

О модификации многошаговой модели биржевых торгов с непрерывными ставками

Пьяных А.И.

`artem.pyanykh@gmail.com`

Московский Государственный Университет
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Ломоносовские чтения. 2016

- 1 Краткое описание модели
- 2 Обзор существующих результатов
- 3 Постановка задачи
- 4 Анализ прямой и двойственной игр
- 5 Результаты

- Между двумя игроками в течение $n \leq \infty$ шагов происходят торги за однотипные акции.
- Цена акции s определяется ходом случая в соответствии с распределением μ .
- Игрок 1 (инсайдер) знает цену s , игрок 2 знает только вероятностное распределение μ .
- На каждом шаге t игроки делают ставки. Игрок, предложивший большую ставку, покупает у другого акцию. При равных ставках сделка не состоится.

- [1, De Meyer, Saley, 2002]:
 - распределение цены μ с двухточечным носителем в $\{0, 1\}$,
 - ставки принимают действительные значения.
 - цена сделки равна наибольшей предложенной ставке.

Найдено решение n -шаговой игры и асимптотика ликвидной цены акции в бесконечной игре.

- [2, De Meyer, Saley, 2002]. Обобщение результатов [1] для распределений μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ с конечным мат. ожиданием.
- [3, De Meyer, 2010]. Цена сделки определяется в соответствии с механизмом T , удовлетворяющим набору условий. Получена асимптотика ликвидной цены акции.

В [3] одно из условий на T — существование значения в n -шаговой игре для любого распределения μ .

Обзор результатов

Модели с дискретными ставками

- [4, Доманский, 2007]:
 - распределение μ с двухточечным носителем в $\{0, m\}$,
 - ставки принимают целые значения из $\overline{0, m}$,
 - цена сделки равна наибольшей предложенной ставке.

Найдено решение бесконечно-шаговой игры.

- [5, Доманский, Крепс, 2007]. Обобщение [4] для распределений μ над \mathbb{Z}_+ (т.е. цена акции может принимать любое целое значение).
- [6, Пьяных, 2016]. Если p_{min} и p_{max} — меньшая и большая ставки, то сделка осуществляется по цене

$$\beta p_{min} + (1 - \beta) p_{max}, \beta \in [0, 1].$$

Получено решение бесконечно-шаговой игры с распределением цены μ с двухточечным носителем.

Параметр β можно интерпретировать как переговорную силу покупателя. Такой механизм сделки был рассмотрен в [7, Chatterjee, 1983] в контексте двустороннего аукциона с неполной информацией.

В [8, Myerson, 1983] было показано, что при определенных условиях $\beta = 1/2$ оптимальна с точки зрения общей полезности.

Из результатов [6] следует, что при $\beta = 1/2$ инсайдер получает наименьший выигрыш для любых распределений μ .

В данной работе рассмотрена модификация модели с непрерывными ставками из [1] с использованием вышеописанного механизма проведения транзакции.

Постановка задачи

- Пусть $\mathcal{S} = \{H, L\}$ — множество возможных состояний рынка и $s \in \mathcal{S}$ реальное состояние. В состоянии H цена акции равна 1, иначе — 0.
- Обозначим $y_t = (y_t^R, y_t^N)$ портфель инсайдера на t -м шаге торгов, где y_t^R и y_t^N — количество единиц рисковогго актива и денег соответственно.
- Если на t -м шаге игроки делают ставки $p_{1,t}, p_{2,t} \in [0, 1]$, то портфель $y_t = y_{t-1} + t(p_{1,t}, p_{2,t})$, где при $\bar{\beta} = 1 - \beta$

$$t(p_1, p_2) = \mathbb{1}_{p_1 > p_2}(1, -(\beta p_1 + \bar{\beta} p_2)) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2}(-1, \bar{\beta} p_1 + \beta p_2).$$

- Стоимость портфеля равна

$$V(y_t) = \mathbb{1}_{s=H} y_t^R + y_t^N.$$

Цель игроков — максимизировать стоимость итогового портфеля y_n .

Постановка задачи

Прямая игра

Пусть $h_t = (p_{1,1}, p_{2,1}, \dots, p_{1,t}, p_{2,t})$ — история ставок к t -му ходу, а H_t — множество всевозможных h_t . Также через $\Delta(X)$ обозначим совокупность всех распределений на $(X, \mathcal{B}(X))$.

