РЕШЕНИЕ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ С ОБОБЩЕННЫМ МЕХАНИЗМОМ ФОРМИРОВАНИЯ СДЕЛКИ

Выступающий: А.И. Пьяных
Руководитель: к.ф.-м.н., доц. В.В. Морозов

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Москва, 2016

Описание модели

- Между двумя игроками в течение $n \leqslant \infty$ шагов происходят торги за однотипные акции.
- Цена акции s определяется ходом случая в соответствии с распределением $\bar{p}$.
- Первый игрок (инсайдер) знает цену s, второй — знает только вероятностное распределение $\bar{p}$.
- На каждом шаге торгов игроки делают ставки i, j. Игрок, предложивший большую ставку, покупает у другого акцию по цене $Tr(i, j)$. При равных ставках сделка не состоится.

Непрерывная и дискретная постановки

	Непрерывная модель	Дискретная модель
Ставки	вещественные из $[0,1]$	вида $i/m,\ i=\overline{0,m}$
Цена акции	$s \in \{0,1\};\ P(s=1)=p$	
Цена сделки	$Tr(i,j)=\max(i,j)$	
$\{V_n(p)\}$	растет как $\sqrt{n}$	ограничена

Цель: показать возможность стратегического происхождения броуновского движения (случайного блуждания) в динамике цен активов.

Мотивация

Рассмотрение более общего симметричного механизма торгов $Tr(i,j)$ обозначено в работе [De Meyer, Saley, 2002] как одно из актуальных направлений дальнейших исследований.
В качестве такого механизма был выбран

$$Tr(i,j) = \beta \max(i,j) + (1-\beta) \min(i,j), \; \beta \in [0,1],$$

предложенный в [Chatterjee, Samuelson, 1983].
Параметр β можно интерпретировать как переговорную силу продавца.

Глава 1. Теоретико-игровая модель биржевых торгов с дискретными ставками

- Множество состояний $S = \{L, H\}$.
- В состоянии L цена $s = 0$, в состоянии H цена $s = m$.
- Игроки могут делать ставки из множества $\{0, 1, \ldots, m\}$. Обозначим множества действий первого и второго игроков через I и J соответственно.

Модель отвечает повторяющейся игре $G_n^{m,\beta}(p)$ с платежными матрицами

$$A^{L,\beta}(i,j) = \begin{cases} \overline{\beta}i + \beta j, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -\beta i - \overline{\beta}j, & i > j, \end{cases} \qquad A^{H,\beta}(i,j) = \begin{cases} \overline{\beta}i + \beta j - m, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ m - \beta i - \overline{\beta}j, & i > j. \end{cases}$$

Стратегией первого игрока является последовательность ходов

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t, \ldots), \ \sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I).$$

Стратегией второго игрока — последовательность ходов

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_t, \ldots), \ \tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J).$$

Выигрыш задается как

$$K_n^{m,\beta}(p,\sigma,\tau) = \mathbb{E}_{\Pi[\sigma,\tau]} \sum_{t=1}^{n} \left(pA^{H,\beta}(i_t^H, j_t) + (1-p)A^{L,\beta}(i_t^L, j_t) \right).$$

Оптимальная стратегия второго игрока

Следующая чистая стратегия τ^k предложена В. К. Доманским в [Domansky, 2007]:

$$\tau_1^k = k, \quad \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

В работе показано, что при $p \in (k - 1 + \beta, k + \beta]$, $k = \overline{0, m}$ использование τ^k оптимально для второго игрока в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$.

Рекурсивная структура игры $G_n^{m,\beta}(p)$

Представим σ как $(\sigma_1, \sigma(i),\ i \in I)$, а τ как $(\tau_1, \tau(i),\ i \in I)$.
Параметризуем ход σ_1 инсайдера с помощью

- полной вероятности $q(i)$ сделать ставку i
- апостериорной вероятности $p(H|i)$ состояния H при использовании ставки i.

