МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Пьяных Артем Игоревич

РЕШЕНИЕ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ С ОБОБЩЕННЫМ МЕХАНИЗМОМ ФОРМИРОВАНИЯ СДЕЛКИ

Специальность 01.01.09 –
«дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в Московском Государственном Университете имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Морозов Владимир Викторович

Официальные оппоненты: **Фамилия Имя Отчество,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Не очень длинное название для места работы,
старший научный сотрудник

Фамилия Имя Отчество,
кандидат физико-математических наук,
Основное место работы с длинным длинным длинным длинным названием,
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования с длинным длинным длинным длинным названием

Защита состоится DD mmmmmmmm YYYY г. в XX часов на заседании диссертационного совета Д 123.456.78 при Название учреждения по адресу: Адрес.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Название библиотеки.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: Адрес, ученому секретарю диссертационного совета Д 123.456.78.

Автореферат разослан DD mmmmmmmm YYYY года.
Телефон для справок: +7 (0000) 00-00-00.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 123.456.78,
д-р физ.-мат. наук

Фамилия Имя Отчество

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Повторяющиеся игры с неполной информацией представляют собой естественную модель для анализа информационного аспекта в продолжительном стратегическом взаимодействии агентов и позволяют ответить на вопросы о том, как быстро происходит раскрытие приватной информации, каковы эффективные механизмы ее сокрытия и какую выгоду из нее могут извлечь агенты.

Теория получила свое рождение в классических работах Харшаньи[1], Аумана, Машлера и Стернса[2]. Наиболее полно исследованы повторяющиеся антагонистические игры двух лиц с неполной информацией у одной из сторон. В таких играх информационная неопределенность моделируется введением множества S возможных состояний природы. Перед началом игры ходом случая выбирается конкретное состояние $s \in S$ в соответствии с некоторым вероятностным распределением, известным обоим игрокам. После чего игроки на протяжении n шагов играют в игру, соответствующую состоянию s. При этом первый игрок осведомлен о выбранном значении s, в то время как второй знает только то, что первый обладает приватной информацией.

Одной из областей приложения данной теории является анализ поведения агентов на финансовых рынках. Начиная с работы Башелье[3], для описания эволюции цен на активы используются винеровские процессы или — в дискретном случае — случайные блуждания. Возникновение случайных колебаний цен на рынке принято объяснять влиянием на процесс ценообразования множества слабых независимых внешних факторов. Однако гипотеза о полностью экзогенном происхождении случайных колебаний цен не является удовлетворительной. Гипотеза об их стратегическом происхождении была продемонстрирована в работе Де Мейера и Салей[4], где винеровская компонента в эволюции цен возникает в следствие асимметричной информированности агентов. В рамках данной

---

[1] *Harsanyi J. C.* Games with incomplete information played by Bayesian players. Parts I, II, III // Management Science. 1967–8. Vol. 14. Pp. 159–182, 320–334, 486–502.

[2] *Aumann R. J.*, *Maschler M. B.* Repeated games with Incomplete Information. Cambridge, Mass. : The MIT Press, 1995.

[3] *Bachelier L.* Théorie de la spéculation // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3. 1900. Vol. 17. Pp. 21–86.

[4] *De Meyer B.*, *Saley H.* On the strategic origin of Brownian motion in finance // International Journal of Game Theory. 2002. Vol. 31, no. 2. Pp. 285–319.

модели два игрока на протяжении n шагов ведут торговлю однотипными рисковыми активами, причем один из них знает настоящую цену актива. На каждом шаге они делают вещественные ставки, и игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает у другого актив по предложенной цене; при равенстве ставок сделка не состоится. В работе Марино и Де Мейера[5], а также в работе В. К. Доманского[6] была исследована модель биржевых торгов с дискретными ставками, где было показано, что последовательность цен актива образует простое случайное блуждание.

В указанных работах использовался один и тот же механизм формирования сделки, а именно — продажа по наибольшей цене. При этом известно, что выбор конкретного механизма может существенным образом влиять на стратегическое поведение агентов и на их выигрыши в результате взаимодействия. Как было отмечено в работе Де Мейера и Салей, предположительно, причиной возникновения броуновского движения является полная симметрия между игроками (кроме информационной асимметрии). В частности, анализ модели с более общим симметричным механизмом формирования сделки отмечен как одно из дальнейших направлений исследования.

В работе Де Мейера[7] рассмотрена непрерывная модель с достаточно общим механизмом формирования сделки. Основной результат данной статьи заключается в том, что в асимптотике процесс эволюции цен на рисковый актив не зависит от конкретного механизма, а зависит только от априорного распределения цены актива. Однако, одним из условий, накладываемых на механизм формирования сделки, в рамках которых автором получены результаты, является существование значения соответствующих игр конечной продолжительности.

В работе М. С. Сандомирской[8] рассмотрена дискретная модель торгов с механизмом, в рамках которого игрок назначает цену покупки акции p_b, при

[5] *Marino A.*, *De Meyer B.* Continuous versus Discrete Market Games // Cowles Foundation Discussion Paper No. 1535. 2005.

[6] *Domansky V.* Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets // International Journal of Game Theory. 2007. Vol. 36, no. 2. Pp. 241–257.

[7] *De Meyer B.* Price dynamics on a stock market with asymmetric information // Games and Economic Behavior. 2010. Vol. 69. Pp. 42–71.

[8] *Сандомирская М. С.* Теоретико-игровая динамическая модель инсайдерских торгов с ненулевым спрэдом // Управление большими системами. 2014. Т. 49. С. 207—234.

этом цена продажи определяется как $p_a = p_b + x$, так называемый механизм с фиксированным спрэдом x. Другой механизм предложен в работе Чаттерджи и Самуэльсона[9]. Ими была рассмотрена модель двухстороннего аукциона с неполной информацией, в котором цена сделки равна выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом $\beta \in [0, 1]$. При этом в работе Майерсона и Саттертвейта[10] показано, что при определенных условиях механизм со значением $\beta = 1/2$ является оптимальным с точки зрения максимизации дохода от торгов. Подробное рассмотрение вопросов, связанных с переговорами при заключении сделок дано в книге В. В. Мазалова, А. Э. Менчера, Ю. С. Токаревой[11].