- Перед началом игры ходом случая выбирается $s \in \mathcal{S}$ так что $P(s = H) = P$, $P(s = L) = 1 - P$.
- Стратегией игрока 1 является последовательность ходов $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, где $\sigma_t = (\sigma_t^H, \sigma_t^L)$, и $\sigma_t^s : H_{t-1} \rightarrow \Delta([0, 1])$.
- Стратегией игрока 2 является последовательность ходов $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, где $\tau_t : H_{t-1} \rightarrow \Delta([0, 1])$.
- Выигрыш первого игрока равен

$$g_n(P, \sigma, \tau) = \mathbb{E}_{P, \sigma, \tau} V(y_n).$$

Постановка задачи

Прямая игра

Обозначим данную игру $G_n(P)$. Ее верхнее и нижнее значения даются формулами

$$V_{1,n}(P) = \sup_{\sigma} \inf_{\tau} g_n(P, \sigma, \tau), \quad V_{2,n}(P) = \inf_{\tau} \sup_{\sigma} g_n(P, \sigma, \tau).$$

Если $V_{1,n}(P) = V_{2,n}(P) = V_n(P)$ то игра имеет значение $V_n(P)$.

Постановка задачи

Рекурсивная структура прямой игры

Представим стратегию игрока 1 в $G_{n+1}(P)$ как $(\sigma_1, \tilde{\sigma})$, где σ_1 — ход игрока на 1 шаге, а $\tilde{\sigma}$ — стратегия в игре продолжительности n , зависящая от ставки p_1 .

Аналогично представим стратегию игрока 2 как $(\tau_1, \tilde{\tau})$.

Пусть также $P(p_1)$ — апостериорная вероятность состояния H в зависимости от ставки игрока 1.

- Для значения выигрыша справедлива формулами

$$g_{n+1}(P, \sigma, \tau) = g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{P, \sigma} g_n(P(p_1), \tilde{\sigma}(p_1), \tilde{\tau}(p_1)).$$

- Для нижнего значения игры справедлива формулами

$$V_{1,n+1}(P) \geq \sup_{\sigma_1} \inf_{\tau_1} g_1(P, \sigma_1, \tau_1) + \mathbb{E}_{P, \sigma} V_{1,n}(P(p_1)).$$

Постановка задачи

Двойственная игра

Двойственная игра $G_n^*(x)$ определяется следующим образом.

- Перед началом торгов игрок 1 выбирает $s \in S$. В том случае, если он выбрал H , то по окончании игры он платит игроку 2 штраф размера x . Игрок 1 также контролирует значение P . В остальном правила двойственной игры аналогичны правилам прямой игры.
- Функция выигрыша задана как

$$g_n^*(x, (P, \sigma), \tau) = xP - g_n(P, \sigma, \tau).$$

Игрок 2 стремится максимизировать ее значение.

Постановка задачи

Двойственная игра

Верхнее и нижнее значение игры $G_n^*(x)$ даются формулами

$$W_{1,n}(x) = \inf_{(P,\sigma)} \sup_{\tau} g_n^*(x, (P, \sigma), \tau), \quad W_{2,n}(x) = \sup_{\tau} \inf_{(P,\sigma)} g_n^*(x, (P, \sigma), \tau).$$

Если $W_{1,n}(x) = W_{2,n}(x) = W_n(x)$, то игра имеет значение $W_n(x)$.

Постановка задачи

Рекурсивная структура двойственной игры

Для двойственной игры справедлива та же рекурсивная декомпозиция, что и для прямой игры. В частности для нижнего значения игры имеет место формула

$$W_{2,n+1}(x) \geq \sup_{\tau_1} \inf_{p_1} W_{2,n}(x - g_1^H(p_1, \tau_1) + g_1^L(p_1, \tau_1)) - g_1^L(p_1, \tau_1),$$

где $g^H(p_1, \tau_1) = g_1(1, p_1, \tau_1)$ и $g^L(p_1, \tau_1) = g_1(0, p_1, \tau_1)$.

Анализ прямой и двойственной игр

Одношаговый выигрыш

Для одношагового выигрыша игрока 1 справедлива формула

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_2) = & P \int_I \left[\mathbb{1}_{p_1 > p_2} (1 - \beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} \times \right. \\ & \times (\bar{\beta} p_1 - \beta p_2 - 1) \Big] \sigma_1^H(dp_1) + (1 - P) \int_I \left[\mathbb{1}_{p_1 > p_2} \times \right. \\ & \times (-\beta p_1 - \bar{\beta} p_2) + \mathbb{1}_{p_1 < p_2} (\bar{\beta} p_1 - \beta p_2) \Big] \sigma_1^L(dp_1). \end{aligned}$$

Анализ прямой и двойственной игр

Одношаговый выигрыш

Обозначим $\sigma_1^M(p_1) = P\sigma_1^H(p_1) + (1 - P)\sigma_1^L(p_1)$ маргинальное распределение ставки p_1 .

