УДК 519.83
ББК 22.18

МНОГОШАГОВАЯ МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ БИРЖЕВОЙ ИГРЫ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ[1]

Пьяных А.И.[2]
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоновосова, Москва)

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями в течение некоторой последовательности шагов. Первый игрок (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из $\mathbb{Z}_+$. В то же время второй игрок знает только вероятностное распределение $\bar{\mathrm{p}}$ цены акции и что первый игрок — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший бо́льшую ставку, покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок с некоторым коэффициентом β. После каждого хода сделанные ставки становятся известными обоим игрокам. В работе получено решение повторяющейся антигонистической игры неограниченной продолжительности, отвечающей данной модели, для распределений $\bar{\mathrm{p}}$ с конечной дисперсией.

Ключевые слова: многошаговые антагонистические игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

[1] *Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-01-00353а. Автор признателен своему научному руководителю к.ф.-м.н., доценту В.В. Морозову за помощь в написании данной статьи.*

[2] *Артем Игоревич Пьяных, аспирант (artem.pyanykh@gmail.com).*

Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка, изученная, в частности, в работах [9, 1], на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции $s \in S$ на весь период торгов в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s,\ s \in S)$. Выбранная цена сообщается первому игроку (инсайдеру). Второй игрок при этом знает только вероятностное распределение $\bar{p}$ и не осведомлен о настоящем значении цены. Также второй игрок знает, что первый игрок — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший бо́льшую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. После каждого шага торгов выбранные ставки сообщаются игрокам. Задачей каждого игрока является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа купленных акций и суммы денег, полученных в результате торгов. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Впервые подобная задача была рассмотрена Б. Де Мейером и Х. Салей в [8]. В их модели цена акции может принимать два значения 0 и 1, а игроки могут делать произвольные вещественные ставки из отрезка $[0, 1]$. Данную модель мы будем называть непрерывной. В рамках такой модели торгов на финансовом рынке авторами была продемонстрирована возможность стратегического происхождения броуновского движения в эволюции цен на финансовые активы.

Позднее В.К. Доманским в [9] была исследована модель, в рамках которой цена акции также может принимать два значения 0 и 1, но игроки могут делать ставки только из конечного множества $\{i/m, i = \overline{0, m}\},\ m \in \mathbb{N}$. Данную модель мы будем называть дискретной. Формально дискретная модель описывается повторяющейся игрой с неполной информацией (см. [6]). В работе [9] показано, что последовательность верхних значений n-шаговых игр ограничена, что позволяет определить и решить игру с бесконечным количеством шагов. Установлено, что при применении игроками оптимальных стратегий последовательность ожидаемых ликвидных цен акции образует симметричное случайное блуждание по множеству допустимых ставок с поглощением в крайних точках. В момент поглощения оценка вторым игроком ликвидной цены акции совпадает с истинным значением этой цены. В этот момент торги могут быть остановлены, так как последующий выигрыш первого игрока равен нулю.

Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в частных случаях: М.С. Сандомирской и В.К. Доманским в [5] найдено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значении m, В.Л. Крепс в [2] построено решение n-шаговых игр при $m \leqslant 3$.

В работе [1] рассмотрено обобщение дискретной модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение $s \in S = \mathbb{Z}_+$. Решение игры с бесконечным количеством шагов найдено в предположении конечности дисперсии цены акции. Авторами установлено, что в данном случае оптимальная стратегия инсайдера так же порождает симметричное случайное блуждание цен сделок.

В указанных выше работах сделка осуществляется по цене, равной наибольшей предложенной ставке. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [7], и положить цену сделки равной выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом $\beta \in [0, 1]$, т.е. если игроками были сделаны ставки $i \neq j$, то акция будет продана по цене

$$\beta \max(i, j) + (1 - \beta) \min(i, j).$$

Фактически, в [9, 1] коэффициент β равен 1. Обобщение дискретной модели с двумя возможными значениями цены акции на случай $\beta = 1/2$ получено в [3], обобщение на случай произвольного $\beta \in [0, 1]$ построено в [4].