Цель работы. Исследование повторяющихся игр с неполной информацией, моделирующих биржевые торги с обобщенным механизмом формирования сделки.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются математические модели механизмов взаимодействия агентов на финансовых рынках. Предметом исследования являются повторяющиеся игры с неполной информацией, моделирующие биржевые торги между двумя различно информированными агентами.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать модель биржевых торгов с дискретными ставками и неограниченным количеством шагов. Определить влияние параметра механизма формирования сделки на поведение агентов и результат торгов.
2. Обобщить результаты анализа модели с дискретными ставками на случай рынка со счетным множеством возможных значений цены рискового актива.
3. Исследовать модель биржевых торгов с непрерывными ставками в случаях конечного и бесконечного количества шагов. Сравнить опти-

[9] *Chatterjee K.*, *Samuelson W.* Bargaining under Incomplete Information // Operations Research. 1983. Vol. 31, no. 5. Pp. 835–851.

[10] *Myerson R. B.*, *Satterthwaite M. A.* Efficient Mechanisms for Bilateral Trading // Journal of Economic Theory. 1983. Vol. 29. Pp. 265–281.

[11] *Мазалов В. В.*, *Менчер А. Э.*, *Токарева Ю. С.* Переговоры. Математическая теория. СПб. : Издательство «Лань», 2012.

мальное поведение агентов при использовании обобщенного механизма формирования сделки с результатами оригинальной модели.

Методы исследования. В диссертации применялись методы теории игр, выпуклого анализа, теории двойственности и вариационного исчисления.

Научная новизна. В диссертации рассмотрены дискретные и непрерывные модели биржевых торгов с симметричным механизмом формирования сделки, отвечающим механизму Чаттерджи и Самуэльсона, т.е. продаже актива по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок. Модель биржевых торгов с дискретными ставками и указанным механизмом формирования сделки исследуется впервые. В диссертации построена оптимальная стратегии инсайдера, принципиально отличающаяся от найденных ранее. Исследование конечношаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками и указанным обобщенным механизмом формирования сделки также проведено впервые. Получен результат о независимости значения соответствующей повторяющейся игры от параметра механизма.

Теоретическая и практическая значимость. Получено решение повторяющихся игр с неполной информацией, моделирующих биржевые торги с обобщенным механизмом формирования сделки. Данные результаты позволяют оценить влияние конкретного вида механизма на оптимальное поведение агентов и результат торгов.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Получено решение повторяющейся антагонистической биржевой игры с двумя, а также со счетным числом состояний рынка и дискретными ставками.
2. Найдено решение конечношаговой игровой модели биржевых торгов с двумя состояниями рынка и непрерывными ставками. Разработан алгоритм численного построения оптимальных стратегий игроков.
3. Для дискретной модели дан явный вид ожидаемой продолжительности торгов при использовании игроками оптимальных стратегий. Для непрерывной модели показано, что динамика игрового взаимодействия не зависит от параметра механизма формирования сделки.

Достоверность полученных в работе результатов обусловлена строгостью формулировок задач и математических доказательств. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, были представлены на ежегодных научных конференциях в МГУ им. М.В. Ломоносова «Тихоновские чтения» (2014), «Ломоносовские чтения» (2016) и на 8-ой Московской международной конференции по исследованию операций ORM 2016.

Публикации. По теме диссертации имеется 6 публикаций. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 3 статьях из перечня ВАК, 3 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет **96** страниц текста с **8** рисунками и **2** таблицами. Список литературы содержит **59** наименований.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук, доценту Владимиру Викторовичу Морозову за ценные замечания, поддержку и неоценимую помощь в подготовке диссертации.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна, теоретическая и практическая значимость представляемой работы, а также результаты, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена исследованию теоретико-игровой модели биржевых торгов с дискретными ставками и двумя состояниями.

В **разделе 1.1** диссертации дано введение в теорию повторяющихся игр с неполной информацией, определены основные термины и понятия.

Рассмотрим антагонистическую игру двух лиц, которая повторяется n раз, где $n \leq \infty$. Будем считать, что первый игрок знает функцию выигрыша в данной игре, в то время как второй игрок такой информацией не обладает. Однако второй игрок знает, что настоящая функция выигрыша является одной из κ возможных альтернатив. Каждой такой альтернативе второй игрок приписывает некоторую вероятность того, что данная функция выигрыша является истинной функцией выигрыша в рассматриваемой игре. Таким образом, априорные убеждения второго игрока задаются вероятностным вектором $\bar{p} = (p(1), p(2), \dots, p(\kappa))$, $\sum_{i=1}^{\kappa} p(i) = 1$.

С данными функциями выигрыша можно связать игры $G_1, G_2, \dots, G_\kappa$. В дальнейшем мы будем считать, что информационная неопределенность второго игрока заключается именно в незнании того, какая из игр разыгрывается.

На каждом шаге игры первый игрок может совершать действия из множества I, второй игрок — действия из множества J, при этом мы считаем, что множества действий одного игрока известно другому. Кроме того, положим, что второй игрок знает, что первый обладает точной информацией о том, какая именно игра разыгрывается, а первый игрок знает априорные убеждения второго.

Игры $G_1, G_2, \dots, G_\kappa$ будем называть *одношаговыми играми*. Все одношаговые игры описываются матрицами размера $|I| \times |J|$, где элементы матрицы задают выплаты первому игроку. Мы предполагаем, что оба игрока точно знают платежные матрицы игр $G_1, G_2, \dots, G_\kappa$. На каждом шаге игры первый игрок выбирает номер строки, и одновременно с ним второй игрок выбирает номер столбца. В конце каждого хода действия игроков оглашаются, и элемент из матрицы, отвечающей настоящей игре, прибавляется к выигрышу первого игрока и вычитается из выигрыша второго. Таким образом, первый игрок знает свой выигрыш на каждом этапе игры, в то время как второй может лишь рассчитать свой ожидаемый выигрыш. В завершение, мы считаем, что данное описание известно обоим игрокам.

Данная игра с неполной информацией описывается в виде игры в нормальной форме следующим образом. Обозначим через $S = \{1, 2, \dots, \kappa\}$ множество возможных альтернатив или *состояний природы*. Перед началом игры ходом случая в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p}$ выбирается состояние $s \in S$. Далее на протяжении n шагов разыгрывается игра G_s. Первый игрок информирован о результате хода случая, второй игрок — нет. В остальном правила данной игры совпадают с описанными выше.

Пусть $h_t = ((i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_t, j_t))$ — история ставок игроков после завершения шага t. Множество все таких h_t обозначим через H_t.

Обозначим через $\Delta(X)$ совокупность всех вероятностных распределений на множестве X.

Стратегией первого игрока в такой игре является последовательность ходов (отображений) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^1, \sigma_t^2, \ldots, \sigma_t^\kappa)$, и $\sigma_t^s : H_{t-1} \to \Delta(I)$ — смешанная стратегия, зависящая от предыдущих ходов, которую первый игрок использует, если ходом случая реализовалось состояние s.

