *При использовании $\hat{\sigma}_k$ одношаговый выигрыш игрока 1 равен*

$$K_1(\bar{p}, \hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} \mathbb{E}\,\bar{p} - \beta k - (1-\beta) j - \beta q^{k+1}, & j < k, \\ (\mathbb{E}\,\bar{p}^{k+1} - k - \beta) q^{k+1}, & j = k, \\ (k + \beta - \mathbb{E}\,\bar{p}^k) q^k, & j = k, \\ (1-\beta) k + \beta j - \mathbb{E}\,\bar{p} + (1-\beta) q^{k+1}, & j > k+1. \end{cases}$$

Распространяя результаты [4] на случай $\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$, определим следующую стратегию игрока 1 в игре $G_\infty(\bar{p})$. Введем обозначение

$$P(l,r) = \left\{\bar{p}^k(l,r),\, \bar{p}^{s+\beta}(l,r),\, k=\overline{l,r}, s=\overline{l,r-1}\right\}.$$

При $\bar{p} \in P(l,r)$ первый ход стратегии $\bar{\sigma}^*$ определяется следующим образом: если $\bar{p} = \bar{p}^l(l,r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l,r)$ игрок 1 использует ставки l и r, соответственно, с вероятностью 1; иначе игрок 1 использует $\hat{\sigma}_k$ с параметрами

$$\begin{array}{lll}
\bar{p}^k(l,r): & q^k = \beta, & q^{k+1} = 1-\beta, \\
 & \bar{p}^k = \bar{p}^{k-1+\beta}(l,r), & \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+\beta}(l,r); \\
\bar{p}^{k+\beta}(l,r): & q^k = 1-\beta, & q^{k+1} = \beta, \\
 & \bar{p}^k = \bar{p}^k(l,r), & \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+1}(l,r).
\end{array}$$

На последующих шагах игры таким образом определенный ход применяется рекурсивно для соответствующих значений апостериорных вероятностей. Для остальных распределений $\bar{p}$ стратегия $\bar{\sigma}^*$ определяется конструкцией леммы 2.

Обозначим $L^x_{l,r} = L_\infty(\bar{p}^x(l,r))$. Следующая теорема является обобщением утверждения 5 из [4].

Теорема 2. *При использовании стратегии $\bar{\sigma}^*$ в игре $G_\infty(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} \in P(l,r)$ гарантированный выигрыш игрока 1 удовлетворяет следующей системе:*

$$\begin{gathered}
L^{k+\beta}_{l,r} = \beta(1-\beta) + (1-\beta)L^k_{l,r} + \beta L^{k+1}_{l,r},\ k \in \overline{l,r-1}, \\
L^k_{l,r} = \beta L^{k-1+\beta}_{l,r} + (1-\beta)L^{k+\beta}_{l,r},\ k \in \overline{l+1,r-1}, \\
L^l_{l,r} = L^r_{l,r} = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Ее решение дает нижнюю оценку выигрыша игрока 1 равную

$$L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l,r)) = ((r-k-\beta)(k+\beta-l) + \beta(1-\beta))/2.$$

Так как $\mathbb{D}\, p^{k+\beta}(l,r) = (r-k-\beta)(k+\beta-l)$ получаем, что выражения для $H_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l,r))$ и $L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l,r))$ совпадают. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Игра $G_\infty(\bar{p})$ имеет значение $V_\infty(\bar{p}) = H_\infty(\bar{p}) = L_\infty(\bar{p})$. Стратегии $\bar{\tau}^*$ и $\bar{\sigma}^*$, определенные ранее, являются оптимальными.*

В заключение сделаем несколько замечаний.

Нужно отметить, что хотя описание чистой стратегии $\bar{\tau}^k$ неосведомленного игрока повторяет описание из [9], оптимальная стратегия $\bar{\tau}^*$ игрока 2 зависит от β в силу того, что от β зависит выбор конкретной $\bar{\tau}^k$ в определении $\bar{\tau}^*$.

