МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

УДК 519.83

Пьяных Артем Игоревич

РЕШЕНИЕ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ С ОБОБЩЕННЫМ МЕХАНИЗМОМ ФОРМИРОВАНИЯ СДЕЛКИ

Специальность 01.01.09 —

«дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент

Морозов Владимир Викторович

Москва — 2016

Оглавление

Стр.

Введение 4

Список сокращений и условных обозначений 9

Обзор литературы 10

Глава 1. Теоретико-игровая модель биржевых торгов с дискретными ставками и двумя состояниями 15

1.1 Основные понятия 15

1.2 Описание модели 18

1.3 Определение игры $\mathbf{G}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m},\beta}(\mathbf{p})$ 19

1.4 Оценка сверху выигрыша первого игрока 21

1.5 Оценка снизу выигрыша первого игрока 24

1.6 Значение игры $\mathbf{G}_{\infty}^{\mathbf{m},\beta}(\mathbf{p})$ 35

1.7 Динамика апостериорных вероятностей 36

Глава 2. Теоретико-игровая модель биржевых торгов с дискретными ставками и счетным множеством состояний 40

2.1 Описание модели рынка со счетным множеством состояний 40

2.2 Оценка сверху выигрыша первого игрока в игре $\mathbf{G}_{\infty}^{\beta}(\overline{\mathbf{p}})$ 42

2.3 Оценка снизу выигрыша первого игрока в игре $\mathbf{G}_{\infty}^{\beta}(\overline{\mathbf{p}})$ 45

2.4 Решение игры $\mathbf{G}_{\infty}^{\beta}(\overline{\mathbf{p}})$ 52

2.5 Вторая оптимальная стратегия инсайдера в игре $\mathbf{G}_{\infty}^{\beta}(\overline{\mathbf{p}})$ 53

Глава 3. Теоретико-игровая модель биржевых торгов с непрерывными ставками 56

3.1 Описание модели 56

3.2 Постановка задачи 57

3.2.1 Определение прямой игры $\mathbf{G_n}(\mathbf{p})$ 58

3.2.2 Определение двойственной игры $\mathbf{G^*_n}(\mathbf{z})$ 60

3.3 Решение одношаговой игры 61

3.4 Оценки выигрыша в $\mathbf{n}$-шаговой игре 66

3.4.1 Оценка нижнего значения игры $\mathbf{G_n}(\mathbf{p})$ 67

3.4.2 Оценка нижнего значения игры $\mathbf{G^*_n}(\mathbf{z})$ 76

3.5 Значение игры $\mathbf{G_n}\left(\mathbf{p}\right)$ 79

3.6 Примеры 85

Заключение 89

Список литературы 91

Введение

Актуальность темы. Повторяющиеся игры с неполной информацией представляют собой естественную модель для анализа информационного аспекта в продолжительном стратегическом взаимодействии агентов и позволяют ответить на вопросы о том, как быстро происходит раскрытие приватной информации, каковы эффективные механизмы ее сокрытия и какую выгоду из нее могут извлечь агенты.

Теория получила свое рождение в классических работах Харшаньи [40], Аумана, Машлера и Стернса [24]. Наиболее полно исследованы повторяющиеся антагонистические игры двух лиц с неполной информацией у одной из сторон. В таких играх информационная неопределенность моделируется введением множества S возможных состояний природы. Перед началом игры ходом случая выбирается конкретное состояние $s \in S$ в соответствии с некоторым вероятностным распределением, известным обоим игрокам. После чего игроки на протяжении n шагов играют в игру, соответствующую состоянию s. При этом первый игрок осведомлен о выбранном значении s, в то время как второй знает только то, что первый обладает приватной информацией.

Одной из областей приложения данной теории является анализ поведения агентов на финансовых рынках. Начиная с работы Башелье [27], для описания эволюции цен на активы используются винеровские процессы или – в дискретном случае – случайные блуждания. Возникновение случайных колебаний цен на рынке принято объяснять влиянием на процесс ценообразования множества слабых независимых внешних факторов. Однако гипотеза о полностью экзогенном происхождении случайных колебаний цен не является удовлетворительной. Гипотеза об их стратегическом происхождении была продемонстрирована в работе Де Мейера и Салей [33], где винеровская компонента в эволюции цен возникает в следствие асимметричной информированности агентов. В рамках данной модели два игрока на протяжении n шагов ведут торговлю однотипными рисковыми активами, причем один из них знает настоящую цену актива. На каждом шаге они делают вещественные ставки, и игрок, предложивший бо́льшую ставку, покупает у другого актив по предложенной цене; при равенстве ставок сделка не состоится. В работе Марино и Де Мейера [45], а также в работе В. К. Доманского [34] была исследована модель биржевых торгов с дискретными ставками, где было показано, что последовательность цен актива образует простое случайное блуждание.

В указанных работах использовался один и тот же механизм формирования сделки, а именно — продажа по наибольшей цене. При этом известно, что выбор конкретного механизма может существенным образом влиять на стратегическое поведение агентов и на их выигрыши в результате взаимодействия. Как было отмечено в работе Де Мейера и Салей [33], предположительно, причиной возникновения броуновского движения является полная симметрия между игроками (кроме информационной асимметрии). В частности, анализ модели с более общим симметричным механизмом формирования сделки отмечен как одно из дальнейших направлений исследования.

В работе Де Мейера [30] рассмотрена непрерывная модель с достаточно общим механизмом формирования сделки. Основной результат данной статьи заключается в том, что в асимптотике процесс эволюции цен на рисковый актив не зависит от конкретного механизма, а зависит только от априорного распределения цены актива. Однако, одним из условий, накладываемых на механизм формирования сделки, в рамках которых автором получены результаты, является существование значения соответствующих игр конечной продолжительности.

В работе М. С. Сандомирской [16] рассмотрена дискретная модель торгов с механизмом, в рамках которого игрок назначает цену покупки акции p_b, при этом цена продажи определяется как $p_a = p_b + x$, так называемый механизм с фиксированным спрэдом x. Другой механизм предложен в работе Чаттерджи и Самуэльсона [29]. Ими была рассмотрена модель двухстороннего аукциона с неполной информацией, в котором цена сделки равна выпуклой комбинации предложенных ставок с коэффициентом $\beta \in [0, 1]$. При этом в работе Майерсона и Саттертвейта [50] показано, что при определенных условиях механизм со значением $\beta = 1/2$ является оптимальным с точки зрения максимизации дохода от торгов. Подробное рассмотрение вопросов, связанных с переговорами при заключении сделок дано в книге В. В. Мазалова, А. Э. Менчера, Ю. С. Токаревой [9].

Цель работы. Исследование повторяющихся игр с неполной информацией, моделирующих биржевые торги с обобщенным механизмом формирования сделки.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются математические модели механизмов взаимодействия агентов на финансовых рынках. Предметом исследования являются повторяющиеся игры с неполной информацией, моделирующие биржевые торги между двумя различно информированными агентами.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать модель биржевых торгов с дискретными ставками и неограниченным количеством шагов. Определить влияние параметра механизма формирования сделки на поведение агентов и результат торгов.
2. Обобщить результаты анализа модели с дискретными ставками на случай рынка со счетным множеством возможных значений цены рискового актива.
3. Исследовать модель биржевых торгов с непрерывными ставками в случаях конечного и бесконечного количества шагов. Сравнить оптимальное поведение агентов при использовании обобщенного механизма формирования сделки с результатами оригинальной модели.

Методы исследования. В диссертации применялись методы теории игр, выпуклого анализа, теории двойственности и вариационного исчисления.

Научная новизна. В диссертации рассмотрены дискретные и непрерывные модели биржевых торгов с симметричным механизмом формирования сделки, отвечающим механизму Чаттерджи и Самуэльсона, т.е. продаже актива по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок. Модель биржевых торгов с дискретными ставками и указанным механизмом формирования сделки исследуется впервые. В диссертации построена оптимальная стратегии инсайдера, принципиально отличающаяся от найденных ранее. Исследование конечношаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками и указанным обобщенным механизмом формирования сделки также проведено впервые. Получен результат о независимости значения соответствующей повторяющейся игры от параметра механизма.

Теоретическая и практическая значимость. Получено решение ряда повторяющихся игр с неполной информацией, моделирующих биржевые торги с обобщенным механизмом формирования сделки, что позволяет оценить влияние конкретного вида механизма на оптимальное поведение агентов и результат торгов.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Получено решение повторяющейся антагонистической биржевой игры с двумя, а также со счетным числом состояний рынка и дискретными ставками.
2. Найдено решение конечношаговой игровой модели биржевых торгов с двумя состояниями рынка и непрерывными ставками. Разработан алгоритм численного построения оптимальных стратегий игроков.
3. Для дискретной модели дан явный вид ожидаемой продолжительности торгов при использовании игроками оптимальных стратегий. Для непрерывной модели показано, что динамика игрового взаимодействия не зависит от параметра механизма формирования сделки.

Достоверность полученных в работе результатов обусловлена строгостью формулировок задач и математических доказательств. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, были представлены на ежегодных научных конференциях в МГУ им. М.В. Ломоносова «Тихоновские чтения» (2014), «Ломоносовские чтения» (2016) и на 8-ой Московской международной конференции по исследованию операций ORM 2016.

Публикации. По теме диссертации имеется 6 публикаций. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 3 статьях из перечня ВАК, 3 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения.

Полный объём диссертации составляет 96 страниц, включая 8 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 57 наименований.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю, кандидату физико-математических наук, доценту Владимиру Викторовичу Морозову за ценные замечания, поддержку и неоценимую помощь в подготовке диссертации.

Список сокращений и условных обозначений

$\mathscr{B}(X)$	борелевская σ-алгебра подмножеств множества X
$\Delta(X)$	совокупность вероятностных распределений на $(X, \mathscr{B}(X))$
$\mathbb{N}_+$	множество положительных натуральных чисел
$\mathbb{Z}_+$	множество неотрицательных целых чисел
$\mathbb{R}_+$	множество неотрицательных действительных чисел
$\mathbb{E}_\sigma$	символ математического ожидания по мере σ
$\stackrel{\mathrm{def}}{=}$	символ равенства «по определению»
$\mathbf{1}_B$	индикаторная функция множества B
$f^*(x^*)$	функция, сопряженная к f в смысле Фенхеля
$\mathrm{dom}\, f$	эффективное множество функции f
$\mathrm{range}\, f$	множество значений функции f
$\mathrm{int} X$	внутренность множества X
$\int f(x)\,\sigma(\mathrm{d}x)$	символ интеграла Лебега функции f по мере σ
$\partial f(x)$	субдифференциал функции f в точке x
x^+	$\max\{0, x\}$, где $x \in \mathbb{R}$
$\lfloor x \rfloor$	целая часть числа x
$\lceil x \rceil$	наименьшее целое $y \geqslant x$
$\|x\|$	норма x

Обзор литературы

Теория повторяющихся игр берет начало во второй половине 60-х годов в серии отчетов [21—23; 25; 55] Агентства по Контролю за Вооружением и Разоружением (ACDA) США. Позднее данные результаты были опубликованы Ауманом и Машлером в монографии [24]. Основываясь на результатах Харшаньи [40] о формализации игр с неполной информацией, авторы моделируют информационную асимметрию агентов путем введения множества возможных состояний природы и хода случая, который в соответствии с некоторым вероятностным распределением перед началом игры определяет текущее состояние и связанную с этим состоянием одношаговую игру, которая впоследствии будет разыгрываться на протяжении n шагов.

Наиболее полно исследованы свойства антагонистических повторяющихся игр с неполной информацией у одной из сторон. В таких играх первый игрок, которого мы также будем называть инсайдером, осведомлен о результате хода случая, в то время как второй игрок знает только вероятностное распределение на множестве состояний природы.

Ауман и Машлер рассматривают матричные игры с функцией выигрыша равной средней ожидаемой выплате за n шагов. Авторами получены исчерпывающие результаты для игр неограниченной продолжительности с неполной информацией у одной из сторон. В частности показано, что значения таких игр всегда существуют, и приведен способ построения оптимальных стратегий игроков. Вопросы о скорости сходимости последовательности значений n-шаговых игр к значению бесконечной игры рассмотрены в работах Замира [57], Мертенса и Замира [48; 49]. Способ построения оптимальной стратегии второго игрока для игр, в которых игроки получают частичную информацию о выбранных чистых стратегиях противника, получен Колбергом в работе [43]. Явные решения некоторых классов конечношаговых игр получены в работах Хойера [42], Доманского и Крепс [36—38].

Для игр с неполной информацией у обоих игроков авторами также получен критерий существования значения. Ключевое отличие игр с неполной информацией у одного игрока от игр с неполной информацией у обоих игроков заключается в том, что последние уже не всегда имеют значение. В работе [47] Мертенсом и Замиром был рассмотрен более широкий класс повторяющихся игр с неполной информацией у обоих игроков. Для таких игр авторами были найдены функциональные уравнения, которым должно удовлетворять значение игры, а также получена оценка отклонения значения n-шаговой игры от значения игры неограниченной продолжительности. Дальнейшее развитие тема получила в работах Мертенса и Замира [48], Сорена [54].

Неантагонистические повторяющиеся игры с неполной информацией рассмотрены в работах Харта [41], Аумана и Харта [26], в которых авторами была исследованы возможные равновесия Нэша данных игр. Позднее Სореном в работе [53] был получен критерий существования равновесия Нэша для игр с двумя состояниями природы.

Одной из областей приложения данной теории является анализ поведения агентов на финансовых рынках. Применение винеровских процессов и случайных блужданий для описания эволюции цен на финансовые инструменты, начиная с работы Башелье [27], широко распространено как в финансовой литературе так и на практике. Появление случайных колебаний цен на активы принято объяснять наличием множества слабых внешних факторов. Впервые гипотеза об их эндогенном происхождении была выдвинута Кайлом в работе [44] и впоследствии развита в работах Субрахманьяма [56] и Бэка [28]. Ключевой момент в модели Кайла состоит в наличии на рынке фоновых игроков, которые принимают решение о покупке или продаже актива случайным образом и тем самым маскируют действия инсайдера. Фактически броуновское движение было введено в модель извне.

Более явно идея прослеживается в работе Де Мейера и Салей [33], в которой они рассматривают упрощенную модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов. Рынок может находится в состояниях H и L с вероятностями p и $1-p$ соответственно. В состоянии H цена акции равна 1, в состоянии L она равна 0. Первый игрок знает текущее состояние рынка, второй игрок знает только вероятностное распределение и то, что первый — инсайдер. На каждом шаге торгов игроки одновременно и независимо назначают цену акции из отрезка $[0,1]$. Игрок, сделавший бóльшую ставку, покупает у другого акцию по названной цене; если ставки равны, то сделка не состоится. Задачей игроков является максимизация стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа купленных акций и суммы денег, полученных в результате торгов.

Авторы формализуют данное описание в виде антагонистической повторяющейся игры с неполной информацией у одного из игроков. Ключевые отличия полученной игры от игр, рассмотренных в [24], заключаются в следующем: множество возможных действий игроков на каждом шаге игры имеет мощность континуум, и в качестве выигрыша принимаются не усредненные, а суммарные выплаты за n шагов. Это приводит к существенно отличной технике решения. Основной результат данной работы заключается в демонстрации наличия винеровской компоненты в динамике последовательности ожидаемых цен акции.

В работе [32] авторы рассматривают модель торгов, в рамках которой цена акции распределена в соответствии с произвольным вероятностным распределением, имеющим конечное математическое ожидание. Результатом анализа соответствующей повторяющейся игры с континуумом состояний снова является демонстрация наличия броуновского движения в асимптотике эволюции цен, предлагаемых инсайдером.

В работе [30] Де Мейером рассмотрена непрерывная модель с достаточно общим механизмом торгов. Автор показывает, что асимптотически последовательность ожидаемых ликвидных цен акции сходится к непрерывному мартингалу максимальной вариации (Continuous Martingale of Maximal Variation) и не зависит от конкретного вида механизма торгов, а зависит только от априорного распределения цены акции. Этот результат был обобщен для торгов несколькими активами в работе [39]. Текущие исследования Де Мейера [31] направлены на изучение моделей с игроками, предпочитающими уклонение от риска.

Модели биржевых торгов с дискретными ставками были впервые были рассмотрены в работах Марино и Де Мейера [45], В. К. Доманского [34]. Показано, что в отличие от непрерывной модели последовательность значений n-шаговых игр ограничена сверху, что можно объяснить меньшей стратегической свободой инсайдера. Одним из результатов полученных для дискретного случая является появление симметричного случайного блуждания апостериорных вероятностей высокой цены актива. Важным отличием работы [34] от работы [45] является использование *разумной* стратегии инсайдера, которая оказывается оптимальной в бесконечной игре, что существенно упрощает схему доказательств. Нужно отметить, что дискретная модель больше соответствует действительности, в силу того, что расчеты на реальных рынках проводятся кратно минимальной денежной единице.

В работе [3] была рассмотрена дискретная модель биржевых торгов, в рамках которой цена акции может принимать любые целочисленные значения. Авторами показано, что когда дисперсия цены акции конечна, игра неограниченной продолжительности имеет значение. Оптимальная стратегия инсайдера построена на основе представления распределений на $\mathbb{Z}_+$ в виде выпуклой комбинации распределений, имеющих не более двух носителей. Модель с N игроками рассмотрена в работе [5].

Обобщение дискретной модели на случай торгов несколькими активами проведено в работах [4; 35]. Авторами показано, что значение игры неограниченной продолжительности равно сумме значений соответствующих игр с одним активом. Для торгов m активами оптимальные стратегии инсайдера построены на основе представления m-мерных распределений в виде выпуклой комбинации распределений, имеющих не более $m + 1$ носитель. Также авторами отмечено, что конечная игра с m активами менее выгодна для инсайдера, чем m независимых игр с одним активом, в силу того, что ставки для одного актива несут информацию о настоящей стоимости других активов.

В работе [16] М. С. Сандомирской была рассмотрена дискретная модель торгов с фиксированным спрэдом. В рамках данной модели игроки назначают цены покупки p_b, цены продажи определяются как $p_a = p_b + x$, где x — величина спрэда; сделка происходит в том случае, если цена продажи одного из игроков меньше или равна цены покупки другого. Автором получена оценка сверху не выигрыш инсайдера в бесконечной игре, а также оценка снизу при использовании стратегии из класса стратегий, порождающих простые случайные блуждания апостериорных вероятностей. Показано, что в сравнении с моделью без спрэда, максимальный выигрыш инсайдера уменьшается в x раз.

Упомянутые выше результаты для дискретных моделей касаются в основном бесконечных игр. Для игр с конечным количеством шагов аналитические решения получены только в частных случаях: в работе [17] М. С. Сандомирской и В. К. Доманским найдено решение одношаговой игры, в работе [8] В. Л. Крепс получено решение n-шаговой игры с минимальным нетривиальным числом ставок, равным трем. В диссертации М. С. Сандомирской [15] определена величина, которую может гарантировать инсайдер в конечной игре, применяя стратегию, оптимальную при бесконечношаговом взаимодействии. Показано, что значение конечной игры стремится к значению бесконечной игры как минимум с экспоненциальной скоростью.

Глава 1. Теоретико-игровая модель биржевых торгов с дискретными ставками и двумя состояниями

В разделе 1.1 данной работы дано введение в теорию повторяющихся игр с неполной информацией, определены основные термины и понятия. В разделе 1.2 приведено описание модели биржевых торгов с дискретными ставками, которая в разделе 1.3 формализована в виде игры в нормальной форме. Раздел 1.4 посвящен получению оценки сверху выигрыша инсайдера. Оценка снизу выигрыша инсайдера найдена в разделе 1.5. В разделе 1.6 дана теорема о значении игры, исследована динамика апостериорных вероятностей при применении игроками оптимальных стратегий и проведено сравнение полученных результатов с результатами из [34].

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [11; 51] в журналах из перечня ВАК.

1.1 Основные понятия

Далее последует описание повторяющейся игры с неполной информацией, в которой множество состояний конечно, как и множества возможных действий игроков. Теоретико-игровые постановки задач из глав 2 и 3 будут отличаться от данного классического описания, о чем будет сказано отдельно.

Рассмотрим антагонистическую игру двух лиц, которая повторяется n раз, где $n \leqslant \infty$. Будем считать, что первый игрок знает функцию выигрыша в данной игре, в то время как второй игрок такой информацией не обладает. Однако второй игрок знает, что настоящая функция выигрыша является одной из κ возможных альтернатив. Каждой такой альтернативе второй игрок приписывает некоторую вероятность того, что данная функция выигрыша является истинной функцией выигрыша в рассматриваемой игре. Таким образом, априорные убеж-

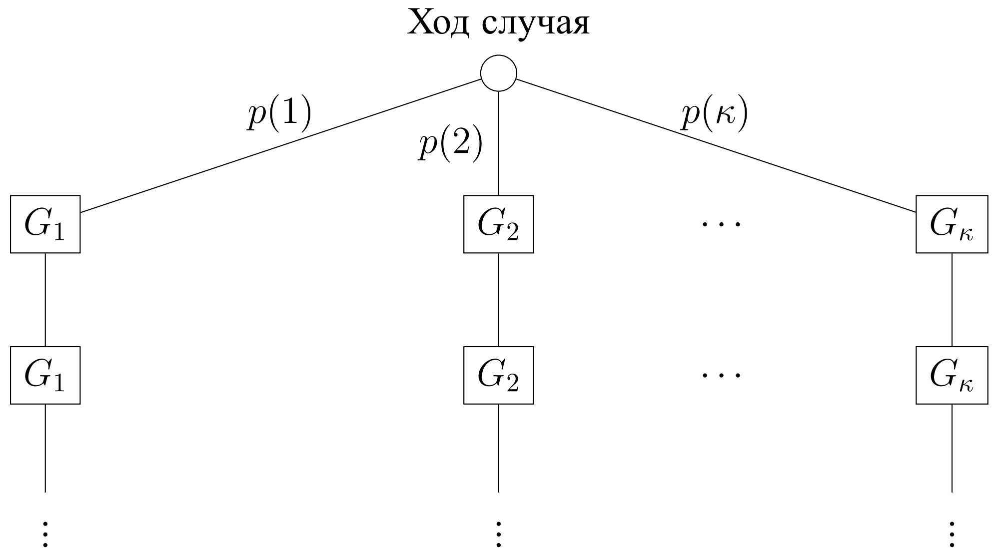

Рисунок 1.1 — Структура повторяющейся игры

дения второго игрока задаются вероятностным вектором

$$\bar{p} = (p(1), p(2), \ldots, p(\kappa)), \quad \sum_{i=1}^{\kappa} p(i) = 1.$$

С данными функциями выигрыша можно связать игры $G_1, G_2, \ldots, G_\kappa$. В дальнейшем мы будем считать, что информационная неопределенность второго игрока заключается именно в том, что он не знает какая из игр $G_1, G_2, \ldots, G_\kappa$ разыгрывается.

На каждом шаге игры первый игрок может совершать действия из множества I, второй игрок — действия из множества J, при этом мы считаем, что множества действий одного игрока известно другому. Кроме того, положим, что второй игрок знает, что первый обладает точной информацией о том, какая именно игра разыгрывается, а первый игрок знает априорные убеждения второго.

Игры $G_1, G_2, \ldots, G_\kappa$ будем называть *одношаговыми играми*. Все одношаговые игры описываются матрицами размера $|I| \times |J|$, где элементы матрицы задают выплаты первому игроку. Мы предполагаем, что оба игрока точно знают платежные матрицы игр $G_1, G_2, \ldots, G_\kappa$. На каждом шаге игры первый игрок выбирает номер строки, и одновременно с ним второй игрок выбирает номер столбца. В конце каждого хода действия игроков оглашаются, и элемент из матрицы, отвечающей настоящей игре, прибавляется к выигрышу первого игрока и вычитается из выигрыша второго. Таким образом, первый игрок знает свой выигрыш на каждом этапе игры, в то время как второй может лишь рассчитать свой ожидаемый выигрыш. В завершение, мы считаем, что данное описание известно обоим игрокам.

Данная игра с неполной информацией описывается в виде игры в нормальной форме следующим образом. Обозначим через $S = \{1, 2, \ldots, \kappa\}$ множество возможных альтернатив или *состояний природы*. Перед началом игры ходом случая в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p}$ выбирается состояние $s \in S$. Далее на протяжении n шагов разыгрывается игра G_s. Первый игрок информирован о результате хода случая, второй игрок — нет. В остальном правила данной игры совпадают с описанными выше.

Пусть $h_t = ((i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_t, j_t))$ — история ставок игроков после завершения шага t. Множество все таких h_t обозначим через H_t.

Стратегией первого игрока в такой игре является последовательность ходов (отображений) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^1, \sigma_t^2, \ldots, \sigma_t^\kappa)$, и $\sigma_t^s : H_{t-1} \to \Delta(I)$ — смешанная стратегия, зависящая от предыдущих ходов, которую первый игрок использует, если ходом случая реализовалось состояние s.

Аналогичным образом определим стратегию второго игрока как последовательность ходов (отображений) $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \to \Delta(I)$ — смешанная стратегия, зависящая от предыдущих ходов. Как видно, ход второго игрока на каждом шаге игры зависит только от предыдущих ходов, и не зависит от состояния, в силу того, что второй игрок не информирован о результате хода случая.

Отметим, что, как показано в монографии Аумана, Машлера [24], достаточно рассматривать только стратегии, которые зависят лишь от предыдущих ходов первого игрока и не зависят от ходов второго.

Также нужно отметить, что в данной работе рассмотрены игры, в которых выигрыш равен суммарным выплатам, в отличие от постановки из [24], в которой рассматривались игры с усредненными выплатами.

1.2 Описание модели

Рассмотрим упрощенную модель финансового рынка, на котором два игрока ведут торговлю однотипными акциями на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов, следуя работе [34].

