Многошаговая модель биржевых торгов с элементами переговоров: расширение на случай счетного множества состояний

Артем Пьяных*
Московский университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
artem.pyanykh@gmail.com

11 апреля 2016 г.

Аннотация

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции в течение n шагов. Игрок 1 (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из $\mathbb{Z}_+$. В то же время игрок 2 знает только вероятностное распределение $\overline{p}$ цены акции. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший бо́льшую ставку покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок. Получено решение игры неограниченной продолжительности для распределений $\overline{p}$ с конечной дисперсией.

Ключевые слова: многошаговые игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

1 Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции $s \in S$ на весь период торгов в соответствии с вероятностным распределением

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проект №16-01-00353а.

$\overline{p} = (p_s,\ s \in S)$. Выбранная цена сообщается игроку 1 (инсайдеру). Игрок 2 при этом знает только вероятностное распределение $\overline{p}$ и не осведомлен о настоящем значении цены. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший большую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. Задачей игроков является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Модель, в которой цена акции может принимать только значения 0 и m, была рассмотрена в [1]. Задача сводится к анализу антагонистической повторяющейся игры с неполной информацией, как описано в [2]. В рамках данной модели неосведомленный игрок 2 использует историю ставок игрока 1 для пересчета апостериорных вероятностей значения цены акции. Остюда, задачей игрока 1 является поиск стратегии, которая позволит ему контролировать последовательность апостериорных вероятностей таким образом, чтобы игрок 2 как можно дольше не мог догадаться о настоящем значении цены. В [1] показано, что последовательность верхних значений n-шаговых игр ограничена, что позволило определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой были найдены оптимальные стратегии игроков и значение. Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в ограниченном количестве случаев: в [3] получено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значения m; в [4] получено решение n-шаговых игр при $m \leqslant 3$. Аналитическое решение игр с конечным количеством шагов в общем случае остается открытой проблемой. В работе [5] рассмотрено обобщение модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение $s \in S = \mathbb{Z}_+$. Показано, что если $\mathbb{D}\overline{p} < \infty$, то последовательность верхних значений игры ограничена, что снова позволяет определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой авторами найдено решение.

В работах [1, 5] сделка осуществляется по цене, равной наибольшей предложенной ставке. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [6], и положить цену сделки равной выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом $\beta \in [0,1]$, т.е. если игроками были сделаны ставки $p_1 \neq p_2$, то акция будет продана по цене $\beta \max(p_1,p_2) + (1-\beta)\min(p_1,p_2)$. Фактически в [1, 5] коэффициент β равен 1. Обобщение модели с двумя возможными значениями цены на случай произвольного β было проведено в [7]. В данной работе обобщение на случай произвольного β проведено для модели со счетным множеством возможных значений цены.

2 Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\overline{p} = (p_s,\ s \in S)$. На каждом шаге игры $t = \overline{1, n}$, $n \leqslant \infty$ игроки делают ставки $i_t \in I$, $j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. Выплата игроку 1 в состоянии s равна

$$a^s(i_t, j_t) = \begin{cases} (1-\beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1-\beta) j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

Обозначим через $\Delta(X)$ множество вероятностных распределений над X.

Определение 1. *Стратегией игрока 1 является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$. Множество стратегий игрока 1 обозначим Σ.*

Определение 2. *Стратегией игрока 2 является последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. Множество стратегий игрока 2 обозначим T.*

То есть, игрок 1 на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка s и истории ставок. Игрок 2 в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка s, опирается только на историю ставок инсайдера.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, т.е. торги не могут закончиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Кроме того, будем считать, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

Определение 3. *При использовании игроком 1 стратегии σ, игроком 2 – стратегии τ, ожидаемый выигрыш игрока 1 равен*

$$K_n(\overline{p}, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{(\overline{p}, \sigma, \tau)} \sum_{t=1}^{n} a^s(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной $\overline{p}$, σ и τ.

Заданную таким образом игру обозначим $G_n(\overline{p})$.

Определение 4. *Если для некоторых $\sigma^* \in \Sigma$, $\tau^* \in \mathrm{T}$ выполняется*

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \inf_{\tau \in \mathrm{T}} K_n(\overline{p}, \sigma, \tau) = K_n(\overline{p}, \sigma^*, \tau^*) = \inf_{\tau \in \mathrm{T}} \sup_{\sigma \in \Sigma} K_n(\overline{p}, \sigma, \tau) = V_n(\overline{p}),$$

то игра $G_n(\overline{p})$ имеет значение $V_n(\overline{p})$, а стратегии σ^* и τ^* являются оптимальными.

Следуя [5], опишем рекурсивную структуру игры $G_n(\overline{p})$. Представим стратегию игрока 1 в виде $\sigma = (\sigma_1, \sigma^i, i \in I)$, где σ_1 — ход игрока на первом шаге, а σ^i — стратегия в игре продолжительности $n-1$ в зависимости от ставки i на первом шаге. Аналогично, стратегию игрока 2 представим в виде $\tau = (\tau_1, \tau^i,\ i \in I)$. Далее, обозначим q_i полную вероятность, с которой игрок 1 делает ставку $i \in I$, и $\overline{q} = (q_i,\ i \in I)$ — соответствующее распределение. Также обозначим p_s^i апостериорную вероятность состояния s в зависимости от ставки i игрока 1 и $\overline{p}^i = (p_s^i, s \in S)$ — соответствующее апостериорное распределение. Тогда для значения выигрыша будет справедлива формула

$$K_n(\overline{p}, \sigma, \tau) = K_1(\overline{p}, \sigma_1, \tau_1) + \sum_{i \in I} q_i K_{n-1}(\overline{p}^i, \sigma^i, \tau^i).$$

Таким образом, определить стратегию в игре произвольной продолжительности можно, задав ход игрока для любого значения $\overline{p}$.

3 Оценка выигрыша сверху в игре $\mathrm{G}_\infty(\overline{\mathrm{p}})$

Список литературы

[1] Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257.

[2] Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. The MIT Press, Cambridge, London.

[3] Сандомирская М.С., Доманский В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. 4. №1. С. 32-54.

[4] Крепс В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 109–120.

[5] Доманский В.К., Крепс В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011. Вып. 11. С. 39—62.

[6] Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851.

[7] Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 2016. №1. С. 34—40.