О модификации многошаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками

Пьяных А.И.
artem.pyanykh@gmail.com

Московский Государственный Университет
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Ломоносовские чтения. 2016

Содержание

Краткое описание

- Между двумя игроками в течение $n \leqslant \infty$ шагов происходят торги за однотипные акции.
- Цена акции s определяется ходом случая в соответствии с распределением μ.
- Игрок 1 (инсайдер) знает цену s, игрок 2 знает только вероятностное распределение μ.
- На каждом шаге t игроки делают ставки. Игрок, предложивший большую ставку, покупает у другого акцию. При равных ставках сделка не состоится.

- [1, De Meyer, Saley, 2002]:
    - распределение цены μ с двухточечным носителем в $\{0, 1\}$,
    - ставки принимают действительные значения.
    - цена сделки равна наибольшей предложенной ставке.

  Найдено решение n-шаговой игры и асимптотика ликвидной цены акции в бесконечной игре.
- [2, De Meyer, Saley, 2002]. Обобщение результатов [1] для распределений μ на $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ с конечным мат. ожиданием.
- [3, De Meyer, 2010]. Цена сделки определяется в соответствии с механизмом T, удовлетворяющим набору условий. Получена асимптотика ликвидной цены акции.

В [3] одно из условий на T — существование значения в n-шаговой игре для любого распределения μ.

- [4, Доманский, 2007]:
  - распределение μ с двухточечным носителем в $\{0, m\}$,
  - ставки принимают целые значения из $\overline{0, m}$,
  - цена сделки равна наибольшей предложенной ставке.

  Найдено решение бесконечно-шаговой игры.
- [5, Доманский, Крепс, 2007]. Обобщение [4] для распределений μ над $\mathbb{Z}_+$ (т.е. цена акции может принимать любое целое значение).
- [6, Пьяных, 2016]. Если p_{min} и p_{max} — меньшая и большая ставки, то сделка осуществляется по цене

$$\beta p_{min} + (1 - \beta) p_{max}, \ \beta \in [0, 1].$$

  Получено решение бесконечно-шаговой игры с распределением цены μ с двухточечным носителем.

Обзор результатов

Параметр β можно интерпретировать как переговорную силу покупателя. Такой механизм сделки был рассмотрен в [7, Chatterjee, 1983] в контексте двустороннего аукциона с неполной информацией.
В [8, Myerson, 1983] было показано, что при определенных условиях $\beta = 1/2$ оптимальная с точки зрения общей полезности.
Из результатов [6] следует, что при $\beta = 1/2$ инсайдер получает наименьший выигрыш для любых распределений μ.
В данной работе рассмотрена модификация модели с непрерывными ставками из [1] с использованием вышеописанного механизма проведения транзакции.

Постановка задачи

- Пусть $S = \{H, L\}$ — множество возможных состояний рынка и $s \in S$ реальное состояние. В состоянии H цена акции равна 1, иначе — 0.
- Обозначим $y_t = (y_t^R, y_t^N)$ портфель инсайдера на t-м шаге торгов, где y_t^R и y_t^N — количество единиц рискового актива и денег соответственно.
- Если на t-м шаге игроки делают ставки $p_{1,t}, p_{2,t} \in [0, 1]$, то портфель $y_t = y_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$, где при $\overline{\beta} = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \mathbb{1}_{p_1 > p_2}(1, -(\beta p_1 + \overline{\beta} p_2)) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2}(-1, \overline{\beta} p_1 + \beta p_2).$$

- Стоимость портфеля равна

$$V(y_t) = \mathbb{1}_{s=H}\, y_t^R + y_t^N.$$

Цель игроков — максимизировать стоимость итогового портфеля y_n.

Пусть $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \ldots, p_{1,t}, p_{2,t})$ — история ставок к t-му ходу, а H_t — множество всевозможных h_t. Также через $\Delta(X)$ обозначим совокупность всех распределений на $(X, \mathscr{B}(X))$.

- Перед началом игры ходом случая выбирается $s \in S$ так что $P(s = H) = P$, $P(s = L) = 1 - P$.
- Стратегией игрока 1 является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^H, \sigma_t^L)$, и $\sigma_t^s : H_{t-1} \to \Delta([0, 1])$.
- Стратегией игрока 2 является последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \to \Delta([0, 1])$.
- Выигрыш первого игрока равен

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{P,\sigma,\tau} V(y_n).$$

Обозначим данную игру $G_n(P)$. Ее верхнее и нижнее значения даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_\sigma \inf_\tau g_n(P, \sigma, \tau), \; V_{2,n}(P) = \inf_\tau \sup_\sigma g_n(P, \sigma, \tau).$$

Если $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P) = V_n(P)$ то игра имеет значение $V_n(P)$.