Перед началом торгов случайный ход определяет цену акции на весь период торгов, которая может быть либо $m \in \mathbb{N}$ с вероятностью p, либо 0 с вероятностью $1 - p$. Таким образом определенный ход случая является упрощенным аналогом некоторого шокового события на финансовом рынке (такого, как, например, публикация отчетов о доходах некоторой компании). Выбранная цена сообщается первому игроку и не сообщается второму, при этом второй игрок знает, что первый — инсайдер.

Рассмотрим t-й шаг торгов, где $t = \overline{1,n}$. На данном шаге первый игрок выбирает ставку $i_t \in I = \{0, 1, \ldots, m\}$, а второй — ставку $j_t \in J = \{0, 1, \ldots, m\}$. Игрок, предложивший бо́льшую ставку, покупает у другого акцию по цене равной

$$\beta \max(i_t, j_t) + \overline{\beta} \min(i_t, j_t), \text{ где } \beta \in (0, 1),\ \overline{\beta} = 1 - \beta.$$

Если ставки равны, то сделка на t-м шаге не состоится. Коэффициент β можно интерпретировать как *переговорную силу продавца*: чем ближе значение к 1, тем большую сумму получит продавец акции в результате сделки.

Будем считать, что игроки обладают неограниченными запасами рисковых и безрисковых активов, т.е. торги не могут прекратиться по причине того, что у одного из игроков закончатся деньги или акции. Цель игроков состоит в максимизации стоимости итогового портфеля, состоящего из некоторого числа купленных акций и суммы денег, полученных в результате торгов. Таким образом, не ограничивая общности, можно положить, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели.

Фактически в работах [34; 45], а также в работах [3; 4; 35], посвященных обобщению дискретной модели, коэффициент $\beta = 1$. Мотивацией к рассмотрению дискретной модели служит тот факт, что на реальных рынках расчеты ведутся пропорционально минимальной денежной единице. При $\beta = 1$ все ставки будут целочисленными, как и финальные выплаты игрокам. При рассмотрении модели с произвольным значением β цена сделки перестает быть целочисленной, однако интерпретацию дискретности модели в этой постановке можно оставить неизменной, решив проблему нецелой финальной выплаты размера a с помощью случайного механизма, который выберет либо выплату размера $\lfloor a \rfloor$, либо выплату размера $\lceil a \rceil$. Ожидаемый выигрыш при этом останется неизменным, но свойство дискретности сохранится.

1.3 Определение игры $\mathbf{G_n^{m,\beta}(p)}$

Определим формально повторяющуюся игру с неполной информацией, отвечающую данному выше описанию.

Пусть множество состояний рынка $S = \{L, H\}$. Перед началом игры случай выбирает $s \in S$ с вероятностями $P(s = H) = p$ и $P(s = L) = 1 - p$. После этого на протяжении $n \leqslant \infty$ шагов игроки участвуют в игре с матрицей $A^{s,\beta}$, где элементы матрицы заданы следующим образом:

$$a^{L,\beta}(i,j) = \begin{cases} \overline{\beta} i + \beta j, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ -\beta i - \overline{\beta} j, & i > j, \end{cases} \qquad a^{H,\beta}(i,j) = \begin{cases} \overline{\beta} i + \beta j - m, & i < j, \\ 0, & i = j, \\ m - \beta i - \overline{\beta} j, & i > j. \end{cases}$$

Стратегией первого игрока в данной игре является последовательность ходов (отображений) $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t, \ldots)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$. Таким образом, на каждом шаге торгов первый игрок рандомизирует выбор ставки в зависимости от состояния и предыдущих ставок. Как и в работе [34], мы ограничимся рассмотрением только тех стратегий σ, которые гарантируют первому игроку на каждом шаге игры неотрицательный выигрыш. Множество таких стратегий первого игрока обозначим через Σ.

Аналогично, стратегией второго игрока назовем последовательность ходов (отображений) $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_t, \ldots)$, где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. Не имея информации о настоящем состоянии, второй игрок при выборе ставки опирается только на историю ставок инсайдера. Множество стратегий второго игрока обозначим через T.

Обозначим через $\mathbb{E}_{(p,\sigma,\tau)}$ математическое ожидание по мере, индуцированной на $S \times I^n \times J^n$ ходом случая и смешанными стратегиями σ и τ игроков.

При применении первым игроком смешанной стратегии σ, а вторым игроком — смешанной стратегии τ, ожидаемый выигрыш первого игрока

$$K_n^{m,\beta}(p, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{(p,\sigma,\tau)} \sum_{t=1}^{n} \left(p a^{H,\beta}(i_t^H, j_t) + (1-p) a^{L,\beta}(i_t^L, j_t) \right). \qquad (1.1)$$

Замечание 1.1. В игре с произвольным значением β, в отличие от случая $\beta = 1$, стратегии, использующие ставку m, не являются доминируемыми. Проиллюстрировать это можно следующим образом. Рассмотрим одношаговую игру. Пусть $\beta < 1$, цена акции равна m, и второй игрок делает ставку равную m. Тогда любая ставка $i < m$ первого игрока будет давать ему выигрыш размера $\overline{\beta}(i - m) < 0$, и только ставка m даст первому игроку выигрыш равный нулю. Если же второй игрок делает ставку равную $m - 2$, то ставка первого игрока $m - 1$ даст ему выигрыш размера $2 - \beta$, а ставка m меньший выигрыш размера $2 - 2\beta$.

Полученную игру обозначим через $G_n^{m,\beta}(p)$. Ее верхнее и нижнее значения даются формулами

$$\underline{V}_n^{m,\beta}(p) = \max_{\sigma \in \Sigma} \inf_{\tau \in \mathrm{T}} K_n^{m,\beta}(p, \sigma, \tau), \quad \overline{V}_n^{m,\beta}(p) = \min_{\tau \in \mathrm{T}} \sup_{\sigma \in \Sigma} K_n^{m,\beta}(p, \sigma, \tau).$$

Если верхнее и нижнее значения совпадают, то игра имеет значение, которое мы обозначим $V_n^{m,\beta}(p)$.

Замечание 1.2. В силу того, что игра $G_n^{m,\beta}(p)$ может быть представлена в виде матричной игры большой размерности, существование ее значения следует из основной теоремы матричных игр (см. [1]).

Заметим, что имеют место следующие равенства:

$$a^{L,\beta}(i,j) = a^{H,\overline{\beta}}(m-i, m-j), \quad a^{H,\beta}(i,j) = a^{L,\overline{\beta}}(m-i, m-j). \tag{1.2}$$

Замечание 1.3. Определим для заданных стратегий σ, τ стратегии $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$ таким образом, что для t-го шага $\overline{\sigma_t} = (\overline{\sigma_t^H}, \overline{\sigma_t^L})$, где $\overline{\sigma_t^s} = (\sigma_{t,m}^s, \ldots, \sigma_{t,0}^s) \in \Delta(I)$, и $\overline{\tau_t} = (\tau_{t,m}, \ldots, \tau_{t,0}) \in \Delta(J)$. Из равенств (1.2) следует, что выигрыши игроков в играх $G_n^{m,\beta}(p)$ и $G_n^{m,\overline{\beta}}(1-p)$ при использовании соответственно стратегий σ, τ и $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$ совпадают.

1.4 Оценка сверху выигрыша первого игрока

Следуя [34], рассмотрим чистую стратегию второго игрока τ^k, $k \in J$:

$$\tau_1^k = k, \quad \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

Другими словами, второй игрок делает ставку равную k на первом шаге, а далее либо подражает инсайдеру, либо смещается на единицу к ставке инсайдера предыдущего шага.

Доказательство следующего утверждения по форме повторяет доказательство утверждения 4.3 из [34] и приводится здесь в целях полноты изложения.

Утверждение 1.1. *При применении стратегии τ^k в игре $G_n^{m,\beta}(p)$ второй игрок гарантирует себе проигрыш не более*

$$h_n^L(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (k - t - \overline{\beta})^+, \quad h_n^H(\tau^k) = \sum_{t=0}^{n-1} (m - k - t - \beta)^+,$$

в состояниях L *и* H *соответственно. Последовательности* $\{h_n^L(\tau^k)\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{h_n^H(\tau^k)\}_{n=1}^{\infty}$ *не убывают, ограничены сверху по* n *и имеют следующие пределы:*

$$h_{\infty}^L(\tau^k) = \frac{(k+\beta-\overline{\beta})k}{2}, \quad h_{\infty}^H(\tau^k) = \frac{(m-k)(m-k+\overline{\beta}-\beta)}{2}.$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции для $h_n^L(\tau^k)$. При $n=1$ справедливо

$$h_1^L(\tau^k) = \max_{i \in I} a^{L,\beta}(i,k) = \max(0, k-\overline{\beta}) = (k-\overline{\beta})^+.$$

Предположим, что формула верна при $n \leqslant N$. Пусть $n = N+1$. Первым ходом второй игрок выбирает k. Следовательно, оптимальный выбор инсайдера на первом ходу равен $\max(0, k-1)$, что соответствует либо продаже акции по наибольшей цене в случае $k>0$, либо отсутствию сделки при $k=0$. Для случая $k>0$ имеем

$$h_{N+1}^L(\tau^k) = \overline{\beta}(k-1) + \beta k + h_N^L(\tau^{k-1}) = k - \overline{\beta} + \sum_{t=0}^{N-1}(k-1-t-\overline{\beta})^+ =$$

$$= k - \overline{\beta} + \sum_{t=1}^{N}(k-t-\overline{\beta})^+ = \sum_{t=0}^{N}(k-t-\overline{\beta})^+.$$

В случае $k=0$ получаем

$$h_{N+1}^L(\tau^k) = 0 = \sum_{t=0}^{N}(k-t-\overline{\beta})^+.$$

Далее заметим, что $h_k^L(\tau^k) = h_{k+i}^L(\tau^k)$, $i \in \mathbb{N}_+$. Отсюда находим

$$h_{\infty}^L(\tau^k) = \sum_{t=0}^{k-1}(k-t-\overline{\beta}) = \frac{(k+\beta-\overline{\beta})k}{2}.$$

Для $h_n^H(\tau^k)$ утверждение доказывается аналогично. □

Введем следующую функцию:

$$H_{\infty}^{m,\beta}(p) = \min_{j \in J} \lim_{n \to \infty} \left(p h_n^H(\tau^j) + (1-p) h_n^L(\tau^j)\right) =$$

$$= \min_{j \in J} \frac{\left[p(m-j)(m-j+\overline{\beta}-\beta) + (1-p)j(j+\beta-\overline{\beta})\right]}{2} =$$

$$= \min_{j \in J} \frac{\left[j^2 + j(2\beta - 1 - 2mp) + mp(1+m-2\beta)\right]}{2}.$$

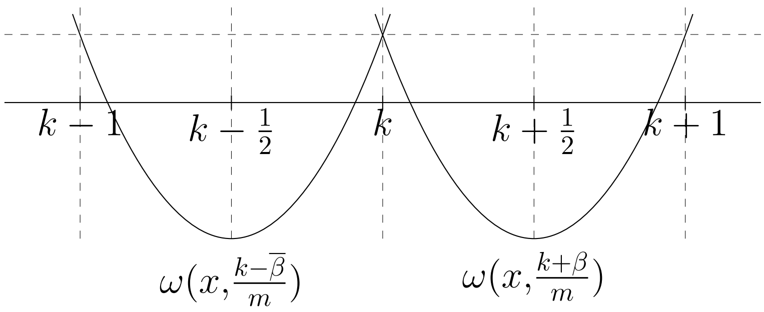

Рисунок 1.2 — График функции $\omega(x,p)$ при $p \in \{(k-\overline{\beta})/m, (k+\beta)/m\}$

Функция $\omega(x,p) = x^2 + x(2\beta - 1 - 2mp)$ достигает минимума по $x \in \mathbb{R}$ в точке $mp-\beta+1/2$. Поэтому при $p \in \big((k-\overline{\beta})/m, (k+\beta)/m)\big]$ минимум функции $j^2 + j(2\beta - 1 - 2mp)$ по $j \in J$ достигается при $j = k$ (см.рис 1.2).

Таким образом, $H_\infty^{m,\beta}(p)$ является вогнутой кусочно-линейной функцией, график которой состоит из $m + 1$ линейных сегментов. Она полностью определяется своими значениями в следующих точках (см. рис. 1.3)

$$H_\infty^{m,\beta}((k+\beta)/m) = \frac{1}{2}\left((m-(k+\beta))(k+\beta) + \overline{\beta}\beta\right), \ k = \overline{0, m-1},$$
$$H_\infty^{m,\beta}(0) = H_\infty^{m,\beta}(1) = 0.$$

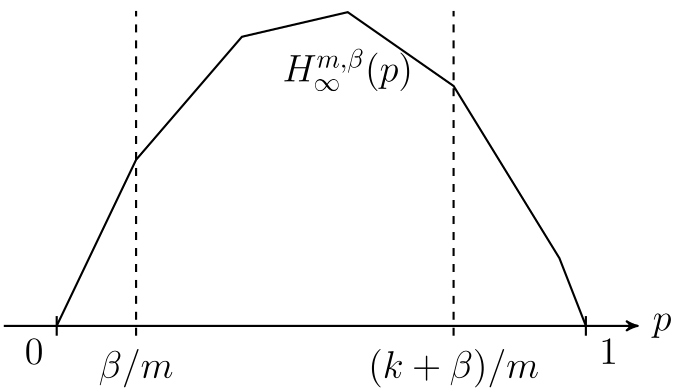

Рисунок 1.3 — График функции $H_\infty^{m,\beta}(p)$

Пусть второй игрок при $p \in \big((k-\overline{\beta})/m, (k+\beta)/m)\big]$ применяет τ^k, $k = \overline{0, m}$. Обозначим эту стратегию через τ^*. Тогда справедлива следующая

Лемма 1.1. *Зафиксируем вероятность* $p \in [0,1]$. *Тогда при использовании вторым игроком стратегии* τ^* *в игре* $G_\infty^{m,\beta}(p)$, *выигрыш первого игрока ограничен сверху величиной* $H_\infty^{m,\beta}(p)$, *т.е.*

$$\max_{\sigma\in\Sigma} K_\infty^{m,\beta}(p,\sigma,\tau^*) \leqslant H_\infty^{m,\beta}(p).$$

1.5 Оценка снизу выигрыша первого игрока

Перейдем к описанию стратегии первого игрока, гарантирующей ему выигрыш не менее $H_\infty^{m,\beta}(p)$ в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$.

Пусть на первом шаге игры первый игрок выбирает ход $\hat{\sigma_k} = \left(\sigma_1^H, \sigma_1^L\right)$, где $\sigma_1^H = \left(\sigma_{1,k}^H, \sigma_{1,k+1}^H\right)$, $\sigma_1^L = \left(\sigma_{1,k}^L, \sigma_{1,k+1}^L\right)$ и $\sigma_{1,i}^s$ – вероятность сделать ставку i в состоянии $s \in S$. Применяя $\hat{\sigma_k}$, инсайдер делает ставки k и $k+1$ с некоторыми заданными вероятностями.

В дальнейшем будем использовать эквивалентный способ задания хода. Для этого определим следующие параметры: полные вероятности использования действий k и $k+1$, равные $q(k)$ и $q(k+1)$ соответственно, а также апостериорные вероятности $p(s|i)$ состояния s при условии, что на предыдущем шаге первый игрок сделал ставку i. Тогда вероятности $\sigma_{1,i}^s$ можно найти по формуле Байеса

$$\sigma_{1,i}^s = p(s|i)q(i)/p(s),\ i = k, k+1.$$

Утверждение 1.2. *При использовании $\hat{\sigma_k}$ первый игрок обеспечивает себе на первом шаге выигрыш*

$$K_1^{m,\beta}(p, \hat{\sigma_k}, j) = \begin{cases} mp - \beta k - \overline{\beta} j - \beta q(k+1), & j < k, \\ \left(mp(H|k+1) - k - \beta\right) q(k+1), & j = k, \\ \left(k + \beta - mp(H|k)\right) q(k), & j = k+1, \\ \overline{\beta} k + \beta j - mp + \overline{\beta} q(k+1), & j > k+1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Доказательство. Пусть $j < k$. Тогда из (1.1) и определения $\hat{\sigma_k}$ получаем

$$\begin{aligned} K_1^{m,\beta}(p, \hat{\sigma_k}, j) &= p\left(\sigma_{1,k}^H(m - \beta k - \overline{\beta} j) + \sigma_{1,k+1}^H(m - \beta(k+1) - \overline{\beta} j)\right) + \\ &+ (1-p)\left(\sigma_{1,k}^L(-\beta k - \overline{\beta} j) + \sigma_{1,k+1}^L(-\beta(k+1) - \overline{\beta} j)\right) = \\ &= mp(\sigma_{1,k}^H + \sigma_{1,k+1}^H) - \left(p(\sigma_{1,k}^H + \sigma_{1,k+1}^H) + (1-p)(\sigma_{1,k}^L + \sigma_{1,k+1}^L)\right) \times \\ &\times (\beta k + \overline{\beta} j) - (p\sigma_{1,k+1}^H + (1-p)\sigma_{1,k+1}^L)\beta = \\ &= mp - \beta k - \overline{\beta} j - \beta q(k+1). \end{aligned}$$

При $j = k$ имеет место равенство

$$
\begin{aligned}
K_1^{m,\beta}(p, \hat{\sigma_k}, j) &= p\sigma^H_{1,k+1}(m - \beta(k+1) - \overline{\beta}k) + (1-p)\sigma^L_{1,k+1}(-\beta(k+1) - \overline{\beta}k) = \\
&= mp\sigma^H_{1,k+1} - (p\sigma^H_{1,k+1} + (1-p)\sigma^L_{1,k+1})(\beta(k+1) + \overline{\beta}k) = \\
&= mp(H|k+1)q(k+1) - q(k+1)(\beta(k+1) + \overline{\beta}k) = \\
&= (mp(H|k+1) - k - \beta)q(k+1).
\end{aligned}
$$

При $j = k+1$ находим

$$
\begin{aligned}
K_1^{m,\beta}(p, \hat{\sigma_k}, j) &= p\sigma^H_{1,k}(\beta(k+1) + \overline{\beta}k - m) + (1-p)\sigma^L_{1,k}(\beta(k+1) + \overline{\beta}k) = \\
&= (p\sigma^H_{1,k} + (1-p)\sigma^L_{1,k})(\beta(k+1) + \overline{\beta}k) - mp\sigma^H_{1,k} = \\
&= q(k)(\beta(k+1) + \overline{\beta}k) - mp(H|k)q(k) = \\
&= (k + \beta - mp(H|k)))q(k).
\end{aligned}
$$

При $j > k+1$ получаем

$$
\begin{aligned}
K_1^{m,\beta}(p, \hat{\sigma_k}, j) &= p\left(\sigma^H_{1,k}(\beta j - \overline{\beta}k - m) + \sigma^H_{1,k+1}(\beta j - \overline{\beta}(k+1) - m)\right) + \\
&+ (1-p)\left(\sigma^L_{1,k}(\beta j + \overline{\beta}k) + \sigma^L_{1,k+1}(\beta j + \overline{\beta}(k+1))\right) = \\
&= (\overline{\beta}k + \beta j)\left(p(\sigma^H_{1,k} + \sigma^H_{1,k+1}) + (1-p)(\sigma^L_{1,k} + \sigma^L_{1,k+1})\right) - \\
&- mp(\sigma^H_{1,k} + \sigma^H_{1,k+1}) + (p\sigma^H_{1,k+1} + (1-p)\sigma^L_{1,k+1})\overline{\beta} = \\
&= \overline{\beta}k + \overline{\beta}j - mp + \beta q(k+1).
\end{aligned}
$$

Отсюда устанавливаем справедливость (1.3). □

Построим оптимальную стратегию инсайдера. Рассмотрим на $[0,1]$ множество P точек вида

$$
p^0_k = k/m,\ k = \overline{0,m}, \quad p^\beta_k = (k+\beta)/m,\ k = \overline{0,m-1}.
$$

Для $p = p^0_k$, $k = \overline{1,m-1}$ определим ϕ^0_k как распределение $\hat{\sigma_k}$ с параметрами

$$
\begin{aligned}
q(k) = \beta, &\quad p(H|k) = p^\beta_{k-1} = (k-1+\beta)/m, \\
q(k+1) = \overline{\beta}, &\quad p(H|k+1) = p^\beta_k = (k+\beta)/m.
\end{aligned}
$$

Покомпонентно оно записывается как

$$\sigma^H_{1,k} = \frac{(k-\overline{\beta})\beta}{k}, \quad \sigma^H_{1,k+1} = \frac{(k+\beta)\overline{\beta}}{k},$$
$$\sigma^L_{1,k} = \frac{(m-k+\overline{\beta})\beta}{m-k}, \quad \sigma^L_{1,k+1} = \frac{(m-k-\beta)\overline{\beta}}{m-k}.$$

Дополнительно определим ϕ^0_0 как распределение, состоящее в применении ставки 0 с вероятностью 1, а ϕ^0_m – как распределение, состоящее в применении ставки m с вероятностью 1.

Аналогично для $p = p^\beta_k$, $k = \overline{0, m-1}$ определим ϕ^β_k как распределение $\hat{\sigma}_k$ с параметрами

$$q(k) = \overline{\beta}, \quad p(H|k) = p^0_k = k/m,$$
$$q(k+1) = \beta, \quad p(H|k+1) = p^0_{k+1} = (k+1)/m.$$

Покомпонентно оно записывается как

$$\sigma^H_{1,k} = \frac{k\overline{\beta}}{k+\beta}, \quad \sigma^H_{1,k+1} = \frac{(k+1)\beta}{k+\beta},$$
$$\sigma^L_{1,k} = \frac{(m-k)\overline{\beta}}{m-k-\beta}, \quad \sigma^L_{1,k+1} = \frac{(m-k-1)\beta}{m-k-\beta}.$$

Утверждение 1.3. *При $p \in P$ и использовании на первом шаге распределений ϕ^0_k и ϕ^β_k одношаговый гарантированный выигрыш первого игрока равен*

$$\begin{aligned} \min_{j \in J} K^{m,\beta}_1(p^0_k, \phi^0_k, j) &= 0,\ k = \overline{0, m}, \\ \min_{j \in J} K^{m,\beta}_1(p^\beta_k, \phi^\beta_k, j) &= \overline{\beta}\beta,\ k = \overline{0, m-1}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Доказательство. Подставив полные вероятности действий и апостериорные вероятности состояний в (1.3), получим для $p = p^0_k$, $k = \overline{1, m-1}$

$$K^{m,\beta}_1(p^0_k, \phi^0_k, j) = \begin{cases} k - \beta k - \overline{\beta} j - \beta\overline{\beta} \geqslant \overline{\beta}\beta, & j < k, \\ (k + \beta - k - \beta)\overline{\beta} = 0, & j = k, \\ (k + \beta - k)\beta = \beta\beta, & j = k+1, \\ \overline{\beta} k + \beta j - k - \beta + \overline{\beta}^2 \geqslant \beta + \overline{\beta}^2, & j > k+1. \end{cases}$$

При $p = p_k^\beta$, $k = \overline{1,m-1}$ получаем

$$K_1^{m,\beta}(p_k^\beta, \phi_k^\beta, j) = \begin{cases} k + \beta - \beta k - \overline{\beta} j - \beta^2 > \beta\overline{\beta}, & j < k, \\ (k + 1 - k - \beta)\beta = \beta\overline{\beta}, & j = k, \\ (k + \beta - k)\overline{\beta} = \beta\overline{\beta}, & j = k+1, \\ \overline{\beta} k + \beta j - k - \beta + \beta\overline{\beta} > \beta\overline{\beta}, & j > k+1. \end{cases}$$

Справедливость неравенства $\min_{j \in J} K_1^{m,\beta}(p_k^0, \phi_k^0, j) \geqslant 0$, $k \in \{0, m\}$, то есть, соответствующего значению $p \in \{0, 1\}$, очевидна. $\square$

Замечание 1.4. Если $p \in P$, то при применении инсайдером на первом шаге игры ϕ_k^0 и ϕ_k^β, значения апостериорных вероятностей также принадлежат P. Таким образом, можно продолжить применение ϕ_k^0 и ϕ_k^β на последующих шагах игры, тем самым определив стратегию σ^* в игре $G_n^{m,\beta}(p)$, $p \in P$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим гарантированный выигрыш первого игрока в игре $G_n^{m,\beta}(p)$ при применении стратегии σ через

$$L_n^{m,\beta}(p, \sigma) = \min_{\tau \in \mathrm{T}} K_n^{m,\beta}(p, \sigma, \tau).$$

Из утверждения 1.3 непосредственно следует, что

$$\begin{gathered} L_1^{m,\beta}(p_k^0, \phi_k^0) = 0,\ k = \overline{0,m}, \\ L_1^{m,\beta}(p_k^\beta, \phi_k^\beta) = \beta\overline{\beta},\ k = \overline{0,m-1}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Следуя [34], опишем рекурсивную структуру игры $G_n^{m,\beta}(p)$. Стратегию σ первого игрока в n-шаговой игре можно представить как $(\sigma_1, \sigma(i),\ i \in I)$, где σ_1 — ход первого игрока на первом шаге игры, а $\sigma(i)$ — стратегия в игре продолжительности $n-1$, зависящая от ставки i на первом шаге. Аналогично стратегию второго игрока можно представить как $(\tau_1, \tau(i),\ i \in I)$. Тогда для функции выигрыша справедливо следующее представление

$$K_n^{m,\beta}(p, \sigma, \tau) = K_1^{m,\beta}(p, \sigma_1, \tau_1) + \sum_{i \in I} q(i) K_{n-1}^{m,\beta}(p(H|i), \sigma(i), \tau(i)). \tag{1.6}$$

При использовании стратегии σ^* в силу (1.5) и (1.6) для гарантированного выигрыша первого игрока в игре $G_n^{m,\beta}(p)$ справедливы формулы

$$\begin{aligned}
L_n^{m,\beta}\left(\frac{k+\beta}{m},\sigma^*\right) &= \overline{\beta}\beta + \overline{\beta}L_{n-1}^{m,\beta}\left(\frac{k}{m},\sigma^*(k)\right) + \\
&\qquad + \beta L_{n-1}^{m,\beta}\left(\frac{k+1}{m},\sigma^*(k+1)\right), \ k=\overline{0,m-1}, \\
L_n^{m,\beta}\left(\frac{k}{m},\sigma^*\right) &= \beta L_{n-1}^{m,\beta}\left(\frac{k-1+\beta}{m},\sigma^*(k)\right) + \\
&\qquad + \overline{\beta}L_{n-1}^{m,\beta}\left(\frac{k+\beta}{m},\sigma^*(k+1)\right), \ k=\overline{1,m-1}, \\
L_n^{m,\beta}(0,\sigma^*) &= L_n^{m,\beta}(1,\sigma^*) = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Так как $L_n^{m,\beta}(p,\sigma^*)$ не убывает по n и ограничена сверху, то устремив n к бесконечности, получим нижнюю оценку $L_\infty^{m,\beta}(p)$ выигрыша первого игрока в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$, $p\in P$.