Аналогичным образом определим стратегию второго игрока как последовательность ходов (отображений) $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \to \Delta(I)$ — смешанная стратегия, зависящая от предыдущих ходов. Как видно, ход второго игрока на каждом шаге игры зависит только от предыдущих ходов, и не зависит от состояния, в силу того, что второй игрок не информирован о результате хода случая.

Отметим, что, как показано в книге Мертенса, Сорена и Замира[12], на шаге t обоим игрокам достаточно принимать в расчет лишь последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_{t-1})$ действий первого игрока на предыдущих ходах. Это связано с тем, что информация, получаемая вторым игроком относительно состояния s, может передаваться лишь посредством действий первого игрока.

Также нужно отметить, что в данной работе рассмотрены игры, в которых выигрыш равен суммарным выплатам, в отличие от постановки из монографии Аумана, Машлера, в которой рассматривались игры с усредненными выплатами.

В **разделе 1.2** приводится описание дискретной модели биржевых торгов. Следуя работе В. К. Доманского (см. ссылку на стр. 4), рассматривается упрощенная модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов. Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая может быть либо $m \in \mathbb{N}$ с вероятностью p, либо 0 с вероятностью $1 - p$. Таким образом определенный ход случая является упрощенным аналогом некоторого шокового события на финансовом рынке (такого, как, например, публикация отчетов о доходах некоторой компании). Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый — инсайдер.

Рассмотрим t-й шаг торгов, где $t = \overline{1,n}$. На данном шаге первый игрок выбирает ставку $i_t \in I = \{0, 1, \ldots, m\}$, а второй — ставку $j_t \in J = \{0, 1, \ldots, m\}$. Игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает у другого акцию по цене равной $\beta \max(i_t, j_t) + \overline{\beta} \min(i_t, j_t)$, где $\beta \in (0, 1)$, $\overline{\beta} = 1 - \beta$. Если ставки равны,

[12]*Mertens J. F.*, *Sorin S.*, *Zamir S.* Repeated games. Cambridge : Cambridge University Press, 2015.

то сделка на t-м шаге не состоится. Коэффициент β можно интерпретировать как *переговорную силу продавца*: чем ближе значение к 1, тем большую сумму получит продавец акции в результате сделки.

Считаем, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, т.е. торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Цель игроков состоит в максимизации стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа купленных акций и суммы денег, полученных в результате торгов. Таким образом, не ограничивая общности, можно положить, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

В **разделе 1.3** формально определяется повторяющаяся игра с неполной информацией, отвечающая данному выше описанию.

Пусть множество состояний рынка $S = \{L, H\}$. Перед началом игры случай выбирает $s \in S$ с вероятностями $P(s = H) = p$ и $P(s = L) = 1 - p$. После этого на протяжении $n \leq \infty$ шагов игроки участвуют в игре с матрицей $A^{s,\beta}$, где элементы матрицы заданы следующим образом:

$$a^{L,\beta}(i,j) = \begin{cases} \overline{\beta} i + \beta j, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -\beta i - \overline{\beta} j, & i > j, \end{cases} \qquad a^{H,\beta}(i,j) = \begin{cases} \overline{\beta} i + \beta j - m, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ m - \beta i - \overline{\beta} j, & i > j. \end{cases}$$

Как и в работе В. К. Доманского, мы ограничимся рассмотрением только тех стратегий σ первого игрока, которые гарантируют ему на каждом шаге игры неотрицательный выигрыш. Множество таких стратегий обозначим через Σ. Множество стратегий второго игрока обозначим через T.

Обозначим через $\mathbb{E}_{(p,\sigma,\tau)}$ математическое ожидание по мере, индуцированной на $S \times I^n \times J^n$ ходом случая и смешанными стратегиями σ и τ игроков. При применении первым игроком смешанной стратегии σ, а вторым игроком смешанной стратегии τ, ожидаемый выигрыш первого игрока

$$K_n^{m,\beta}(p, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{(p,\sigma,\tau)} \sum_{t=1}^{n} \left(p a^{H,\beta}(i_t^H, j_t) + (1-p) a^{L,\beta}(i_t^L, j_t) \right). \qquad (1)$$

Полученную игру обозначим через $G_n^{m,\beta}(p)$. Ее верхнее и нижнее значения даются формулами

$$\underline{V}_n^{m,\beta}(p) = \max_{\sigma \in \Sigma} \inf_{\tau \in \mathrm{T}} K_n^{m,\beta}(p, \sigma, \tau), \quad \overline{V}_n^{m,\beta}(p) = \min_{\tau \in \mathrm{T}} \sup_{\sigma \in \Sigma} K_n^{m,\beta}(p, \sigma, \tau).$$

Если верхнее и нижнее значения совпадают, то игра имеет значение, которое мы обозначим $V_n^{m,\beta}(p)$.

В **разделе 1.4** рассматривается следующая чистая стратегия второго игрока τ^k, $k \in J$, введенная В. К. Доманским в базовой работе:

$$\tau_1^k = k, \quad \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

Пусть стратегия второго игрока τ^* состоит в применении τ^k при $p \in \big((k-\overline{\beta})/m, (k+\beta)/m\big]$ $k = \overline{0,m}$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Зафиксируем вероятность* $p \in [0,1]$. *Тогда при использовании вторым игроком стратегии* τ^* *в игре* $G_\infty^{m,\beta}(p)$, *выигрыш первого игрока ограничен сверху величиной* $H_\infty^{m,\beta}(p)$, *т.е.*

$$\max_{\sigma \in \Sigma} K_\infty^{m,\beta}(p, \sigma, \tau^*) \le H_\infty^{m,\beta}(p).$$

$H_\infty^{m,\beta}(p)$ *является вогнутой кусочно-линейной функцией, график которой состоит из* $m+1$ *линейных сегментов и полностью определяется своими значениями в следующих точках*:

$$H_\infty^{m,\beta}(k+\beta)/m) = \frac{1}{2}\left((m-(k+\beta))(k+\beta) + \overline{\beta}\beta\right), \ k = \overline{0, m-1},$$
$$H_\infty^{m,\beta}(0) = H_\infty^{m,\beta}(1) = 0.$$

В **разделе 1.5** описана стратегия первого игрока, гарантирующая ему выигрыш не менее $H_\infty^{m,\beta}(p)$ в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$.