В данной работе это обобщение проведено для дискретной модели со счетным множеством возможных значений цены акции. Установлено, что оптимальная стратегия инсайдера порождает случайное блуждание последовательности ликвидных цен акции, которое, однако, уже не является симметричным. Описание возникающих в рассматриваемой модели случайных блужданий дается в п. 4. Появление случайного блуждания в более общей модели подтверждает гипотезу Б. Де Мейера и Х. Салей о возможном стратегическом происхождении случайных флуктуаций цен на фондовых рынках.

Доказательства утверждений вынесены в приложение.

1. Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p^s,\ s \in S)$ таким, что дисперсия состояния $\mathbb{D}\,\bar{p} < \infty$. На каждом шаге игры $t = \overline{1,n},\ n \leqslant \infty$ игроки делают ставки $i_t \in I$, $j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. В силу того, что игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает акцию у другого по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок, выплата первому игроку в состоянии s равна

$$a^{s,\beta}(i_t, j_t) = \begin{cases} (1-\beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1-\beta) j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

На шаге t обоим игрокам достаточно принимать в расчет лишь последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_{t-1})$ действий первого игрока на предыдущих ходах. Это связано с тем, что информация, получаемая вторым игроком относительно состояния s, может передаваться лишь посредством действий первого игрока. Подробное обсуждение данного факта можно найти в [10].

Обозначим через $\Delta(X)$ совокупность всех вероятностных распределений на множестве X.

Определение 1. *Стратегией первого игрока является последовательность ходов* $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$*, где* $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to$

$\Delta(I)$. Множество стратегий первого игрока обозначим Σ.

Определение 2. *Стратегией второго игрока является последовательность ходов $\bar{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. Множество стратегий второго игрока обозначим* T.

Таким образом, первый игрок на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка s и истории ставок. Второй игрок, в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка s, опирается только на историю ставок инсайдера.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, т.е. торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Кроме того, будем считать, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

При использовании игроками стратегий $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$, ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = \mathbb{E}_{(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})} \sum_{t=1}^{n} a^{s,\beta}(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной $\bar{p}$, $\bar{\sigma}$ и $\bar{\tau}$. Заданную таким образом игру обозначим $G_n^\beta(\bar{p})$.

Определение 3. *Если для некоторых $\bar{\sigma}^* \in \Sigma$, $\bar{\tau}^* \in \mathrm{T}$ выполняется*

$$\inf_{\bar{\tau} \in \mathrm{T}} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}) = K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}^*) = \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}^*) = V_n^\beta(\bar{p}),$$

то игра $G_n^\beta(\bar{p})$ имеет значение $V_n^\beta(\bar{p})$, а стратегии $\bar{\sigma}^*$ и $\bar{\tau}^*$ называются оптимальными.

Следуя [1], опишем рекурсивную структуру игры $G_n^\beta(\bar{p})$. Представим стратегию первого игрока в виде $\bar{\sigma} = (\sigma, \bar{\sigma}^i, i \in I)$, где σ — ход игрока на первом шаге, а $\bar{\sigma}^i$ — стратегия в игре продолжительности $n-1$ в зависимости от ставки i на первом шаге. Аналогично, стратегию второго игрока представим в виде $\bar{\tau} = (\tau, \bar{\tau}^i,\ i \in I)$. Далее, обозначим q^i полную вероятность, с которой первый игрок делает ставку $i \in I$, и $\bar{q} = (q^i,\ i \in I)$ – соответствующее распределение. Также обозначим $p^{s|i}$ апостериорную вероятность состояния s в зависимости от ставки i первого игрока, и $\bar{p}^i = (p^{s|i},\ s \in S)$ – соответствующее апостериорное распределение. Тогда для функции выигрыша в игре $G_n^\beta(\bar{p})$ будет справедлива формула

$$K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_1^\beta(\bar{p}, \sigma, \tau) + \sum_{i \in I} q^i K_{n-1}^\beta(\bar{p}^i, \bar{\sigma}^i, \bar{\tau}^i). \tag{1}$$