Введем следующие обозначения:

$$L_{2k} = L_\infty^{m,\beta}(k/m), \quad k=\overline{0,m},$$
$$L_{2k+1} = L_\infty^{m,\beta}((k+\beta)/m), \quad k=\overline{0,m-1}.$$

Тогда справедлива система уравнений:

$$\begin{gathered}
L_{2k+1} = \overline{\beta}\beta + \overline{\beta}L_{2k} + \beta L_{2(k+1)}, \ \ k=\overline{0,m-1}, \\
L_{2k} = \beta L_{2k-1} + \overline{\beta}L_{2k+1}, \ \ k=\overline{1,m-1}, \\
L_0 = L_{2m} = 0.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Введем $(2m-1)\times(2m-1)$-матрицу B и $(2m-1)$-вектор-столбец b:

$$B = \begin{pmatrix}
1 & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-\beta & 1 & -\overline{\beta} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\overline{\beta} & 1 & -\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & 1 & -\overline{\beta} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\overline{\beta} & 1
\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}
\overline{\beta}\beta \\ 0 \\ \overline{\beta}\beta \\ \cdots \\ 0 \\ \overline{\beta}\beta
\end{pmatrix}.$$

Тогда (1.8) перепишем в виде $BL = b$, $L_0 = L_{2m} = 0$, где $L = (L_1, L_2, \ldots, L_{2m-1})$.

Системы $Mx = f$ с трехдиагональной матрицей M, имеющей структуру

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & c_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \multicolumn{4}{c}{\dotfill} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & c_n \end{pmatrix},$$

можно решать методом прогонки, используя следующие формулы для прогоночных коэффициентов и переменных (см. [14]):

$$x_i = \gamma_{i+1} x_{i+1} + \delta_{i+1},\ i = \overline{1,n-1}, \quad x_n = \frac{f_n - a_n\delta_n}{c_n + a_n\gamma_n}, \tag{1.9}$$

$$\gamma_{i+1} = -\frac{b_i}{c_i + a_i\gamma_i},\ i = \overline{2,n-1}, \quad \gamma_2 = -\frac{b_1}{c_1}, \tag{1.10}$$

$$\delta_{i+1} = \frac{f_i - a_i\delta_i}{c_i + a_i\gamma_i},\ i = \overline{2,n-1}, \quad \delta_2 = \frac{f_1}{c_1}. \tag{1.11}$$

Утверждение 1.4. *Прогоночные коэффициенты для матрицы B даются следующими формулами*:

$$\gamma_{2k} = \frac{k-1+\beta}{k},\ \gamma_{2k+1} = \frac{k}{k+\beta},$$
$$\delta_{2k} = \frac{\overline{\beta}(k-1+2\beta)}{2},\ \delta_{2k+1} = \frac{k\beta(k-1+2\beta)}{2(k+\beta)}, \quad k = \overline{1,m-1}.$$

Доказательство. Проверим базу индукции для γ_i, $i = \overline{2,2m-1}$. Имеем

$$\gamma_2 = -\frac{-\beta}{1} = \beta,$$
$$\gamma_3 = -\frac{-\overline{\beta}}{1-\beta\cdot\beta} = \frac{1-\beta}{(1-\beta)(1+\beta)} = \frac{1}{1+\beta}.$$

Пусть утверждение верно для $\gamma_{2n}, \gamma_{2n+1}$ при $n \leqslant k$. Покажем, что соответствующие формулы имеют место при $n = k+1$. Для $\gamma_{2(k+1)}$ имеем

$$\gamma_{2(k+1)} = -\frac{b_{2k+1}}{c_{2k+1} + a_{2k+1}\gamma_{2k+1}} = \frac{\beta}{1-\overline{\beta}k/(k+\beta)} = \frac{\beta(k+\beta)}{k+\beta-\overline{\beta}k} = \frac{k+\beta}{k+1}.$$

Для γ_{2k+3} находим

$$\gamma_{2k+3} = -\frac{b_{2(k+1)}}{c_{2(k+1)} + a_{2(k+1)}\gamma_{2(k+1)}} = \frac{\overline{\beta}}{1 - \beta(\beta + k)/(k+1)} =$$
$$= \frac{\overline{\beta}(k+1)}{k\overline{\beta} + \overline{\beta}(1+\beta)} = \frac{k+1}{k+1+\beta}.$$

Таким образом, утверждение доказано для γ_i. Проверим базу индукции для δ_i, $i = \overline{2, 2m-1}$. Имеем

$$\delta_2 = \frac{\beta\overline{\beta}}{1} = \frac{\overline{\beta}(1 - 1 + 2\beta)}{2},$$
$$\delta_3 = \frac{f_2 - a_2\delta_2}{c_2 + a_2\gamma_2} = \frac{0 + \overline{\beta}\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{\beta^2}{1+\beta} = \frac{1 \cdot \beta(1 - 1 + 2\beta)}{2(1+\beta)}.$$

Пусть утверждение верно для $\delta_{2n}, \delta_{2n+1}$ при $n \leqslant k$. Проверим справедливость соответствующих формул при $n = k+1$. Для $\delta_{2(k+1)}$ имеем

$$\delta_{2(k+1)} = \frac{f_{2k+1} - a_{2k+1}\delta_{2k+1}}{c_{2k+1} + a_{2k+1}\gamma_{2k+1}} = \frac{\overline{\beta}\beta + \overline{\beta}k\beta(k - 1 + 2\beta)/(2(k+\beta))}{(k + \beta - \overline{\beta}k)/(k+\beta)} =$$
$$= \frac{\overline{\beta}\beta(k+\beta) + \overline{\beta}k\beta(k - 1 + 2\beta)/2}{(k+1)\beta} = \frac{\overline{\beta}}{2(k+1)}\left(2k + 2\beta + k^2 - k + 2k\beta\right) =$$
$$= \frac{\overline{\beta}}{2(k+1)}\left(2\beta(k+1) + k(k+1)\right) = \frac{\overline{\beta}(k + 2\beta)}{2}.$$

Для δ_{2k+3} находим

$$\delta_{2k+3} = \frac{f_{2(k+1)} - a_{2(k+1)}\delta_{2(k+1)}}{c_{2(k+1)} + a_{2(k+1)}\gamma_{2(k+1)}} = \frac{0 + \beta\overline{\beta}(k + 2\beta)/2}{1 - \beta(\beta+k)/(k+1)} =$$
$$= \frac{\overline{\beta}\beta(k + 2\beta)(k+1)}{2(k\overline{\beta} + \overline{\beta}(1+\beta))} = \frac{(k+1)\beta(k+2\beta)}{2(k+1+\beta)}.$$

Таким образом, соответствующие формулы справедливы для δ_i. □

Утверждение 1.5. *Решение системы* (1.8) *дается следующими формулами*:

$$L_{2k+1} = \frac{(m - k - \beta)(k + \beta) + \overline{\beta}\beta}{2} = H_{\infty}^{m,\beta}((k+\beta)/m), \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{1.12}$$
$$L_{2k} = \frac{k(m-k)}{2} = H_{\infty}^{m,\beta}(k/m), \quad k = \overline{0, m}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Из (1.9) следует, что

$$L_{2k-1} = \gamma_{2k}\gamma_{2k+1}L_{2k+1} + \gamma_{2k}\delta_{2k+1} + \delta_{2k},\ k = \overline{1, m-1}.$$

Покажем, что подстановкой $H_\infty^{m,\beta}((k+\beta)/m)$ вместо L_{2k+1} это равенство обращается в тождество. Для первого слагаемого имеем

$$2\gamma_{2k}\gamma_{2k+1}H_\infty^{m,\beta}((k+\beta)/m) = \frac{k-1+\beta}{k+\beta}((m-k-\beta)(k+\beta)+\overline{\beta}\beta) =$$
$$= (m-k-\beta)(k-1+\beta)+\overline{\beta}\beta - \frac{\overline{\beta}\beta}{k+\beta} =$$
$$= (m-(k-1+\beta))(k-1+\beta)-(k-1+\beta)+\overline{\beta}\beta-\frac{\overline{\beta}\beta}{k+\beta}.$$

Для второго слагаемого находим

$$2(\gamma_{2k}\delta_{2k+1}+\delta_{2k}) = \frac{(k-1+\beta)\beta(k-1+2\beta)}{k+\beta}+\overline{\beta}(k-1+2\beta) =$$
$$= \beta(k-1+2\beta)-\frac{\beta(k-1+2\beta)}{k+\beta}+\overline{\beta}(k-1+2\beta) =$$
$$= k-1+2\beta-\frac{\beta(k+\beta-\overline{\beta})}{k+\beta} = (k-1+\beta)+\frac{\overline{\beta}\beta}{k+\beta}.$$

Отсюда получаем

$$\gamma_{2k}\gamma_{2k+1}H_\infty^{m,\beta}((k+\beta)/m)+\gamma_{2k}\delta_{2k+1}+\delta_{2k} =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg((m-(k-1+\beta))(k-1+\beta)-(k-1+\beta)+\overline{\beta}\beta-\frac{\overline{\beta}\beta}{k+\beta}+$$
$$+(k-1+\beta)+\frac{\overline{\beta}\beta}{k+\beta}\Bigg) = \frac{1}{2}\left((m-(k-1+\beta))(k-1+\beta)+\overline{\beta}\beta\right) =$$
$$= H_\infty^{m,\beta}((k-1+\beta)/m).$$

Справедливость (1.12) установлена. Далее, имеем

$$2H_\infty^{m,\beta}((k-1+\beta)/m) = (m-k-\beta+1)(k-1+\beta) =$$
$$= (m-k-\beta)(k+\beta)-m+2k+\beta-\overline{\beta}.$$

Отсюда получаем

$$2L_{2k} = 2(\beta L_{2k-1}+\overline{\beta}L_{2k+1}) = (m-k-\beta)(k+\beta)+\beta\overline{\beta}-\beta(m-2k-\beta+\overline{\beta}) =$$
$$= (m-k)k+\beta(m-2k-\beta+\overline{\beta})-\beta(m-2k-\beta+\overline{\beta}) = (m-k)k.$$

Таким образом, установлена справедливость (1.13). □

Итак, мы определили функцию $L_\infty^{m,\beta}(p)$ при $p \in P$. Для $p \in [0,1] \setminus P$ стратегия инсайдера основана на применении выпуклых комбинаций (с разными коэффициентами) распределений полных и апостериорных вероятностей, отвечающих одношаговым стратегиям вида ϕ_k^β, которые соответствуют концам интервала, в котором находится p.

Для $p = \lambda p_k^\beta + (1-\lambda)p_{k+1}^0$, $\lambda \in (0,1)$ обозначим через $\lambda\phi_k^\beta + (1-\lambda)\phi_{k+1}^0$ распределение, при котором первый игрок рандомизирует выбор ставок $k, k+1, k+2$ с параметрами

$$\begin{aligned} q(k) &= \lambda\overline{\beta}, \quad p(H|k) = p_k^0, \\ q(k+1) &= \beta, \quad p(H|k+1) = \lambda p_{k+1}^0 + (1-\lambda)p_k^\beta, \\ q(k+2) &= (1-\lambda)\overline{\beta}, \quad p(H|k+2) = p_{k+1}^\beta. \end{aligned}$$

Для $p = \lambda p_k^0 + (1-\lambda)p_k^\beta$, $\lambda \in (0,1)$ через $\lambda\phi_k^0 + (1-\lambda)\phi_k^\beta$ обозначим распределение, при котором первый игрок рандомизирует выбор ставок k и $k+1$ с параметрами

$$\begin{aligned} q(k) &= \lambda\beta + (1-\lambda)(1-\beta),\ p(H|k) = \frac{\lambda\beta}{q(k)}p_{k-1}^\beta + \frac{(1-\lambda)(1-\beta)}{q(k)}p_k^0, \\ q(k+1) &= \lambda(1-\beta) + (1-\lambda)\beta,\ p(H|k+1) = \frac{\lambda(1-\beta)}{q(k+1)}p_k^\beta + \frac{(1-\lambda)\beta}{q(k+1)}p_{k+1}^0. \end{aligned}$$

Утверждение 1.6. *При $\lambda \in (0,1)$, $k = \overline{0, m-1}$, при использовании распределений $\lambda\phi_k^0 + (1-\lambda)\phi_k^\beta$ и $\lambda\phi_k^\beta + (1-\lambda)\phi_{k+1}^0$ для одношагового гарантированного выигрыша первого игрока верны оценки*

$$\begin{aligned} \min_{j\in J} K_1^{m,\beta}(\lambda p_k^0 + (1-\lambda)p_k^\beta,\, \lambda\phi_k^0 + (1-\lambda)\phi_k^\beta,\, j) &\geqslant \overline{\beta}\beta(1-\lambda), \\ \min_{j\in J} K_1^{m,\beta}(\lambda p_k^\beta + (1-\lambda)p_{k+1}^0,\, \lambda\phi_k^\beta + (1-\lambda)\phi_{k+1}^0,\, j) &\geqslant \overline{\beta}\beta\lambda. \end{aligned}$$

Доказательство. Из (1.1) находим, что для произвольной одношаговой стратегии σ с параметрами $(q(i), p(H|i),\, i \in I)$ выполняется

$$\begin{aligned} K_1^{m,\beta}(p,\sigma,j) &= \sum_{i\in I} p\sigma_i^H a^{H,\beta}(i,j) + (1-p)\sigma_i^L a^{L,\beta}(i,j) = \\ &= \sum_{i\in I} q(i)(p(H|i)a^{H,\beta}(i,j) + (1-p(H|i))a^{L,\beta}(i,j)). \end{aligned}$$

Далее, пусть априорной вероятности $p_1 \in [0,1]$ отвечает одношаговая стратегия σ^1 с параметрами $(q^1(i), p^1(H|i),\ i \in I)$, а априорной вероятности $p_2 \in [0,1]$, отвечает стратегия σ^2 с параметрами $(q^2(i), p^2(H|i),\ i \in I)$. Определим для $p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ одношаговую стратегию σ^c с параметрами

$$q^c(i) = \lambda q^1(i) + (1-\lambda)q^2(i),\ \ p^c(H|i) = \frac{\lambda q^1(i)p^1(H|i) + (1-\lambda)q^2(i)p^2(H|i)}{q^c(i)}.$$

Одношаговый выигрыш при применении такой стратегии в игре с априорной вероятностью $p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$ равен

$$\begin{aligned} K_1^{m,\beta}(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2, \sigma^c, j) = \sum_{i\in I} q^c(i)\Bigg(\frac{\lambda q^1(i)p^1(H|i) + (1-\lambda)q^2(i)p^2(H|i)}{q^c(i)}\times \\ \times a^{H,\beta}(i,j) + \frac{\lambda q^1(i)(1-p^1(H|i)) + (1-\lambda)q^2(i)(1-p^2(H|i))}{q^c(i)}a^{L,\beta}(i,j)\Bigg) = \\ = \lambda \sum_{i\in I} q^1(i)(p^1(H|i)a^{H,\beta}(i,j) + (1-p^1(H|i))a^{L,\beta}(i,j)) + \\ + (1-\lambda)\sum_{i\in I} q^2(i)(p^2(H|i)a^{H,\beta}(i,j) + (1-p^2(H|i))a^{L,\beta}(i,j)) = \\ = \lambda K_1^{m,\beta}(p_1, \sigma^1, j) + (1-\lambda)K_1^{m,\beta}(p_2, \sigma^2, j). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что определенные выше распределения $\lambda\phi_k^\beta + (1-\lambda)\phi_{k+1}^0$ и $\lambda\phi_k^0 + (1-\lambda)\phi_k^\beta$ отвечают именно таким выпуклым комбинациям распределений полных и апостериорных вероятностей. Отсюда и из утверждения 1.3 следует справедливость данного утверждения. □

Замечание 1.5. Одношаговая стратегия σ^c из утверждения 1.6 не является линейной комбинацией одношаговых стратегий σ^1 и σ^2 в смысле покомпонентного равенства:

$$\sigma_i^{c,H} \neq \lambda\sigma_i^{1,H} + (1-\lambda)\sigma_i^{2,H},\ i \in I.$$

Пусть σ^* для $p \in [0,1] \setminus P$ состоит в применении σ^c из утверждения 1.6, причем на последующих шагах игры $G_n^{m,\beta}(p)$, $n \in \mathbb{N}$ одношаговая стратегия σ^c рекурсивно применяется для соответствующих значений апостериорных вероятностей.

Утверждение 1.7. *При $\lambda \in (0,1)$, $k = \overline{0, m-1}$, и использовании первым игроком стратегии σ^* для его одношаговых гарантированных выигрышей в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$ справедливы равенства*

$$L_\infty^{m,\beta}(\lambda p_k^0 + (1-\lambda)p_k^\beta) = \lambda L_\infty^{m,\beta}(p_k^0) + (1-\lambda)L_\infty^{m,\beta}(p_k^\beta),$$
$$L_\infty^{m,\beta}(\lambda p_k^\beta + (1-\lambda)p_{k+1}^0) = \lambda L_\infty^{m,\beta}(p_k^\beta) + (1-\lambda)L_\infty^{m,\beta}(p_k^0).$$

Доказательство. Пусть $p = \lambda p_k^\beta + (1-\lambda)p_{k+1}^0$, $k = \overline{0, m-2}$, $\lambda \in (0,1)$. Тогда по аналогии с (1.7) выписывается следующая рекуррентная формула:

$$\begin{aligned} L_n^{m,\beta}(p,\sigma^*) = \overline{\beta}\beta\lambda + \lambda\overline{\beta}L_{n-1}^{m,\beta}(p_k^0, \sigma^*(k)) + (1-\lambda)\overline{\beta}L_{n-1}^{m,\beta}(p_{k+1}^\beta, \sigma^*(k+2)) + \\ + \beta L_{n-1}^{m,\beta}((1-\lambda)p_k^\beta + \lambda p_{k+1}^0, \sigma^*(k+1)), \end{aligned}$$

откуда предельным переходом при $n \to \infty$ получаем

$$\begin{aligned} L_\infty^{m,\beta}(p) = \overline{\beta}\beta\lambda + \lambda\overline{\beta}L_\infty^{m,\beta}(p_k^0) + (1-\lambda)\overline{\beta}L_\infty^{m,\beta}(p_{k+1}^\beta) + \\ + \beta L_\infty^{m,\beta}((1-\lambda)p_k^\beta + \lambda p_{k+1}^0). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Так как $(1-\lambda)p_k^\beta + \lambda p_{k+1}^0 \in (p_k^\beta, p_{k+1}^0)$, то для $L_\infty^{m,\beta}((1-\lambda)p_k^\beta + \lambda p_{k+1}^0)$ справедливо аналогичное представление:

$$\begin{aligned} L_\infty^{m,\beta}((1-\lambda)p_k^\beta + \lambda p_{k+1}^0) = \overline{\beta}\beta(1-\lambda) + (1-\lambda)\overline{\beta}L_\infty^{m,\beta}(p_k^0) + \\ + \lambda\overline{\beta}L_\infty^{m,\beta}(p_{k+1}^\beta) + \beta L_\infty^{m,\beta}(p). \end{aligned}$$

Подставив данное выражение в (1.14) и приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} L_\infty^{m,\beta}(p) &= \frac{1}{1-\beta^2}\Big(\overline{\beta}\beta\lambda + \overline{\beta}\lambda L_\infty^{m,\beta}(p_k^0) + (1-\lambda)\overline{\beta}L_\infty^{m,\beta}(p_{k+1}^\beta) + \\ &+\beta\left(\overline{\beta}\beta(1-\lambda) + (1-\lambda)\overline{\beta}L_\infty^{m,\beta}(p_k^0) + \lambda\overline{\beta}L_\infty^{m,\beta}(p_{k+1}^\beta)\right)\Big) = \\ &= \left((k+1)(m-k-1) + \overline{\beta}\lambda(2k-m+2\beta+1)\right)/2 = \\ &= \lambda L_\infty^{m,\beta}(p_k^\beta) + (1-\lambda)L_\infty^{m,\beta}(p_{k+1}^0). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Пусть $p = \lambda p_k^0 + (1-\lambda)p_k^\beta$, где $k = \overline{1, m-1}$, $\lambda \in (0,1)$. Заметим, что $p(H|k) \in (p_{k-1}^\beta, p_k^0)$, а $p(H|k+1) \in (p_k^\beta, p_{k+1}^0)$. Тогда с помощью (1.15) получим

$$\begin{aligned} L_\infty^{m,\beta}(p) = \lambda\beta L_\infty^{m,\beta}(p_{k-1}^\beta) + (1-\lambda)(1-\beta)L_\infty^{m,\beta}(p_k^0) + \lambda(1-\beta)L_\infty^{m,\beta}(p_k^\beta) + \\ + (1-\lambda)\beta L_\infty^{m,\beta}(p_{k+1}^0) = \lambda L_\infty^{m,\beta}(p_k^0) + (1-\lambda)L_\infty^{m,\beta}(p_k^\beta). \end{aligned}$$

При $p \in (0, p_1^\beta)$ и $p \in (p_{m-1}^\beta, 1)$ доказательство проводится аналогично. $\square$

Таким образом, мы определили соответствующий гарантированный выигрыш первого игрока $L_\infty^{m,\beta}(p)$ для любых $p \in [0,1]$, $\beta \in (0,1)$. Отсюда вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1.2. *При использовании первым игроком стратегии σ^* в игре $G_\infty^{m,\beta}(p)$, его выигрыш ограничен снизу величиной $L_\infty^{m,\beta}(p)$, т.е.*

$$\min_{\tau \in \mathrm{T}} K_\infty^{m,\beta}(p, \sigma^*, \tau) \geqslant L_\infty^{m,\beta}(p).$$

1.6 Значение игры $\mathbf{G_\infty^{m,\beta}(p)}$

Теорема 1.1. *Игра $G_\infty^{m,\beta}(p)$ имеет значение $V_\infty^{m,\beta}(p) = H_\infty^{m,\beta}(p) = L_\infty^{m,\beta}(p)$. При этом σ^* – оптимальная стратегия первого игрока, а τ^* – оптимальная стратегия второго игрока.*

Доказательство данной теоремы непосредственно следует из леммы 1.1 и утверждения 1.5 и по форме повторяет доказательство аналогичной теоремы в [34].

Утверждение 1.8. *При любом значении $p \in [0,1]$, $\beta \in (0,1)$ и $m \geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$V_\infty^{m,\beta}(p) \geqslant V_\infty^{m,1}(p) = V_\infty^{m,0}(p),$$

причем равенство достигается только при $p = k/m$, $k = \overline{0,m}$.

Доказательство. Равенство $V_\infty^{m,1}(p) = V_\infty^{m,0}(p)$ следует из замечания 1.3 и того, что при $p = k/m$ выполняется

$$V_\infty^{m,1}(p) = V_\infty^{m,0}(1-p) = \frac{(m-k)(m-(m-k))}{2} = \frac{k(m-k)}{2} = V_\infty^{m,0}(p).$$

Далее, из (1.13) следует, что нам достаточно показать, что

$$V_\infty^{m,\beta}((k+\beta)/m) > V_\infty^{m,1}((k+\beta)/m).$$

В силу того, что $(k+\beta)/m = \overline{\beta}k/m + \beta(k+1)/m$, получаем

$$V_\infty^{m,\beta}((k+\beta)/m) - \overline{\beta}V_\infty^{m,1}(k/m) - \beta V_\infty^{m,1}((k+1)/m) = 2\overline{\beta} > 0.$$

Отсюда следует справедливость данного утверждения. □

Таким образом, из всех рассматриваемых механизмов торгов, те механизмы, которые предписывают продавать акцию по наибольшей или наименьшей предложенной цене, гарантируют инсайдеру наименьший возможный выигрыш.

1.7 Динамика апостериорных вероятностей

Рассмотрим динамику апостериорных вероятностей, возникающую при применении игроками оптимальных стратегий.