Стратегию σ первого игрока в n-шаговой игре можно представить как $(\sigma_1, \sigma(i), i \in I)$, где σ_1 — ход первого игрока на первом шаге игры, а $\sigma(i)$ — стратегия в игре продолжительности $n-1$, зависящая от ставки i на первом шаге. Аналогично, стратегию второго игрока можно представить как $(\tau_1, \tau(i), i \in I)$. Тогда для функции выигрыша справедливо следующее представление

$$K_n^{m,\beta}(p,\sigma,\tau) = K_1^{m,\beta}(p,\sigma_1,\tau_1) + \sum_{i \in I} q(i) K_{n-1}^{m,\beta}(p(H|i),\sigma(i),\tau(i)). \qquad (2)$$

Отсюда получаем, что, определив одношаговую стратегию инсайдера для любого значения $p \in [0,1]$, можно рекурсивно продолжить ее применение на последующих шагах игры, тем самым определив стратегию в игре произвольной продолжительности.

Пусть на первом шаге игры первый игрок выбирает ход $\sigma_1 = (\sigma_1^H, \sigma_1^L)$, где $\sigma_{1,i}^s$ – вероятность сделать ставку i в состоянии $s \in S$. Будем использовать эквивалентный способ задания хода. Для этого определим следующие параметры: полные вероятности $q(i)$ использования действий i, а также апостериорные вероятности $p(s|i)$ состояния s при условии, что на предыдущем шаге первый игрок сделал ставку i. Тогда вероятности $\sigma_{1,i}^s$ можно найти по формуле Байеса $\sigma_{1,i}^s = p(s|i)q(i)/p(s)$.

Построим оптимальную стратегию инсайдера, определив его ход для всех значений вероятности p. При p равном 0 или 1 первый игрок применяет ставки 0 и m соответственно с вероятностью 1. При $p = k/m$, $k = \overline{1, m-1}$ первый игрок рандомизирует выбор ставок k и $k+1$ с параметрами

$$q(k) = \beta,\, p(H|k) = (k-1+\beta)/m,\, q(k+1) = \overline{\beta},\, p(H|k+1) = (k+\beta)/m.$$

При $p = (k+\beta)/m$, $k = \overline{0, m-1}$ он рандомизирует выбор ставок k и $k+1$ с параметрами

$$q(k) = \overline{\beta},\, p(H|k) = k/m,\, q(k+1) = \beta,\, p(H|k+1) = (k+1)/m.$$

При $p = \lambda(k+\beta)/m + (1-\lambda)(k+1)/m$, $\lambda \in (0,1)$ первый игрок рандомизирует выбор ставок $k, k+1, k+2$ с параметрами

$$\begin{aligned} q(k) = \lambda\overline{\beta}, &\quad p(H|k) = k/m, \\ q(k+1) = \beta, &\quad p(H|k+1) = \lambda(k+1)/m + (1-\lambda)(k+\beta)/m, \\ q(k+2) = (1-\lambda)\overline{\beta}, &\quad p(H|k+2) = (k+1+\beta)/m. \end{aligned}$$

Наконец, при $p = \lambda k/m + (1-\lambda)(k+\beta)/m$, $\lambda \in (0,1)$ первый игрок рандомизирует выбор ставок k и $k+1$ с параметрами

$$q(k) = \lambda\beta + (1-\lambda)(1-\beta),\; p(H|k) = \frac{\lambda\beta}{q(k)}\frac{k-1+\beta}{m} + \frac{(1-\lambda)(1-\beta)}{q(k)}\frac{k}{m},$$
$$q(k+1) = \lambda(1-\beta) + (1-\lambda)\beta,\; p(H|k+1) = \frac{\lambda(1-\beta)}{q(k+1)}\frac{k+\beta}{m} + \frac{(1-\lambda)\beta}{q(k+1)}\frac{k+1}{m}.$$

Пусть при $\beta \in (0,1)$ стратегия σ^* состоит в применении инсайдером описанных выше одношаговых стратегий для соответствующих значений апостериорной вероятности. При $\beta = 1$ стратегий инсайдера найдена в работе В. К. Доманского (см. ссылку на стр. 4). При $\beta = 0$ стратегия может быть получена из соображений симметрии. Таким образом, стратегия σ^* определена для всех значения $\beta \in [0,1]$.

Обозначим гарантированный выигрыш первого игрока в игре $G_n^{m,\beta}(p)$ при применении стратегии σ через $L_n^{m,\beta}(p,\sigma) = \min_{\tau \in \mathrm{T}} K_n^{m,\beta}(p,\sigma,\tau)$. В работе показано, что функции $L_\infty^{m,\beta}(p,\sigma^*)$ и $H_\infty^{m,\beta}(p)$ совпадают при всех значениях $p \in [0,1]$, $\beta \in [0,1]$.

Теоремы о значении игры $G_\infty^{m,\beta}(p)$ даны в **разделе 1.6**.

Теорема 2. *Игра $G_\infty^{m,\beta}(p)$ имеет значение $V_\infty^{m,\beta}(p) = H_\infty^{m,\beta}(p) = L_\infty^{m,\beta}(p)$. При этом σ^* – оптимальная стратегия первого игрока, а τ^* – оптимальная стратегия второго игрока.*

Теорема 3. *При любом значении $p \in [0,1]$, $\beta \in (0,1)$ и $m \geq 3$ справедливо неравенство*

$$V_\infty^{m,\beta}(p) \geq V_\infty^{m,1}(p) = V_\infty^{m,0}(p),$$

причем равенство достигается только при $p = k/m, k = \overline{0,m}$.

Раздел 1.7 посвящен анализу случайных блужданий апостериорных вероятностей p^t состояния H, возникающих при применении игроками оптимальных стратегий σ^* и τ^*. Случайная величина $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \min\{t \geq 0 : p^t \in \{0,1\}\}$ соответствует моменту поглощения. Пусть $\tau(p)$ — средняя продолжительность игры при условии, что априорная вероятность равна p.

Теорема 4. *Если $p \in \{k_1/m, (k_2+\beta)/m,\ k_1 = \overline{0,m},\ k_2 = \overline{0,m-1}\}$, то ожидаемая продолжительность игры $G_\infty^{m,\beta}(p)$ выражается формулами*

$$\tau\left((k+\beta)/m\right) = \frac{(m-k-\beta)(k+\beta)}{\beta\overline{\beta}}, \quad \tau\left(k/m\right) = \frac{k(m-k)}{\beta\overline{\beta}}.$$

Вторая глава посвящена исследованию дискретной модели рынка со счетным множеством состояний. В **разделе 2.1** дается формальное описание соответствующей повторяющейся игры.