2. Оценка сверху выигрыша в игре $\mathbf{G}_\infty^\beta(\bar{\mathbf{p}})$

Следуя [1], рассмотрим следующую чистую стратегию неосведомленного игрока $\bar{\tau}^k = (\tau_t^k,\ t = \overline{1, \infty})$:

$$\tau_1^k = k, \quad \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

При использовании этой стратегии второй игрок делает ставку равную k на первом шаге, а далее подражает инсайдеру. Введем обозначение $x^+ = \max(0, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *При применении стратегии $\bar{\tau}^k$ в игре $G_n^\beta(\bar{p})$ второй игрок в состоянии s гарантирует себе проигрыш не более*

$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (k - s - t - 1 + \beta)^+,\ s \leqslant k,$$

$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (s - k - t - \beta)^+,\ s > k.$$

Последовательность $\left\{h_n^s(\bar{\tau}^k),\ n = \overline{1, \infty}\right\}$ *не убывает, ограничена сверху и сходится к*

$$h_\infty^s(\bar{\tau}^k) = (s - k + 1 - 2\beta)(s - k)/2. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения для множества распределений на S с заданным математическим ожиданием состояния:

$$\Theta(x) = \left\{\bar{p}' \in \Delta(S) : \mathbb{E}\,\bar{p}' = x\right\},$$
$$\Lambda(x,y) = \left\{\bar{p}' \in \Delta(S) : x < \mathbb{E}\,\bar{p}' \leqslant y\right\}.$$

Пусть $\bar{\tau}^*$ — стратегия второго игрока, состоящая в применении $\bar{\tau}^k$ при $\bar{p} \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$.

Теорема 1. *При использовании вторым игроком стратегии $\bar{\tau}^*$, выигрыш первого игрока в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ ограничен сверху функцией*

$$H_\infty^\beta(\bar{p}) = \min_{k \in J} \sum_{s \in S} p^s h_\infty^s(\bar{\tau}^k).$$

Функция $H_\infty^\beta(\bar{p})$ является кусочно-линейной с областями линейности $\Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ и областями недифференцируемости $\Theta(k+\beta)$ при $k \in S$. Для распределений $\bar{p}$ таких, что $\mathbb{E}\,\bar{p} = k-1+\beta+\xi,\ \xi \in (0,1]$, ее значение равно

$$H_\infty^\beta(\bar{p}) = \left(\mathbb{D}\,\bar{p} + \beta(1-\beta) - \xi(1-\xi)\right)/2. \tag{3}$$

Заметим, что как и в [4], в данном случае наблюдается сдвиг областей линейности на β относительно $\mathbb{E}\,\bar{p}$ в сравнении с результатами из [1]. Кроме того, хотя описание чистой стратегии $\bar{\tau}^k$ неосведомленного игрока повторяет описание из [9], стратегия $\bar{\tau}^*$ второго игрока зависит от β в силу того, что от β зависит выбор конкретной $\bar{\tau}^k$ в определении $\bar{\tau}^*$.

3. Оценка снизу выигрыша в игре $\mathrm{G}_\infty^\beta(\bar{\mathrm{p}})$

Перейдем к описанию стратегии первого игрока, которая гарантирует ему выигрыш не менее $H_\infty^\beta(\bar{p})$. Пусть σ_i^s — компонента хода σ первого игрока, т.е. вероятность сделать ставку i в состоянии s. По правилу Байеса $\sigma_i^s = p^{s|i}q^i/p^s$. В частности, справедливо $\sum_{s\in S} \sigma_i^s p^s = q^i,\ i \in I$. Таким образом, ход первого игрока можно определить, задав следующие параметры: полные вероятности q^i сделать ставку i и апостериорные вероятности $p^{s|i}$ для

$i \in I$. Тогда в терминах $\bar{q}$, $\bar{p}^i$ его одношаговый выигрыш выражается следующим образом:

$$K_1^\beta(\bar{p}, \sigma, j) = \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} q^i p^{s|i} a^{s,\beta}(i, j). \tag{4}$$

Обозначим через $L_n^\beta(\bar{p})$ — максимальный выигрыш, который может гарантировать себе первый игрок в игре $G_n^\beta(\bar{p})$.