Пусть $p \in P$. Обозначим через p^t апостериорную вероятность состояния H после t-го шага игры, причем $p^0 = p$ соответствует исходной априорной вероятности. Тогда из замечания 1.4 и рекурсивной структуры игры $G_\infty^{m,\beta}(p)$ следует, что последовательность $(p^0, p^1, p^2, \ldots, p^t, \ldots)$ представляет собой однородную марковскую цепь с $2m$ состояниями и $2m \times 2m$-матрицей переходных вероятно-

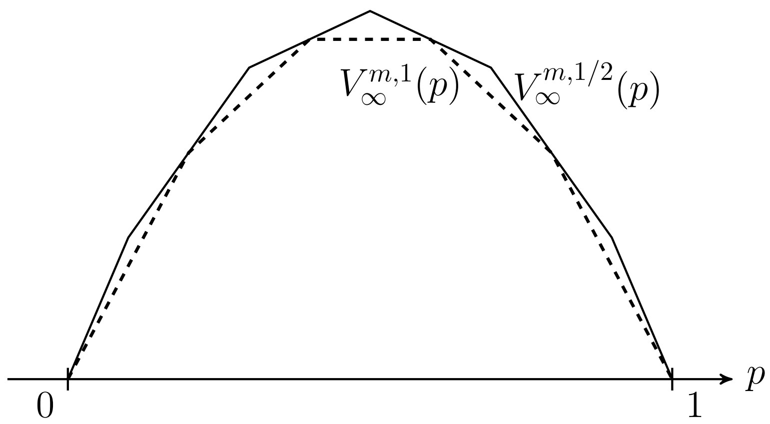

Рисунок 1.4 — Графики функции $V_\infty^{m,\beta}(p)$ при значениях $\beta = 1/2$ и $\beta = 1$

стей

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{\beta} & 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \overline{\beta} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & \beta & 0 & \overline{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & \overline{\beta} & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Занумеруем состояния данной марковской цепи следующим образом:

$$p_{2k} = \frac{k}{m}, \quad k = \overline{0, m}, \quad p_{2k+1} = \frac{k+\beta}{m}, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Из (1.16) видно, что состояния p_0 и p_{2m} являются поглощающими. Они соответствуют моменту игры, в который происходит полное раскрытие приватной информации первого игрока, т.е. моменту, когда второму игроку становится доподлинно известно истинное состояние s. Случайная величина

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \min\left\{t \geqslant 0 : p^t \in \{p_0, p_{2m}\}\right\}$$

соответствует моменту поглощения. Величина

$$\tau(p_k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\{\xi \mid p^0 = p_k\}$$

определяет ожидаемую продолжительность игры, при условии, что априорная вероятность равна p_k.

Обозначим через π_i^l, π_i^r, $i \in \overline{1, 2m-1}$ вероятности перехода из состояния p_i в состояния p_{i-1} и p_{i+1} соответственно.

Утверждение 1.9. *Ожидаемая продолжительность игры $G_\infty^{m,\beta}(p_k)$ выражается формулами*

$$\tau(p_{2k+1}) = \frac{(m-k-\beta)(k+\beta)}{\beta\overline{\beta}}, \quad \tau(p_{2k}) = \frac{k(m-k)}{\beta\overline{\beta}}.$$

Доказательство. Известно, что ожидаемое время до поглощения для марковских цепей имеющих структуру, изображенную на рисунке 1.5, выражается сле-

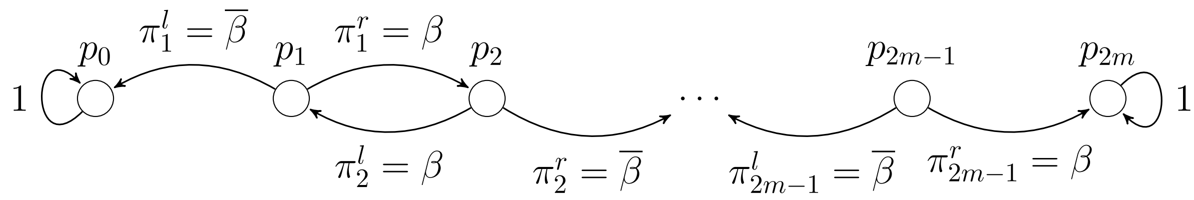

Рисунок 1.5 — Марковская цепь, соответствующая последовательности апостериорных вероятностей

дующим образом (см.[19, § 12]):

$$\tau(p_j) = \sum_{i=0}^{j-1} \rho_i \cdot \frac{\sum_{i=0}^{2m-1} R_i}{\sum_{i=0}^{2m-1} \rho_i} - \sum_{i=0}^{j-1} R_i, \tag{1.17}$$

где

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_j = \frac{\pi_1^l \dots \pi_j^l}{\pi_1^r \dots \pi_j^r}, \quad j \geqslant 1,$$

$$R_0 = 0, \quad R_1 = \frac{1}{\pi_1^r}, \quad R_j = \frac{1}{\pi_j^r}\left(1 + \frac{\pi_j^l}{\pi_{j-1}^r} + \dots + \frac{\pi_j^l \dots \pi_2^l}{\pi_{j-1}^r \dots \pi_1^r}\right), \quad j \geqslant 2.$$

Нетрудно проверить, что для коэффициентов ρ_j, R_j выполняются равенства

$$\rho_{2k+1} = \frac{\overline{\beta}}{\beta}, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad \rho_{2k} = 1, \quad k = \overline{1, m-1},$$

$$R_k = \frac{k}{\pi_k^r}, \quad k = \overline{1, 2m-1}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered} \sum_{i=0}^{2k-1} \rho_i = k + k\frac{\overline{\beta}}{\beta} = \frac{k}{\beta}, \\ \sum_{i=0}^{2k-1} R_i = \frac{k^2}{\beta} + \frac{k(k-1)}{\overline{\beta}} = \frac{k(k-\beta)}{\beta\overline{\beta}}. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Из (1.17) и (1.18) находим

$$\tau(p_{2k}) = \frac{k}{\beta}\frac{m-\beta}{\overline{\beta}} - \frac{k(k-\beta)}{\beta\overline{\beta}} = \frac{k(m-k)}{\beta\overline{\beta}}. \tag{1.19}$$

Заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\tau(p_{2k+1}) = 1 + \overline{\beta}\tau(p_{2k}) + \beta\tau(p_{2(k+1)}). \tag{1.20}$$

Справедливость формулы для $\tau(p_{2k+1})$ проверяется подстановкой (1.19) в выражение (1.20). $\square$

В силу того, что первый игрок получает положительные выплаты размера $\beta\overline{\beta}$ только в состояниях p_i с нечетными номерами, то его выигрыш за игру равен среднему количеству посещенных нечетных состояний, умноженных на одношаговую выплату. В частности, при $p = p_{2k+1}$ и первое, и последнее состояние дают положительный выигрыш. Отсюда получаем

$$\frac{\tau(p_{2k+1}) + 1}{2} \cdot \beta\overline{\beta} = \frac{(m - k - \beta)(k + \beta) + \beta\overline{\beta}}{2}.$$

Аналогично при $p = p_{2k}$ имеем

$$\frac{\tau(p_{2k})}{2} \cdot \beta\overline{\beta} = \frac{k(m - k)}{2}.$$

Данные результаты согласуется с формулами (1.12, 1.13).

Нужно отметить, что в сравнении со случайным блужданием апостериорных вероятностей, порождаемым оптимальной стратегией инсайдера из [34], случайное блуждание, рассмотренное выше, имеет более сложный характер: в дополнение к точками k/m оно включает точки $(k+\beta)/m$, кроме того, оно больше не является симметричным, за исключением случая $\beta = 1/2$.

Глава 2. Теоретико-игровая модель биржевых торгов с дискретными ставками и счетным множеством состояний

В разделе 2.1 дано формальное описание модели рынка со счетным множеством состояний. Раздел 2.2 посвящен анализу стратегии неосведомленного игрока и получению оценки сверху на выигрыш инсайдера. Построение стратегии инсайдера и получение оценки снизу его выигрыша проведено в разделе 2.3. Рассматриваемая стратегия основана на представлении вероятностных распределений в виде суммы распределений с двухточечным носителем из [3]. Вопросы сходимости по норме рядов в разложении распределений с бесконечным носителем также исследованы в разделе 2.3. В разделе 2.4 дана теорема о значении игры неограниченной продолжительности и приведена динамика апостериорных вероятностей при применении игроками оптимальных стратегий. Раздел 2.5 посвящен построению второй оптимальной стратегии инсайдера, анализу случайных блужданий апостериорных вероятностей, порождаемых данной стратегией, а также сравнению результатов с результатами из [3].

Основные результаты данной главы опубликованы в работе [52].

2.1 Описание модели рынка со счетным множеством состояний

Рассмотрим модель рынка с дискретными ставками и множеством состояний $S = \mathbb{Z}_+$. Перед началом игры случай выбирает состояние рынка $s \in S$ в соответствии с вероятностным распределением $\bar{p} = (p(s),\ s \in S)$, имеющим конечную дисперсию состояния $\mathbb{D}\,\bar{p} < \infty$. Множество всех таких распределений обозначим $\overline{P}$.

На каждом шаге игры $t = \overline{1,n},\ n \leqslant \infty$, игроки делают ставки $i_t \in I$, $j_t \in J$, где $I = J = \mathbb{Z}_+$. В силу того, что игрок, предложивший бóльшую ставку, покупает акцию у другого по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок, выплата первому игроку в состоянии s равна

$$a^{s,\beta}(i_t, j_t) = \begin{cases} (1-\beta)i_t + \beta j_t - s, & i_t < j_t, \\ 0, & i_t = j_t, \\ s - \beta i_t - (1-\beta)j_t, & i_t > j_t. \end{cases}$$

На шаге t обоим игрокам достаточно принимать в расчет лишь последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_{t-1})$ действий первого игрока на предыдущих ходах. Это связано с тем, что информация, получаемая вторым игроком относительно состояния s, может передаваться лишь посредством действий первого игрока. Подробное обсуждение данного факта можно найти в [46].

Обозначим через $\Delta(X)$ совокупность всех вероятностных распределений на множестве X.

Стратегией первого игрока является последовательность ходов (отображений) $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t : S \times I^{t-1} \to \Delta(I)$. Множество стратегий первого игрока обозначим Σ.

Стратегией второго игрока является последовательность ходов (отображений) $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : I^{t-1} \to \Delta(J)$. Множество стратегий второго игрока обозначим T.

При использовании игроками стратегий σ и τ ожидаемый выигрыш первого игрока равен

$$K_n^\beta(\bar{p}, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{(\bar{p},\sigma,\tau)} \sum_{t=1}^{n} a^{s,\beta}(i_t, j_t),$$

где математическое ожидание берется по мере, индуцированной $\bar{p}$, σ и τ на множестве $S \times I^n \times J^n$. Заданную таким образом игру обозначим $G_n^\beta(\bar{p})$.

Если для некоторых стратегий $\sigma^* \in \Sigma$, $\tau^* \in \mathrm{T}$ выполняются равенства

$$\inf_{\tau \in \mathrm{T}} K_n^\beta(\bar{p}, \sigma^*, \tau) = K_n^\beta(\bar{p}, \sigma^*, \tau^*) = \sup_{\sigma \in \Sigma} K_n^\beta(\bar{p}, \sigma, \tau^*) \overset{\text{def}}{=} V_n^\beta(\bar{p}),$$

то говорят, что игра $G_n^\beta(\bar{p})$ имеет значение $V_n^\beta(\bar{p})$, а стратегии σ^* и τ^* называются оптимальными.

Нижнее и верхнее значения игры $G_n^\beta(\bar{p})$ обозначим соответственно

$$\underline{V}_n^\beta(\bar{p}) = \sup_{\sigma\in\Sigma}\inf_{\tau\in\mathrm{T}} K_n^\beta(\bar{p},\sigma,\tau), \quad \overline{V}_n^\beta(\bar{p}) = \inf_{\tau\in\mathrm{T}}\sup_{\sigma\in\Sigma} K_n^\beta(\bar{p},\sigma,\tau).$$

Данные функции являются вогнутыми на $\overline{P}$. Доказательство этого утверждения проводится аналогично [34].

Как и в главе 1, опишем рекурсивную структуру игры $G_n^\beta(\bar{p})$. Представим стратегию первого игрока в виде $\sigma = (\sigma_1, \sigma(i), i \in I)$, где σ_1 — его ход на первом шаге, а $\sigma(i)$ — его стратегия в игре продолжительности $n-1$ в зависимости от ставки i, выбранной им на первом шаге.

Аналогично, стратегию второго игрока представим в виде $\tau = (\tau_1, \tau(i),\ i \in I)$. Далее, обозначим $q(i)$ полную вероятность, с которой первый игрок делает ставку $i \in I$, а $q = (q(i),\ i \in I)$ — соответствующее распределение. Также обозначим $p(s|i)$ апостериорную вероятность состояния s в зависимости от ставки i первого игрока, и $\bar{p}(i) = (p(s|i),\ s \in S)$ — соответствующее апостериорное распределение. Тогда для функции выигрыша первого игрока в игре $G_n^\beta(\bar{p})$ справедлива формула

$$K_n^\beta(\bar{p},\sigma,\tau) = K_1^\beta(\bar{p},\sigma_1,\tau_1) + \sum_{i\in I} q(i) K_{n-1}^\beta(\bar{p}(i),\sigma(i),\tau(i)).$$

2.2 Оценка сверху выигрыша первого игрока в игре $\mathbf{G}_\infty^\beta(\bar{\mathbf{p}})$

В [3] определена следующая чистая стратегия второго игрока $\tau^k = (\tau_t^k, t = \overline{1,\infty})$:

$$\tau_1^k = k, \quad \tau_t^k(i_{t-1}, j_{t-1}) = \begin{cases} j_{t-1} - 1, & i_{t-1} < j_{t-1}, \\ j_{t-1}, & i_{t-1} = j_{t-1}, \\ j_{t-1} + 1, & i_{t-1} > j_{t-1}. \end{cases}$$

Другими словами, второй игрок делает ставку равную k на первом шаге, а далее либо подражает инсайдеру, либо смещается на единицу к ставке инсайдера предыдущего шага.

Лемма 2.1. *При применении стратегии τ^k в игре $G_n^{\beta}(\bar{p})$ второй игрок в состоянии s гарантирует себе проигрыш не более*

$$h_n^s(\tau^k) = \begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{n-1}(k-s-t-1+\beta)^+, \ s \leqslant k, \\ \sum\limits_{t=0}^{n-1}(s-k-t-\beta)^+, \ s > k. \end{cases}$$

Для любого $s \in S$ последовательность $\left\{h_n^s(\tau^k)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает, ограничена сверху и сходится к

$$h_{\infty}^s(\tau^k) = (s-k+1-2\beta)(s-k)/2. \tag{2.1}$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n для случая $s > k$. При $n = 1$ оптимальный ответ первого игрока на τ^k будет $i = k+1$. Тогда его выигрыш в игре $G_1^{\beta}(\bar{p})$ равен

$$h_1^s(\tau^k) = s - \beta(k+1) - (1-\beta)k = s-k-\beta.$$

База индукции проверена. Предположим, что утверждение верно при $n \leqslant N$. При $n = N+1$ первый игрок имеет два разумных ответа на τ^k: ставка $i = k+1$, что соответствует покупке акции по наименьшей возможной цене, и ставка $i = k-1$, что соответствует продаже акции за наибольшую возможную цену. Найдем оценки выигрыша в каждом из случаев. Для $i = k+1$ выигрыш первого игрока не превосходит величины

$$s-k-\beta+h_N^s(\tau^{k+1}) = \sum_{t=0}^{N}(s-k-t-\beta)^+.$$

Аналогично для $i = k-1$ тот же выигрыш не превосходит

$$\beta k + (1-\beta)(k-1) - s + h_N^s(\tau^{k-1}) = \sum_{t=0}^{N-2}(s-k-t-\beta)^+.$$

При $s \leqslant k$ формула для $h_n^s(\tau^k)$ доказывается аналогично. Сходимость последовательности $\left\{h_n^s(\tau^k)\right\}_{n=1}^{\infty}$ к $h_\infty^s(\tau^k)$ следует из равенств $h_n^s(\tau^k) = h_{n+1}^s(\tau^k)$ при $n \geqslant s - k$. $\square$

Следующие множества распределений зададим ограничениями на математическое ожидание состояния:

$$\Theta(x) = \left\{\bar p \in \overline{P} : \mathbb{E}\,\bar p = x\right\},$$
$$\Lambda(x, y) = \left\{\bar p \in \overline{P} : x < \mathbb{E}\,\bar p \leqslant y\right\}.$$

Пусть τ^* — стратегия второго игрока, состоящая в применении τ^k при $\bar p \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$. Отметим, что при заданном распределении $\bar p$ выбор k зависит от значения β. Отсюда следует, что стратегия τ^* также зависит от β.

Теорема 2.1. *При использовании вторым игроком стратегии τ^* выигрыш первого игрока в игре $G_\infty^\beta(\bar p)$ ограничен сверху величиной*

$$H_\infty^\beta(\bar p) = \inf_{k \in J} \sum_{s \in S} p(s) h_\infty^s(\tau^k).$$

Функция $H_\infty^\beta(\bar p)$ является кусочно-линейной вогнутой с областями линейности $\Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ и областями недифференцируемости $\Theta(k+\beta)$ при $k \in S$. Для распределений $\bar p$ с $\mathbb{E}\,\bar p = k - 1 + \beta + \eta$, $\eta \in (0, 1]$, ее значение равно

$$H_\infty^\beta(\bar p) = \left(\mathbb{D}\,\bar p + \beta(1-\beta) - \eta(1-\eta)\right)/2. \tag{2.2}$$

Доказательство. Воспользовавшись (2.1), получим

$$\sum_{s \in S} p(s) h_\infty^s(\tau^j) = \left(j^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar p) j - (2\beta - 1)\,\mathbb{E}\,\bar p + \mathbb{E}\,\bar p^2\right)/2. \tag{2.3}$$

Квадратичная функция $\omega(x, \bar p) = x^2 + (2\beta - 1 - 2\,\mathbb{E}\,\bar p)x$ достигает минимума по x в точке $\mathbb{E}\,\bar p - \beta + 1/2$. Отсюда при $\bar p \in \Lambda(k-1+\beta, k+\beta)$ выражение (2.3) достигает минимума по j при $j = k$. Равенство (2.2) проверяется непосредственной подстановкой $\mathbb{E}\,\bar p = k - 1 + \beta + \eta$ в (2.3). $\square$

Заметим, что в данном случае наблюдается сдвиг областей линейности на β относительно $\mathbb{E}\,\bar p$ в сравнении с областями из [3].

2.3 Оценка снизу выигрыша первого игрока в игре $\mathbf{G}^{\beta}_{\infty}(\bar{\mathbf{p}})$

Перейдем к описанию стратегии первого игрока, гарантирующей ему выигрыш не менее $H^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$. Пусть $\sigma^s_{1,i}$ — компонента хода σ_1 первого игрока, т.е. вероятность сделать ставку i в состоянии s. По правилу Байеса $\sigma^s_{1,i} = p(s|i)q(i)/p(s)$. В частности, справедливы равенства $\sum_{s\in S}\sigma^s_{1,i}p(s) = q(i)$, $i \in I$. Таким образом, ход σ_1 первого игрока можно определить, задав следующие параметры: полные вероятности $q(i)$ сделать ставку i и апостериорные вероятности $p(s|i)$ для $i \in I$. Тогда его одношаговый выигрыш выражается следующим образом:

$$K^{\beta}_1(\bar{p}, \sigma_1, j) = \sum_{i\in I}\sum_{s\in S} q(i)p(s|i)a^{s,\beta}(i, j). \tag{2.4}$$

Обозначим $L^{\beta}_n(\bar{p}, \sigma)$ гарантированный выигрыш первого игрока, использующего стратегию σ в игре $G^{\beta}_n(\bar{p})$, т.е.

$$L^{\beta}_n(\bar{p}, \sigma) = \inf_{\tau\in \mathrm{T}} K^{\beta}_n(\bar{p}, \sigma, \tau).$$

Лемма 2.2. *Пусть* $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \in \overline{P}$, $\sigma^1, \sigma^2 \in \Sigma$ *— стратегии первого игрока. Тогда для* $\bar{p} = \lambda\bar{p}_1 + (1-\lambda)\bar{p}_2$, $\lambda \in [0, 1]$, *найдется такая стратегия* $\sigma^c \in \Sigma$, *что*

$$L^{\beta}_n(\bar{p}, \sigma^c) \geqslant \lambda L^{\beta}_n(\bar{p}_1, \sigma^1) + (1-\lambda)L^{\beta}_n(\bar{p}_2, \sigma^2).$$

Доказательство. Без потери общности будем считать, что второй игрок использует стратегии τ, в которых распределения на множестве ставок имеют конечные математические ожидания. В противном случае ожидаемый выигрыш первого игрока будет равен бесконечности. Множество таких стратегий обозначим T'.

Докажем следующее утверждение: найдется такая стратегия $\sigma^c = (\sigma^c_1, \sigma^c(i)) \in \Sigma$, что при всех $\tau \in \mathrm{T}'$ справедливо равенство

$$K^{\beta}_n(\bar{p}, \sigma^c, \tau) = \lambda K^{\beta}_n(\bar{p}_1, \sigma^1, \tau) + (1-\lambda)K^{\beta}_n(\bar{p}_2, \sigma^2, \tau). \tag{2.5}$$

Доказательство проведем по индукции. Пусть $q^h = (q^h(i),\ i \in I)$ и $\bar{p}^h(i) = (p^h(s|i),\ s \in S)$ — векторы полных и апостериорных вероятностей, соответствующие первому ходу σ_1^h стратегии σ^h, $h = 1, 2$. Определим первый ход σ_1^c стратегии σ^c параметрами

$$q(i) = \lambda q^1(i) + (1-\lambda) q^2(i),\ i \in I,$$
$$p(s|i) = \left(\lambda q^1(i) p^1(s|i) + (1-\lambda) q^2(i) p^2(s|i)\right)/q(i),\ i \in I,\ s \in S.$$

Подставив эти выражения в (2.4), для любого $j \in J$ имеем:

$$K_1^\beta(\bar{p}, \sigma_1^c, j) = \sum_{i \in I} \sum_{s \in S} q(i) p(s|i) a^{s,\beta}(i,j) =$$
$$= \sum_{i \in I,\, s \in S} q(i) \frac{(\lambda q^1(i) p^1(s|i) + (1-\lambda) q^2(i) p^2(s|i))}{q(i)} a^{s,\beta}(i,j) =$$
$$= \lambda K_1^\beta(\bar{p}_1, \sigma_1^1, j) + (1-\lambda) K_1^\beta(\bar{p}_2, \sigma_1^2, j).$$

Осредняя это равенство по произвольному $\tau \in \Delta(J)$, получим (2.5) при $n = 1$. Предположим, что утверждение имеет место при любых $n \leqslant N$. Поскольку для каждого $i \in I$

$$\bar{p}(i) = \frac{\lambda q^1(i)}{q(i)} \bar{p}^1(i) + \frac{(1-\lambda) q^2(i)}{q(i)} \bar{p}^2(i),$$

для $\sigma^1(i)$, $\sigma^2(i)$ найдется такая стратегия первого игрока $\sigma^c(i)$ в игре $G_N^\beta(\bar{p}(i))$, что для любой стратегии $\tau(i)$

$$K_N^\beta(\bar{p}(i), \sigma^c(i), \tau(i)) = \frac{\lambda q^1(i)}{q(i)} K_N^\beta(\bar{p}^1(i), \sigma^1(i), \tau(i)) +$$
$$+ \frac{(1-\lambda) q^2(i)}{q(i)} K_N^\beta(\bar{p}^2(i), \sigma^2(i), \tau(i)).$$

В результате для $\sigma^c = (\sigma_1^c, \sigma^c(i)) \in \Sigma$ и любой стратегии $\tau = (\tau_1, \tau(i)) \in \mathrm{T}'$ в игре $G_{N+1}^\beta(\bar{p})$ справедливо равенство

$$K_{N+1}^\beta(\bar{p}, \sigma^c, \tau) = K_1^\beta(\bar{p}, \sigma_1^c, \tau_1) + \sum_{i \in I} q(i) K_N^\beta(\bar{p}(i), \sigma^c(i), \tau(i)) =$$
$$= \lambda K_1^\beta(\bar{p}_1, \sigma_1^1, \tau_1) + (1-\lambda) K_1^\beta(\bar{p}_2, \sigma_1^2, \tau_2) +$$
$$+ \sum_{i \in I} q(i) \left(\frac{\lambda q^1(i)}{q(i)} K_N^\beta(\bar{p}^1(i), \sigma^1(i), \tau(i)) + \frac{(1-\lambda) q^2(i)}{q(i)} K_N^\beta(\bar{p}^2(i), \sigma^2(i), \tau(i)) \right) =$$
$$= \lambda K_{N+1}^\beta(\bar{p}_1, \sigma^1, \tau) + (1-\lambda) K_{N+1}^\beta(\bar{p}_2, \sigma^2, \tau).$$

Утверждение доказано. Из него получаем, что

$$\begin{aligned} L_n^\beta(\bar p, \sigma^c) &= \inf_{\tau\in\mathrm{T}'} K_n^\beta(\bar p, \sigma^c, j) \geqslant \\ &\geqslant \lambda \min_{\tau\in\mathrm{T}'} K_n^\beta(\bar p, \sigma^1, j) + (1-\lambda) \min_{\tau\in\mathrm{T}'} K_n^\beta(\bar p, \sigma^2, j) = \\ &= \lambda L_n^\beta(\bar p_1, \sigma^1) + (1-\lambda) L_n^\beta(\bar p_2, \sigma^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость основного утверждения леммы. □

Обозначим e^s вырожденное вероятностное распределение с носителем в точке s. Пусть $\bar p^x(l,r) \in \Theta(x)$ — распределение с носителем $\{l,r\}$, $l<r$. При этом распределении вероятности реализации состояний l и r равны $(r-x)/(r-l)$ и $(x-l)/(r-l)$ соответственно, а дисперсия

$$\mathbb{D}\, \bar p^x(l,r) = (x-l)(r-x).$$

Как показано в [3], любое распределение $\bar p = (p(s),\ s\in S) \in \Theta(x)$ может быть представлено в виде выпуклой комбинации распределений с двухточечными носителями следующим образом:

$$\bar p = \begin{cases} p(x)e^x + \sum\limits_{r=x+1}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar p) \bar p^x(l,r), & x\in S, \\ \sum\limits_{r=\lfloor x+1\rfloor}^{\infty} \sum\limits_{l=0}^{\lceil x-1\rceil} \alpha_{l,r}(\bar p) \bar p^x(l,r), & x\notin S, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\alpha_{l,r}(\bar p) = (r-l)p(l)p(r) / \sum_{t=0}^{\lceil x-1\rceil} p(t)(x-t).$$

Обозначим через $L^1(\{s^2\})$ банахово пространство последовательностей $(l^s,\ s\in S)$ с нормой $\|l\| = \sum_{s=0}^{\infty} s^2 |l^s|$. Множества $\overline{P}$ и $\Theta(x)$ являются выпуклыми замкнутыми подмножествами пространства $L^1(\{s^2\})$.

