

# Многошаговая модель биржевых торгов с элементами переговоров: расширение на случай счетного множества состояний

Артем Пьяных\*

Московский университет им. М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
artem.pyanykh@gmail.com

13 апреля 2016 г.

## Аннотация

Рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции в течение  $n$  шагов. Игрок 1 (инсайдер) информирован о настоящей ликвидной цене акции, которая может принимать любое значение из  $\mathbb{Z}_+$ . В то же время игрок 2 знает только вероятностное распределение  $\bar{p}$  цены акции. На каждом шаге торгов игроки делают целочисленные ставки. Игрок, предложивший бóльшую ставку покупает у другого акцию по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок. Получено решение игры неограниченной продолжительности для распределений  $\bar{p}$  с конечной дисперсией.

**Ключевые слова:** многошаговые игры, асимметричная информация, инсайдерская торговля.

## 1 Введение

В данной работе рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торги за однотипные акции на протяжении  $n \leq \infty$  шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции  $s \in S$  на весь период торгов в соответствии с вероятностным распределением

---

\*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-01-00353а.

$\bar{p} = (p^s, s \in S)$ . Выбранная цена сообщается игроку 1 (инсайдеру). Игрок 2 при этом знает только вероятностное распределение  $\bar{p}$  и не осведомлен о настоящем значении цены. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают некоторую цену за акцию. Игрок, сделавший большую ставку, покупает акцию у другого; если ставки равны, сделки не происходит. Задачей игроков является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа акций и суммы денег. Данное описание считается известным обоим игрокам.

Модель, в которой цена акции может принимать только значения 0 и  $m$ , была рассмотрена в [1]. Задача сводится к анализу антагонистической повторяющейся игры с неполной информацией, как описано в [2]. В рамках данной модели неосведомленный игрок 2 использует историю ставок игрока 1 для пересчета апостериорных вероятностей значения цены акции. Отсюда, задачей игрока 1 является поиск стратегии, которая позволит ему контролировать последовательность апостериорных вероятностей таким образом, чтобы игрок 2 как можно дольше не мог догадаться о настоящем значении цены. В [1] показано, что последовательность верхних значений  $n$ -шаговых игр ограничена, что позволило определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой были найдены оптимальные стратегии игроков и значение. Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в узком числе случаев: в [3] получено решение одношаговой игры при произвольном натуральном значении  $m$ ; в [4] получено решение  $n$ -шаговых игр при  $m \leq 3$ . Аналитическое решение игр с конечным количеством шагов в общем случае остается открытой проблемой. В работе [5] рассмотрено обобщение модели на случай, когда цена акции может принимать любое значение  $s \in S = \mathbb{Z}_+$ . Показано, что если  $\mathbb{D}\bar{p} < \infty$ , то последовательность верхних значений игры ограничена, что снова позволяет определить игру с бесконечным количеством шагов, для которой авторами получено решение.

В работах [1, 5] сделка осуществляется по цене, равной наибольшей предложенной ставке. Можно, однако, рассмотреть другой механизм, предложенный в [6], и положить цену сделки равной выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом  $\beta \in [0, 1]$ , т.е. если игроками были сделаны ставки  $p_1 \neq p_2$ , то акция будет продана по цене  $\beta \max(p_1, p_2) + (1 - \beta) \min(p_1, p_2)$ . Фактически в [1, 5] коэффициент  $\beta$  равен 1. Обобщение модели с двумя возможными значениями цены акции на случай произвольного  $\beta$  было проведено в [7]. В данной работе обобщение на случай произвольного  $\beta$  проведено для модели со счетным множеством возможных значений цены акции.

## 2 Постановка задачи

Пусть множество состояний рынка  $S = \mathbb{Z}_+$ . Перед началом игры случай выбирает состояние рынка  $s \in S$  в соответствии с вероятностным распределением  $\bar{p} = (p^s, s \in S)$  таким, что  $\mathbb{D}\bar{p} < \infty$ . На каждом шаге игры  $t = \overline{1, n}$ ,  $n \leq \infty$  игроки делают ставки  $i_t \in I$ ,  $j_t \in J$ , где  $I = J = \mathbb{Z}_+$ . Выплата игроку 1 в состоянии  $s$  равна

$$a^s(i_t, j_t) = \begin{cases} (1 - \beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1 - \beta)j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

Обозначим через  $\Delta(X)$  множество вероятностных распределений над  $X$ .