Лемма 2. *Пусть $\bar{p}_k$ — распределение из $\Delta(S)$, $\bar{\sigma}_k$ — стратегия первого игрока, которая гарантирует ему выигрыш $L_n^\beta(\bar{p}_k)$ в игре $G_n^\beta(\bar{p}_k)$, и $\bar{q}_k = (q_k^1, \ldots, q_k^n)$, $\bar{p}_k^i = (p_k^{1|i}, p_k^{2|i}, \ldots)$ — векторы полных вероятностей ставок и апостериорных вероятностей состояния, соответствующие первому ходу стратегии $\bar{\sigma}_k$, $k = 1, 2$. Тогда для $\bar{p} = \lambda\bar{p}_1 + (1-\lambda)\bar{p}_2$, $\lambda \in [0, 1]$, стратегия $\bar{\sigma}_c$, первый ход которой задается параметрами*

$$q^i = \lambda q_1^i + (1-\lambda)q_2^i, \quad p^{s|i} = \left(\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1-\lambda) q_2^i p_2^{s|i}\right) / q^i, \tag{5}$$

гарантирует первому игроку выигрыш $\lambda L_n^\beta(\bar{p}_1) + (1-\lambda) L_n^\beta(\bar{p}_2)$.

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что для доказательства совпадения верхней и нижней оценок выигрыша в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ можно ограничиться рассмотрением только распределений $\bar{p} \in \Theta(k+\beta)$, $k \in S$. Как показано в [1], любое $\bar{p}$ может быть представлено в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечным носителем. Обозначим $\bar{p}^x(l, r) \in \Theta(x)$ распределение с математическим ожиданием x и носителем $\{l, r\}$. Таким образом, достаточно доказать выполнение равенства $L_\infty^\beta(\bar{p}) = H_\infty^\beta(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} = \bar{p}^{k+\beta}(l, r)$, $k \in S$. Построим соответствующую стратегию первого игрока.

Обозначим $\hat{\sigma}_k$ ход первого игрока, состоящий в применении действий k и $k+1$. Ход $\hat{\sigma}_k$ определяется заданием полных вероятностей q^k, q^{k+1} и апостериорных распределений $\bar{p}^k, \bar{p}^{k+1}$, причем $q^k + q^{k+1} = 1$. Следующая лемма является обобщением утверждения 2 из [4].

Лемма 3. *При использовании $\hat{\sigma}_k$ одношаговый выигрыш пер-*

вого игрока равен

$$K_1^\beta(\bar p, \hat\sigma_k, j) = \begin{cases} \mathbb{E}\,\bar p - \beta k - (1-\beta)j - \beta q^{k+1}, & j < k, \\ (\mathbb{E}\,\bar p^{k+1} - k - \beta)q^{k+1}, & j = k, \\ (k + \beta - \mathbb{E}\,\bar p^k)q^k, & j = k+1, \\ (1-\beta)k + \beta j - \mathbb{E}\,\bar p + (1-\beta)q^{k+1}, & j > k+1. \end{cases}$$

Распространяя результаты [4] на случай $\bar p^{k+\beta}(l,r)$, определим следующую стратегию первого игрока в игре $G_\infty^\beta(\bar p)$. Введем обозначение

$$P(l,r) = \left\{\bar p^k(l,r),\, \bar p^{s+\beta}(l,r),\, k = \overline{l,r}, s = \overline{l, r-1}\right\}.$$

При $\bar p \in P(l,r)$ первый ход стратегии $\bar\sigma^*$ определяется следующим образом: если $\bar p = \bar p^l(l,r)$ или $\bar p = \bar p^r(l,r)$ первый игрок использует ставки l и r, соответственно, с вероятностью 1; иначе он использует $\hat\sigma_k$ с параметрами

$$(6)\qquad \begin{array}{lll} \bar p^k(l,r): & q^k = \beta, & q^{k+1} = 1-\beta, \\ & \bar p^k = \bar p^{k-1+\beta}(l,r), & \bar p^{k+1} = \bar p^{k+\beta}(l,r); \\ \bar p^{k+\beta}(l,r): & q^k = 1-\beta, & q^{k+1} = \beta, \\ & \bar p^k = \bar p^k(l,r), & \bar p^{k+1} = \bar p^{k+1}(l,r). \end{array}$$

На последующих шагах игры таким образом определенный ход применяется рекурсивно для соответствующих значений апостериорных вероятностей. Для остальных распределений $\bar p$ стратегия $\bar\sigma^*$ определяется конструкцией леммы 2.