Лемма 2.3. *Пусть последовательность $\{l_n\} \subset L^1(\{s^2\})$ такая, что для любых $s\in S$ и $n\geqslant 1$ верно $l_n^s \geqslant 0$, $l_n^s \leqslant l_{n+1}^s$. Тогда если существует ее сходящаяся по норме подпоследовательность $\{l_{j_n}\}$, то и сама последовательность $\{l_n\}$ сходится по норме.*

Доказательство. Пусть подпоследовательность $\{l_{j_n}\}$ сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует M такое, что для любых $f, g \geqslant M$ выполнено $\left\|l_{j_f} - l_{j_g}\right\| \leqslant \varepsilon$. Положим N равное j_M.

Для любых $m \geqslant n \geqslant N$ можно найти q такое, что $j_q \geqslant m$. В силу покомпонентной монотонности последовательности $\{l_n\}$ выполнено неравенство

$$\|l_m - l_n\| = \sum_{s=0}^{\infty} s^2 |l_m^s - l_n^s| \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} s^2 |l_{j_q}^s - l_{j_M}^s| = \left\|l_{j_q} - l_{j_M}\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда последовательность $\{l_n\}$ фундаментальна и в силу полноты пространства $L^1(\{s^2\})$ сходится. □

Лемма 2.4. *Для любого распределения $\bar{p} \in \Theta(x)$ ряд в разложении* (2.6) *сходится к $\bar{p}$ по норме.*

Доказательство. Проведем доказательство для $x \in S$. Рассмотрим последовательность

$$s_n = p(x)e^x + \sum_{r=x+1}^{n} \sum_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^x(l, r).$$

Тогда для $m \geqslant n$ справедливо

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{r=n+1}^{m} \left(p(r)(r-x) \frac{\sum_{l=0}^{x-1} p(l)e^l}{\sum_{t=0}^{x-1} p(t)(x-t)} + p(r)e^r \right) \right\| =$$
$$= \sum_{r=n+1}^{m} p(r) \left(r^2 + (r-x) \frac{\sum_{t=0}^{x-1} p(t)t^2}{\sum_{t=0}^{x-1} p(t)(x-t)} \right).$$

Так как $\mathbb{D}\,\bar{p} < \infty$, последовательность s_n — фундаментальна. Ее сходимость к $\bar{p}$ следует из покомпонентного равенства векторов вероятностных распределений:

$$\sum_{r=x+1}^{\infty} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \frac{r-x}{r-l} = p(l),\ l = \overline{0, x-1},$$
$$\sum_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \frac{x-l}{r-l} = p(r),\ r = \overline{x+1, \infty}.$$

Отсюда в силу леммы 2.3 получаем, что ряд в разложении (2.6) сходится к $\bar{p}$ по норме.

Доказательство для нецелых значений x проводится аналогично. □

В силу того, что функционал $\underline{V}_n^\beta(\bar{p})$ вогнут на $\overline{P}$ и по теореме 2.1 ограничен на данном множестве, то он непрерывен на $\overline{P}$ (см. [10, Теорема 1.7.1]). Отсюда и из леммы 2.4 следует, что для распределений $\bar{p} \in \Theta(x)$ выполнено

$$\begin{cases} \underline{V}_n^\beta(\bar{p}) \geqslant p(x)\underline{V}_n^\beta(e^x) + \sum\limits_{r=x+1}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{x-1} \alpha_{l,r}(\bar{p})\underline{V}_n^\beta\left(\bar{p}^x(l,r)\right), & x \in S, \\ \underline{V}_n^\beta(\bar{p}) \geqslant \sum\limits_{r=\lfloor x+1\rfloor}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\lceil x-1\rceil} \alpha_{l,r}(\bar{p})\underline{V}_n^\beta\left(\bar{p}^x(l,r)\right), & x \notin S. \end{cases}$$

Из данных неравенств, теоремы 2.1 и леммы 2.2 следует, что для доказательства совпадения верхней и нижней оценок выигрыша в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ можно ограничиться рассмотрением только распределений $\bar{p} = \bar{p}^{k+\beta}(l,r) \in \Theta(k+\beta)$, $k \in S$, $l = \overline{0,k}$, $r = \overline{k+1,\infty}$. Для таких распределений мы построим стратегию первого игрока σ^*, для которой $L_\infty^\beta(\bar{p},\sigma^*) = H_\infty^\beta(\bar{p})$. Отсюда будет следовать, что $V_\infty^\beta(\bar{p}) = H_\infty^\beta(\bar{p})$, а σ^* и τ^* — оптимальные стратегии игроков в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$.

Обозначим $\hat{\sigma_k}$ ход первого игрока, состоящий в выборе ставки из множества $\{k, k+1\}$. Ход $\hat{\sigma_k}$ определяется заданием полных вероятностей $q(k), q(k+1)$ и апостериорных распределений $\bar{p}(k), \bar{p}(k+1)$, причем $q(k)+q(k+1) = 1$. Следующая лемма является обобщением утверждения 1.2 из главы 1.

Лемма 2.5. *При использовании $\hat{\sigma_k}$ одношаговый выигрыш первого игрока равен*

$$K_1^\beta(\bar{p},\hat{\sigma_k},j) = \begin{cases} \mathbb{E}\,\bar{p} - \beta k - (1-\beta)j - \beta q(k+1), & j < k, \\ (\mathbb{E}\,\bar{p}(k+1) - k - \beta)q(k+1), & j = k, \\ (k+\beta - \mathbb{E}\,\bar{p}(k))q(k), & j = k+1, \\ (1-\beta)k + \beta j - \mathbb{E}\,\bar{p} + (1-\beta)q(k+1), & j > k+1. \end{cases}$$

Доказательство. Можно показать, что

$$a^{s,\beta}(\hat{\sigma_k}, j) = \begin{cases} s - \beta k - (1-\beta)j - \beta\sigma^s_{1,k+1}, & j < k, \\ (s-k-\beta)\sigma^s_{1,k+1}, & j = k, \\ (k+\beta-s)\sigma^s_{1,k}, & j = k+1, \\ (1-\beta)k + \beta j - s + (1-\beta)\sigma^s_{1,k+1}, & j > k+1. \end{cases}$$

Осредняя это равенство по произвольному $\tau \in \Delta(J)$, устанавливаем справедливость утверждения леммы. □

Определим стратегию σ^* первого игрока в игре $G^\beta_\infty(\bar{p})$. Введем множество распределений

$$P(l,r) = \left\{\bar{p}^k(l,r),\, \bar{p}^{s+\beta}(l,r),\, k = \overline{l,r}, s = \overline{l,r-1}\right\}.$$

При $\bar{p} \in P(l,r)$ первый ход σ^*_1 стратегии σ^* определяется следующим образом. Если $\bar{p} = \bar{p}^l(l,r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l,r)$, то первый игрок использует ставки l и r, соответственно, с вероятностью 1. В противном случае он использует $\hat{\sigma_k}$ с параметрами из таблицы 1.

Таблица 1 — Параметры хода σ^*_1 при $\bar{p} \in P(l,r)$

$\bar{p}$	$q(k)$	$q(k+1)$	$\bar{p}(k)$	$\bar{p}(k+1)$
$\bar{p}^k(l,r)$	β	$1-\beta$	$\bar{p}^{k-1+\beta}(l,r)$	$\bar{p}^{k+\beta}(l,r)$
$\bar{p}^{k+\beta}(l,r)$	$1-\beta$	β	$\bar{p}^k(l,r)$	$\bar{p}^{k+1}(l,r)$

На последующих шагах игры ход σ^*_1 применяется рекурсивно для соответствующих значений апостериорных вероятностей. В результате определили стратегию σ^* для распределения $\bar{p} \in P(l,r)$.

Обозначим $L^x_n(\sigma) = L^\beta_n(\bar{p}^x(l,r), \sigma)$, $\sigma \in \Sigma$. Следующая теорема является обобщением утверждения 1.5.

Теорема 2.2. *Пусть* $\beta \in (0,1)$. *При использовании стратегии* σ^* *в игре* $G^\beta_\infty(\bar{p})$ *для распределения* $\bar{p} \in P(l,r)$ *гарантированный выигрыш первого игрока удовлетворяет следующей системе:*

$$L^k_\infty(\sigma^*) = \beta L^{k-1+\beta}_\infty(\sigma^*) + (1-\beta)L^{k+\beta}_\infty(\sigma^*),\ k = \overline{l+1, r-1}, \tag{2.7a}$$

$$L^{k+\beta}_\infty(\sigma^*) = \beta(1-\beta) + (1-\beta)L^k_\infty(\sigma^*) + \beta L^{k+1}_\infty(\sigma^*),\ k = \overline{l, r-1}. \tag{2.7b}$$

$$L^l_\infty(\sigma^*) = L^r_\infty(\sigma^*) = 0. \tag{2.7c}$$

Ее решение дает нижнюю оценку выигрыша первого игрока, равную

$$L^\beta_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l,r), \sigma^*) = \frac{(r-k-\beta)(k+\beta-l) + \beta(1-\beta)}{2}.$$

Доказательство. Для $\bar{p} \in P(l,r)$ стратегия σ^* определяется аналогично оптимальной стратегии из главы 1 с заменой 0 и m на l и r соответственно. Из леммы 2.5 нетрудно вывести, что

$$L^k_1(\sigma^*) = 0, \quad L^{k+\beta}_1(\sigma^*) = \beta(1-\beta).$$

Для $k = \overline{l+1, r-1}$ имеем

$$L^k_\infty(\sigma^*) = L^k_1(\sigma^*) + q(k)L^{k-1+\beta}_\infty(\sigma^*) + q(k+1)L^{k+\beta}_\infty(\sigma^*) = \\ = \beta L^{k-1+\beta}_\infty(\sigma^*) + (1-\beta)L^{k+\beta}_\infty(\sigma^*).$$

Аналогично для $k = \overline{l, r-1}$ получаем

$$L^{k+\beta}_\infty(\sigma^*) = L^{k+\beta}_1(\sigma^*) + q(k)L^k_\infty(\sigma^*) + q(k+1)L^{k+1}_\infty(\sigma^*) = \\ = \beta(1-\beta) + (1-\beta)L^k_\infty(\sigma^*) + \beta L^{k+1}_\infty(\sigma^*).$$

Полученная система (2.7) является системой с трехдиагональной матрицей и решается методом прогонки. □

Поскольку $\mathbb{D}\,\bar{p}^{k+\beta}(l,r) = (r-k-\beta)(k+\beta-l)$, а распределение $\bar{p}^{k+\beta}(l,r)$ удовлетворяет условию теоремы 2.1 с $\eta = 1$, выражения для $H^\beta_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l,r))$ и $L^\beta_\infty(\bar{p}^{k+\beta}(l,r), \sigma^*)$, $k = \overline{l, r-1}$ совпадают. Из теоремы 2.1 также следует, что

$$H^\beta_\infty(\bar{p}^l(l,r)) = H^\beta_\infty(\bar{p}^r(l,r)) = 0.$$

В самом деле, распределения $\bar{p}^l(l,r)$ и $\bar{p}^r(l,r)$ удовлетворяют условию теоремы 2.1 с $\eta = 1-\beta$ и имеют нулевую дисперсию.

Для произвольного распределения $\bar{p} \in \Theta(k)$, $k \in S$, стратегию σ^* определим следующим образом. Если реализуется состояние $s = k$, то гарантированный выигрыш первого игрока не превышает 0 и он прекращает игру. Таким образом, первый игрок, следуя стратегии σ^*, прекращает игру с вероятностью $p(k)$. В противном случае игрок использует конструкцию леммы 2.2 для построения стратегии, соответствующей выпуклой комбинации распределений $\bar{p}^k(l,r)$ в разложении $\bar{p}$. Первый ход такой стратегии использует две ставки k и $k+1$ с полными вероятностями $(1-p(k))\beta$ и $(1-p(k))(1-\beta)$ соответственно. Апостериорные вероятностные распределения являются выпуклыми комбинациями соответствующих апостериорных двухточечных распределений и даются следующими формулами:

$$\bar{p}(k) = \frac{1}{1-p(k)} \sum_{r=k+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^{k-1+\beta}(l,r),$$

$$\bar{p}(k+1) = \frac{1}{1-p(k)} \sum_{r=k+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{l,r}(\bar{p}) \bar{p}^{k+\beta}(l,r).$$

Для распределений $\bar{p}$ со счетным носителем сходимость по норме данных рядов устанавливается аналогично доказательству леммы 2.4. Аналогичные рассуждения справедливы и для распределений $\bar{p} \in \Theta(k+\beta) \cup \Lambda(k, k+\beta)$, $k \in S$.

2.4 Решение игры $G^{\beta}_{\infty}(\bar{p})$

Подчеркнем, что приведенная в п. 2.3 стратегия инсайдера σ^* определена только при $\beta \in (0,1)$.

Нетрудно проверить справедливость следующего равенства:

$$a^{r,\beta}(i,j) = a^{l,1-\beta}(r+l-i, r+l-j).$$

Из него вытекает, что решение игры $G_\infty^\beta(\bar{p}^x(l,r))$ сводится к решению игры $G_\infty^{1-\beta}(\bar{p}^{l+r-x}(l,r))$. При этом ставки, используемые в соответствующих смешанных стратегиях инсайдера, симметричны относительно точки $(l+r)/2$. Аналогичные рассуждения справедливы для игры $G_\infty^\beta(\bar{p})$ при любом распределении $\bar{p} \in \overline{P}$.

Оптимальная стратегия σ^* инсайдера в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ при $\beta = 1$ найдена в [3]. Решение $G_\infty^\beta(\bar{p})$ при $\beta = 0$ может быть получено при помощи описанной выше конструкции из решения $G_\infty^\beta(\bar{p})$ при $\beta = 1$. Таким образом, при любом $\beta \in [0,1]$ справедлива следующая

Теорема 2.3. *При любом распределении $\bar{p} \in \overline{P}$ игра $G_\infty^\beta(\bar{p})$ имеет значение $V_\infty^\beta(\bar{p}) = H_\infty^\beta(\bar{p}) = L_\infty^\beta(\bar{p})$, а σ^* и τ^* — оптимальные стратегии игроков.*

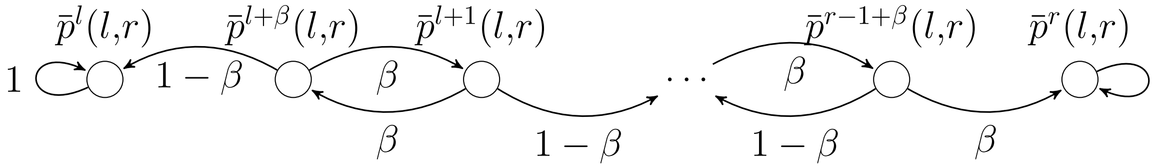

Рисунок 2.1 — Случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, порожденное σ^*

Применение первым игроком стратегии σ^* при $\bar{p} \in P(l,r)$ порождает случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, изображенное на рисунке 2.1, которое в отличие от [3] происходит по более широкому множеству и уже не является симметричным, за исключением случая $\beta = 1/2$.

2.5 Вторая оптимальная стратегия инсайдера в игре $\mathrm{G}_\infty^\beta(\bar{\mathrm{p}})$

В дополнение к стратегии σ^* построим еще одну оптимальную стратегию ξ^* инсайдера. Введем множество распределений

$$P'(l,r) = \{\bar{p}^l(l,r), \bar{p}^r(l,r)\} \cup \left\{\bar{p}^{k+\beta}(l,r),\ k = \overline{l, r-1}\right\}.$$

При $\bar{p} \in P'(l{,}r)$ первый ход ξ_1^* стратегии ξ^* определяется следующим образом. Если $\bar{p} = \bar{p}^l(l{,}r)$ или $\bar{p} = \bar{p}^r(l{,}r)$, то первый игрок использует ставки l и r соответственно с вероятностью 1. В противном случае он использует $\hat{\sigma_k}$ с параметрами из таблицы 2.

Таблица 2 — Параметры хода ξ_1^* при $\bar{p} \in P'(l,r)$

$\bar{p}$	$q(k)$	$q(k+1)$	$\bar{p}(k)$	$\bar{p}(k+1)$
$\bar{p}^{l+\beta}(l,r)$	$\frac{1}{1+\beta}$	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$\bar{p}^l(l,r)$	$\bar{p}^{l+1+\beta}(l,r)$
$\bar{p}^{r-1+\beta}(l,r)$	$\frac{1-\beta}{2-\beta}$	$\frac{1}{2-\beta}$	$\bar{p}^{r-2+\beta}(l,r)$	$\bar{p}^r(l,r)$
$\bar{p}^{k+\beta}(l,r)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\bar{p}^{k-1+\beta}(l,r)$	$\bar{p}^{k+1+\beta}(l,r)$

Для остальных распределений $\bar{p}$ стратегия ξ^* определяется аналогично тому, как это было сделано для стратегии σ^*.

Использование стратегии ξ^* при $\bar{p} \in P'(l,r)$ порождает случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, изображенное на рисунке 2.2. Данное блуждание симметрично с вероятностями перехода в соседние состояния равными $1/2$, симметрия нарушается только в крайних и соседних к ним состояниях.

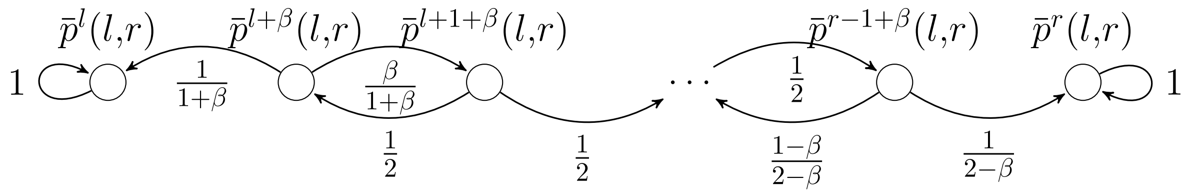

Рисунок 2.2 — Случайное блуждание последовательности апостериорных вероятностей, порожденное ξ^*

Из леммы 2.5 можно вывести, что

$$L_1^{l+\beta}(\xi_1^*) = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad L_1^{r-1+\beta}(\xi_1^*) = \frac{1-\beta}{2-\beta},$$
$$L_1^{k+\beta}(\xi_1^*) = \frac{1}{2},\ k = \overline{l+1{,}r-2}.$$

Отсюда следует, что при использовании стратегии ξ^* в игре $G_\infty^\beta(\bar{p})$ для распределения $\bar{p} \in P'(l{,}r)$ гарантированный выигрыш первого игрока удовлетворяет следующей системе:

$$L_{\infty}^{l+\beta}(\xi^*) = \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{1}{1+\beta} L_{\infty}^{l}(\xi^*) + \frac{\beta}{1+\beta} L_{\infty}^{l+1+\beta}(\xi^*), \tag{2.8a}$$

$$L_{\infty}^{r-1+\beta}(\xi^*) = \frac{1-\beta}{2-\beta} + \frac{1-\beta}{2-\beta} L_{\infty}^{r-2+\beta}(\xi^*) + \frac{1}{2-\beta} L_{\infty}^{r}(\xi^*), \tag{2.8b}$$

$$L_{\infty}^{k+\beta}(\xi^*) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} L_{\infty}^{k-1+\beta}(\xi^*) + \frac{1}{2} L_{\infty}^{k+1+\beta}(\xi^*),\ k = \overline{l+1, r-2}, \tag{2.8c}$$

$$L_{\infty}^{l}(\xi^*) = L_{\infty}^{r}(\xi^*) = 0. \tag{2.8d}$$

Нетрудно проверить, что подстановкой

$$H_{\infty}^{\beta}(\bar{p}^{k+\beta}(l,r)) = \frac{(r-k-\beta)(k+\beta-l) + \beta(1-\beta)}{2},$$
$$H_{\infty}^{\beta}(\bar{p}^{l}(l,r)) = H_{\infty}^{\beta}(\bar{p}^{r}(l,r)) = 0,$$

вместо $L_{\infty}^{k+\beta}(\xi^*)$, $k = \overline{l,r-1}$, $L_{\infty}^{l}(\xi^*)$ и $L_{\infty}^{r}(\xi^*)$ соответственно данные равенства обращаются в тождества. Отсюда, как и для стратегии σ^*, следует, что стратегия ξ^* является оптимальной.

Отметим, что в отличие от стратегии σ^* стратегия ξ^* определена при $\beta \in [0, 1]$ и совпадает с оптимальной стратегией инсайдера из [3] при $\beta = 1$. При этом обе стратегии σ^* и ξ^* порождают существенно различные случайные блуждания апостериорных вероятностей.

Глава 3. Теоретико-игровая модель биржевых торгов с непрерывными ставками

В разделах 3.1 и 3.2 приводится описание модели биржевых торгов с вещественными ставками и теоретико-игровая постановка основной задачи и двойственной к ней в смысле Де Мейера. В разделе 3.3 получено решение одношаговой игры, на примере которой демонстрируются идеи, использованные при решении n-шаговой игры. В разделе 3.4 построены выравнивающие стратегии первого и второго игроков и получены оценки выигрыша в прямой и двойственной играх. В разделе 3.5 даны теоремы о значении игры, приведены асимптотические свойства последовательности апостериорных вероятностей при стремлении числа шагов к бесконечности, а также дан алгоритм построения оптимальных стратегий игроков. Примеры аналитического построения оптимальных стратегий в одношаговой и двухшаговой играх даны в разделе 3.6.

Основные результаты данной главы опубликованы в работе [12] в журнале из перечня ВАК.

3.1 Описание модели

Рассматриваемая в текущей главе модель биржевых торгов аналогична модели из главы 1 за исключением того, что теперь игроки могут делать произвольные вещественные ставки из отрезка $[0, 1]$. В отличие от дискретной модели, для подобных повторяющихся игр с конечным числом шагов нет общей теории, из которой вытекало бы существование значения. При анализе повторяющейся игры с вещественными ставками мы следуем схеме из [32].

Как и в главе 1 множество возможных состояний рынка $S = \{H, L\}$, $s \in S$ при этом обозначает состояние, в котором на самом деле находится рынок. На каждом шаге торгов, первый игрок делает ставку из множества $I = [0,1]$, второй игрок — ставку из множества $J = [0{,}1]$.

Обозначим через $\pi_t = (\pi_t^R, \pi_t^N)$ портфель первого игрока на t-м шаге торгов, где π_t^R и π_t^N — количество единиц рискового и безрискового активов соответственно. Если на t-м шаге игроки делают ставки $x \in I$, $y \in J$, то портфель

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \vartheta(x,y),$$

где

$$\vartheta(x,y) = \mathbf{1}_{x>y}(1, -(\beta x + \overline{\beta} y)) + \mathbf{1}_{x<y}(-1, \overline{\beta} x + \beta y). \tag{3.1}$$

Таким образом, одна акция продается по цене, равной выпуклой комбинации предложенных ставок с заданным коэффициентом β. Стоимость портфеля при этом равна

$$V(\pi_t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}_{s=H}\,\pi_t^R + \pi_t^N.$$

Цель игроков состоит в максимизации прибыли, полученной от торгов.

Как и в главе 1, можно положить, что в начальный момент времени оба игрока имеют нулевые портфели. При этом прибыль первого игрока после завершения сделок будет равна $V(\pi_n)$, а второго $-V(\pi_n)$.

3.2 Постановка задачи

Ниже мы рассмотрим теоретико-игровую постановку основной задачи и двойственной к ней в смысле Де Мейера, которые мы будем называть прямой и двойственной играми соответственно. Как отмечено в [33], прямая (двойственная) игра больше подходит для построения оптимальной стратегии первого (второго) игрока.

3.2.1 Определение прямой игры $\mathbf{G_n}(\mathbf{p})$

Прямая игра описывает взаимодействие между агентами, соответствующее оригинальной модели биржевых торгов. Так же перед началом игры ходом случая определяется $s \in S$ таким образом, что $P(s = H) = p,\ P(s = L) = 1 - p$. Выбранное s сообщается первому игроку (инсайдеру), второй игрок при этом не осведомлен о настоящем значении s и знает только вероятности выбора случаем того или иного состояния.

Стратегией первого игрока является последовательность ходов (отображений) $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^L,\ \sigma_t^H)$. При фиксированном $s \in S$ ход $\sigma_t^s : H_{t-1} \to \Delta(I)$ является отображением из множества историй ставок $H_{t-1} = I^{t-1} \times J^{t-1}$ к моменту времени t в множество $\Delta(I)$ вероятностных распределений на I. Обозначим множество стратегий первого игрока Σ_n. Аналогично, стратегией второго игрока назовем последовательность ходов (отображений) $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \to \Delta(J)$. Обозначим множество стратегий второго игрока T_n.

Пара стратегий (σ, τ) вместе с ходом случая индуцирует на $S \times H_n$ вероятностное распределение $\Pi[p, \sigma, \tau]$. Тогда выигрыш первого игрока равен

$$g_n^\beta(p, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{(p,\sigma,\tau)}\, V(\pi_n).$$

Выигрыш второго игрока при этом равен $-g_n^\beta(p, \sigma, \tau)$.

Полученную игру обозначим через $G_n^\beta(p)$. Ее нижнее и верхнее значения даются формулами

$$\underline{V}_n^\beta(p) = \sup_\sigma \inf_\tau g_n^\beta(p, \sigma, \tau), \quad \overline{V}_n^\beta(p) = \inf_\tau \sup_\sigma g_n^\beta(p, \sigma, \tau).$$

В том случае, когда $\underline{V}_n^\beta(p) = \overline{V}_n^\beta(p) = V_n^\beta(p)$, будем говорить, что игра имеет значение $V_n(p)$. При этом стратегии σ^0 и τ^0 называются оптимальными, если

$$\inf_\tau g_n^\beta(p, \sigma^0, \tau) = \underline{V}_n^\beta(p),\ \ \sup_\sigma g_n^\beta(p, \sigma, \tau^0) = \overline{V}_n^\beta(p).$$

В дальнейшем верхний индекс β мы будем часто опускать.