По формуле Байеса вероятность сделать ставку $i \in I$ в состоянии $s \in S$ выражается как

$$\sigma_{1,i}^{s} = \frac{p(s|i)q_i}{p(s)}.$$

Формулу выигрыша можно переписать в виде

$$K_n^m(p, \sigma, \tau) = K_1^m(p, \sigma_1, \tau_1) + \sum_{i \in I} q(i) K_{n-1}^m(p(H|i), \sigma(i), \tau(i)).$$

Оптимальная стратегия первого игрока

При $p = k/m,\ k = \overline{1, m-1}$ первый игрок рандомизирует выбор ставок k, $k+1$ с параметрами

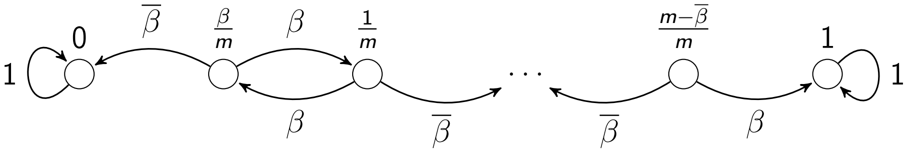
$$
\begin{aligned}
q_k &= \beta, \quad p(H|k) = (k - 1 + \beta)/m,\\
q_{k+1} &= \overline{\beta}, \quad p(H|k+1) = (k + \beta)/m.
\end{aligned}
$$

При $p = (k+\beta)/m,\ k = \overline{0, m-1}$ — с параметрами

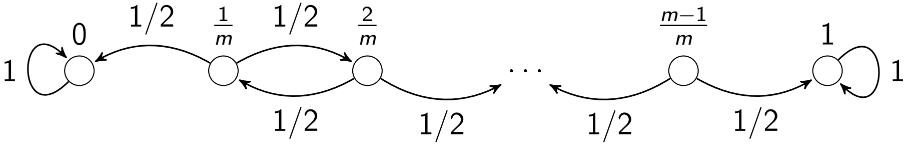
$$
\begin{aligned}
q_k &= \overline{\beta}, \quad p(H|k) = k/m,\\
q_{k+1} &= \beta, \quad p(H|k+1) = (k+1)/m.
\end{aligned}
$$

Для остальных значений p используется стратегия, дающая линейную комбинацию соответствующих выигрышей.

Графически оптимальную стратегию первого игрока можно представить следующим образом:



Для сравнения, ниже представлена стратегия из базовой работы [Domansky, 2007], которая отвечает значению $\beta = 1$



Значение игры

Теорема

Игра $G_\infty^m(p)$ имеет значение $V_\infty^m p$. Данная функция является кусочно-линейной, состоит из $m + 1$ линейных сегментов, и полностью определяется своими значениями в следующих точках:

$$V_\infty^m((k+\beta)/m) = \frac{1}{2}\left((m-(k+\beta))(k+\beta)+\overline{\beta}\beta\right), \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$V_\infty^m 0 = V_\infty^m 1 = 0.$$