Приложение

Доказательство. [Лемма 1] Проведем доказательство по индукции для случая $s > k$. При $n = 1$ оптимальный ответ игрока 1 на $\bar{\tau}^k$ будет $i = k + 1$. Тогда его выигрыш в игре $G_1(\bar{p})$ равен

$$h_1^s(\bar{\tau}^k) = s - \beta(k+1) - (1-\beta)k = s - k - \beta.$$

База индукции проверена. Предположим, что утверждение верно при $n \leqslant N$. При $n = N + 1$ игрок 1 имеет два разумных ответа на $\bar{\tau}^k$: ставка $i = k + 1$, что соответствует покупке акции по наименьшей возможной цене, и ставка $i = k - 1$, что соответствует продаже акции за наибольшую возможную цену. Найдем оценки выигрыша в каждом из случаев. Для $i = k + 1$ выигрыш игрока 1 не превосходит величины

$$s - k - \beta + h_N^s(\bar{\tau}^{k+1}) = \sum_{t=0}^{N} (s - k - t - \beta)^+.$$

Аналогично для $i = k - 1$ тот же выигрыш не превосходит

$$\beta k + (1-\beta)(k-1) - s + h_N^s(\bar{\tau}^{k-1}) = \sum_{t=0}^{N-2} (s - k - t - \beta)^+.$$

При $s \leqslant k$ формула для $h_n^s(\bar{\tau}^k)$ доказывается аналогично. Сходимость $h_n^s(\bar{\tau}^k)$ к $h_\infty^s(\bar{\tau}^k)$ следует из равенства $h_n^s(\bar{\tau}^k) = h_{n+1}^s(\bar{\tau}^k)$ при $n \geqslant s - k$.

Доказательство. [Теорема 1] Воспользовавшись (2), получим

$$\sum_{s \in S} p^s h_\infty^s(\bar{\tau}^j) = \big(j^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar{p})j - \\ -(2\beta - 1)\,\mathbb{E}\,\bar{p} + \mathbb{E}\,\bar{p}^2\big)/2. \qquad (П.1)$$

Квадратичная функция $f(x) = x^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar{p})x$ достигает минимума при $x = \mathbb{E}\,\bar{p} - \beta + 1/2$. Отсюда при $\bar{p} \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ выражение (П.1) достигает минимума при $j = k$. Равенство (3) проверяется непосредственной подстановкой $\mathbb{E}\,\bar{p} = k - 1 + \beta + \xi$ в (П.1).

Доказательство. [Лемма 2] Проведем доказательство по индукции. Покажем, что справедливо равенство

(П.2) $\quad K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) = \lambda K_n(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) + (1-\lambda) K_n(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}).$

Подставив (5) в (4), получим

$$K_1(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, j) = \sum_{i \in I,\, s \in S} q^i \frac{\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1-\lambda) q_2^i p_2^{s|i}}{q^i} a^s(i,j) =$$

$$= \lambda \sum_{i \in I,\, s \in S} q_1^i p_1^{s|i} a^s(i,j) + (1-\lambda) \sum_{i \in I, s \in S} q_2^i p_2^{s|i} a^s(i,j) =$$

$$= \lambda K_1(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, j) + (1-\lambda) K_n(\bar{p}_2, \bar{\sigma}_2, j).$$

Таким образом, утверждение справедливо при $n = 1$. Пусть утверждение имеет место при $n \leqslant N$. Тогда из (1) вытекает

$$K_{N+1}(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) = K_1(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) + \sum_{i \in I} q_i K_N(\bar{p}^i, \bar{\sigma}_c^i, \tau^i) =$$

$$= \lambda K_1(\bar{p}_1, \sigma_1, \tau) + (1-\lambda) K_1(\bar{p}_2, \sigma_2, \tau) +$$

$$+ \sum_{i \in I} q^i \left(\frac{\lambda q_1^i}{q^i} K_N(\bar{p}_1^i, \bar{\sigma}_1^i, \bar{\tau}^i) + \frac{(1-\lambda) q_2^i}{q^i} K_N(\bar{p}_2^i, \bar{\sigma}_2^i, \bar{\tau}^i) \right) =$$

$$= \lambda K_{N+1}(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) + (1-\lambda) K_{N+1}(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}).$$