Представим стратегию игрока 1 в $G_{n+1}(P)$ как $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 — ход игрока на 1 шаге, а $\tilde{\sigma}$ — стратегия в игре продолжительности n, зависящая от ставки p_1.
Аналогично представим стратегию игрока 2 как $(\tau_1, \tilde{\tau})$.
Пусть также $P(p_1)$ — апостериорная вероятность состояния H в зависимости от ставки игрока 1.

- Для значения выигрыша справедлива формулами

$$g_{n+1}(P, \sigma, \tau) = g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{P,\sigma}\, g_n(P(p_1), \tilde{\sigma}(p_1), \tilde{\tau}(p_1)).$$

- Для нижнего значения игры справедлива формулами

$$V_{1,n+1}(P) \geqslant \sup_{\sigma_1} \inf_{\tau_1} g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{P,\sigma}\, V_{1,n}(P(p_1)).$$

Двойственная игра $G_n^*(x)$ определяется следующим образом.

- Перед началом торгов игрок 1 выбирает $s \in S$. В том случае, если он выбрал H, то по окончании игры он платит игроку 2 штраф размера x. Игрок 1 также контролирует значение P. В остальном правила двойственной игры аналогичны правилам прямой игры.
- Функция выигрыша задана как

$$g_n^*(x, (P, \sigma), \tau) = xP - g_n(P, \sigma, \tau).$$

Игрок 2 стремиться максимизировать ее значение.

Верхнее и нижнее значение игры $G_n^*(x)$ даются формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(P,\sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x,(P,\sigma),\tau),\ W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(P,\sigma)} g_n^*(x,(P,\sigma),\tau).$$

Если $W_{1,n}(x) = W_{2,n}(x) = W_n(x)$, то игра имеет значение $W_n(x)$.

Для двойственной игры справедлива та же рекурсивная декомпозиция, что и для прямой игры. В частности для нижнего значения игры имеет место формула

$$W_{2,n+1}(x) \geqslant \sup_{\tau_1} \inf_{p_1} W_{2,n}(x - g_1^H(p_1,\tau_1) + g_1^L(p_1,\tau_1)) - g_1^L(p_1,\tau_1),$$

где $g^H(p_1,\tau_1) = g_1(1,p_1,\tau_1)$ и $g^L(p_1,\tau_1) = g_1(0,p_1,\tau_1)$.

Для одношагового выигрыша игрока 1 справедлива формула

$$g_1(P,\sigma_1,p_2) = P\int_I\Big[\mathbb{1}_{p_1>p_2}(1-\beta p_1-\overline{\beta}p_2)+\mathbb{1}_{p_1<p_2}\times \\ \times(\overline{\beta}p_1-\beta p_2-1)\Big]\,\sigma_1^H(\mathrm{d}p_1)+(1-P)\int_I\Big[\mathbb{1}_{p_1>p_2}\times \\ \times(-\beta p_1-\overline{\beta}p_2)+\mathbb{1}_{p_1<p_2}(\overline{\beta}p_1-\beta p_2)\Big]\,\sigma_1^L(\mathrm{d}p_1).$$

Обозначим $\sigma_1^M(p_1) = P\sigma_1^H(p_1) + (1 - P)\sigma_1^L(p_1)$ маргинальное распределение ставки p_1.
Справедливо следующее равенство:

$$P(p_1) = P\frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^L}(p_1),$$

где $\mathrm{d}\sigma_1^H/\mathrm{d}\sigma_1^L$ — производная Радона-Никодима.

Справедливо следующее равенство:

$$P(p_1) = P\frac{\mathrm{d}\sigma_1^H}{\mathrm{d}\sigma_1^L}(p_1),$$

где $\mathrm{d}\sigma_1^H/\mathrm{d}\sigma_1^L$ — производная Радона-Никодима. Воспользовавшись им для замены меры в формуле для одношагового выигрыша, получим

$$g_1(P,\sigma_1,p_2) = \int_I \mathbb{1}_{p_1>p_2}\left[P(p_1) - \beta p_1 - \overline{\beta} p_2\right]\,\sigma_1^M(\mathrm{d}p_1) + \\ + \int_I \mathbb{1}_{p_1<p_2}\left[\overline{\beta} p_1 + \beta p_2 - P(p_1)\right]\,\sigma_1^M(\mathrm{d}p_1).$$

$$g_1(P,\sigma_1,p_2) = \int_I \mathbb{1}_{p_1>p_2}\left[P(p_1) - \beta p_1 - \overline{\beta} p_2\right]\,\sigma_1^M(\mathrm{d}p_1) + \\ + \int_I \mathbb{1}_{p_1<p_2}\left[\overline{\beta} p_1 + \beta p_2 - P(p_1)\right]\,\sigma_1^M(\mathrm{d}p_1).$$

Данная формула дает способ параметризации хода игрока 1.