В работе [33] показано, что игра $G_n(p)$ имеет рекурсивную структуру аналогичную структуре повторяющейся игры из главы 1. Соответственно, рассмотрим стратегию σ первого игрока как пару $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 – ход игрока на первом шаге игры, а $\tilde{\sigma}$ – стратегия в игре продолжительности n, зависящая от ставок (x, y) на первом шаге. Аналогично стратегию τ второго игрока можно представить как пару $(\tau_1, \tilde{\tau})$. Случайные величины ставок, имеющих распределения σ_1 и τ_1, обозначим через X и Y соответственно.

Приведем несколько известных фактов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пара (σ_1, τ_1) вместе с ходом случая индуцирует вероятностное распределение $\Pi[p, \sigma_1, \tau_1]$ на $S \times I \times J$. Обозначим через

$$p(x) = \Pi[p, \sigma_1](s = H \mid X = x)$$

апостериорную вероятность состояния H при условии, что первый игрок сделал ставку x. Отметим, что апостериорная вероятность не зависит от ставки второго игрока y, так как она не зависит от s. Тогда для значения выигрыша первого игрока справедливо представление

$$g_{n+1}(p, \sigma, \tau) = g_1(p, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{(p,\sigma_1,\tau_1)}\, g_n(p(X), \tilde{\sigma}(X, Y), \tilde{\tau}(X, Y)).$$

Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения для нижнего значения игры (см. [33]).

Лемма 3.1. *Для любого $p \in [0, 1]$ выполняется неравенство*

$$\underline{V}_{n+1}(p) \geqslant \sup_{\sigma_1} \inf_{y} \left[g_1(p, \sigma_1, y) + \mathbb{E}_{(p,\sigma_1)}\, \underline{V}_n\,(p(X)) \right] \tag{3.2}$$

Подчеркнем, что поскольку можно положить $V_0(p) \equiv 0$, неравенство (3.1) имеет смысл для любого целого $n \geqslant 1$.

В силу того, что игра с $p \in \{0, 1\}$ имеет тривиальное решение, дальнейшие построения будут проведены для значений $p \in (0, 1)$.

3.2.2 Определение двойственной игры $\mathbf{G^*_n}(\mathbf{z})$

Определим двойственную игру $G^*_n(z)$, следуя работе [33]. Перед началом игры первый игрок выбирает текущее состояние $s \in S$; второй игрок не осведомлен о выборе первого. Если $s = H$, то первый вынужден заплатить второму штраф z в конце игры. В остальном правила двойственной игры $G^*_n(z)$ аналогичны правилам игры $G_n(p)$.

Стратегией первого игрока в двойственной игре является пара $(p,\, \sigma)$, где $p \in [0, 1]$, $\sigma \in \Sigma_n$. Множество стратегий второго игрока совпадает с T_n.

Выигрыш второго игрока, который он стремится максимизировать, определяется как

$$g^*_n(z, (p,\, \sigma), \tau) = zp - g_n(p, \sigma, \tau),$$

а верхнее и нижнее значения игры даются, соответственно, формулами

$$\overline{W}_n(z) = \inf_{(p,\, \sigma)} \sup_{\tau} g^*_n(z, (p,\, \sigma), \tau), \;\; \underline{W}_n(z) = \sup_{\tau} \inf_{(p,\, \sigma)} g^*_n(z, (p,\, \sigma), \tau).$$

В том случае, когда $\overline{W}_n(z) = \underline{W}_n(z) = W_n(z)$, будем говорить, что игра имеет значение $W_n(z)$.

Обозначим выигрыши в состояниях H и L через

$$g^H_1(\sigma_1, \tau_1) = g_1(1, \sigma_1, \tau_1), \;\; g^L_1(\sigma_1, \tau_1) = g_1(0, \sigma_1, \tau_1).$$

Аналогично предыдущему пункту, можно провести рассмотрение рекурсивной структуры игры $G^*_n(z)$ и получить следующий результат из [33].

Лемма 3.2. *Для любого $z \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство*

$$\underline{W}_{n+1}(z) \geqslant \sup_{\tau_1} \inf_{x} \underline{W}_n(z - g^H_1(x, \tau_1) + g^L_1(x, \tau_1)) - g^L_1(x, \tau_1). \tag{3.3}$$

Отметим, что так как $W_0(z) = \phi(z) = \min(z, 0)$, формула имеет смысл для любого $n \geqslant 1$.

3.3 Решение одношаговой игры

Получим решение одношаговой игры $G_1^\beta(p)$. Для игры, соответствующей значению параметра $\beta = 1$, решение было получено в [17]. В силу того, что в состоянии L при $\beta = 1$ стратегия, предписывающая использование ставки 0 с вероятностью 1, является доминирующей, исходную игру удалось представить в виде игры с выбором момента времени, для которой известен метод решения (см. [6]). При $\beta \neq 1$ указанная чистая стратегия уже не является доминирующей, однако, как будет показано далее, при $p < \beta$ все равно является оптимальной для первого игрока.

Начнем рассмотрение со случая $p < \beta$. Будем искать оптимальные стратегии игроков, удовлетворяющие следующим условиям. Первый игрок в состоянии L использует ставку 0 с вероятностью 1. Обозначим такое распределение через I_0. В состоянии H он рандомизирует действия, используя при некотором $d \in (0,1]$ функцию распределения $F(x)$ со спектром $[0,d]$ и плотностью $f(x)$ на этом отрезке. При этом $F(0) = 0, F(d) = 1$.

Второй игрок рандомизирует действия используя функцию распределения $G(y)$, имеющую скачок величины δ в точке 0 и плотность $g(x)$ на $(0,d]$. Обозначим такое распределение через $(\delta I_o, g)$. Описанные стратегии имеют одинаковый спектр $[0,d]$.

Смешанная стратегия σ^0 первого игрока называется выравнивающей на множестве $J^0 \subset J$, если $g_1(p,\sigma^0,y) \equiv const$, $y \in J^0$ (см. [2]). Аналогично определяется выравнивающая стратегия второго игрока.

Поскольку оптимальная стратегия первого игрока является выравнивающей при $y \in (0,d)$, $d \in (0,1]$ и

$$\begin{gathered} g_1(p,(F,I_0),y) = pg_1^H(p,F,y) + (1-p)g_1^L(p,I_0,y) = \\ = p\left(\int_0^y (\overline{\beta}x + \beta y - 1)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_y^d (1 - \beta x - \overline{\beta}y)f(x)\,\mathrm{d}x\right) + (1-p)\beta y, \end{gathered} \tag{3.4}$$

имеем

$$\frac{\partial g_1(p,(F,I_0),y)}{\partial y} = p\left(\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\beta} + 2(y-1)f(y)\right) + (1-p)\beta =$$
$$= pF(y) + 2p(y-1)F'(y) + \beta - p = 0.$$

Общее решение данного уравнения представимо в виде

$$F(x) = \frac{C}{\sqrt{2(1-x)}} - \frac{\beta-p}{p},\ x\in[0,d].$$

Из условий $F(0)=0$, $F(d)=1$ находим $C=\sqrt{2}(\beta-p)/p$, $d=1-(\beta-p)^2/\beta^2$, откуда получаем

$$F^0(x) = \begin{cases} \frac{\beta-p}{p}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right), & 0\leqslant x\leqslant 1-d,\\ 1, & \text{иначе}, \end{cases}$$
$$f^0(x) = \begin{cases} \frac{\beta-p}{2p}\frac{1}{(1-x)^{3/2}}, & 0\leqslant x\leqslant 1-d,\\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Лемма 3.3. *При заданных p и β таких, что $p<\beta$, стратегия первого игрока $(\sigma^H,\sigma^L)=(F^0,I_0)$, где F^0 определяется в (3.5), гарантирует ему выигрыш не менее $p(1-p)$ в игре $G_1^\beta(p)$.*

Доказательство. При $y\in(0,d)$ получим ожидаемый выигрыш первого игрока, подставив (3.5) в (3.4). Для $g_1^H(p,(F^0,I_0),y)$ имеем

$$g_1^H(p,(F^0,I_0),y) = \int_0^y(\overline{\beta}x+\beta y-1)f^0(x)\,\mathrm{d}x + \int_y^d(1-\beta x-\overline{\beta}y)f^0(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_0^d \beta x f^0(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^d \beta y f^0(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^y (1-x)f^0(x)\,\mathrm{d}x +$$
$$+\int_y^d (1-y)f^0(x)\,\mathrm{d}x$$

Находим

$$\int_0^d x f^0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\beta-p}{2p}\int_0^d x\frac{1}{(1-x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{\beta-p}{2p}\left(2x\frac{1}{\sqrt{1-x}}\bigg|_0^d + 4\sqrt{1-x}\bigg|_0^d\right) = \\ = \frac{\beta-p}{p}\cdot\frac{2-d-2\sqrt{1-d}}{\sqrt{1-d}} = \frac{\beta-p}{p}\cdot\frac{p^2}{(\beta-p)\beta} = \frac{p}{\beta}. \tag{3.6}$$

Отсюда имеем

$$g_1^H(p,(F^0,I_0),y) = -p+\beta y+\frac{\beta-p}{p}\left(\sqrt{1-y}-1\right)+(1-y)\times \\ \times\left(1-\frac{\beta-p}{p}\left(\frac{1}{\sqrt{1-y}}-1\right)\right) = -p+\beta y-\frac{\beta-p}{p}+(1-y)\left(1+\frac{\beta-p}{p}\right) = \\ = \frac{(1-p)(p-\beta y)}{p}.$$

Подставив данное выражение в (3.4), находим $g_1(p,(F^0,I_0),y) = p(1-p)$.

При $y\in\{0,d\}$ выигрыш равен

$$g_1(p,(F^0,I_0),0) = p\left(\int_0^d f^0(x)\,\mathrm{d}x - \beta\int_0^d x f^0(x)\,\mathrm{d}x\right) = p(1-p), \\ g_1(p,(F^0,I_0),d) = p\int_0^d(\overline{\beta}x+\beta d-1)f^0(x)\,\mathrm{d}x+(1-p)\beta d = \\ = p\frac{(1-p)(p-\beta)}{\beta}+(1-p)\beta\left(1-\frac{(\beta-p)^2}{\beta^2}\right) = p(1-p).$$

При $y>d$ справедливо

$$g_1(p,(F^0,I_o),y) = p\int_0^d(\overline{\beta}x+\beta y-1)f^0(x)\,\mathrm{d}x+(1-p)\beta y > \tag{3.7}$$

$$> p\int_0^d(\overline{\beta}x+\beta d-1)f^0(x)\,\mathrm{d}x+(1-p)\beta d = \tag{3.8}$$

$$= g_1(p,(F^0,I_o),d). \tag{3.9}$$

$$\tag{3.10}$$

Таким образом, $\underline{V}_1(p)\geqslant p(1-p)$. □

Стратегию второго игрока будем искать из условия выравнивания выигрыша первого при применении им действия $(x^H,0)$, $x^H\in(0,d)$. Выигрыш дается формулой

$$g_1(p,(x^H,0),G) = p\left(\int_0^{x^H}(1-\beta x^H-\overline{\beta}y)G(\mathrm{d}y)+\int_{x^H}^{d}(\overline{\beta}x+\beta y-1)G(\mathrm{d}y)\right)+ \\ +(1-p)\int_0^d \beta y g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial g_1(p,(x^H,0),G)}{\partial x^H} = -\int_0^x G(\mathrm{d}y)+2(1-x)g(x)+\overline{\beta}\int_0^d G(\mathrm{d}y) = \\ = -G(x)+2(1-x)G'(x)+\overline{\beta}=0.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$G(y)=\frac{C}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}+\overline{\beta}.$$

Из условия $G(d)=1$ находим $C=\sqrt{2}(\beta-p)$, откуда вытекает

$$\begin{gathered} G^0(y)=\begin{cases}\frac{\beta-p}{\sqrt{1-y}}+\overline{\beta}, & 0\leqslant y\leqslant 1-\frac{(\beta-p)^2}{\beta^2},\\ 1, & \text{иначе},\end{cases} \\ g^0(y)=\begin{cases}\frac{\beta-p}{2(1-y)^{3/2}}, & 0\leqslant y\leqslant 1-\frac{(\beta-p)^2}{\beta^2},\\ 0, & \text{иначе},\end{cases} \end{gathered} \tag{3.11}$$

Величина скачка в точке 0 равна $\delta=G^0(0)=1-p$.

Лемма 3.4. *При заданных p и β таких, что $p<\beta$, стратегия второго игрока G^0, где G^0 определяется в (3.11), гарантирует ему проигрыш не более $p(1-p)$ в игре $G_1^\beta(p)$.*

Доказательство. Поскольку $g^0 = pf^0$, интеграл $\int_0^d yg^0(y)\,\mathrm{d}y = p^2/\beta$. Покажем, что $g_1^L(p, x^L, G^0) < g_1^L(p, 0, G^0)$, $x^L \in (0, 1]$. В случае $x^L \in (0, d]$ получаем

$$
\begin{aligned}
g_1^L(p, x^L, G^0) &= \int_0^{x^L} (-\beta x^L - \overline{\beta} y) G^0(\mathrm{d}y) + \int_{x^L}^{d} (\overline{\beta} x^L + \beta y) G^0(\mathrm{d}y) = \\
&= -\beta x^L - \int_0^{x^L} yg^0(y)\,\mathrm{d}y + \int_{x^L}^{d} x^L g^0(y)\,\mathrm{d}y + \beta \int_0^d yg^0(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= -\frac{\beta x^L}{p} \int_0^d g^0(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{x^L} yg^0(y)\,\mathrm{d}y + \int_{x^L}^{d} x^L g^0(y)\,\mathrm{d}y + g_1^L(p, 0, G^0) < \\
&< -\int_0^d x^L g^0(y)\,\mathrm{d}y + \int_{x^L}^{d} x^L g^0(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{x^L} yg^0(y)\,\mathrm{d}y + g_1^L(p, 0, G^0) = \\
&= -\int_0^{x^L} (x^L + y) g^0(y)\,\mathrm{d}y + g_1^L(p, 0, G^0) < g_1^L(p, 0, G^0).
\end{aligned}
$$

При $x^L \in (d, 1]$ соответствующее неравенство доказывается аналогично. Таким образом, использование первым игроков стратегии I_0 в состоянии L является наилучшим ответом на стратегию G^0 второго игрока. Максимальный проигрыш в состоянии L второго игрока равен $g_1^L(p, 0, G^0) = p^2$.

Найдем выигрыш первого игрока в состоянии H, подставив (3.11) в (3.4). При $x^H \in (0, d)$ имеем

$$
\begin{aligned}
g_1^H(p, x^H, G^0) &= (1-p)(1-x\beta) + \int_0^x (1 - \beta x - \overline{\beta} y) g^0(y)\,\mathrm{d}y + \\
&+ \int_x^d (\overline{\beta} x + \beta y - 1) g^0(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= (1-p)(1-x\beta) + \int_0^x (1-y) g^0(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^d (1-x) g^0(y)\,\mathrm{d}y + \\
&+ \beta \int_0^d yg^0(y)\,\mathrm{d}y - \beta \int_0^d xg^0(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= (1-p)(1-x\beta) + (\beta - p) \left(-\sqrt{1-y} \Big|_0^x \right) - \\
&- (1-x)(G^0(d) - G^0(x)) + p(p - x\beta) = \\
&= (1-p)(1-x\beta) + (\beta - p)(1 - \sqrt{1-x}) + \\
&+ (\beta - p)\sqrt{1-x} - \beta(1-x) + p(p - x\beta) = \\
&= (1-p)(1-x\beta) + (1-p)(x\beta - p) = (1-p)^2.
\end{aligned}
$$

Также несложно показать, что

$$g_1^H(p,0,G^0)=0,\ \ g_1^H(p,d,G^0)=(1-p)^2,$$
$$g_1^H(p,x^H,G^0)<g_1^H(p,d,G^0),\ x\in(d,1].$$

Отсюда получаем, что $\overline{V}_1(p)\leqslant p(1-p)$. $\square$

Из лемм 3.3 и 3.4 следует, что при $p<\beta$ оптимальные стратегии определяются формулами (3.5, 3.11), а значение игры равно $V_1(p)=p(1-p)$.

Так как для произвольных x^H, x^L, y из отрезка $[0,1]$ справедливо равенство

$$g_1^\beta(p,(x^H,x^L),y)=g_1^{1-\beta}(1-p,(1-x^L,1-x^H),1-y),$$

то решение одношаговой игры с параметрами (p,β) сводится к решению одношаговой игры с параметрами $(1-p,1-\beta)$.

Кроме того, несложно показать, что при $p=\beta$ стратегия первого игрока $(\sigma^H,\ \sigma^L)=(I_1,\ I_0)$ и стратегия второго игрока $\tau=((1-p)I_0,\ pI_1)$ являются оптимальными, а значение игры также равно $p(1-p)$.

Таким образом, уже на примере одношаговой игры можно наблюдать тот эффект, что значение игры не зависит от параметра β.

3.4 Оценки выигрыша в n-шаговой игре

В данном разделе будут построены выравнивающие стратегии первого и второго игроков в прямой и двойственной играх, соответственно. Будет показано, что несмотря на то, что по виду данные стратегии отличается от стратегий из [33], вид оценок для нижних значений $\underline{V}_n(p)$ и $\underline{W}_n(z)$ прямой и двойственной игр остается неизменным. Отсюда будет следовать справедливость двойственных соотношений между $\underline{V}_n(p)$ и $\underline{W}_n(z)$, существование значений прямой игры $V_n(p)$ и двойственной игры $W_n(z)$, формулы для их расчета, а также оптимальность построенных стратегий.

Нам потребуются некоторые определения и факты из выпуклого анализа. Пусть $a(v)$ — вогнутая функция, определенная на прямой, причем a может принимать значение $-\infty$. Функцией, сопряженной к a в смысле Фенхеля, называется

$$a^*(u) = \inf_{v \in \mathbb{R}} (uv - a(v)).$$

Эффективное множество функции a определяется следующим образом:

$$\operatorname{dom} a = \{v \mid a(v) > -\infty\}.$$

Множество значений функции a будем обозначать

$$\operatorname{range} a = \{a(v) \mid v \in \mathbb{R}\}.$$

Субдифференциалом функции a в точке v называется множество

$$\partial a(v) = \{c \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} : a(y) \leqslant a(v) + c(y - v)\}.$$

Справедливо утверждение [13, Теорема 23.5]:

$$u \in \partial a(v) \iff v = \operatorname*{argmin}_{w} (wu - a(w)) \iff v \in \partial a^*(u). \tag{3.12}$$

Кроме того, имеют место следующие включения [13, § 24]:

$$\operatorname{int} (\operatorname{dom} a) \subset \operatorname{range} \partial a^* \subset \operatorname{dom} a. \tag{3.13}$$

В [33] показано, что функции $\underline{V}_n(x)$ и $\underline{W}_n(z)$ являются вогнутыми на своей области определения. Предположим дополнительно, что $\underline{V}_n(x)$, $\underline{V}_n^*(z)$ и $\underline{W}_n(z)$ непрерывно дифференцируемы. Справедливость данных предположений будет обоснована в разделе 3.5.

3.4.1 Оценка нижнего значения игры $\mathbf{G_n(p)}$

Обозначим через $\sigma_1^M = p\sigma_1^H + (1-p)\sigma_1^L$ маргинальное распределение ставки X при использовании одношаговой стратегии $\sigma_1 = (\sigma_1^H, \sigma_1^L)$, а соответствующую функцию распределения обозначим $F_{\sigma_1^M}(x)$.

Возьмем случайную величину U, равномерно распределенную на $[0,1]$, и положим

$$f(u) = F^{-1}_{\sigma_1^M}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{v \mid F_{\sigma_1^M}(v) \geqslant u\},\ u \in [0,1].$$

Известно, что тогда случайные величины $f(U)$ и X одинаково распределены.

Далее, обозначим $Q(u) = p(f(u))$. Легко видеть, что для условной апостериорной вероятности $p(x)$ состояния H (при условии, что выбрана ставка x) справедливо

$$\int_I p(x)\sigma_1^M(\mathrm{d}x) = \Pi[p,\sigma_1](s = H, X \in I) = p.$$

Так как случайные величины $f(U)$ и X одинаково распределены, то имеет место равенство

$$\int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = p.$$

Таким образом, функции $Q(u)/p$ и $(1-Q(u))/(1-p)$ являются условными плотностями при реализации состояний H и L соответственно.

В [33] рассматривается параметризация одношаговой стратегии инсайдера функциями f и Q, которые используются для генерации маргинального распределения ставки x и апостериорной вероятности $p(x)$ соответственно. Далее мы покажем, что задание стратегии первого игрока при помощи пары (f,Q) в некотором смысле естественно и приведем способ перехода от параметризованного представления к стратегии σ_1.

Утверждение 3.1. *Для апостериорной вероятности $p(x)$ состояния H справедлива формула*

$$p(x) = p\,\frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^M}(x), \tag{3.14}$$

где $\mathrm{d}\sigma_1^H/\,\mathrm{d}\sigma_1^M$ – производная Радона-Никодима.

Доказательство. По определению $p(x)$ для любого множества B из борелевской σ-алгебры $\mathscr{B}(I)$ отрезка I выполнено

$$P(s = H,\ X \in B) = \int_B p(x)\ \sigma_1^M(\mathrm{d}x).$$

С другой стороны, справедлива следующая формула:

$$P(s = H,\ X \in B) = p \int_B \sigma_1^H(\mathrm{d}x).$$

Нетрудно видеть, что для любого множества $B \in \mathscr{B}(I)$ справедливо $\sigma_1^M(B) = 0 \implies \sigma_1^H(B) = 0$, то есть σ_1^H абсолютно непрерывна относительно σ_1^M. Следовательно существует производная Радона-Никодима (см. [7]), а значит

$$P(s = H,\ X \in B) = \int_B p \frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^M}(x)\ \sigma_1^M(\mathrm{d}x).$$

Отсюда получаем (3.14). □

Утверждение 3.2. *Для $g_1(p, \sigma_1, y)$ справедливо представление*

$$\begin{aligned} g_1(p, \sigma_1, y) = \int_I \mathbf{1}_{x>y} \Big[p(x) - \beta x - \overline{\beta} y \Big]\ \sigma_1^M(\mathrm{d}x) + \\ + \int_I \mathbf{1}_{x<y} \Big[\overline{\beta} x + \beta y - p(x) \Big]\ \sigma_1^M(\mathrm{d}x). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Доказательство. По определению

$$g_1(p, \sigma_1, y) = \mathbb{E}_{(p,\sigma_1)} \langle (\mathbf{1}_{s=H}, 1), \vartheta(x, Y) \rangle, \tag{3.16}$$

где функция $\vartheta(x, y)$ определена в (3.1). Подставив (3.1) в (3.16), получим

$$\begin{aligned} g_1(p, \sigma_1, y) &= p \int_I \Big[\mathbf{1}_{x>y}(1 - \beta x - \overline{\beta} y) + \mathbf{1}_{x<y}(\overline{\beta} x + \beta y - 1) \Big]\ \sigma_1^H(\mathrm{d}x) + \\ &+ (1 - p) \int_I \Big[\mathbf{1}_{x>y}(-\beta x - \overline{\beta} y) + \mathbf{1}_{x<y}(\overline{\beta} x + \beta y) \Big]\ \sigma_1^L(\mathrm{d}x) = \\ &= \int_I \mathbf{1}_{x>y} p \sigma_1^H(\mathrm{d}x) - \int_I \mathbf{1}_{x>y}(\beta x + \overline{\beta} y) \sigma_1^M(\mathrm{d}x) + \\ &+ \int_I \mathbf{1}_{x<y}(\overline{\beta} x + \beta y) \sigma_1^M(\mathrm{d}x) - \int_I \mathbf{1}_{x<y} p \sigma_1^H(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись (3.14), получим (3.15). □

Формула (3.15) показывает альтернативное представление стратегии инсайдера σ_1 с помощью маргинального распределения ставки и апостериорной вероятности состояния H.

Укажем способ перехода от σ_1 к параметризованному представлению (f, Q) и наоборот. Пусть $\mu = \Pi[p, \sigma_1]$. Так как для любого $B \in \mathscr{B}(I)$ выполнено

$$\mu(X \in B \mid s = H) = \frac{\mu(X \in B,\ s = H)}{\mu(s = H)} = \\ = \int_0^1 \mathbf{1}_B \frac{p(x)}{p} \sigma_1^M(\mathrm{d}x) = \int_0^1 \mathbf{1}_{f^{-1}(B)} \frac{Q(u)}{p}\, \mathrm{d}u,$$

то восстановить σ_1 по (f, Q) можно следующим образом. Если ходом случая было выбрано состояние H, то инсайдер выбирает $u \in [0,1]$ как реализацию случайной величины с плотностью вероятности $Q(u)/p$ и делает ставку $x = f(u)$. Аналогично, в состоянии L он выбирает u как реализацию случайной величины с плотностью вероятности $(1 - Q(u))/(1 - p)$ и делает ставку $x = f(u)$.

Введем обозначение

$$F_{n+1}(p, (f, Q), y) = g_1(p, (f, Q), y) + \mathbb{E}\, \underline{V}_n(Q(U)).$$

Переходя к f и Q в формуле (3.15), получаем следующее равенство:

$$F_{n+1}(p, (f, Q), y) = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{u \mid f(u) > y\}} (Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} y)\, \mathrm{d}u \ + \\ + \int_0^1 \mathbf{1}_{\{u \mid f(u) < y\}} (\overline{\beta} f(u) + \beta y - Q(u))\, \mathrm{d}u \ + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\, \mathrm{d}u. \tag{3.17}$$

Как показано в [33], чтобы быть параметризацией некоторой одношаговой стратегии σ_1 первого игрока в игре $G_n(p)$, функции f и Q должны удовлетворять следующим свойствам:

- $f : [0,1] \to [0,1],\ \forall u_1, u_2 \in [0,1] : u_1 < u_2 \implies f(u_1) \leqslant f(u_2);$ (3.18a)
- $\int_0^1 Q(u)\, \mathrm{d}u = p;\ Q(u) \geqslant 0,\ u \in [0,1];$ (3.18b)
- $\forall u_1, u_2 \in [0,1] : f(u_1) = f(u_2) \implies Q(u_1) = Q(u_2).$ (3.18c)

Условия (3.18a, 3.18b) естественны. Условие (3.18c) необходимо для того, чтобы случайная величина $Q(U)$ была измеримой относительно σ-алгебры, порожденной случайной величиной X.