Справедливость равенства (П.2) доказана. Отсюда получаем

$$L_n(\bar{p}) = \min_{\bar{\tau} \in \mathrm{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, j) \geqslant \lambda \min_{\bar{\tau} \in \mathrm{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}_1, j) +$$

$$+ (1-\lambda) \min_{\bar{\tau} \in \mathrm{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}_2, j) = \lambda L_n(\bar{p}_1) + (1-\lambda) L_n(\bar{p}_2).$$

Получили, что стратегия $\bar{\sigma}_c$ обеспечивает игроку 1 в игре $G_n(\bar{p})$ соответствующую выпуклую комбинацию гарантированных выигрышей в играх $G_n(\bar{p}_1)$ и $G_n(\bar{p}_2)$.

Доказательство. [Лемма 3] По аналогии с [4] можно показать, что

$$a^s(\hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} s - \beta k - (1-\beta)j - \beta\sigma^s_{k+1}, & j < k, \\ (s - k - \beta)\sigma^s_{k+1}, & j = k, \\ (k + \beta - s)\sigma^s_k, & j = k+1, \\ (1-\beta)k + \beta j - s + (1-\beta)\sigma^s_{k+1}, & j > k+1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Доказательство. [Теорема 2] Для $\bar{p} \in P(l, r)$ определение стратегия $\bar{\sigma}^*$ аналогично определению оптимальной стратегии игрока 1 из [4] с заменой $0, m$ на l, r соответственно.

Параметры $\bar{q}$ и $\bar{p}^i$ подобраны таким образом, чтобы выполнялись равенства $L_1(\bar{p}^k(l,r)) = 0$, $L_1(\bar{p}^{k+\beta}(l,r)) = \beta(1-\beta)$, а апостериорные распределения принадлежали тому же множеству $P(l,r)$. Полученная система (6) является системой с трехдиагональной матрицей и решается методом прогонки аналогично тому, как это было сделано в [4].

Литература

1. ДОМАНСКИЙ В.К., КРЕПС В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2011. – Вып. 11. – С. 39–62.
2. КРЕПС В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 4. – С. 109–120.
3. ПЬЯНЫХ А.И. *Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2014. – Т. 6, №4. - С. 68–84.
4. ПЬЯНЫХ А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. – 2016. – №1. – С. 34—-40.

5. САНДОМИРСКАЯ М.С., ДОМАНСКИЙ В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, №1. – С. 32–54.
6. AUMANN R.J., MASCHLER M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1995.
7. CHATTERJEE K., SAMUELSON W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. – 1983. – Vol. 31, № 5. – P. 835–851.
8. DE MEYER B. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // International Journal of Game Theory. – 2002. – Vol. 31, №2. – P. 285–319.
9. DOMANSKY V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 36, № 2. – P. 241–257.
10. MERTENS J.–F., SORIN S., ZAMIR S. *Repeated games*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

MULTISTAGE BIDDING MODEL WITH A COUNTABLE SET OF STATES AND MORE GENERAL TRANSACTION MECHANISM

Artem Pyanykh, Lomonosov Moscow State University, Moscow, post-graduate student (artem.pyanykh@gmail.ru).

Abstract: A simplified financial market model with two players bidding for one unit of a risky asset for n consequtive stages is considered. Player 1 (an insider) is informed about the liquidation price of the asset which can take any value in $\mathbb{Z}_+$. At the same time Player 2 knows only probability distribution $\bar{p}$ of the price and that Player 1 is an insider. At each bidding stage players place integer bids. The higher bid wins and one unit of the asset is transacted to the winning player at the cost equal to a convex combination of the bids with some coefficient β. After each stage the bids are announced to the players. A solution to an infinitely long game corresponding to the described model is obtained for distributions $\bar{p}$ with a finite variation.

Keywords: repeated games, asymmetric information, insider trading.

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...
Дата опубликования ...