Пусть множество состояний $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p(s),\ s \in S)$, имеющим конечную дисперсию состояния $\mathbb{D}\,\bar{p} < \infty$. Множество всех таких распределений обозначим $\overline{P}$.

На каждом шаге игры $t = \overline{1,n},\ n \leqslant \infty$, игроки делают ставки $i_t \in I,\ j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. Выплата первому игроку в состоянии s равна

$$a^{s,\beta}(i_t, j_t) = \begin{cases} (1-\beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1-\beta)j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш первого игрока обозначим при использовании игроками стратегий σ и τ равен $K_n^\beta(\bar{p}, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{(\bar{p},\sigma,\tau)} \sum_{t=1}^n a^{s,\beta}(i_t, j_t)$. Заданную таким образом игру обозначим $G_n^\beta(\bar{p})$.

В **разделе 2.2** получена оценка сверху выигрыша первого игрока.

Следующие множества распределений зададим ограничениями на математическое ожидание состояния:

$$\Theta(x) = \left\{\bar{p} \in \overline{P} : \mathbb{E}\,\bar{p} = x\right\},\ \Lambda(x, y) = \left\{\bar{p} \in \overline{P} : x < \mathbb{E}\,\bar{p} \leqslant y\right\}.$$

Пусть τ^* — стратегия второго игрока, состоящая в применении τ^k при $\bar{p} \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$. Отметим, что при заданном распределении $\bar{p}$ выбор k зависит от значения β.

Теорема 5. *При использовании вторым игроком стратегии τ^* выигрыш первого игрока в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ ограничен сверху величиной*

$$H_\infty^\beta(\bar{p}) = \inf_{k \in J} \sum_{s \in S} p(s) h_\infty^s(\tau^k).$$

Функция $H_\infty^\beta(\bar{p})$ является кусочно-линейной вогнутой с областями линейности $\Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ и областями недифференцируемости $\Theta(k+\beta)$ при $k \in S$. Для распределений $\bar{p}$ с $\mathbb{E}\,\bar{p} = k-1+\beta+\eta,\ \eta \in (0,1]$, ее значение равно

$$H_\infty^\beta(\bar{p}) = \left(\mathbb{D}\,\bar{p} + \beta(1-\beta) - \eta(1-\eta)\right)/2. \tag{3}$$

В **разделе 2.3** построена стратегия первого игрока, гарантирующая ему выигрыш не менее $H_\infty^\beta(\bar{p})$.

Обозначим $L_n^\beta(\bar{p},\sigma)$ гарантированный выигрыш первого игрока, использующего стратегию σ в игре $G_n^\beta(\bar{p})$, т.е. $L_n^\beta(\bar{p},\sigma) = \inf_{\tau\in\mathrm{T}} K_n^\beta(\bar{p},\sigma,\tau)$.

Обозначим e^s вырожденное вероятностное распределение с носителем в точке s. Пусть $\bar{p}^x(l,r) \in \Theta(x)$ — распределение с носителем $\{l,r\}$, $l < r$. При этом распределении вероятности реализации состояний l и r равны $(r-x)/(r-l)$ и $(x-l)/(r-l)$ соответственно, а дисперсия $\mathbb{D}\,\bar{p}^x(l,r) = (x-l)(r-x)$.

Способ построения оптимальной стратегии первого игрока основан на следующем представлении распределений $\bar{p} = (p(s),\ s \in S) \in \Theta(x)$ в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечными носителями:

$$\bar{p} = \begin{cases} p(x)e^x + \displaystyle\sum_{r=x+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p})\bar{p}^x(l,r), & x \in S, \\ \displaystyle\sum_{r=\lfloor x+1\rfloor}^{\infty}\sum_{l=0}^{\lceil x-1\rceil} \alpha_{l,r}(\bar{p})\bar{p}^x(l,r), & x \notin S, \end{cases} \tag{4}$$

$$\alpha_{l,r}(\bar{p}) = (r-l)p(l)p(r)/\sum_{t=0}^{\lceil x-1\rceil} p(t)(x-t).$$

Лемма 1. *Пусть $\bar{p}_1,\bar{p}_2 \in \overline{P}$, $\sigma^1,\sigma^2 \in \Sigma$ — стратегии первого игрока. Тогда для $\bar{p} = \lambda\bar{p}_1 + (1-\lambda)\bar{p}_2$, $\lambda \in [0,1]$, найдется такая стратегия $\sigma^c \in \Sigma$, что*

$$L_n^\beta(\bar{p},\sigma^c) \geqslant \lambda L_n^\beta(\bar{p}_1,\sigma^1) + (1-\lambda)L_n^\beta(\bar{p}_2,\sigma^2).$$

В диссертации показано, что для доказательства совпадения верхней и нижней оценок выигрыша в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ можно ограничиться рассмотрением только распределений $\bar{p} = \bar{p}^{k+\beta}(l,r) \in \Theta(k+\beta)$, $k \in S$, $l = \overline{0,k}$, $r = \overline{k+1,\infty}$.

Обозначим $\hat{\sigma_k}$ ход первого игрока, состоящий в выборе ставки из множества $\{k,k+1\}$. Ход $\hat{\sigma_k}$ определяется заданием полных вероятностей действий $q(k), q(k+1)$ и апостериорных распределений $\bar{p}(k), \bar{p}(k+1)$, причем $q(k) + q(k+1) = 1$.

Определим стратегию σ^* первого игрока в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$. Введем множество распределений $P(l{,}r) = \left\{\bar{p}^{k_1}(l,r),\, \bar{p}^{k_2+\beta}(l,r),\, k_1 = \overline{l{,}r}, k_2 = \overline{l{,}r-1}\right\}$. При $\bar{p} \in P(l{,}r)$ первый ход σ_1^* стратегии σ^* определяется следующим образом. Если $\bar{p} = \bar{p}^l(l{,}r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l{,}r)$, то первый игрок использует ставки l и

Таблица 1 — Параметры хода σ_1^* при $\bar{p} \in P(l,r)$

$\bar{p}$	$q(k)$	$q(k+1)$	$\bar{p}^k$	$p(k+1)$
$\bar{p}^k(l,r)$	β	$1-\beta$	$\bar{p}^{k-1+\beta}(l,r)$	$\bar{p}^{k+\beta}(l,r)$
$\bar{p}^{k+\beta}(l,r)$	$1-\beta$	β	$\bar{p}^k(l,r)$	$\bar{p}^{k+1}(l,r)$

r, соответственно, с вероятностью 1. В противном случае он использует $\hat{\sigma_k}$ с параметрами из таблицы 1.