Переформулируем лемму 3.1 в терминах f и Q.

Лемма 3.5. *Для любого* $p \in [0,1]$ *выполняется неравенство*

$$\underline{V}_{n+1}(p) \geqslant \sup_{(f,\,Q)} \inf_y F_{n+1}\left(p, (f,Q), y\right),$$

где f *и* Q *удовлетворяют* (3.18a)—(3.18c).

Будем искать пару (f,Q), выравнивающую выигрыш первого игрока при $y \in [f(0), f(1)]$. Пусть $y = f(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in [0,1]$, и f возрастает в некоторой окрестности точки α. Тогда для выравнивающей пары (f,Q) выражение

$$F_{n+1}\left(p, (f,Q), f(\alpha)\right) = \int_\alpha^1 \left(Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} f(\alpha)\right) \mathrm{d}u + \\ + \int_0^\alpha \left(\overline{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u)\right) \mathrm{d}u + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\,\mathrm{d}u, \quad (3.19)$$

не зависит от α. Следовательно,

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial \alpha} = (\alpha - \overline{\beta}) f'(\alpha) + 2f(\alpha) - 2Q(\alpha) = 0.$$

Отсюда

$$f(u) = (u - \overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^u 2(v - \overline{\beta}) Q(v)\,\mathrm{d}v.^{1} \quad (3.20)$$

Если подставить (3.20) в (3.19), то получившееся выражение $\Phi(Q)$ зависит только от Q и не зависит от α. При $\alpha = 1$ получим

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (\overline{\beta} f(u) + \beta f(1) - Q(u))\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.21)$$

Аналогично при $\alpha = 0$ для $\Phi(Q)$ имеет место формула

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} f(0))\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.22)$$

Лемма 3.6. *Для* $\Phi(Q)$ *справедливо следующее представление:*

$$\Phi(Q) = \int_0^1 (2u - 1) Q(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.23)$$

Доказательство. Упростим (3.21) при $\beta \in (0,1)$. Случаи $\beta = 0$ и $\beta = 1$ дают тот же результат и рассматриваются аналогично.

[1] При $u = \overline{\beta}$ функция $f(u)$ доопределяется по правилу Лопиталя как $Q(\overline{\beta})$.

Найдем выражение для $\int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\overline{\beta}} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{\overline{\beta}}^1 f(u)\,\mathrm{d}u$, разбив этот интеграл на две части. Для первой части имеем:

$$\int_0^{\overline{\beta}} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\overline{\beta}} (u-\overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^{u} 2(s-\overline{\beta})Q(s)\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^{\overline{\beta}} 2(\overline{\beta}-s)Q(s) \int_0^{s} (\overline{\beta}-u)^{-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s = (2/\overline{\beta}) \int_0^{\overline{\beta}} uQ(u)\,\mathrm{d}u.$$

Аналогично, для второй части получаем

$$\int_{\overline{\beta}}^1 f(u)\,\mathrm{d}u = (2/\beta) \int_{\overline{\beta}}^1 (1-u)Q(u)\,\mathrm{d}u.$$

Подставим найденные выражения в (3.21):

$$\Phi(Q) = 2\int_0^{\overline{\beta}} uQ(u)\,\mathrm{d}u + (2\overline{\beta}/\beta)\int_{\overline{\beta}}^1 (1-u)Q(u)\,\mathrm{d}u + \\ + (2/\beta)\int_{\overline{\beta}}^1 (u-\overline{\beta})Q(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\,\mathrm{d}u.$$

Приведя подобные с учетом равенства $\overline{\beta}(1-u)+u-\overline{\beta} = \beta u$, получим (3.23). $\square$

Найдем Q как экстремаль следующей изопериметрической вариационной задачи:

$$\Phi(Q) \to \max, \qquad \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = p. \tag{3.24}$$

Обозначим функцию Лагранжа заданной вариационной задачи через

$$L(u, Q, \lambda) = (2u-1)Q(u) + \underline{V}_n(Q(u)) - \lambda Q(u).$$

По предположению $\underline{V}_n$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда функция Q, доставляющая экстремум в задаче (3.24), удовлетворяет уравнению Эйлера для данной функции Лагранжа (см. [20]):

$$\frac{\partial L}{\partial Q} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial L}{\partial Q'} = 2u - 1 - \lambda + \underline{V}_n'(Q(u)) = 0,$$
$$\int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = p.$$

Воспользовавшись свойством (3.12) о связи между субдифференциалами сопряженных функций, получим

$$Q(u) = \underline{V}_n^{*\prime}(1+\lambda-2u), \tag{3.25}$$

$$\int_0^1 \underline{V}_n^{*\prime}(1+\lambda-2u)\,\mathrm{d}u = p. \tag{3.26}$$

Так как $\underline{V}_n$ определена на $[0,1]$, то из (3.13) следует, что

$$(0,1) = \mathrm{int}\,(\mathrm{dom}\;\underline{V}_n) \subset \mathrm{range}\;\partial \underline{V}_n^* \subset \mathrm{dom}\;\underline{V}_n = [0,1],$$

и $\underline{V}_n^{*\prime}$ не возрастает на $\mathbb{R}$ от 1 до 0. Тогда при достаточно больших по модулю отрицательных λ интеграл близок к 1, а при достаточно больших положительных λ интеграл близок к 0. Таким образом, λ, удовлетворяющее (3.26), существует.

Введем обозначение

$$K(\lambda) = \int_0^1 \underline{V}_n^*(1+\lambda-2u)\,\mathrm{d}u.$$

Доказательство следующей леммы аналогично [33] и приводится в целях полноты изложения.

Лемма 3.7. *Имеет место следующее равенство*

$$\Phi(Q) = K^*(p). \tag{3.27}$$

Доказательство. Из (3.23) имеем

$$\Phi(Q) = \lambda \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 [(1+\lambda-2u)Q(u) + \underline{V}_n(Q(u))]\,\mathrm{d}u.$$

В силу (3.12) и (3.25) справедливо равенство

$$(1+\lambda-2u)Q(u) - \underline{V}_n(Q(u)) = \underline{V}_n^*(1+\lambda-2u),$$

из которого следует, что

$$\Phi(Q) = \lambda \int_0^1 Q(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \underline{V}_n^*(1+\lambda-2u)\,\mathrm{d}u = \lambda p - K(\lambda).$$

Далее, из определения $K(\lambda)$ и (3.26) находим

$$K'(\lambda) = \int_0^1 \underline{V}_n^{*\prime}(1+\lambda-2u)\,\mathrm{d}u = p.$$

Отсюда и из (3.12) получаем, что $\Phi(Q) = K^*(p)$. $\square$

Отметим, что хотя функция $f(u)$ зависит от коэффициента β, выражения для функций $Q(u)$ и $\Phi(Q)$ от него не зависят и по форме совпадают с аналогичными выражениями в [33]. Данный факт позволит нам без изменений использовать соотношения из [33] между нижними значениями прямой и двойственной игр. Но прежде нужно показать, что полученные f и Q удовлетворяют условиям (3.18a) — (3.18c) и доставляют гарантированный выигрыш первого игрока, равный $K^*(p)$.

Лемма 3.8. *Функции f и Q, определенные в* (3.20) *и* (3.25), *принимают значения в $[0,1]$ и удовлетворяют условиям* (3.18a) — (3.18c), *т.е. параметризуют некоторое распределение σ_1.*

Доказательство. Так как $\underline{V}_n^{*\prime}$ не возрастает от 1 до 0, то Q принимает значения в $[0,1]$ и в силу (3.25) не убывает на $[0,1]$.

Далее, из (3.20) вытекает, что $f(u)$ является математическим ожиданием случайной величины $Q(V)$, где V – случайная величина, распределенная на отрезке $[\overline{\beta}, u]$ ($[u, \overline{\beta}]$) при $\overline{\beta} < u$ ($u < \overline{\beta}$) с плотностью $2|v-\overline{\beta}|/(u-\overline{\beta})^2$. Следовательно, f также принимает значения в $[0,1]$.

Сделаем замену переменной $t = (v-\overline{\beta})/(u-\overline{\beta})$ в (3.20). Тогда

$$f(u) = \int_0^1 2tQ\left(t(u-\overline{\beta})+\overline{\beta}\right) \mathrm{d}t.$$

При $u_1 < u_2$ получаем

$$f(u_2) - f(u_1) = \int_0^1 2t\left(Q(tu_2+\overline{\beta}(1-t)) - Q(tu_1+\overline{\beta}(1-t))\right) \mathrm{d}t. \qquad (3.28)$$

Отсюда, в силу того, что Q не убывает, получаем, что (3.18a) выполнено. Далее, (3.18b) следует из (3.26). Чтобы доказать (3.18c), рассмотрим несколько случаев.

Пусть $\overline{\beta} < u_1 < u_2$ и $f(u_1) = f(u_2)$. Так как Q не убывает, то подынтегральная функция из (3.28) неотрицательная при $t \in [0,1]$. Отсюда получаем, что почти при всех $t \in [0,1]$ выполнено $Q(t(u_2-\overline{\beta})+\overline{\beta}) = Q(t(u_1-\overline{\beta})+\overline{\beta})$. Из непрерывности Q следует равенство при $t=1$, то есть $Q(u_1) = Q(u_2)$. Случай $u_1 = \overline{\beta}$ получается предельным переходом по $u_1 \to \overline{\beta}$.

Доказательство при $u_1 < u_2 \leqslant \overline{\beta}$ и $u_1 < \overline{\beta} < u_2$ проводится аналогично. Таким образом, (3.18c) выполнено. □

Лемма 3.9. *Если $f(u_1) = f(u_2)$ при $u_1 < u_2$, то $f(u) = Q(u)$ при $u \in [u_1, u_2]$.*

Доказательство. При $u_2 = \overline{\beta}$ справедливость утверждения следует из того, что $f(u_2) = Q(u_2)$. Пусть $u_2 \neq \overline{\beta}$. Если $f(u_1) = f(u_2)$, то из леммы 3.8 следует, что f и Q постоянны на $[u_1, u_2]$. Тогда из (3.20) имеем

$$\begin{aligned} f(u_2) &= (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^{u_2} 2(v - \overline{\beta})Q(v)\,\mathrm{d}v = \\ &= (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \left(\int_{\overline{\beta}}^{u_1} 2(v - \overline{\beta})Q(v)\,\mathrm{d}v + \int_{u_1}^{u_2} 2(v - \overline{\beta})Q(v)\,\mathrm{d}v \right) = \\ &= (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \left((u_1 - \overline{\beta})^2 f(u_1) + \int_{u_1}^{u_2} 2(v - \overline{\beta})Q(u_1)\,\mathrm{d}v \right) = \\ &= (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \left((u_1 - \overline{\beta})^2 f(u_1) + \left((u_2 - \overline{\beta})^2 - (u_1 - \overline{\beta})^2 \right) Q(u_1) \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, для $f(u_1)$ справедливо

$$f(u_1) = (u_2 - \overline{\beta})^{-2} \left((u_1 - \overline{\beta})^2 f(u_1) + \left((u_2 - \overline{\beta})^2 - (u_1 - \overline{\beta})^2 \right) f(u_1) \right).$$

Отсюда находим

$$f(u_2) - f(u_1) = \left(1 - \frac{(u_1 - \overline{\beta})^2}{(u_2 - \overline{\beta})^2} \right) (Q(u_1) - f(u_1)) = 0.$$

Таким образом, $f(u_1) = Q(u_1)$. Следовательно $f(u) = Q(u)$ при $u \in [u_1, u_2]$. □

Теорема 3.1. *При любом $p \in [0, 1]$ для нижнего значения игры $G_{n+1}(p)$ справедлива оценка $\underline{V}_{n+1}(p) \geqslant K^*(p)$.*

Доказательство. В силу леммы 3.1 достаточно доказать, что для функций f и Q, определенных равенствами (3.20) и (3.25), при любом $y \in [0, 1]$ выполнено $F_{n+1}(p, (f, Q), y) \geqslant K^*(p)$. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть $y < f(0)$. Тогда из (3.17, 3.27, 3.22) получаем неравенство

$$F_{n+1}\left(p,(f,Q),y\right) = \int_0^1 \left[Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} y\right] \mathrm{d}u + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\,\mathrm{d}u \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^1 \left[Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} f(0)\right] \mathrm{d}u + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\,\mathrm{d}u =$$
$$= \Phi(Q) = K^*(p).$$

Аналогично можно показать, что при $y > f(1)$ из (3.21) следует

$$F_{n+1}\left(p,(f,Q),y\right) \geqslant \int_0^1 \left[\overline{\beta} f(u) + \beta f(1) - Q(u)\right] \mathrm{d}u + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\,\mathrm{d}u =$$
$$= \Phi(Q) = K^*(p).$$

Пусть теперь $y = f(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$. Введем обозначения

$$\alpha^- = \min\left\{v \mid f(v) = f(\alpha)\right\}, \quad \alpha^+ = \max\left\{v \mid f(v) = f(\alpha)\right\}.$$

Подстановкой в (3.17) получаем

$$F_{n+1}\left(p,(f,Q),y\right) = \int_{\alpha^+}^1 (Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} f(\alpha))\,\mathrm{d}u +$$
$$+ \int_0^{\alpha^-} (\overline{\beta} f(u) + \beta f(\alpha) - Q(u))\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \underline{V}_n(Q(u))\,\mathrm{d}u. \quad (3.29)$$

Однако, из леммы 3.9 следует, что $Q(u) = f(\alpha)$ при $u \in [\alpha^-, \alpha^+]$. Поэтому (3.29) совпадает с (3.19) и $F_{n+1}\left(p,(f,Q),y\right) = \Phi(Q) = K^*(p)$ по построению. $\square$

3.4.2 Оценка нижнего значения игры $\mathrm{G}_{\mathrm{n}}^*(\mathrm{z})$

Аналогично тому, как это было сделано для первого игрока, параметризуем τ_1 при помощи неубывающей функции $h : [0,1] \to [0,1]$. Если $F_{\tau_1}(y)$ — функция распределения ставки Y при применении вторым игроком стратегии τ_1, то положим

$$h(u) = F_{\tau_1}^{-1}(u) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf\{y \mid F_{\tau_1}(y) \geqslant u\}.$$

Тогда, если случайная величина U равномерно распределена на $[0,1]$, то $h(U)$ и Y имеют одинаковое распределение.

Подобно предыдущему подразделу получим аналог леммы 3.2 в терминах h. Заметим, что для $g_1^L(x,\tau_1)$ и $g_1^H(x,\tau_1)$ справедливы равенства

$$g_1^L(x,\tau_1) = \int_J \Big[\mathbf{1}_{x>y}(-\beta x - \overline{\beta} y) + \mathbf{1}_{x<y}(\overline{\beta} x + \beta y)\Big]\tau_1(\mathrm{d}y),$$
$$g_1^H(x,\tau_1) = \int_J \Big[\mathbf{1}_{x>y}(1-\beta x - \overline{\beta} y) + \mathbf{1}_{x<y}(\overline{\beta} x + \beta y - 1)\Big]\tau_1(\mathrm{d}y).$$

Подставим $g_1^H(x,\tau_1)$ и $g_1^L(x,\tau_1)$ в правую часть (3.3) и получившийся результат обозначим как

$$\begin{aligned} G_{n+1}(z,x,h) = \underline{W}_n\left(z - \int_0^1 \left[\mathbf{1}_{\{u|h(u)<x\}} - \mathbf{1}_{\{u|h(u)>x\}}\right]\mathrm{d}u\right) - \\ - \int_0^1 \left[\mathbf{1}_{\{u|h(u)<x\}}(-\beta x - \overline{\beta} h(u)) + \mathbf{1}_{\{u|h(u)>x\}}(\overline{\beta} x + \beta h(u))\right]\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Лемма 3.10. *Для любого $z \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$\underline{W}_{n+1}(z) \geqslant \sup_h \inf_x G_{n+1}(z,x,h).$$

Будем искать стратегию второго игрока, выравнивающую его выигрыш при $x \in [h(0),h(1)]$. Пусть $x = h(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in [0,1]$, и h возрастает в некоторой окрестности точки α. Тогда для выравнивающей функции h выражение

$$\begin{aligned} G_{n+1}(z,h(\alpha),h) = \underline{W}_n(z+1-2\alpha) - \\ - \int_\alpha^1 \Big(\overline{\beta} h(\alpha) + \beta h(u)\Big)\mathrm{d}u + \int_0^\alpha \Big(\beta h(\alpha) + \overline{\beta} h(u)\Big)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{3.31}$$

не зависит от α. Следовательно,

$$\frac{\partial G_{n+1}}{\partial \alpha} = 2h(\alpha) + (\alpha - \overline{\beta})h'(\alpha) - 2\underline{W}_n'(z-2\alpha+1) = 0.$$

Отсюда

$$h(u) = 2(u-\overline{\beta})^{-2}\int_{\overline{\beta}}^u (v-\overline{\beta})\underline{W}_n'(z-2v+1)\,\mathrm{d}v.^{2} \tag{3.32}$$

Если подставить $h(u)$ в (3.31) то получившееся выражение, которое мы обозначим $\Psi(h)$, не зависит от α. Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 3.6.

[2] При $u = \overline{\beta}$ доопределим $h(\overline{\beta})$ по непрерывности как $\underline{W}_n'(z-2\overline{\beta}+1)$.

Лемма 3.11. *Для значения* $\Psi(h)$ *справедливо равенство*

$$\Psi(h) = \int_0^1 \underline{W}_n(z - 2s + 1)\,\mathrm{d}s. \tag{3.33}$$

Отметим, что несмотря на зависимость $h(u)$ от β, выражение для функции $\Psi(h)$ от него не зависит и по форме совпадает с аналогичным выражением в [33]. Таким образом, остается показать, что функция h действительно является параметризацией некоторой стратегии τ_1 второго игрока, и нижняя оценка его выигрыша равна $\Psi(h)$. Доказательство следующей леммы опускается, поскольку во многом повторяет доказательства лемм 3.8 и 3.9.

Лемма 3.12. *Функция* h*, определенная в* (3.32)*, обладает следующими свойствами*:

- $h : [0,1] \to [0,1]$, $\forall u_1, u_2 \in [0,1] : u_1 < u_2 \implies h(u_1) \leqslant h(u_2)$;
- $h(u_1) = h(u_2) \implies h(u_1) = \underline{W}'_n(z - 2u_1 + 1) = \underline{W}'_n(z - 2u_2 + 1)$.

В частности, функция h *может служить параметризацией некоторого распределения* τ_1.

Теорема 3.2. *Для нижнего значения игры* $G^*_{n+1}(z)$ *справедлива оценка*

$$\underline{W}_{n+1}(z) \geqslant \int_0^1 \underline{W}_n(z - 2v + 1)\,\mathrm{d}v.$$

Доказательство. Из леммы 3.10 следует, что нам достаточно показать, что при любом $x \in [0,1]$ выполнено $G_{n+1}(z, x, h) \geqslant \Psi(h)$. Рассмотрим несколько случаев.

При $x < h(0)$ из (3.30) и (3.31) получаем

$$G_{n+1}(z, x, h) = \underline{W}_n(z+1) - \int_0^1 \left(\overline{\beta} x + \beta h(u)\right)\mathrm{d}u \geqslant$$
$$\geqslant \underline{W}_n(z+1) - \int_0^1 \left(\overline{\beta} h(0) + \beta h(1)\right)\mathrm{d}u = G_{n+1}(z, h(0), h) = \Psi(h).$$

Аналогично можно показать, что при $x > h(1)$ выполняется неравенство $G_{n+1}(z, x, h) \geqslant \Psi(h)$.

Пусть теперь $x = h(\alpha),\ \alpha \in [0,1]$. Введем обозначения

$$\alpha^- = \min\{v \mid h(v) = h(\alpha)\}, \quad \alpha^+ = \max\{v \mid h(v) = h(\alpha)\}.$$

Из (3.30) находим

$$G_{n+1}(z,x,h) = \underline{W}_n(z+1-\alpha^- - \alpha^+) - \\ - \int_0^{\alpha^-} \left(-\beta x - \overline{\beta} h(u)\right) \mathrm{d}u - \int_{\alpha^+}^1 \left(\overline{\beta} x + \beta h(u)\right) \mathrm{d}u. \quad (3.34)$$

Поскольку $\underline{W}_n$ — дифференцируемая вогнутая функция, верно неравенство

$$\underline{W}_n(z+1-2\alpha) \leqslant \underline{W}_n(z+1-\alpha^- - \alpha^+) + \\ + \underline{W}_n'(z+1-\alpha^- - \alpha^+)\left([\alpha^+ - \alpha] + [\alpha^- - \alpha]\right).$$

Из леммы 3.12 при $u_1 = (\alpha^- + \alpha^+)/2$, $u_2 = \alpha$ следует, что

$$\underline{W}_n'(z+1-\alpha^- - \alpha^+) = \underline{W}_n'(z+1-2\alpha) = h(\alpha).$$

Так как $h(u)$ постоянна на $[\alpha^-, \alpha^+]$ и $h(\alpha) = x$ имеем

$$\underline{W}_n(z+1-\alpha^- - \alpha^+) \geqslant \underline{W}_n(z+1-2\alpha) - \\ - \int_{\alpha}^{\alpha^+} \left(\overline{\beta} x + \beta h(u)\right) \mathrm{d}u + \int_{\alpha^-}^{\alpha} \left(\beta x + \overline{\beta} h(u)\right) \mathrm{d}u.$$

Используя оценку на $\underline{W}_n(z+1-\alpha^- - \alpha^+)$ в (3.34), получаем

$$G_{n+1}(z,x,h) \geqslant \underline{W}_n(z+1-2\alpha) - \int_{\alpha}^1 \left(\overline{\beta} h(\alpha) + \beta h(u)\right) \mathrm{d}u + \\ + \int_0^{\alpha} \left(\beta h(\alpha) + \overline{\beta} h(u)\right) \mathrm{d}u = G_{n+1}(z, h(\alpha), h) = \Psi(h).$$

Таким образом, требуемое неравенство справедливо при любом $x \in [0,1]$. $\square$

3.5 Значение игры $\mathrm{G_n(p)}$

Поскольку выражения для нижних оценок в теоремах 3.1 и 3.2 совпадают с аналогичными выражениями в [33], справедливы все двойственные соотношения между $\underline{V}_n(p)$ и $\underline{W}_n(z)$, а также утверждения относительно оптимальности стратегий. Приведем соответствующие теоремы.

Теорема 3.3. *Для всех $z \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\underline{V}_n^*(z) = \overline{W}_n(z) = \overline{V}_n^*(z) = \underline{W}_n(z). \tag{3.35}$$

Таким образом, игры $G_n(p)$ и $G_n^*(z)$ имеют значения $V_n(p)$ и $W_n(z)$ соответственно. Кроме того,

$$W_{n+1}(z) = \int_0^1 W_n(z - 2u + 1)\,\mathrm{d}u. \tag{3.36}$$

Теорема 3.4. *Стратегии σ^0 и τ^0 являются оптимальными в игре $G_n(p)$ тогда и только тогда, когда стратегии (p, σ^0), τ^0 являются оптимальными в игре $G_n^*(z)$ при $z = V_n'(p)$.*

Следствие 3.1. *Значения игр $G_n^\beta(p)$ и $G_n^{\beta*}(z)$ не зависят от коэффициента β.*

Нужно отметить, что в силу следствия 3.1 содержание утверждений об асимптотике значения игры и динамике апостериорных вероятностей справедливо и для данной модели без каких-либо изменений. Приведем соответствующие утверждения.

Обозначим через f_n функцию распределения суммы независимых случайных величин $S_n = \sum_{k=1}^n U_k/\sqrt{n}$, где случайные величины U_k распределены равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Также введем обозначение $\psi_n(p) = V_n(p)/\sqrt{n}$.

Утверждение 3.3 [33, Следствие 3]. *Пусть величина v_p определяется из условия $p = \int_{v_p}^\infty f_n(s)\,\mathrm{d}s$. Тогда справедливы равенства*

$$\psi_n(p) = \int_{v_p}^\infty s f_n(s)\,\mathrm{d}s, \quad \psi_n'(p) = v_p.$$

Введем обозначение $\psi^*(v) = \mathbb{E}\min(0, v + Z/\sqrt{3})$, где Z — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение.

Утверждение 3.4 [33, Следствие 4]. *Последовательности функций $\{\psi_n^*\}$ и $\{\psi_n^{*\prime}\}$ сходятся равномерно к ψ^* и $\psi^{*\prime}$ соответственно. Более того, последователь-*

ность функций $\{\psi_n(p)\}$ *равномерно сходится к функции*

$$\psi(p) = \frac{e^{-z_p^2/2}}{\sqrt{6\pi}},$$

где при каждом $p \in [0,1]$ *величина* z_p *определяется из равенства*

$$p = \int_{z_p}^{\infty} \frac{e^{-s^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}s.$$

Обозначим p_m апостериорную вероятность состояния H после m-го шага игры. Кроме того, обозначим p^n непрерывный случайный процесс, определенный для $t \in [0,1]$ как $p_t^n = p_{[nt]}$.