Справедливо следующее равенство:

$$P(p_1) = P \frac{d\sigma_1^H}{d\sigma_1^L}(p_1),$$

где $d\sigma_1^H/d\sigma_1^L$ — производная Радона-Никодима.

Анализ прямой и двойственной игр

Параметризация хода инсайдера

Справедливо следующее равенство:

$$P(p_1) = P \frac{d\sigma_1^H}{d\sigma_1^L}(p_1),$$

где $d\sigma_1^H/d\sigma_1^L$ — производная Радона-Никодима.

Воспользовавшись им для замены меры в формуле для одношагового выигрыша, получим

$$\begin{aligned} g_1(P, \sigma_1, p_2) = & \int_I \mathbb{1}_{p_1 > p_2} \left[P(p_1) - \beta p_1 - \bar{\beta} p_2 \right] \sigma_1^M(dp_1) + \\ & + \int_I \mathbb{1}_{p_1 < p_2} \left[\bar{\beta} p_1 + \beta p_2 - P(p_1) \right] \sigma_1^M(dp_1). \end{aligned}$$

Анализ прямой и двойственной игр

Параметризация хода инсайдера

$$g_1(P, \sigma_1, p_2) = \int_I \mathbb{1}_{p_1 > p_2} \left[P(p_1) - \beta p_1 - \bar{\beta} p_2 \right] \sigma_1^M(dp_1) + \\ + \int_I \mathbb{1}_{p_1 < p_2} \left[\bar{\beta} p_1 + \beta p_2 - P(p_1) \right] \sigma_1^M(dp_1).$$

Данная формула дает способ параметризации хода игрока 1.

- Возьмем случайную величину u , равномерно распределенную на $[0, 1]$.
- Пусть $f(\cdot)$ – левая обратная функции распределения p_1 .
При этом $f(u)$ и p_1 одинаково распределены.
- Пусть $Q(u) = P(f(u))$.

Анализ прямой и двойственной игр

Параметризация хода неосведомленного игрока

Функции f и Q должны удовлетворять следующим свойствам, чтобы служить параметризацией некоторого хода σ_1 игрока 1:

- 1 f не убывает на $[0, 1]$,
- 2 $\int_0^1 Q(u) du = P$,
- 3 $\forall u_1, u_2 \in [0, 1] : f(u_1) = f(u_2) \implies Q(u_1) = Q(u_2)$.

Аналогично проводится параметризация хода игрока 2 в двойственной игре.

- Возьмем случайную величину u , равномерно распределенную на $[0, 1]$.
- Пусть $h(\cdot)$ – левая обратная функции распределения p_2 . При этом $h(u)$ и p_2 одинаково распределены.

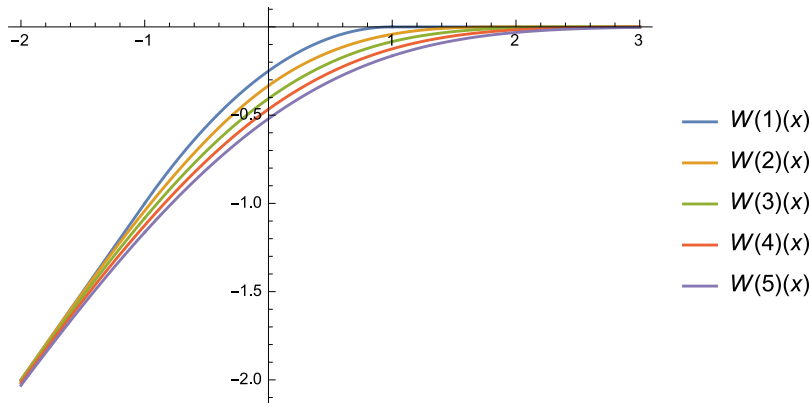
Следуя схеме, приведенной в [1, De Meyer, 2002]:

- найдены функции f, Q , выравнивающие выигрыш инсайдера при $p_2 \in [f(0), f(1)]$ в прямой игре;
- найдена функция h , выравнивающая выигрыш игрока 2 при $p_1 \in [h(0), h(1)]$ в двойственной игре;
- из соотношений двойственности между верхними и нижними значениями прямой и двойственной игр показано, что данные стратегии оптимальны.