На последующих шагах игры ход σ_1^* применяется рекурсивно для соответствующих значений апостериорных вероятностей. В результате определили стратегию σ^* для распределения $\bar{p} \in P(l{,}r)$.

Для произвольного распределения $\bar{p} \in \Theta(k)$, $k \in S$, стратегию σ^* определим следующим образом. Если реализуется состояние $s = k$, то гарантированный выигрыш первого игрока не превышает 0 и он прекращает игру. Таким образом, первый игрок, следуя стратегии σ^*, прекращает игру с вероятностью p^k. В противном случае игрок использует конструкцию леммы 1 для построения стратегии, соответствующей выпуклой комбинации распределений $\bar{p}^k(l,r)$ в разложении $\bar{p}$. Первый ход такой стратегии использует две ставки k и $k+1$ с полными вероятностями $(1-p(k))\beta$ и $(1-p(k))(1-\beta)$ соответственно. Апостериорные вероятностные распределения являются выпуклыми комбинациями соответствующих апостериорных двухточечных распределений и даются следующими формулами:

$$\bar{p}(k) = \frac{1}{1-p(k)} \sum_{r=k+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^{k-1+\beta}(l,r),$$

$$\bar{p}(k+1) = \frac{1}{1-p(k)} \sum_{r=k+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^{k+\beta}(l,r).$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для распределений $\bar{p} \in \Theta(k+\beta) \cup \Lambda(k, k+\beta)$, $k \in S$.

В **разделе 2.4** дана теорема о значении игры $G_\infty^\beta(\bar{p})$.

Теорема 6. *При любом распределении $\bar{p} \in \overline{P}$ игра $G_\infty^\beta(\bar{p})$ имеет значение $V_\infty^\beta(\bar{p}) = H_\infty^\beta(\bar{p}) = L_\infty^\beta(\bar{p})$, а σ^* и τ^* — оптимальные стратегии игроков.*

В **разделе 2.5** приведена вторая оптимальная стратегия инсайдера ξ^*. Введем множество распределений

$$P'(l,r) = \{\bar{p}^l(l,r), \bar{p}^r(l,r)\} \cup \left\{\bar{p}^{k+\beta}(l,r),\ k = \overline{l, r-1}\right\}.$$

При $\bar{p} \in P'(l,r)$ первый ход ξ_1^* стратегии $\bar{\xi}^*$ определяется следующим образом. Если $\bar{p} = \bar{p}^l(l,r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l,r)$, то первый игрок использует ставки l и r соответственно с вероятностью 1. В противном случае он использует $\hat{\sigma_k}$ с параметрами из таблицы 2.

Таблица 2 — Параметры хода ξ_1^* при $\bar{p} \in P'(l,r)$

$\bar{p}$	$q(k)$	$q(k+1)$	$\bar{p}(k)$	$\bar{p}(k+1)$
$\bar{p}^{l+\beta}(l,r)$	$\frac{1}{1+\beta}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$\bar{p}^l(l,r)$	$\bar{p}^{l+1+\beta}(l,r)$
$\bar{p}^{r-1+\beta}(l,r)$	$\frac{1-\beta}{2-\beta}$	$\frac{1}{2-\beta}$	$\bar{p}^{r-2+\beta}(l,r)$	$\bar{p}^r(l,r)$
$\bar{p}^{k+\beta}(l,r)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\bar{p}^{k-1+\beta}(l,r)$	$\bar{p}^{k+1+\beta}(l,r)$

Для остальных распределений $\bar{p}$ стратегия ξ^* определяется аналогично тому, как это было сделано для стратегии σ^*.

Из таблицы 2 видно, что при $\bar{p} \in P'(l,r)$ использование первым игроком стратегии ξ^* порождает случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей существенно отличное от случайного блуждания, порождаемого при использовании σ^*. Данное случайное блуждание симметрично с вероятностями перехода в соседние состояния равными $1/2$, симметрия нарушается только в крайних и соседних к ним состояниях.

Третья глава посвящена исследованию теоретико-игровой модели биржевых торгов с непрерывными ставками и двумя состояниями.

В **разделе 3.1** дано описание соответствующей модели. Как и в главе 1, множество возможных состояний рынка $S = \{H, L\}$. На каждом шаге торгов первый игрок делает ставку из множества $I = [0,1]$, второй игрок — ставку из множества $J = [0,1]$.

Обозначим через $\pi_t = (\pi_t^R, \pi_t^N)$ портфель первого игрока на t-м шаге торгов, где π_t^R и π_t^N — количество единиц рискового и безрискового активов соответственно. Если на t-м шаге игроки делают ставки $x \in I$, $y \in J$, то портфель $\pi_t = \pi_{t-1} + \vartheta(x, y)$, где

$$\vartheta(x,y) = \mathbf{1}_{x>y}(1, -(\beta x + \overline{\beta} y)) + \mathbf{1}_{x<y}(-1, \overline{\beta} x + \beta y). \tag{5}$$

Таким образом, одна акция продается по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок с заданным коэффициентом β. Стоимость портфеля при этом равна $V(\pi_t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{1}_{s=H}\, \pi_t^R + \pi_t^N$. Цель игроков состоит в максимизации прибыли, полученной от торгов. Прибыль первого игрока после завершения сделок будет равна $V(\pi_n)$, а второго $-V(\pi_n)$.

В **разделе 3.2** рассмотрены теоретико-игровые постановки основной задачи и двойственной к ней в смысле Де Мейера, которые мы будем называть прямой и двойственной играми соответственно. Как отмечено в работе Де Мейера и Салей (см. ссылку на стр. 3), прямая (двойственная) игра больше подходит для построения оптимальной стратегии первого (второго) игрока.

В **подразделе 3.2.1** дается определение прямой игры. Стратегии σ, τ игроков, а также множества стратегий Σ_n, T_n в n-шаговой игре определяются аналогично тому, как это было сделано в главе 1. Пара стратегий (σ, τ) вместе с ходом случая индуцирует на $S \times H_n$ вероятностное распределение $\Pi[p, \sigma, \tau]$. Тогда выигрыш первого игрока равен $g_n^\beta(p, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{(p,\sigma,\tau)}\, V(\pi_n)$. Выигрыш второго игрока при этом равен $-g_n^\beta(p, \sigma, \tau)$. Полученную игру обозначим через $G_n^\beta(p)$, а ее нижнее и верхнее значения — через $\underline{V}_n^\beta(p)$ и $\overline{V}_n^\beta(p)$ соответственно. В том случае, когда $\underline{V}_n^\beta(p) = \overline{V}_n^\beta(p) = V_n^\beta(p)$, игра имеет значение $V_n^\beta(p)$. Положим при этом, что $V_0^\beta(p) \equiv 0$. В дальнейшем верхний индекс β мы будем часто опускать.