- Возьмем случайную величину u, равномерно распределенную на $[0,1]$.
- Пусть $f(\cdot)$ – левая обратная функции распределения p_1. При этом $f(u)$ и p_1 одинаково распределены.
- Пусть $Q(u) = P(f(u))$.

Функции f и Q должны удовлетворять следующим свойствам, чтобы служить параметризацией некоторого хода σ_1 игрока 1:

1. f не убывает на $[0, 1]$,
2. $\int_0^1 Q(u)\mathrm{d}u = P$,
3. $\forall u_1, u_2 \in [0, 1] : f(u_1) = f(u_2) \implies Q(u_1) = Q(u_2)$.

Оценка выигрыша в терминах f и Q дается формулой

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{f(u)>p_2}(Q(u) - \beta f(u) - \overline{\beta} p_2)\mathrm{d}u \ + \\ + \int_0^1 \mathbb{1}_{f(u)<p_2}(\overline{\beta} f(u) + \beta p_2 - Q(u))\mathrm{d}u \ + \int_0^1 V_{1,n}(Q(u))\mathrm{d}u.$$

Аналогично проводится параметризация хода игрока 2 в двойственной игре.

- Возьмем случайную величину u, равномерно распределенную на $[0, 1]$.
- Пусть $h(\cdot)$ – левая обратная функции распределения p_2. При этом $h(u)$ и p_2 одинаково распределены.

Оценка выигрыша в терминах h дается формулой

$$W_{2,n}\left(x - \int_0^1 \left[\mathbb{1}_{h(u)<p_1} - \mathbb{1}_{h(u)>p_1}\right] \mathrm{d}u\right) -$$
$$- \int_0^1 \left[\mathbb{1}_{h(u)<p_1}(-\beta p_1 - \overline{\beta} h(u)) + \mathbb{1}_{h(u)>p_1}(\overline{\beta} p_1 + \beta h(u))\right] \mathrm{d}u.$$

Анализ прямой и двойственной игр

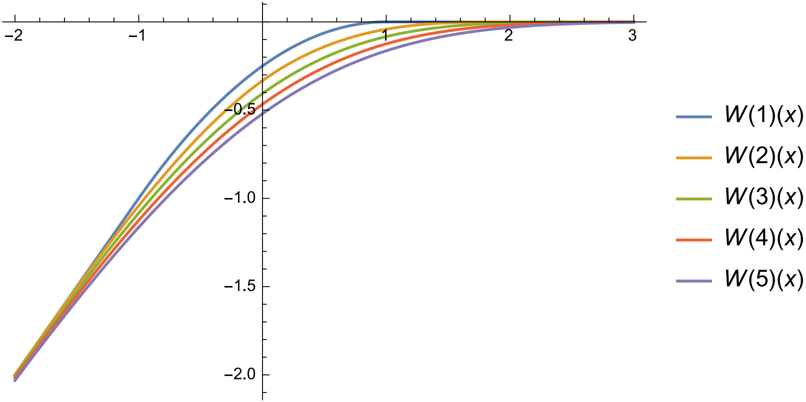
Следуя схеме, приведенной в [1, De Meyer, 2002]:

- найдены функции f, Q, выравнивающие выигрыш инсайдера при $p_2 \in [f(0), f(1)]$ в прямой игре;
- найдена функция h, выравнивающая выигрыш игрока 2 при $p_1 \in [h(0), h(1)]$ в двойственной игре;
- из соотношений двойственности между верхними и нижними значениями прямой и двойственной игр показано, что данные стратегии оптимальны.