Результаты

Значение двойственной игры $G_n^*(x)$ дается формулой:

$$W_{n+1}(x) = \int_0^1 W_n(x - 2u + 1), \quad W_0(x) = \min(x, 0).$$

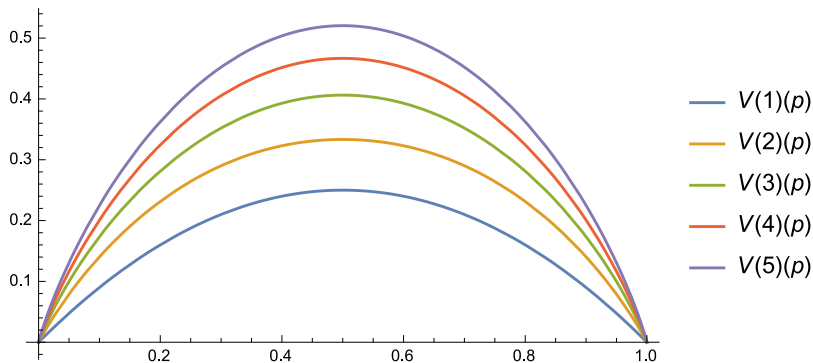


Результаты

Значение прямой игры $G_n(P)$ дается формулой:

$$V_n(P) = W_n^*(P),$$

где $W^*(P) = \inf_x xP - W_n(x)$ — сопряженная в смысле Фенхеля функция.



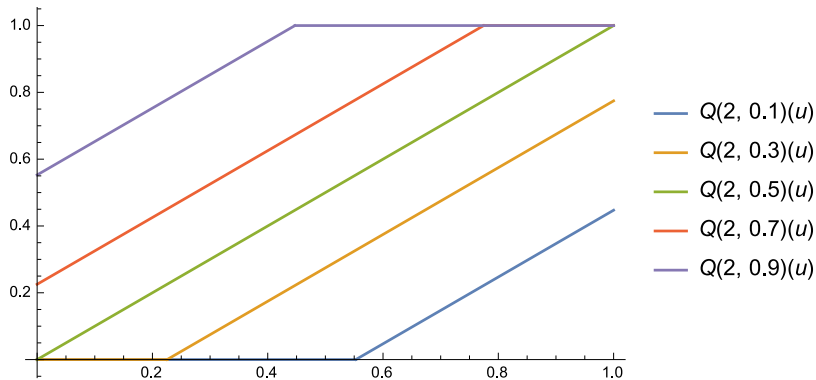
Результаты

Функция $Q(u)$ определяется как

$$Q(u) = W'_n(x + 1 - 2u),$$

где параметр двойственной игры x удовлетворяет уравнению

$$W'_n(x) = P.$$

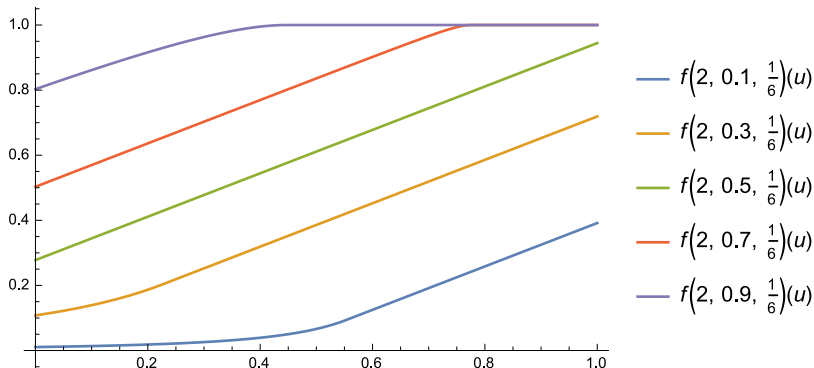


Результаты

Функция $f(u)$ определяется как






$$f(u) = 2(u - 1 + \beta)^{-2} \int_{1-\beta}^u (x - 1 + \beta) Q(x) dx.$$

При этом $h(u) = f(u)$.



Сравнивая полученные результаты с существующими, получаем:

- Введение механизма заключения сделки с параметром β влияет на оптимальные стратегии инсайдера и неосведомленного игрока.
- При этом значение игры не зависит от значения β и совпадает с таковым в [1, De Meyer, 2002]. В этом смысле непрерывная модель отличается от дискретной [6, Пьяных, 2016], в которой и стратегии и значение игры зависят от значения β .

-  De Meyer B., Saley H. *On the strategic origin of Brownian motion in finance* // Int J Game Theory. 2002.
-  De Meyer B., Saley H. *A model of game with a continuum of states of nature* // Prépublication de l'Institut Elie Cartan, Nancy. 2002.
-  De Meyer B. *Price dynamics on a stock market with asymmetric information* // Games and Economic Behavior. 2010.
-  Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuation at finance markets* // Int J Game Theory. 2007.
-  Доманский В.К., Крепс В.Л. *Теоретико игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011



Пьяных А.И. *Многошаговая модель биржевых торгов с асимметричной информацией и элементами переговоров* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2016.



Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under Incomplete Information* // Operations Research, 1983.



Myerson R., Satterthwaite M. *Efficient Mechanisms for Bilateral Trading* // Journal of Economic Theory, 1983.