Обозначим $L_{l,r}^x = L_\infty^\beta(\bar p^x(l,r))$. Следующая теорема является обобщением утверждения 5 из [4].

Теорема 2. *При использовании стратегии $\bar\sigma^*$ в игре $G_\infty^\beta(\bar p)$ для распределения $\bar p \in P(l,r)$ гарантированный выигрыш первого игрока удовлетворяет следующей системе:*

$$(7)\qquad \begin{gathered} L_{l,r}^{k+\beta} = \beta(1-\beta) + (1-\beta)L_{l,r}^k + \beta L_{l,r}^{k+1},\ k \in \overline{l, r-1}, \\ L_{l,r}^k = \beta L_{l,r}^{k-1+\beta} + (1-\beta)L_{l,r}^{k+\beta},\ k \in \overline{l+1, r-1}, \\ L_{l,r}^l = L_{l,r}^r = 0. \end{gathered}$$

Ее решение дает нижнюю оценку выигрыша первого игрока равную

$$L^{\beta}_{\infty}(\bar{p}^{k+\beta}(l,r)) = ((r-k-\beta)(k+\beta-l)+\beta(1-\beta))/2.$$

В силу справедливости равенства

$$\mathbb{D}\, p^{k+\beta}(l,r) = (r-k-\beta)(k+\beta-l)$$

получаем, что выражения для $H^{\beta}_{\infty}(\bar{p}^{k+\beta}(l,r))$ и $L^{\beta}_{\infty}(\bar{p}^{k+\beta}(l,r))$ совпадают.

4. Решение игры $\mathbf{G}^{\beta}_{\infty}(\mathbf{p})$

Отметим, что приведенная в п. 3 стратегия инсайдера σ^* определена только при $\beta \in (0,1)$.

Нетрудно проверить справедливость следующего равенства:

(8) $$a^{r,\beta}(i,j) = a^{l,1-\beta}(r+l-i, r+l-j).$$

Из (8) видно, что решение игры $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p}^{x}(l,r))$ сводится к решению игры $G^{1-\beta}_{\infty}(\bar{p}^{l+r-x}(l,r))$. При этом ставки, используемые в соответствующих смешанных стратегиях инсайдера, симметричны относительно $(l+r)/2$. Аналогичные рассуждения справедливы для $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$ при любом $\bar{p}$.

Оптимальная стратегия $\bar{\sigma}^*$ инсайдера в игре $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$ при $\beta = 1$ приведена в [1]. Решение $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$ при $\beta = 0$ может быть получено при помощи описанной выше конструкции. Таким образом, при любом $\beta \in [0,1]$ справедлива следующая

Теорема 3. *Игра $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$ имеет значение*

$$V^{\beta}_{\infty}(\bar{p}) = H^{\beta}_{\infty}(\bar{p}) = L^{\beta}_{\infty}(\bar{p}).$$

Стратегии $\bar{\tau}^*$ и $\bar{\sigma}^*$, определенные ранее, являются оптимальными.

Использование первым игроком стратегии $\bar{\sigma}^*$ порождает случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, изображенное на рисунке 1, которое в отличие от [1] происходит по более широкому множеству и уже не является симметричным, кроме случая $\beta = 1/2$.

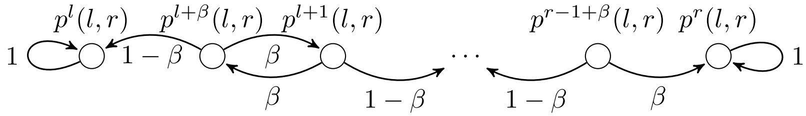

Рис. 1. Случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, порожденное $\overline{\sigma}^*$

В дополнение к стратегии, определенной выражением (6), приведем еще одну оптимальную стратегию инсайдера. Введем обозначение

$$P'(l,r) = \{\bar{p}^l(l,r), \bar{p}^r(l,r)\} \cup \left\{\bar{p}^{k+\beta}(l,r),\, k = \overline{l, r-1}\right\}.$$