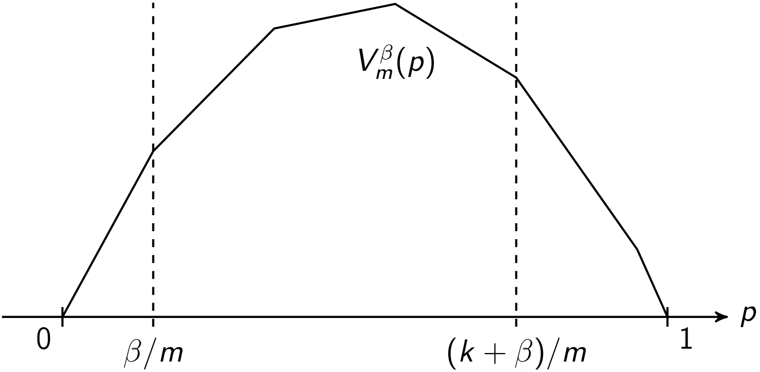


График функции $V_\infty^{m,\beta}(p)$

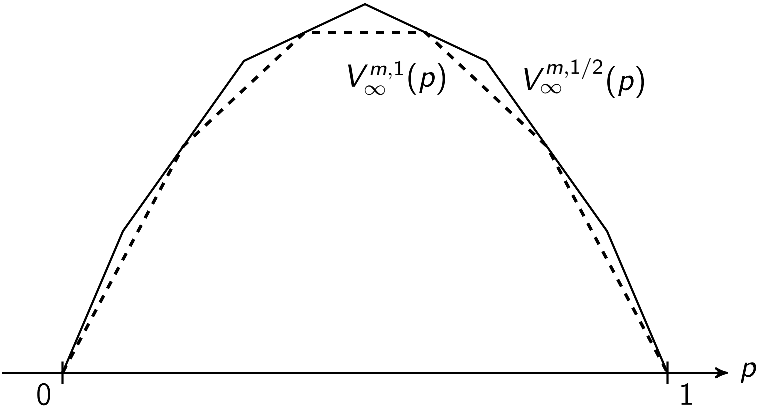
Утверждение

При любом значении $p \in [0,1]$, $\beta \in (0,1)$ *и* $m \geq 3$ *справедливо неравенство*

$$V_\infty^{m,\beta}(p) \geq V_\infty^{m,1}(p) = V_\infty^{m,0}(p),$$

причем равенство достигается только при $p = k/m, k = \overline{0,m}$.

Таким образом, из всех рассматриваемых механизмов торгов, те механизмы, которые предписывают продавать акцию по наибольшей или наименьшей предложенной цене, гарантируют инсайдеру наименьший возможный выигрыш.



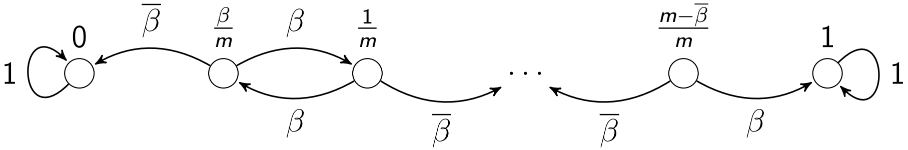
Графики функции $V_\infty^{m,\beta}(p)$ при значениях $\beta = 1/2$ и $\beta = 1$

Продолжительность игры

Утверждение

Игра $G_{\infty}^{m,\beta}(p)$ *в среднем заканчивается за конечное количество шагов. При* $p \in \{k/m, (k+\beta)/m\}$ *ее ожидаемая продолжительность выражается формулами*

$$\tau((k+\beta)/m) = \frac{(m-k-\beta)(k+\beta)}{\beta\overline{\beta}}, \quad \tau(k/m) = \frac{k(m-k)}{\beta\overline{\beta}}.$$



Глава 2. Теоретико-игровая модель биржевых торгов с непрерывными ставками

- Множество состояний $S = \{L, H\}$.
- В состоянии L цена $s = 0$, в состоянии H цена $s = 1$.
- Игроки могут делать вещественные ставки из отрезка $[0, 1]$.

Прямая игра

- Обозначим $y_t = (y_t^R, y_t^N)$ портфель инсайдера на t-м шаге торгов, где y_t^R и y_t^N — количество единиц рискового актива и денег соответственно.
- Если на t-м шаге игроки делают ставки $i_t, j_t \in [0, 1]$, то портфель $y_t = y_{t-1} + t(i_t, j_t)$, где при $\overline{\beta} = 1 - \beta$

$$t(i, j) = \mathbb{1}_{i>j}(1, -(\beta i + \overline{\beta} j) + \mathbb{1}_{i<j}(-1, \overline{\beta} i + \beta j).$$

- Стоимость портфеля равна

$$V(y_t) = \mathbb{1}_{s=H} y_t^R + y_t^N.$$

Цель игроков — максимизировать стоимость итогового портфеля y_n.

Выигрыш первого игрока равен

$$g_n(p, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{p,\sigma,\tau} V(y_n).$$

Обозначим данную игру $G_n(p)$. Ее верхнее и нижнее значения даются формулами

$$V_{1,n}(p) = \sup_{\sigma} \inf_{\tau} g_n(p, \sigma, \tau), \;\; V_{2,n}(p) = \inf_{\tau} \sup_{\sigma} g_n(p, \sigma, \tau).$$

Если $V_{1,n}(p) = V_{2,n}(p) = V_n(p)$, то игра имеет значение $V_n(p)$.

Двойственная игра

Двойственная игра $G_n^*(x)$ определяется следующим образом:

- Перед началом торгов игрок 1 выбирает $s \in S$.
- В том случае, если он выбрал H, то по окончании игры он платит игроку 2 штраф размера x.
- Игрок 1 также контролирует значение p.
- В остальном правила двойственной игры аналогичны правилам прямой игры.

Функция выигрыша двойственной игры задается формулой

$$g_n^*(x, (p, \sigma), \tau) = xp - g_n(p, \sigma, \tau).$$

Игрок 2 стремиться максимизировать ее значение.
Верхнее и нижнее значение игры $G_n^*(x)$ даются формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(p,\sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x, (p, \sigma), \tau),\ W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(p,\sigma)} g_n^*(x, (p, \sigma), \tau).$$

Если $W_{1,n}(x) = W_{2,n}(x) = W_n(x)$, то игра имеет значение $W_n(x)$.

Параметризация стратегии первого игрока в прямой игре

Для стратегии первого игрока имеет место декомпозиция

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma(i),\ i \in I).$$

Ход σ_1 параметризуем при помощи функций

$$f(u) = F^{-1}_{\sigma_1^M}(u) := \inf\{x \mid F_{\sigma_1^M}(x) \geqslant u\},$$
$$Q(u) = P(s = H | i = f(u)),$$

где σ_1^M — маргинальное распределение ставки i.
Восстановить σ_1 можно из следующего равенства:

$$P(i \in B \mid s = H) = \frac{P(i \in B,\ s = H)}{P(s = H)} = \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u) \in B} \frac{Q(u)}{p} \mathrm{d}u,$$

Параметризация стратегии второго игрока в двойственной игре

Для стратегии второго игрока имеет место декомпозиция

$$\tau = (\tau_1, \tau(i),\ i \in I).$$

Ход τ_1 параметризуем при помощи функции

$$h(u) = F^{-1}_{\tau_1^M}(u) := \inf\{x \mid F_{\tau_1^M}(x) \geqslant u\},$$

где τ_1^M — маргинальное распределение ставки j.

Анализ прямой и двойственной игры

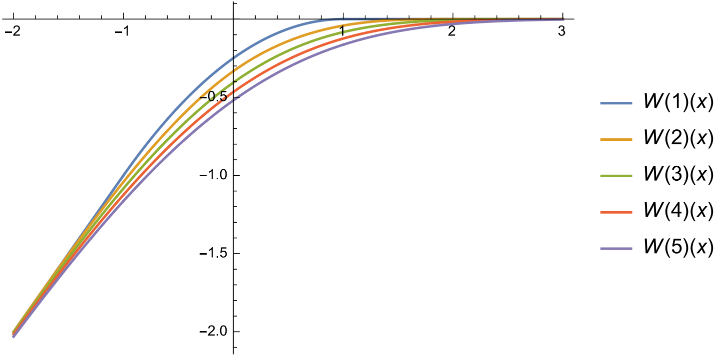
Следуя схеме, приведенной в [De Meyer, Saley, 2002],

- найдены функции f, Q, выравнивающие выигрыш первого игрока при $p_2 \in [f(0), f(1)]$ в прямой игре;
- найдена функция h, выравнивающая выигрыш второго игрока при $p_1 \in [h(0), h(1)]$ в двойственной игре;
- из соотношений двойственности между верхними и нижними значениями прямой и двойственной игр показано, что данные стратегии оптимальны.

Результаты

Значение двойственной игры $G_n^*(x)$ дается формулой:

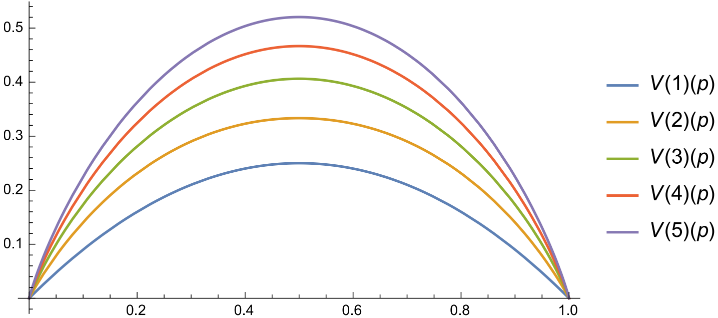
$$W_{n+1}(x) = \int_0^1 W_n(x - 2u + 1),\ W_0(x) = \min(x, 0).$$



Значение прямой игры $G_n(P)$ дается формулой:

$$V_n(P) = W_n^*(P),$$

где $W^*(P) = \inf_x\{xP - W_n(x)\}$ — сопряженная в смысле Фенхеля функция.

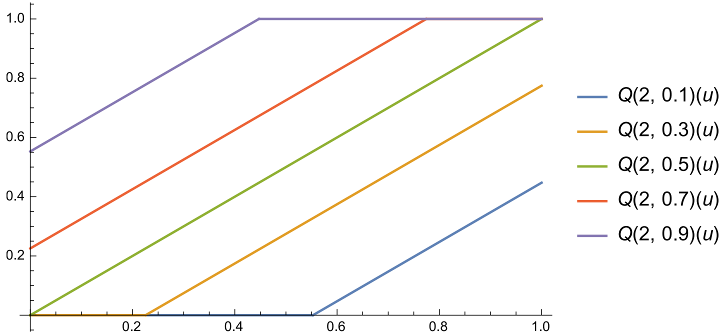


Функция $Q(u)$ определяется как

$$Q(n,p)(u) = W_n'(x+1-2u),$$

где параметр двойственной игры x удовлетворяет уравнению

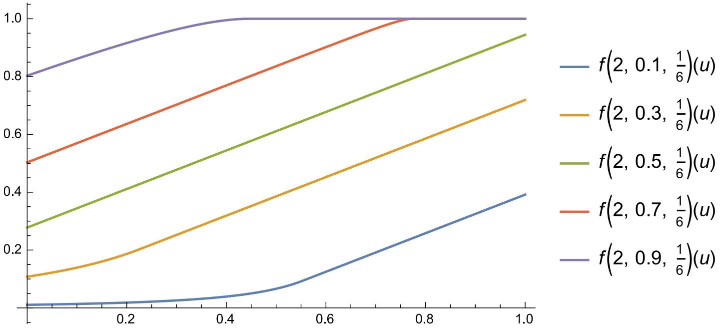
$$W_n'(x) = p.$$



Функция $f(u)$ определяется как

$$f(n,p,\beta)(u) = 2(u-\overline{\beta})^{-2}\int_{\overline{\beta}}^{u}(x-\overline{\beta})Q(n,p)(x)\mathrm{d}x.$$

При этом $h(u) = f(u)$.



Сравнивая полученные результаты с существующими, получаем:

- Введение механизма заключения сделки с параметром β влияет на оптимальные стратегии инсайдера и неосведомленного игрока.
- При этом значение игры не зависит от значения β и совпадает с таковым в [De Meyer, Saley, 2002]. В этом смысле непрерывная модель отличается от дискретной, в которой и стратегии и значение игры зависят от значения β.
- В силу того, что функции значения прямой и двойственной игр совпадают с [De Meyer, Saley, 2002], справедливы все утверждения об асимптотике значений прямой игры и динамике апостериорных вероятностей.

Глава 3. Дальнейшие обобщения модели биржевых торгов с дискретными ставками

- Множество состояний $S = \mathbb{Z}_+$. Рассматриваются только такие распределения $\bar{p}$, что дисперсия цены $\mathbb{D}\bar{p}$ конечна.
- Каждое состояние из S отождествляется с соответствующей ценой акции.
- Игроки могут делать произвольные целочисленные ставки. Выплата первому игроку в состоянии s равна

$$a^s(i,j) = \begin{cases} \overline{\beta} i + \beta j - s, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ s - \beta i - \overline{\beta} j, & i > j. \end{cases}$$

Базовая модель с $Tr(i,j) = \max(i,j)$ была рассмотрена в [Доманский, Крепс, 2011].