Утверждение 3.5 [33, Теорема 12]. *Случайный процесс* p^n *при* $n \to \infty$ *сходится в смысле конечномерных распределений к процессу* ϑ_t*, который определяется следующим образом:*

$$\vartheta_t = \psi^{*\prime}\left(\frac{z_p' - B_t}{\sqrt{3}\sqrt{1-t}}\right) = N\left(\frac{z_p' - B_t}{\sqrt{1-t}}\right),\ t \in [0,1)$$
$$N(v) = \int_{-\infty}^{v} \frac{e^{-s^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}s,$$

где B_t *— стандартный винеровский процесс, а величина* z_p' *определяется из уравнения* $N(z_p') = p$*.*

Утверждение 3.6 [33, Лемма 9]. *Существует константа* C *такая, что для всех* m, n *при* $m < n$ *выполняется неравенство*

$$|x_m - p_m| \leqslant C/\sqrt{n-m},$$

где x_m *— ставка первого игрока на* m*-м шаге игры.*

Обоснуем сделанные ранее предположения о непрерывной дифференцируемости функций $\underline{V}_n(p)$, $\underline{V}_n^*(z)$ и $\underline{W}_n(z)$.

Утверждение 3.7. *При любом* $n \geqslant 1$ *функция* $W_n(z)$ *является непрерывно дифференцируемой на* $\mathbb{R}$*.*

Это сразу следует из формулы (3.36) и того, что $W_0(z) = \min(z, 0)$. Рассмотрим подробнее, как ведет себя $W_n'(z)$.

Лемма 3.13. *Для любого $n \geqslant 1$ выполняется*:

1. $W'_n(z) = 1$ *при* $z \in (-\infty, -n]$;
2. $W'_n(z) = 0$ *при* $z \in [n, \infty)$;
3. $W'_n(z)$ *убывает при* $z \in [-n, n]$.

Доказательство. Из (3.36) следует, что

$$W'_{n+1}(z) = \frac{1}{2}\left(W_n(z+1) - W_n(z-1)\right). \tag{3.37}$$

Отсюда

$$W'_1(z) = \begin{cases} 1, & z < -1, \\ (1-z)/2, & -1 \leqslant z \leqslant 1, \\ 0, & z > 1. \end{cases} \tag{3.38}$$

Таким образом, утверждение леммы верно при $n = 1$. Пусть также утверждение леммы верно при $n \leqslant N$, докажем его справедливость при $n = N + 1$.

Из (3.37) следует, что для некоторого $\Theta \in (-1{,}1)$ верно равенство

$$W'_{N+1}(z) = W'_N(z + \Theta).$$

Отсюда получаем справедливость первых двух утверждений леммы. Далее, из (3.37) получаем

$$W''_{N+1}(z) = 1/2\left(W'_N(z+1) - W'_N(z-1)\right).$$

Так как $W'_N(z)$ убывает на $[-N, N]$, то $W'_N(z+1)$ убывает на $[-N-1, N-1]$, $W'_N(z-1)$ убывает на $[-N+1, N+1]$, а значит $W''_{N+1}(z)$ отрицательна при $z \in [-N-1, N+1]$. Отсюда получаем третье утверждение леммы. □

Утверждение 3.8. *При любом $n \geqslant 1$ функция $V_n(p)$ является непрерывно дифференцируемой на* $[0, 1]$.

Доказательство. Из (3.12) следует, что

$$z_1^* \neq z_2^* \in \partial V_n(p) \iff p = W'_n(z_1^*) = W'_n(z_2^*).$$

Однако по лемме 3.13 функция W_n' убывает от 1 до 0. Следовательно ∂V_n содержит только одно значение в каждой точке отрезка $[0,1]$, что эквивалентно дифференцируемости V_n. Из того, что V_n к тому же непрерывна, ограниченна и вогнута, получаем непрерывность ее производной на $[0,1]$. □

Алгоритм построения оптимальных стратегий в игре $\mathbf{G_n(p)}$. В силу рекурсивной структуры игры $G_n(p)$ достаточно описать способ получения оптимальных действий игроков на первом шаге игры при заданном значении p вероятности состояния H.

1. Находим λ как решение уравнения $p = W_n'(\lambda)$. Производная W_n' является кусочно-полиномиальной функцией n-го порядка. Следовательно, ее корни могут быть найдены численно с любой заданной точностью.
2. Согласно (3.25) и (3.35) находим функцию
$$Q(u) = W_{n-1}'(\lambda + 1 - 2u).$$
В силу сказанного выше функция $Q(u)$ является кусочно-полиномиальной порядка $n-1$.
3. Выбираем u_1 как реализацию случайной величины U_1, распределенной на $[0,1]$ с плотностью вероятности $Q(u)/p$ в состоянии H и $(1-Q(u))/(1-p)$ в состоянии L.
4. Согласно (3.20) находим
$$x = f(u_1) = (u_1 - \overline{\beta})^{-2} \int_{\overline{\beta}}^{u_1} 2(v - \overline{\beta}) Q(v)\, \mathrm{d}v.$$
Так как для расчета оптимальной ставки x необходимо знать значение $f(u)$ лишь в одной точке u, оно может быть эффективно найдено численно.
5. Находим u_2 как реализацию случайной величины U_2, распределенной равномерно на $[0,1]$
6. Из (3.32) и теоремы 3.4 следует, что выражения для h и f совпадают. Таким образом, оптимальная ставка второго игрока $y = h(u_2) = f(u_2)$.

7. Если $n = 1$, игра заканчивается после объявления ставок. В противном случае игроки переходят к игре $G_{n-1}(p^1)$, где $p^1 = Q(u_1)$.

Из данного алгоритма видно, что возможность быстрого расчета оптимальных действий игроков на первом шаге зависит от возможности быстрого расчета функции $W_n'(z)$. Укажем способ ее расчета.

В [33] показано, что $\psi_n^*(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} W_n(\sqrt{n}z)$ и $\psi_n^{*\prime}(z) = P(S_n > z)$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} W_n'(z) = \psi_n^{*\prime}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n U_i}{\sqrt{n}} > \frac{z}{\sqrt{n}}\right) = \\ = P\left(\sum_{i=1}^n U_i > z\right) = 1 - F_{U_n}(z), \end{aligned} \tag{3.39}$$

где $F_{U_n}(z)$ — функция распределения суммы n случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Известно, что $F_{U_n}(z)$ имеет следующее представление (см. [18]):

$$F_{U_n}(z) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (z + n - 2k)_+^n. \tag{3.40}$$

Заметим, что при $z \in [-n + 2(i-1), -n + 2i]$, $i = \overline{1, n}$ только i членов в формуле выше отличны от нуля. Потому для заданного n можно заранее рассчитать коэффициенты полинома при попадании z в тот или иной интервал.

В качестве иллюстрации использования (3.39) и (3.40) приведем формулы для $W_n'(z)$ при $n = \overline{2, 5}$:

$$W_2'(z) = \begin{cases} 1, & z \leqslant -2, \\ \frac{1}{8}\left(-z^2 - 4z + 4\right), & -2 < z \leqslant 0, \\ \frac{1}{8}(z-2)^2, & 0 < z \leqslant 2, \\ 0, & z > 2, \end{cases} \tag{3.41}$$

$$W_3'(z) = \begin{cases} 1, & z \leqslant -3, \\ \frac{1}{48}\left(-z^3 - 9z^2 - 27z + 21\right), & -3 < z \leqslant -1, \\ \frac{1}{24}\left(z^3 - 9z + 12\right), & -1 < z \leqslant 1, \\ -\frac{1}{48}(z-3)^3, & 1 < z \leqslant 3, \\ 0, & z > 3, \end{cases}$$

$$W_4'(z) = \begin{cases} 1, & z \leqslant -4, \\ \frac{1}{384}\left(-z^4 - 16z^3 - 96z^2 - 256z + 128\right), & -4 < z \leqslant -2, \\ \frac{1}{384}\left(3z^4 + 16z^3 - 128z + 192\right), & -2 < z \leqslant 0, \\ \frac{1}{384}\left(-3z^4 + 16z^3 - 128z + 192\right), & 0 < z \leqslant 2, \\ \frac{1}{384}(z-4)^4, & 2 < z \leqslant 4, \\ 0, & z > 4, \end{cases}$$

$$W_5'(z) = \begin{cases} 1, & z \leqslant -5, \\ \frac{-z^5 - 25z^4 - 250z^3 - 1250z^2 - 3125z + 715}{3840}, & -5 < z \leqslant -3, \\ \frac{2z^5 + 25z^4 + 100z^3 + 50z^2 - 550z + 965}{1920}, & -3 < z \leqslant -1, \\ \frac{-3z^5 + 50z^3 - 575z + 960}{1920}, & -1 < z \leqslant 1, \\ \frac{2z^5 - 25z^4 + 100z^3 - 50z^2 - 550z + 955}{1920}, & 1 < z \leqslant 3, \\ -\frac{(z-5)^5}{3840}, & 3 < z \leqslant 5, \\ 0, & z > 5. \end{cases}$$

3.6 Примеры

В данном разделе даны примеры использования описанного выше алгоритма при построении аналитического решения для игр $G_1(p)$ и $G_2(p)$.

Пример 3.1. Найдем оптимальные f и Q в игре $G_1(p)$. Из (3.38) получаем, что $\lambda = 1 - 2p$ является решением уравнения $p = W_1'(\lambda)$. Отсюда

$$Q(u) = W_0'(\lambda + 1 - 2u) = \begin{cases} 0, & u < 1-p, \\ 1, & u > 1-p. \end{cases}$$

Пусть $p \leqslant \beta$. Тогда из (3.20) находим

$$f(u) = (u - \overline{\beta})^{-2} \int_{1-p}^{u} 2(v - \overline{\beta}) Q(v)\,\mathrm{d}v =$$

$$= \begin{cases} 0, & u \leqslant 1-p, \\ 1 - \dfrac{(\beta - p)^2}{(u - \overline{\beta})^2}, & u > 1-p. \end{cases}$$

При $p > \beta$ получаем

$$f(u) = \begin{cases} (u - \overline{\beta})^{-2} \displaystyle\int_{\overline{\beta}}^{1-p} 2(v - \overline{\beta})\,\mathrm{d}v, & u \leqslant 1-p, \\ (u - \overline{\beta})^{-2} \displaystyle\int_{\overline{\beta}}^{u} 2(v - \overline{\beta})\,\mathrm{d}v, & u > 1-p. \end{cases}$$

Отсюда

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{(\beta - p)^2}{(u - \overline{\beta})^2}, & u \leqslant 1-p, \\ 1, & u > 1-p. \end{cases}$$

Пример 3.2. Найдем оптимальные f и Q в игре $G_2(p)$. Пусть $1/2 < p < 1$. Тогда из (3.41) искомое λ находится как решение следующего уравнения (см. рис. 3.1):

$$(4 - 4\lambda - \lambda^2)/8 = p.$$

Отсюда $\lambda = -2 + 2\sqrt{2 - 2p}$, а следовательно имеет место равенство

$$Q(u) = W_1'(\lambda + 1 - 2u) = \begin{cases} 1 - \sqrt{2 - 2p} + u, & u < \sqrt{2 - 2p}, \\ 1, & u \geqslant \sqrt{2 - 2p}. \end{cases}$$

Пусть $\overline{\beta} < \sqrt{2 - 2p}$. Тогда для f имеет место следующая формула:

$$f(u) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\sqrt{2 - 2p} + (2u + \overline{\beta})}{3}, & u \leqslant \sqrt{2 - 2p}, \\ 1 - \dfrac{(\sqrt{2 - 2p} - \overline{\beta})^3}{3(u - \overline{\beta})^2}, & u > \sqrt{2 - 2p}. \end{cases}$$

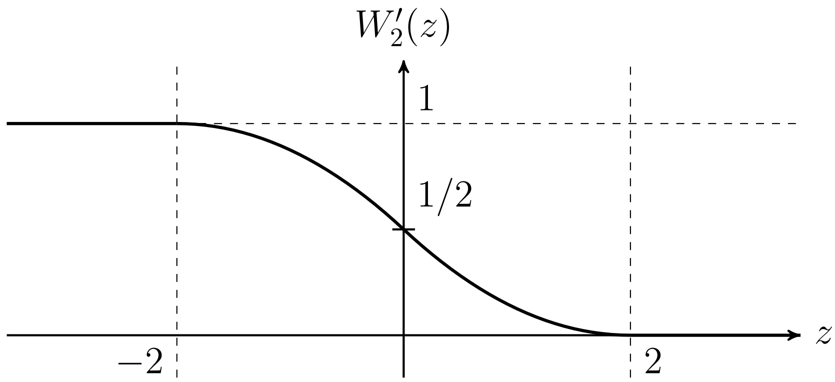

Рисунок 3.1 — График функции $W_2'(z)$

Пусть $\overline{\beta} > \sqrt{2-2p}$. В случае $u \geqslant \sqrt{2-2p}$ имеет место равенство $f(u) = 1$. Если $u < \sqrt{2-2p}$, то тогда выражение для $f(u)$ приобретает вид

$$f(u) = (u-\overline{\beta})^{-2}\left(\int_{\overline{\beta}}^{\sqrt{2-2p}} 2(v-\overline{\beta})\,\mathrm{d}v + \int_{\sqrt{2-2p}}^{u} 2(v-\overline{\beta})(1-\sqrt{2-2p}+v)\,\mathrm{d}v\right).$$

Обозначим через t выражение $\sqrt{2-2p}$. Тогда для первого слагаемого получим

$$\int_{\overline{\beta}}^{t} 2(v-\overline{\beta})\,\mathrm{d}v = (\overline{\beta}-t)^2.$$

Для второго слагаемого находим

$$\int_{t}^{u} 2(v-\overline{\beta})(1-t+v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}(t-u)(t^2-t(3-u)-u(3+2u)+3(2-t+u)\overline{\beta}).$$

Отсюда, получаем для $f(u)$ следующее выражение

$$f(u) = 1 - \frac{(t-u)^2(3\overline{\beta}-t-2u)}{3(u-\overline{\beta})^2}.$$

Таким образом, при $\overline{\beta} > \sqrt{2-2p}$ функция $f(u)$ имеет следующим вид

$$f(u) = \begin{cases} 1 - \dfrac{(\sqrt{2-2p}-u)^2(3\overline{\beta}-\sqrt{2-2p}-2u)}{3(u-\overline{\beta})^2}, & u < \sqrt{2-2p}, \\ 1, & u \geqslant \sqrt{2-2p}. \end{cases}$$

Пусть $0 < p \leqslant 1/2$. Тогда искомое λ находится как решение следующего уравнения (см. рис. 3.1):

$$(\lambda-2)^2/8 = p.$$

Отсюда $\lambda = 2(1-\sqrt{2p})$, и из (3.38) получаем

$$Q(u) = W_1'(\lambda + 1 - 2u) = \begin{cases} 0, & u \leqslant 1-\sqrt{2p}, \\ 1-\sqrt{2p}+u, & u > 1-\sqrt{2p}. \end{cases}$$

Пусть $\overline{\beta} \leqslant 1-\sqrt{2p}$. При $u \leqslant 1-\sqrt{2p}$ справедливо $f(u) = 0$. При $u > 1-\sqrt{2p}$ находим

$$f(u) = (u-\overline{\beta})^{-2}\int_{1-\sqrt{2p}}^{u} 2(v-\overline{\beta})(1-\sqrt{2p}+v)\,\mathrm{d}v = \\ = \frac{(u-1+\sqrt{2p})(2(u^2+u-2)+10p-\sqrt{2p}(1+5u+9\beta)+3(3+u)\beta)}{3(u-\overline{\beta})^2}.$$

При $\overline{\beta} > 1-\sqrt{2p}$ для f имеет место следующая формула

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{(5(\sqrt{2p}-1)-\overline{\beta})(\sqrt{2p}-\beta)^2}{3(u-\overline{\beta})^2}, & u \leqslant 1-\sqrt{2p}, \\ 1-\sqrt{2p}+\dfrac{2u+\overline{\beta}}{3}, & u > 1-\sqrt{2p}. \end{cases}$$

Как видно из данных примеров, получение явного аналитического представления функций f и Q в n-шаговой игре является трудоемкой задачей.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получено решение повторяющейся игры с неполной информацией неограниченной продолжительности, моделирующей биржевые торги с дискретными ставками и обобщенным механизмом формирования сделки. На основе анализа функции значения игры в зависимости от параметра β механизма формирования сделки показано, что механизмы, предписывающие продажу рискового актива по наибольшей или наименьшей цене гарантируют инсайдеру наименьший выигрыш. Полученные результаты обобщены на случай модели рынка со счетным множеством состояний.
2. Найдено решение n-шаговой игровой модели торгов с двумя состояниями рынка, непрерывными ставками и обобщенным механизмом формирования сделки. Показано, что, хотя оптимальные стратегии игроков зависят от значения параметра β, значение n-шаговой игры от него не зависит, что существенно отличает непрерывный случай от дискретного.
3. Проведен анализ динамики игрового взаимодействия, возникающей при применении игроками оптимальных стратегий, в дискретном и непрерывном случаях. Для дискретного случая показано, что последовательность апостериорных вероятностей представляет собой однородную марковскую цепь, и дан явный вид ожидаемой продолжительности торгов. Для непрерывной модели показано, что динамика не зависит от параметра механизма.

Появление случайных блужданий цен сделок в более общей модели позволяет сделать вывод о том, что данный феномен не является специфическим свойством конкретной модели. Это, в свою очередь, подтверждает гипотезу о стратегическом происхождении случайных флуктуаций цен на фондовых рынках.

Список литературы

1. *Васин А. А.*, *Красощеков П. С.*, *Морозов В. В.* Исследование операций. — М. : Издательский центр «Академия», 2008.
2. *Васин А.*, *Морозов В.* Теория игр и модели математической экономики. — М. : МАКС Пресс, 2005.
3. *Доманский В. К.*, *Крепс В. Л.* Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках // Журнал Новой экономический ассоциации. — 2011. — Т. 11. — С. 39—62.
4. *Доманский В. К.*, *Крепс В. Л.* Игры торгов несколькими активами // Математическая Теория Игр и её Приложения. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 32—53.
5. *Доманский В.*, *Крепс В.* Многошаговые торги акциями и повторяющиеся игры N лиц с неполной информацией // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Труды международной научной конференции. — Минск : «Издательский центр БГУ», 2008. — С. 82—88.
6. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М. : Мир, 1964.
7. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1976.
8. *Крепс В. Л.* Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 4. — С. 109—120.
9. *Мазалов В. В.*, *Менчер А. Э.*, *Токарева Ю. С.* Переговоры. Математическая теория. — СПб. : Издательство «Лань», 2012.

10. *Половинкин Е.*, *Балашов М.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.

11. *Пьяных А. И.* Об одной модификации модели биржевых торгов с инсайдером // Математическая теория игр и её приложения. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 68—84.

12. *Пьяных А. И.* О модификации многошаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками и асимметричной информацией // Математическая теория игр и её приложения. — 2016. — Т. 8, № 2. — С. 91—113.

13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М. : Мир, 1973.

14. *Самарский А. А.*, *Гулин А. В.* Численные методы. — М. : Наука, 1989.

15. *Сандомирская М. С.* Теоретико-игровое моделирование биржевых торгов: дис. … канд. / Сандомирская М. С. — Спб. : Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургский экономико-математический институт Российской академии наук, 2013.

16. *Сандомирская М. С.* Теоретико-игровая динамическая модель инсайдерских торгов с ненулевым спрэдом // Управление большими системами. — 2014. — Т. 49. — С. 207—234.

17. *Сандомирская М. С.*, *Доманский В. К.* Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией // Математическая теория игр и её приложения. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 32—54.

18. *Феллер У.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. — М. : Мир, 1967.

19. *Ширяев А. Н.* Вероятность: В 2-х кн. Т. 1. — 5-е изд. — М. : МЦНМО, 2011.

20. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — 2-е изд. — М. : Наука, 1969.

21. *Aumann R. J.*, *Maschler M.* Game theoretic aspects of gradual disarmament // Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-80. — Washington, D.C., 1966. — Chap. V. Pp. V1–V55.

22. *Aumann R. J.*, *Maschler M.* Repeated games of incomplete information: the zero-sum extensive case // Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-143. — Washington, D.C., 1966. — Chap. III. Pp. 37–116.

23. *Aumann R. J.*, *Maschler M.* Repeated games with incomplete information: a survey of recent results // Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-116. — Washington, D.C., 1966. — Chap. III. Pp. 287–403.

24. *Aumann R. J.*, *Maschler M. B.* Repeated games with Incomplete Information. — Cambridge, Mass. : The MIT Press, 1995.

25. *Aumann R. J.*, *Maschler M.*, *Stearns R. E.* Repeated games of incomplete information: an approach to the non-zero sum case // Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-143. — Washington, D.C., 1966. — Chap. IV. Pp. 117–216.

26. *Aumann R. J.*, *Hart S.* Bi-convexity and bi-martingales // Israel Journal of Mathematics. — 1986. — Vol. 54, no. 2. — Pp. 159–180.

27. *Bachelier L.* Théorie de la spéculation // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3. — 1900. — Vol. 17. — Pp. 21–86.

28. *Back K.* Insider Trading in Continuous Time // The Review of Financial Studies. — 1992. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 387–409.

29. *Chatterjee K.*, *Samuelson W.* Bargaining under Incomplete Information // Operations Research. — 1983. — Vol. 31, no. 5. — Pp. 835–851.

30. *De Meyer B.* Price dynamics on a stock market with asymmetric information // Games and Economic Behavior. — 2010. — Vol. 69. — Pp. 42–71.

31. *De Meyer B.*, *Fournier G.* Price dynamics on a risk averse market with asymmetric information: Documents de travail du Centre d'Economie de la Sorbonne / Université Panthéon-Sorbonne (Paris 1), Centre d'Economie de la Sorbonne. — June 2015.

32. *De Meyer B.*, *Saley H.* A model of games with a continuum of states of nature. — 2002. — Prépublication de l'Institut Ellie Cartan, Nancy.

33. *De Meyer B.*, *Saley H.* On the strategic origin of Brownian motion in finance // International Journal of Game Theory. — 2002. — Vol. 31, no. 2. — Pp. 285–319.

34. *Domansky V.* Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets // International Journal of Game Theory. — 2007. — Vol. 36, no. 2. — Pp. 241–257.

35. *Domansky V.*, *Kreps V.* Repeated games with asymmetric information modeling financial markets with two risky assets // RAIRO ”— Operations Research. — 2013. — Vol. 47. — Pp. 251–272.

36. *Domansky V. C.*, *Kreps V. L.* “Eventually revealing” repeated games with incomplete information // International Journal of Game Theory. — 1994. — Vol. 23, no. 2. — Pp. 89–99.

37. *Domansky V.*, *Kreps V.* Repeated games and multinomial distributions // Zeitschrift für Operations Research. — 1995. — Vol. 42, no. 3. — Pp. 275–293.

38. *Domansky V.*, *Kreps V.* Repeated games with incomplete information and transportation problems // Mathematical Methods of Operations Research. — 1999. — Vol. 49, no. 2. — Pp. 283–298.

39. *Gensbittel F.* Extensions of Cav(u) theorem for repeated games with one-side information // Mathematics of Operations Research. — 2015. — Vol. 40, no. 1. — Pp. 80–104.

40. *Harsanyi J. C.* Games with incomplete information played by Bayesian players. Parts I, II, III // Management Science. — 1967–8. — Vol. 14. — Pp. 159–182, 320–334, 486–502.

41. *Hart S.* Nonzero-Sum Two-Person Repeated Games with Incomplete Information // Mathematics of Operations Research. — 1985. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 117–153.

42. *Heuer M.* Optimal strategies for the uninformed player // International Journal of Game Theory. — 1991. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 33–51.

43. *Kohlberg E.* Optimal strategies in repeated games with incomplete information // International Journal of Game Theory. — 1975. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 7–24.

44. *Kyle A. S.* Continuous Auctions and Insider Trading // Econometrica. — 1985. — Vol. 53. — Pp. 1315–1335.

45. *Marino A.*, *De Meyer B.* Continuous versus Discrete Market Games // Cowles Foundation Discussion Paper No. 1535. — 2005.

46. *Mertens J. F.*, *Sorin S.*, *Zamir S.* Repeated games. — Cambridge : Cambridge University Press, 2015.

47. *Mertens J. F.*, *Zamir S.* The value of two-person zero-sum repeated games with lack of information on both sides // International Journal of Game Theory. — 1971. — Vol. 1. — Pp. 39–64.

48. *Mertens J.-F.*, *Zamir S.* The maximal variation of a bounded martingale // Israel Journal of Mathematics. — 1977. — Vol. 27, no. 3. — Pp. 252–276.

49. *Mertens J.-F.*, *Zamir S.* The normal distribution and repeated games // International Journal of Game Theory. — 1976. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 187–197.

50. *Myerson R. B.*, *Satterthwaite M. A.* Efficient Mechanisms for Bilateral Trading // Journal of Economic Theory. — 1983. — Vol. 29. — Pp. 265–281.

51. *P'yanykh A. I.* A Multistage exchange trading model with asymmetric information and elements of bargaining // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2016. — Vol. 40, no. 1. — Pp. 35–40.

52. *Pyanykh A. I.* Multistage bidding model with elements of bargaining: extension for a countable state space // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Moscow, October 17-22, 2016: Proceedings. Volume I. — Moscow : MAKS Press, 2016. — Pp. 162–165.

53. *Sorin S.* Some results on the existence of Nash equilibria for non-zero sum games with incomplete information // International Journal of Game Theory. — 1983. — Vol. 12, no. 4. — Pp. 193–205.

54. *Sorin S.* On a pair of simultaneous functional equations // Journal of Mathe¨ matical Analysis and Applications. — 1984. — Vol. 98, no. 1. — Pp. 296–303.

55. *Stearns R.* A formal information concept for games with incomplete information // Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-116. — Washington, D.C., 1966. — Chap. IV. Pp. 405–433.

56. *Subrahmanyam A.* Risk Aversion, Market Liquidity, and Price Efficiency // Review of Financial Studies. — 1991. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 417–441.

57. *Zamir S.* On the relation between finitely and infinitely repeated games with incomplete information // International Journal of Game Theory. — 1971. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 179–198.