**Определение 1.** Стратегией игрока 1 является последовательность ходов  $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , где  $\sigma_t : S \times I^{t-1} \rightarrow \Delta(I)$ . Множество стратегий игрока 1 обозначим  $\Sigma$ .

**Определение 2.** Стратегией игрока 2 является последовательность ходов  $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ , где  $\tau_t : I^{t-1} \rightarrow \Delta(J)$ . Множество стратегий игрока 2 обозначим  $\mathcal{T}$ .

То есть, игрок 1 на каждом шаге игры рандомизирует свои действия в зависимости от состояния рынка  $s$  и истории ставок. Игрок 2 в свою очередь, не имея информации о состоянии рынка  $s$ , опирается только на историю ставок инсайдера.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рискованных и безрисковых активов, т.е. торги не могут закончиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Кроме того, будем считать, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

**Определение 3.** При использовании игроком 1 стратегии  $\sigma$ , игроком 2 — стратегии  $\tau$ , ожидаемый выигрыш игрока 1 равен

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = \mathbb{E}_{(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau})} \sum_{t=1}^n a^s(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной  $\bar{p}$ ,  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\tau}$ .

Заданную таким образом игру обозначим  $G_n(\bar{p})$ .

**Определение 4.** Если для некоторых  $\bar{\sigma}^* \in \Sigma$ ,  $\bar{\tau}^* \in \mathcal{T}$  выполняется

$$\sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} \inf_{\bar{\tau} \in \mathcal{T}} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}^*, \bar{\tau}^*) = \inf_{\bar{\tau} \in \mathcal{T}} \sup_{\bar{\sigma} \in \Sigma} K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = V_n(\bar{p}),$$

то игра  $G_n(\bar{p})$  имеет значение  $V_n(\bar{p})$ , а стратегии  $\bar{\sigma}^*$  и  $\bar{\tau}^*$  являются оптимальными.

Следуя [5], опишем рекурсивную структуру игры  $G_n(\bar{p})$ . Представим стратегию игрока 1 в виде  $\bar{\sigma} = (\sigma, \bar{\sigma}^i, i \in I)$ , где  $\sigma$  — ход игрока на первом шаге, а  $\bar{\sigma}^i$  — стратегия в игре продолжительности  $n - 1$  в зависимости от ставки  $i$  на первом шаге. Аналогично, стратегию игрока 2 представим в виде  $\bar{\tau} = (\tau, \bar{\tau}^i, i \in I)$ . Далее, обозначим  $q^i$  полную вероятность, с которой игрок 1 делает ставку  $i \in I$ , и  $\bar{q} = (q^i, i \in I)$  — соответствующее распределение. Также обозначим  $p^{s|i}$  апостериорную вероятность состояния  $s$  в зависимости от ставки  $i$  игрока 1 и  $\bar{p}^i = (p^{s|i}, s \in S)$  — соответствующее апостериорное распределение. Тогда для значения выигрыша будет справедлива формула

$$K_n(\bar{p}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}) = K_1(\bar{p}, \sigma, \tau) + \sum_{i \in I} q_i K_{n-1}(\bar{p}^i, \bar{\sigma}^i, \bar{\tau}^i).$$

Таким образом, определить стратегию в игре произвольной продолжительности можно, задав ход игрока для любого значения  $\bar{p}$ .

### 3 Оценки на выигрыш в игре $G_\infty(\bar{p})$

Следуя [5], рассмотрим следующую чистую стратегию игрока 2.

**Определение 5.** Стратегия  $\bar{\tau}^k$  игрока 2 определяется следующим образом:

$$\tau_1^k = k, \quad t_t^k = \begin{cases} j_{t-1}, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_t, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t+1}, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

При использовании этой стратегии игрок 2 делает ставку равную  $k$  на первом шаге, а далее подражает инсайдеру. Введем обозначение  $x^+ = \max(0, x)$ .