Рассмотрим стратегию σ первого игрока как пару $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 – ход игрока на первом шаге игры, а $\tilde{\sigma}$ – стратегия в игре продолжительности n, зависящая от ставок (x, y) на первом шаге. Аналогично, стратегию τ второго игрока можно представить как пару $(\tau_1, \tilde{\tau})$. Случайные величины ставок, имеющих распределения σ_1 и τ_1, обозначим через X и Y соответственно.

Пара (σ_1, τ_1) вместе с ходом случая индуцирует вероятностное распределение $\Pi[p, \sigma_1, \tau_1]$ на $S \times I \times J$. Обозначим через $p(x) = \Pi[p, \sigma_1](s = H \mid X = x)$ апостериорную вероятность состояния H при условии, что первый игрок сделал ставку x. Отметим, что апостериорная вероятность не зависит от ставки второго игрока y, так как она не зависит от s. Тогда для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$g_{n+1}(p, \sigma, \tau) = g_1(p, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{(p,\sigma_1,\tau_1)}\, g_n(p(X), \tilde{\sigma}(X, Y), \tilde{\tau}(X, Y)).$$

Отсюда видно, что определив одношаговую стратегию для любого значения $p \in [0, 1]$, можно рекурсивно продолжить ее применение на последующих шагах игры. В силу того, что игра с $p \in \{0, 1\}$ имеет тривиальное решение, дальнейшие построения будут проведены для значений $p \in (0, 1)$.

В **подразделе 3.2.2** определяется двойственная игра следующим образом. Перед началом игры первый игрок выбирает текущее состояние $s \in S$. Второй игрок не осведомлен о выборе первого. Если $s = H$, то первый вынужден заплатить второму штраф z в конце игры. В остальном правила двойственной игры $G_n^*(z)$ аналогичны правилам игры $G_n(p)$.

Стратегией первого игрока в двойственной игре является пара $(p,\, \sigma)$, где $p \in [0, 1]$, $\sigma \in \Sigma_n$. Множество стратегий второго игрока совпадает с T_n.

Выигрыш второго игрока, который он стремится максимизировать, определяется как $g_n^*(z, (p,\, \sigma), \tau) = zp - g_n(p, \sigma, \tau)$. Верхнее и нижнее значения игры обозначим через $\overline{W}_n(z)$ и $\underline{W}_n(z)$ соответственно. В том случае, когда $\overline{W}_n(z) = \underline{W}_n(z) = W_n(z)$, игра имеет значение $W_n(z)$. При этом $W_0(z) = \min(z, 0)$.

В **разделе 3.3** получено решение одношаговой игры $G_1^\beta(p)$. Найденные в диссертации оптимальные стратегии игроков зависят от β. В то же время значение игры $V_1^\beta(p) = p(1 - p)$ от β не зависит.

В **разделе 3.4** найдены оценки выигрыша первого и второго игроков в прямой и двойственной играх.

Пусть $a(v)$ — вогнутая функция, определенная на прямой, причем a может принимать значение $-\infty$. Функцией, сопряженной к a в смысле Фенхеля, называется

$$a^*(u) = \inf_{v \in \mathbb{R}} \left(uv - a(v)\right).$$

Непрерывная дифференцируемость функций $\underline{V}_n(p)$, $\underline{V}_n^*(z)$ и $\underline{W}_n(z)$ доказана в разделе 3.5.

Получению оценки нижнего значения игры $G_n(p)$ посвящен **подраздел 3.4.1**. Как показано в базовой работе Де Мейера и Салей, одношаговую стратегию σ_1 первого игрока в игре $G_n(p)$, можно параметризовать функциями f и

Q, удовлетворяющими следующим свойствам:

- $f : [0,1] \to [0,1], \forall u_1, u_2 \in [0,1] : u_1 < u_2 \implies f(u_1) \leqslant f(u_2);$ (6a)
- $\int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = p;\ Q(u) \geqslant 0,\ u \in [0,1];$ (6b)
- $\forall u_1, u_2 \in [0,1] : f(u_1) = f(u_2) \implies Q(u_1) = Q(u_2).$ (6c)

Пусть $\mu = \Pi[p, \sigma_1]$. Так как для любого $B \in \mathscr{B}(I)$ выполнено

$$\mu(X \in B \mid s = H) = \int_0^1 \mathbf{1}_{f(u)\in B} \frac{Q(u)}{p}\,\mathrm{d}u,$$

то восстановить σ_1 по (f, Q) можно следующим образом. Если ходом случая было выбрано состояние H, то инсайдер выбирает $u \in [0,1]$ как реализацию случайной величины с плотностью вероятности $Q(u)/p$ и делает ставку $x = f(u)$. Аналогично, в состоянии L он выбирает u как реализацию случайной величины с плотностью вероятности $(1 - Q(u))/(1-p)$ и делает ставку $x = f(u)$.

Следуя схеме из работы Де Мейера и Салей, в диссертации найдены следующие функции:

$$f(u) = (u - \overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^{u} 2(v - \overline{\beta})Q(v)\,\mathrm{d}v,\text{[13]} \tag{7}$$

$$Q(u) = \underline{V}_n^{*\prime}(1 + \lambda - 2u), \tag{8}$$

где λ находится из уравнения $\int_0^1 \underline{V}_n^{*\prime}(1 + \lambda - 2u)\,\mathrm{d}u = p$.

Лемма 2. *Функции f и Q, определенные в* (7) *и* (8)*, принимают значения в $[0,1]$ и удовлетворяют условиям* (6a) — (6c)*, т.е. параметризуют некоторую стратегию σ_1 первого игрока.*

Показано, что определенные выше f и Q параметризуют стратегию первого игрока, выравнивающую его выигрыш при применении вторым игроком ставки $y \in [f(0), f(1)]$ и дающую выигрыш не меньше при $y \in [0,1] \setminus [f(0), f(1)]$.

[13] При $u = \overline{\beta}$ функция $f(u)$ доопределяется по правилу Лопиталя как $Q(\overline{\beta})$.