Результаты

Значение двойственной игры $G_n^*(x)$ дается формулой:

$$W_{n+1}(x) = \int_0^1 W_n(x - 2u + 1),\ W_0(x) = \min(x, 0).$$

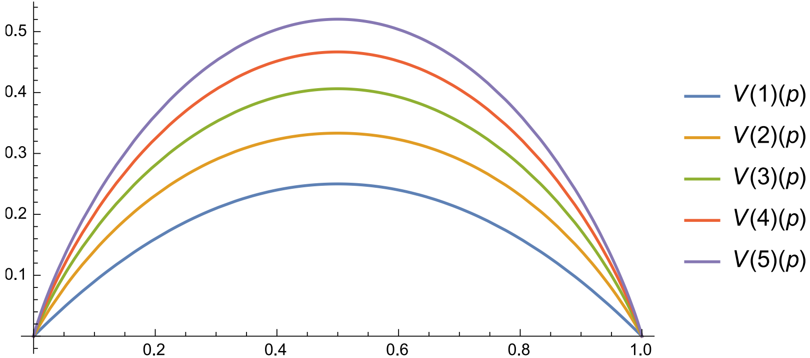


Результаты

Значение прямой игры $G_n(P)$ дается формулой:

$$V_n(P) = W_n^*(P),$$

где $W^*(P) = \inf_x xP - W_n(x)$ — сопряженная в смысле Фенхеля функция.

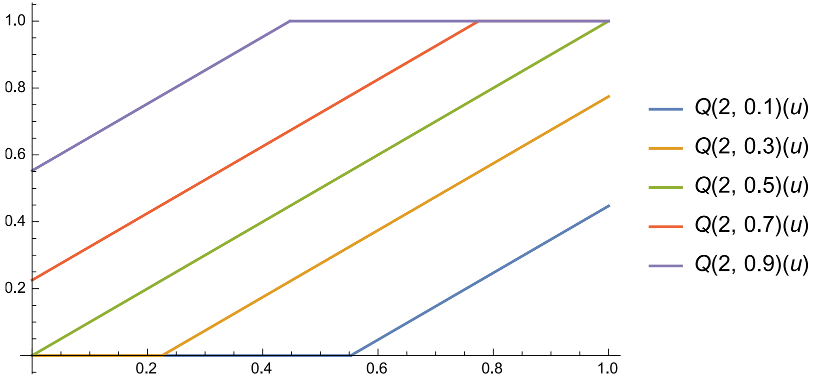


Функция $Q(u)$ определяется как

$$Q(u) = W_n'(x + 1 - 2u),$$

где параметр двойственной игры x удовлетворяет уравнению

$$W_n'(x) = P.$$

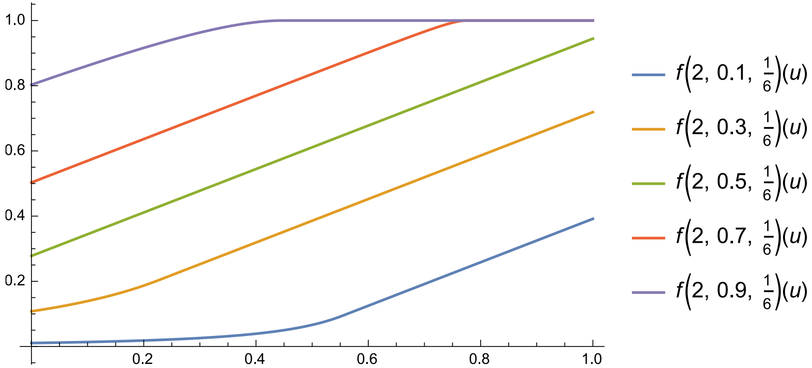


Результаты

Функция $f(u)$ определяется как

$$f(u) = 2(u - 1 + \beta)^{-2} \int_{1-\beta}^{u} (x - 1 + \beta) Q(x) \mathrm{d}x.$$

При этом $h(u) = f(u)$.



Результаты

Сравнивая полученные результаты с существующими, получаем:

- Введение механизма заключения сделки с параметром β влияет на оптимальные стратегии инсайдера и неосведомленного игрока.
- При этом значение игры не зависит от значения β и совпадает с таковым в [1, De Meyer, 2002]. В этом смысле непрерывная модель отличается от дискретной [6, Пьяных, 2016], в которой и стратегии и значение игры зависят от значения β.

- De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002.
- De Meyer B., Saley H. *A model of game with a continuum of states of nature* // Prépublication de l'Institut Elie Cartan, Nancy. 2002.
- De Meyer B. *Price dynamics on a stock market with asymmetric information* // Games and Economic Behavior. 2010.
- Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuation at finance markets* // Int J Game Theory. 2007.
- Доманский В.К, Крепс В.Л. *Теоретико игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономический ассоциации. 2011

- Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2016.
- Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research, 1983.
- Myerson R., Satterthwaite M. *Efficient Mechanisms for Bilateral Trading* // Journal of Economic Theory, 1983.