Оптимальная стратегия второго игрока

Введем обозначения для множества распределений на S с заданным математическим ожиданием:

$$\Theta(x) = \{\bar{p}' \in \Delta(S) : \mathbb{E}\bar{p}' = x\} ,$$
$$\Lambda(x, y) = \{\bar{p}' \in \Delta(S) : x < \mathbb{E}\bar{p}' \leqslant y\} .$$

Стратегия $\overline{\tau}^*$, заключающаяся в применении $\overline{\tau}^k$

$$\tau_1^k = k, \quad t_t^k = \begin{cases} j_{t-1}, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_t, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t+1}, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

при $\bar{p} \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$, является оптимальной.

Теорема

При использовании игроком 2 стратегии $\overline{\tau}^*$, выигрыш игрока 1 в игре $G_\infty(\bar{p})$ ограничен сверху функцией $H_\infty(\bar{p})$.
Функция $H_\infty(\bar{p})$ является кусочно-линейной с областями линейности $\Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ и областями недифференцируемости $\Theta(k+\beta)$ при $k \in S$.
Для распределений $\bar{p}$ таких, что $\mathbb{E}\bar{p} = k-1+\beta+\xi$, $\xi \in (0,1]$, ее значение равно

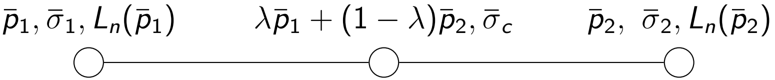
$$H_\infty(\bar{p}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{D}\bar{p} + \beta(1-\beta) - \xi(1-\xi)\right). \tag{1}$$

Лемма

Пусть $\bar{p}_k \in \Delta(S)$, $\bar{\sigma}_k$ *— стратегия игрока 1, которая гарантирует ему выигрыш* $L_n(\bar{p}_k)$ *в* $G_n(\bar{p}_k)$, *и*
$\bar{q}_k = (q_k^1, \ldots, q_k^n)$, $\bar{p}_k^i = (p_k^{1|i}, p_k^{2|i}, \ldots)$ *— параметры первого хода стратегии* $\bar{\sigma}_k$, $k = 1, 2$.
Тогда для $\bar{p} = \lambda\bar{p}_1 + (1-\lambda)\bar{p}_2$, $\lambda \in [0, 1]$, *стратегия* $\bar{\sigma}_c$, *первый ход которой задается параметрами*

$$q^i = \lambda q_1^i + (1-\lambda)q_2^i, \quad p^{s|i} = \left(\lambda q_1^i p_1^{s|i} + (1-\lambda)q_2^i p_2^{s|i}\right)/q^i,$$

гарантирует игроку 1 выигрыш $\lambda L_n(\bar{p}_1) + (1-\lambda)L_n(\bar{p}_2)$.



Оптимальная стратегия первого игрока

- В [Доманский, Крепс, 2011] показано, что любое распределение $\bar{p}$ может быть представлено в виде выпуклой комбинации распределений с одноточечным и двухточечным носителем.
- Обозначим $\bar{p}^x(l, r) \in \Theta(x)$ распределение с математическим ожиданием x и носителем $\{l, r\}$. Достаточно найти стратегию первого игрока, гарантирующую ему $H_\infty(\bar{p})$ для $\bar{p} = \bar{p}^{k+\beta}(l, r),\ k \in S$.
- Перенося результаты главы 1 на распределения $\bar{p}^{k+\beta}(l, r)$, получим стратегию, которая гарантирует первому игроку

$$\frac{1}{2}((r - k - \beta)(k + \beta - l) + \beta(1 - \beta)) = H_\infty(p^{k+\beta}(l, r)).$$

Результаты, выносимые на защиту

- Решение бесконечной повторяющейся игры биржевых торгов с дискретными ставками и более общим механизмом торгов.
- Решение конечношаговой повторяющейся игры биржевых торгов с непрерывными ставками и более общим механизмом торгов.
- Обобщение результатов, полученных для модели с дискретными ставками, на случай рынка со счетным множеством возможных цен рискового актива.

Спасибо за внимание!