**Лемма 1.** При применении стратегии  $\bar{\tau}^k$  в игре  $G_n(\bar{p})$  игрок 2 в состоянии  $s$  гарантирует себе проигрыш не более

$$h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (k - s - t - 1 + \beta)^+, \quad s \leq k, \quad h_n^s(\bar{\tau}^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (s - k - t - \beta)^+, \quad s \geq k.$$

Последовательность  $\{h_n^s(\bar{\tau}^k), n = \overline{1, \infty}\}$  не убывает, ограничена сверху и сходится к  $h_\infty^s(\bar{\tau}^k) = (s - k + 1 - 2\beta)(s - k)/2$ .

Введем следующие обозначения для множества распределений на  $S$  с заданным математическим ожиданием

$$\Theta(x) = \{\bar{p}' \in \Delta(S) : \mathbb{E} \bar{p}' = x\}, \quad \Lambda(x, y) = \{\bar{p}' \in \Delta(S) : x < \mathbb{E} \bar{p}' \leq y\}.$$

**Теорема 1.** *Выигрыш в игре  $G_\infty(\bar{p})$  ограничен сверху функцией*

$$H_\infty(\bar{p}) = \min_{k \in J} \sum_{s \in S} p_s h_\infty^s(\bar{\tau}^k).$$

*Функция  $H_\infty(\bar{p})$  является кусочно-линейной с областями недифференцируемости  $\Theta(k + \beta)$  и областями линейности  $\Lambda(k - 1 + \beta, s + \beta)$  при  $k \in S$ . Для распределений  $\bar{p}$  таких, что  $\mathbb{E} \bar{p} = k - 1 + \beta + \xi$ ,  $\xi \in (0, 1]$  ее значение равно*

$$H_\infty(\bar{p}) = (\mathbb{D} \bar{p} + \beta(1 - \beta) - \xi(1 - \xi)) / 2.$$

*Стратегия  $\bar{\tau}^*$ , которая позволяет игроку 2 обеспечить данную оценку, состоит в применении  $\bar{\tau}^k$  при  $\bar{p} \in \Lambda(k - 1 + \beta, k + \beta)$ .*

Заметим, что как и в [7], в данном случае наблюдается сдвиг областей линейности на  $\beta$  относительно  $\mathbb{E} \bar{p}$  в сравнении с результатами в [5].

Перейдем к описанию стратегии игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш не менее  $H_\infty(\bar{p})$ . Пусть  $\sigma_i^s$  — компонента хода игрока 1, т.е. вероятность сделать ставку  $i$  в состоянии  $s$ . По правилу Байеса  $\sigma_i^s = p^{s|i} q^i / p^s$ . Таким образом, ход игрока 1 можно определить, задав полные вероятности  $q^i$  сделать ставку  $i$  и апостериорные вероятности  $p^{s|i}$  для  $i \in I$ . Тогда в терминах  $\bar{q}$ ,  $\bar{p}^i$  одношаговый выигрыш выражается следующим образом:

$$K_1(\bar{p}, \sigma, j) = \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} q^i p^{s|i} a^s(i, j).$$

Обозначим  $L_n(\bar{p})$  — минимальный выигрыш, который может гарантировать себе игрок 1 в игре  $G_n(\bar{p})$ .

**Лемма 2.** *Пусть  $\bar{q}_l = (q_l^1, \dots, q_l^n)$ ,  $\bar{p}_l^i = (p_l^{1|i}, p_l^{2|i}, \dots)$  отвечают первому ходу стратегии игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш  $L_n(\bar{p}_l)$ ,  $l = 1, 2$ . Тогда для  $\bar{p} = \lambda \bar{p}_1 + (1 - \lambda) \bar{p}_2$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , стратегия, первый ход которой задается параметрами*

$$q^i = \lambda q_1^i + (1 - \lambda) q_2^i, \quad p^{s|i} = \left( \lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1 - \lambda) q_2^i p_2^{s|i} \right) / q^i,$$

*гарантирует игроку 1 выигрыш  $\lambda L_n(\bar{p}_1) + (1 - \lambda) L_n(\bar{p}_2)$ .*

Из леммы 2 следует, что для доказательства совпадения верхней и нижней оценок на выигрыш в  $G_\infty(\bar{p})$  можно ограничиться рассмотрением для распределений  $\bar{p} \in \Theta(k + \beta)$ ,  $k \in S$ . Как показано в [5], любое  $\bar{p}$  может быть представлено в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечным носителем. Обозначим  $\bar{p}^x(l, r) \in \Theta(x)$  такое распределение с математическим

ожиданием  $x$ , которое принимает только значения  $l$  и  $r$ . Таким образом, достаточно доказать выполнение равенства  $L_\infty(\bar{p}) = H_\infty(\bar{p})$  для  $\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$ ,  $k \in S$ . Построим соответствующую стратегию игрока 1.

Обозначим  $\hat{\sigma}_k$  ход игрока 1, состоящий в применении действий  $k$  и  $k+1$ . Ход  $\hat{\sigma}_k$  определяется заданием  $q_k, q_{k+1}$  и  $\bar{p}^k, \bar{p}^{k+1}$ . Следующая лемма является обобщением [7, Утверждение 2].

**Лемма 3.** При использовании  $\hat{\sigma}_k$  одношаговый выигрыш игрока 1 равен

$$K_1(\bar{p}, \hat{\sigma}_k, j) = \begin{cases} \mathbb{E} \bar{p} + \beta k - (1 - \beta)j - \beta q_{k+1}, & j < k, \\ (\mathbb{E} \bar{p}^{k+1} - k - \beta)q_{k+1}, & j = k, \\ (k + \beta - \mathbb{E} \bar{p}^k)q_k, & j = k, \\ (1 - \beta)k + \beta j - \mathbb{E} \bar{p} + (1 - \beta)q_{k+1}, & j > k + 1. \end{cases}$$

Распространяя результаты [7] на случай  $\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$ , определим следующую стратегию игрока 1 в игре  $G_\infty(\bar{p})$ .

**Определение 6.** Первый ход стратегии  $\bar{\sigma}^*$  определяется следующим образом. При  $\bar{p} = \bar{p}^l(l, r)$  и  $\bar{p} = \bar{p}^r(l, r)$  игрок 1 использует ставки  $l$  и  $r$ , соответственно, с вероятностью 1. Для  $\bar{p} \in \{\bar{p}^k(l, r), \bar{p}^{k+\beta}(l, r)\}$  игрок 1 использует  $\hat{\sigma}_k$  с параметрами

$$\begin{aligned} \bar{p}^k(l, r) : \quad q^k &= \beta, \quad q^{k+1} = 1 - \beta, \quad \bar{p}^k = \bar{p}^{k-1+\beta}(l, r), \quad \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+\beta}(l, r); \\ \bar{p}^{k+\beta}(l, r) : \quad q^k &= 1 - \beta, \quad q^{k+1} = \beta, \quad \bar{p}^k = \bar{p}^k(l, r), \quad \bar{p}^{k+1} = \bar{p}^{k+1}(l, r). \end{aligned}$$

На последующих шагах игры, таким образом определенный ход применяется рекурсивно для соответствующих значений апостериорных вероятностей. Для остальных распределений  $\bar{p}$  стратегия  $\bar{\sigma}^*$  определяется конструкцией леммы 2.

Следующая лемма является обобщением [7, Утверждение 5].

**Теорема 2.** При использовании стратегии  $\bar{\sigma}^*$  в игре  $G_\infty(\bar{p})$  для распределения  $\bar{p} \in \{\bar{p}^k(l, r), \bar{p}^{k+\beta}(l, r)\}$  гарантированный выигрыш игрока 1 удовлетворяет следующей системе:

$$\begin{aligned} L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l, r)) &= \beta(1 - \beta) + (1 - \beta)L_\infty(\bar{p}^k(l, r)) + \beta L_\infty(\bar{p}^{k+1}(l, r)), \quad k \in \overline{l, r-1}, \\ L_\infty(\bar{p}^k(l, r)) &= \beta L_\infty(\bar{p}^{k-1+\beta}(l, r)) + (1 - \beta)L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l, r)), \quad k \in \overline{l+1, r-1}, \\ L_\infty(\bar{p}^l(l, r)) &= L_\infty(\bar{p}^r(l, r)) = 0. \end{aligned}$$

Ее решение дает нижнюю оценку выигрыша игрока 1 равную

$$L_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l, r)) = ((r - k - \beta)(k + \beta - l) + \beta(1 - \beta))/2.$$

Так как  $\mathbb{D}p^{k+\beta}(l, r) = (r - k - \beta)(k + \beta - l)$ , то выражения для  $H_\infty(\bar{p})$  и  $L_\infty(\bar{p})$  совпадают. Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 3.** *Игра  $G_\infty(\bar{p})$  имеет значение  $V_\infty(\bar{p}) = H_\infty(\bar{p}) = L_\infty(\bar{p})$ . Стратегии  $\bar{\tau}^*$  и  $\bar{\sigma}^*$ , определенные ранее, являются оптимальными.*

В заключение, сделаем несколько замечаний. Во-первых, нужно отметить, что стратегия неосведомленного игрока является удивительно устойчивой по отношению к изменению функции выигрыша. Вероятно, ее применение может быть распространено на более широкий класс задач. В то же время, оптимальная стратегия инсайдера существенно меняется. В [5] при применении оптимальной стратегии игроком 1, апостериорные распределения образуют симметричное случайное блуждание по множествам  $\Theta(s)$ ,  $s \in S$ , т.е. для  $\bar{p} \in \Theta(s)$  апостериорное распределение  $\bar{p}'$  будет принадлежать либо  $\Theta(k - 1)$ , либо  $\Theta(k + 1)$  с вероятностями равными  $1/2$ . В случае  $\beta \in (0, 1)$  блуждание происходит по более широкому набору множеств  $\{\Theta(s), \Theta(s + \beta)\}$ , кроме того оно больше не является симметричным, кроме случая  $\beta = 1/2$ . Отметим также, что оптимальная стратегия  $\bar{\sigma}^*$  не сводится к стратегии из [5] при  $\beta \rightarrow 1$ .

## Приложение

*Доказательство леммы 1.* Проведем доказательство по индукции для случая  $s > k$ . Для  $n = 1$  оптимальный ответ игрока 1 на  $\bar{\tau}^k$  будет  $i = k + 1$ . Тогда

$$h_1^s(\bar{\tau}^k) = s - \beta(k + 1) - (1 - \beta)k = s - k - \beta.$$

База индукции проверена. Предположим, что утверждение верно для  $n \leq N$ . При  $n = N + 1$  игрок 1 имеет два разумных ответа на  $\bar{\tau}^k$ : ставка  $i = k + 1$ , что соответствует покупке акции по наименьшей возможной цене, и ставка  $i = k - 1$ , что соответствует продаже акции за наибольшую возможную цену. Найдем выигрыши в каждом из случаев. Для  $i = k + 1$

$$h_{N+1}^s(\bar{\tau}^k) = s - k - \beta + h_N^s(\bar{\tau}^{k+1}) = \sum_{t=0}^N (s - k - t - \beta)^+.$$

Аналогично для  $i = k - 1$

$$h_{N+1}^s(\bar{\tau}^k) = \beta k + (1 - \beta)(k - 1) - s + h_N^s(\bar{\tau}^{k-1}) = \sum_{t=0}^{N-2} (s - k - t - \beta)^+.$$

При  $s \leq k$  формула для  $h_n^s(\bar{\tau}^k)$  доказывается похожим образом. Сходимость  $h_n^s(\bar{\tau}^k)$  к  $h_\infty^s(\bar{\tau}^k)$  проверяется непосредственно.  $\square$

Доказательство теоремы 1. TODO	<input type="checkbox"/>
Доказательство леммы 2. TODO	<input type="checkbox"/>
Доказательство леммы 3. TODO	<input type="checkbox"/>
Доказательство теоремы 2. TODO	<input type="checkbox"/>

## Список литературы

- [1] Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // International Journal of Game Theory. 2007. V. 36(2). P. 241–257.
- [2] Aumann R.J., Maschler M.B. *Repeated Games with Incomplete Information*. The MIT Press, Cambridge, London.
- [3] Сандомирская М.С., Доманский В.К. *Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. 4. №1. С. 32-54.
- [4] Крепс В.Л. *Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 109–120.
- [5] Доманский В.К., Крепс В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011. Вып. 11. С. 39–62.
- [6] Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research. 1983. V. 31. N. 5. P. 835–851.
- [7] Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 2016. №1. С. 34–40.