При $\bar{p} \in P'(l,r)$ первый ход стратегии $\bar{\xi}^*$ определяется следующим образом: если $\bar{p} = \bar{p}^l(l,r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l,r)$ первый игрок использует ставки l и r, соответственно, с вероятностью 1; иначе он использует $\hat{\sigma}_k$ с параметрами

$$\begin{array}{llll}
\bar{p}^{l+\beta}(l,r): & q^l = \dfrac{1}{1+\beta}, & q^{l+1} = \dfrac{\beta}{1+\beta}, \\
& \bar{p}^l = \bar{p}^l(l,r), & \bar{p}^{l+1} = \bar{p}^{l+1+\beta}(l,r); \\
\bar{p}^{r-1+\beta}(l,r): & q^{r-1} = \dfrac{1-\beta}{2-\beta}, & q^r = \dfrac{1}{2-\beta}, \\
& \bar{p}^{r-1} = \bar{p}^{r-1}(l,r), & \bar{p}^r = \bar{p}^r(l,r); \\
\bar{p}^{k+\beta}(l,r): & q^k = \dfrac{1}{2}, & q^{k+1} = \dfrac{1}{2}, \\
& \bar{p}^k = \bar{p}^{k-1+\beta}(l,r), & \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+1+\beta}(l,r).
\end{array} \tag{9}$$

Для остальных распределений $\bar{p}$ стратегия $\bar{\xi}^*$ так же определяется конструкцией леммы 2.

Использование стратегии $\bar{\xi}^*$ порождает случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, изображенное на рисунке 2. Данное случайное блуждание симметрично с вероятностями перехода в соседние состояния равными $1/2$, симметрия нарушается только на краях.

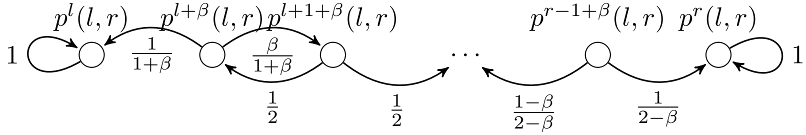

Рис. 2. Случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, порожденное $\bar{\xi}^*$

При использовании стратегии $\bar{\xi}^*$ в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} \in P(l,r)$ гарантированный выигрыш первого игрока удовлетворяет следующей системе:

$$
\begin{aligned}
L_{l,r}^{k+\beta} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}L_{l,r}^{k} + \frac{1}{2}L_{l,r}^{k+1}, \ k \in \overline{l+1, r-2}, \\
L_{l,r}^{l+\beta} &= \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{1}{1+\beta}L_{l,r}^{l} + \frac{\beta}{1+\beta}L_{l,r}^{l+1+\beta}, \\
L_{l,r}^{r-1+\beta} &= \frac{1-\beta}{2-\beta} + \frac{1-\beta}{2-\beta}L_{l,r}^{r-2+\beta} + \frac{1}{2-\beta}L_{l,r}^{r}, \\
L_{l,r}^{l} &= L_{l,r}^{r} = 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Нетрудно проверить, что подстановкой $H_\infty^\beta(\bar{p}^{k+\beta}(l,r))$ вместо $L_{l,r}^{k+\beta}$ данные равенства обращаются в тождества. Отсюда стратегия $\bar{\xi}^*$ является оптимальной.

Отметим, что в отличие от стратегии $\bar{\sigma}^*$ стратегия $\bar{\xi}^*$ определена при $\beta \in [0,1]$ и совпадает с оптимальной стратегией инсайдера из [1] при $\beta = 1$. При этом стратегии $\bar{\sigma}^*$ и $\bar{\xi}^*$ порождают существенно отличные случайные блуждания апостериорных вероятностей.

Приложение

Доказательство. [Лемма 1] Проведем доказательство по индукции для случая $s > k$. При $n = 1$ оптимальный ответ первого игрока на $\bar{\tau}^k$ будет $i = k+1$. Тогда его выигрыш в игре $G_1^\beta(\bar{p})$ равен

$$h_1^s(\bar{\tau}^k) = s - \beta(k+1) - (1-\beta)k = s - k - \beta.$$

База индукции проверена. Предположим, что утверждение верно при $n \leqslant N$. При $n = N + 1$ первый игрок имеет два разумных ответа на $\bar{\tau}^k$: ставка $i = k + 1$, что соответствует покупке акции по наименьшей возможной цене, и ставка $i = k - 1$, что соответствует продаже акции за наибольшую возможную цену. Найдем оценки выигрыша в каждом из случаев. Для $i = k + 1$ выигрыш первого игрока не превосходит величины

$$s - k - \beta + h_N^s(\bar{\tau}^{k+1}) = \sum_{t=0}^{N} (s - k - t - \beta)^+.$$

Аналогично для $i = k - 1$ тот же выигрыш не превосходит

$$\beta k + (1 - \beta)(k - 1) - s + h_N^s(\bar{\tau}^{k-1}) = \sum_{t=0}^{N-2} (s - k - t - \beta)^+.$$

При $s \leqslant k$ формула для $h_n^s(\bar{\tau}^k)$ доказывается аналогично. Сходимость $h_n^s(\bar{\tau}^k)$ к $h_\infty^s(\bar{\tau}^k)$ следует из равенства $h_n^s(\bar{\tau}^k) = h_{n+1}^s(\bar{\tau}^k)$ при $n \geqslant s - k$.

Доказательство. [Теорема 1] Воспользовавшись (2), получим

$$\sum_{s \in S} p^s h_\infty^s(\bar{\tau}^j) = \big(j^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar{p})j - \\ -(2\beta - 1)\,\mathbb{E}\,\bar{p} + \mathbb{E}\,\bar{p}^2\big)/2. \tag{П.1}$$

Квадратичная функция $f(x) = x^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar{p})x$ достигает минимума при $x = \mathbb{E}\,\bar{p} - \beta + 1/2$. Отсюда при $\bar{p} \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ выражение (П.1) достигает минимума при $j = k$. Равенство (3) проверяется непосредственной подстановкой $\mathbb{E}\,\bar{p} = k - 1 + \beta + \xi$ в (П.1).

Доказательство. [Лемма 2] Проведем доказательство по индукции. Покажем, что справедливо равенство

$$K_n^\beta(\bar{p}, \bar{\sigma}_c, \bar{\tau}) = \lambda K_n^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\tau}) + (1 - \lambda) K_n^\beta(\bar{p}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\tau}). \tag{П.2}$$

Подставив (5) в (4), получим

$$K_1^\beta(\bar p, \bar\sigma_c, j) = \sum_{i\in I,\, s\in S} q^i \frac{\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1-\lambda) q_2^i p_2^{s|i}}{q^i} a^{s,\beta}(i,j) =$$
$$= \lambda \sum_{i\in I,\, s\in S} q_1^i p_1^{s|i} a^{s,\beta}(i,j) + (1-\lambda) \sum_{i\in I, s\in S} q_2^i p_2^{s|i} a^{s,\beta}(i,j) =$$
$$= \lambda K_1^\beta(\bar p_1, \bar\sigma_1, j) + (1-\lambda) K_n^\beta(\bar p_2, \bar\sigma_2, j).$$

Таким образом, утверждение справедливо при $n = 1$. Пусть утверждение имеет место при $n \leqslant N$. Тогда из (1) вытекает

$$K_{N+1}^\beta(\bar p, \bar\sigma_c, \bar\tau) = K_1^\beta(\bar p, \bar\sigma_c, \bar\tau) + \sum_{i\in I} q_i K_N^\beta(\bar p^i, \bar\sigma_c^i, \tau^i) =$$
$$= \lambda K_1^\beta(\bar p_1, \sigma_1, \tau) + (1-\lambda) K_1^\beta(\bar p_2, \sigma_2, \tau) +$$
$$+ \sum_{i\in I} q^i \left(\frac{\lambda q_1^i}{q^i} K_N^\beta(\bar p_1^i, \bar\sigma_1^i, \bar\tau^i) + \frac{(1-\lambda) q_2^i}{q^i} K_N^\beta(\bar p_2^i, \bar\sigma_2^i, \bar\tau^i) \right) =$$
$$= \lambda K_{N+1}^\beta(\bar p_1, \bar\sigma_1, \bar\tau) + (1-\lambda) K_{N+1}^\beta(\bar p_1, \bar\sigma_2, \bar\tau).$$

Справедливость равенства (П.2) доказана. Отсюда получаем

$$L_n^\beta(\bar p) = \min_{\bar\tau\in \mathrm{T}} K_n^\beta(\bar p, \bar\sigma_c, j) \geqslant \lambda \min_{\bar\tau\in \mathrm{T}} K_n^\beta(\bar p, \bar\sigma_1, j) +$$
$$+ (1-\lambda) \min_{\bar\tau\in \mathrm{T}} K_n^\beta(\bar p, \bar\sigma_2, j) = \lambda L_n^\beta(\bar p_1) + (1-\lambda) L_n^\beta(\bar p_2).$$

Получили, что стратегия $\bar\sigma_c$ обеспечивает первому игроку в игре $G_n^\beta(\bar p)$ соответствующую выпуклую комбинацию гарантированных выигрышей в играх $G_n^\beta(\bar p_1)$ и $G_n^\beta(\bar p_2)$.

Доказательство. [Лемма 3] По аналогии с [4] можно показать, что

$$a^{s,\beta}(\hat\sigma_k, j) = \begin{cases} s - \beta k - (1-\beta) j - \beta \sigma_{k+1}^s, & j < k, \\ (s - k - \beta)\sigma_{k+1}^s, & j = k, \\ (k + \beta - s)\sigma_k^s, & j = k+1, \\ (1-\beta)k + \beta j - s + (1-\beta)\sigma_{k+1}^s, & j > k+1. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Доказательство. [Теорема 2] Для $\bar{p} \in P(l, r)$ определение стратегия $\bar{\sigma}^*$ аналогично определению оптимальной стратегии первого игрока из [4] с заменой $0, m$ на l, r соответственно.

Параметры $\bar{q}$ и $\bar{p}^i$ подобраны таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$L_1^{\beta}(\bar{p}^k(l, r)) = 0,\, L_1^{\beta}(\bar{p}^{k+\beta}(l, r)) = \beta(1 - \beta),$$

а апостериорные распределения принадлежали тому же множеству $P(l, r)$. Полученная система (7) является системой с трехдиагональной матрицей и решается методом прогонки аналогично тому, как это было сделано в [4].

Литература

1. ДОМАНСКИЙ В.К., КРЕПС В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. – 2011. – Вып. 11. – С. 39–62.
2. КРЕПС В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2009. – № 4. – С. 109–120.
3. ПЬЯНЫХ А.И. *Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2014. – Т. 6, №4. - С. 68–84.
4. ПЬЯНЫХ А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. – 2016. – №1. – С. 34—-40.
5. САНДОМИРСКАЯ М.С., ДОМАНСКИЙ В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. – 2012. – Т. 4, №1. – С. 32–54.

6. AUMANN R.J., MASCHLER M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1995.
7. CHATTERJEE K., SAMUELSON W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. – 1983. – Vol. 31, № 5. – P. 835–851.
8. DE MEYER B. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // International Journal of Game Theory. – 2002. – Vol. 31, №2. – P. 285–319.
9. DOMANSKY V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 36, № 2. – P. 241–257.
10. MERTENS J.–F., SORIN S., ZAMIR S. *Repeated games*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

MULTISTAGE MODIFIED BIDDING MODEL WITH A COUNTABLE SET OF STATES

Artem Pyanykh, Lomonosov Moscow State University, Moscow, post-graduate student (artem.pyanykh@gmail.ru).

Abstract: A simplified financial market model with two players bidding for one unit of a risky asset for several consequtive stages is considered. First Player (an insider) is informed about the liquidation price of the asset which can take any value in $\mathbb{Z}_+$. At the same time Second Player knows only probability distribution $\bar{\mathrm{p}}$ of the price and that First Player is an insider. At each bidding stage players place integer bids. The higher bid wins and one unit of the asset is transacted to the winning player at the cost equal to a convex combination of the bids with some coefficient β. After each stage the bids are announced to the players. In this paper we obtain a solution to an infinitely long zero-sum game corresponding to the described model for distributions $\bar{\mathrm{p}}$ with finite variation.

Keywords: repeated zero-sum games, asymmetric information, insider trading.

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии ...

Поступила в редакцию ...
Дата опубликования ...