Теорема 7. *При любом $p \in [0,1]$ для нижнего значения игры $G_{n+1}(p)$ справедлива оценка $\underline{V}_{n+1}(p) \geqslant K^*(p)$, где*

$$K(\lambda) = \int_0^1 \underline{V}^*_n(1 + \lambda - 2u)\,\mathrm{d}u.$$

В **подразделе 3.4.2** получена оценка для нижнего значения игры $G^*_n(z)$. Аналогично тому, как это было сделано для первого игрока, параметризуем τ_1 при помощи неубывающей функции $h : [0,1] \to [0,1]$.

Пусть

$$h(u) = 2(u - \overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^{u} (v - \overline{\beta})\underline{W}'_n(z - 2v + 1)\,\mathrm{d}v.^{14} \tag{9}$$

Лемма 3. *Функция h, определенная в* (9), *обладает следующими свойствами*:

- $h : [0,1] \to [0,1]$, $\forall u_1, u_2 \in [0,1] : u_1 < u_2 \implies h(u_1) \le h(u_2)$;
- $h(u_1) = h(u_2) \implies h(u_1) = \underline{W}'_n(z - 2u_1 + 1) = \underline{W}'_n(z - 2u_2 + 1)$.

В частности, функция h может служить параметризацией некоторого распределения τ_1.

В диссертации показано, что стратегия второго игрока τ_1, соответствующая h, выравнивает его выигрыш при применении первым игроком ставки $x \in [h(0), h(1)]$ и дает не меньший выигрыш при $x \in [0,1] \setminus [h(0), h(1)]$.

Теорема 8. *Для нижнего значения игры $G^*_{n+1}(z)$ справедлива оценка*

$$\underline{W}_{n+1}(z) \geqslant \int_0^1 \underline{W}_n(z - 2v + 1)\,\mathrm{d}v.$$

В **разделе 3.5** даны утверждения о значении прямой и двойственной игр, о динамике игрового взаимодействия между игроками, а также приведен алгоритм численного построения оптимальных стратегий игроков в n-шаговой игре.

Поскольку выражения для нижних оценок в теоремах 7 и 8 совпадают с аналогичными выражениями в работе Де Мейера, Салей, справедливы все двойственные соотношения между $\underline{V}_n(p)$ и $\underline{W}_n(z)$, а также утверждения относительно оптимальности стратегий.

---

[14]При $u = \overline{\beta}$ функция $h(u)$ доопределяется по правилу Лопиталя как $\underline{W}'_n(z - 2\overline{\beta} + 1)$.

Теорема 9. *Для всех $z \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\underline{V}^*_n(z) = \overline{W}_n(z) = \overline{V}^*_n(z) = \underline{W}_n(z). \tag{10}$$

Таким образом, игры $G_n(p)$ и $G^*_n(z)$ имеют значения $V_n(p)$ и $W_n(z)$ соответственно. Кроме того,

$$W_{n+1}(z) = \int_0^1 W_n(z - 2u + 1)\,\mathrm{d}u. \tag{11}$$

Теорема 10. *Стратегии σ^0 и τ^0 являются оптимальными в игре $G_n(p)$ тогда и только тогда, когда стратегии (p, σ^0), τ^0 являются оптимальными при $z = V'_n(p)$ в игре $G^*_n(z)$.*

Следствие 1. *Значения игр $G^\beta_n(p)$ и $G^{\beta *}_n(z)$ не зависят от коэффициента β.*

Динамика игрового взаимодействия также совпадает с таковой в работе Де Мейера, Салей.

Алгоритм построения оптимальных стратегий в игре $\mathbf{G_n(p)}$. В силу рекурсивной структуры игры $G_n(p)$ достаточно описать способ получения оптимальных действий игроков на первом шаге игры при заданном значении p.

1. Находим λ как решение уравнения $p = W'_n(\lambda)$. Производная $W'_n(\cdot)$ является кусочно-полиномиальной функцией n-го порядка. Следовательно, ее корни могут быть найдены численно с любой заданной точностью.
2. Согласно (8) и (10) находим функцию $Q(u) = W'_{n-1}(\lambda + 1 - 2u)$. В силу сказанного выше функция $Q(u)$ является кусочно-полиномиальной порядка $n - 1$.
3. Выбираем u_1 как реализацию случайной величины U_1, распределенной на $[0, 1]$ с плотностью вероятности $Q(u)/p$ в состоянии H и $(1 - Q(u))\,/(1 - p)$ в состоянии L.
4. Согласно (7) находим $x = f(u_1) = (u_1 - \overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^{u_1} 2(v - \overline{\beta})Q(v)\,\mathrm{d}v$. Так как для расчета оптимальной ставки x необходимо знать значение $f(u)$ лишь в одной точке u, оно может быть эффективно найдено численно.
5. Находим u_2 как реализацию случайной величины U_2, распределенной равномерно на $[0, 1]$
6. Из (9) и теоремы 10 следует, что выражения для h и f совпадают. Таким образом, оптимальная ставка второго игрока $y = h(u_2) = f(u_2)$.

7. Если $n = 1$, игра заканчивается после объявления ставок. В противном случае игроки переходят к игре $G_{n-1}(p^1)$, где $p^1 = Q(u_1)$.

В **разделе 3.6** даны примеры аналитического нахождения оптимальных f и Q в одношаговой и двухшаговой играх.

Перспективы дальнейших исследований включают рассмотрение моделей более приближенных к условиям реального рынка.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Пьяных А. И.* Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером // Математическая теория игр и её приложения. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 68—84.
2. *Пьяных А. И.* Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2016. — № 1. — С. 34—40.
3. *Пьяных А. И.* О модификации многошаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками и асимметричной информацией // Математическая теория игр и её приложения. — 2016. — Т. 8, № 2. — С. 91—113.
4. *Пьяных А. И.* Об одной модификации биржевой игры с инсайдером // Тихоновские чтения: Научная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 27-31 октября 2014г.: Тезисы докладов. — М. : МАКС Пресс, 2014. — С. 65—65.
5. *Пьяных А. И.* О модификации многошаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками // Ломоносовские чтения: Научная конференция, Москва, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 18–27 апреля 2016г.: Тезисы докладов. — М. : Издательский отдел факультета ВМиК МГУ (лицензия ИД 05899 от 24.09.2001); МАКС Пресс, 2016. — С. 53—54.
6. *Pyanykh A. I.* Multistage bidding model with elements of bargaining: extension for a countable state space // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Moscow, October 17-22, 2016: Proceedings. Volume I. — Moscow : MAKS Press, 2016. — Pp. 162–165.

Пьяных Артем Игоревич

РЕШЕНИЕ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ С ОБОБЩЕННЫМ МЕХАНИЗМОМ ФОРМИРОВАНИЯ СДЕЛКИ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография ____