Методи Обчислень.

Лектор: доц. каф. ІБ
Стьопочкіна І.В. @ivst1113
Практика Кіфорчук Кирило Олегович

Курс Методи обчислень на платформі Сікорський

РСО (див. силабус)

Для обов'язкової дисципліни:

Рейтингова система оцінювання

№ з/п	Контрольний захід	Макс. бал	Ваговий коеф.	Кіл-ть	Всього
1.	МКР	5	4	1	20
2.	Комп'ютерні практикуми	5	1	6	30
3.	Розрахунково-графічна робота	5	2	1	10
4.	Екзамен	40	1	1	40
	Всього				100

Для вибіркової:

Рейтингова система оцінювання

№ з/п	Контрольний захід	Макс. бал	Ваговий коеф.	Кіл-ть	Всього
1.	МКР (блок 1, практичні завдання)	5	4	1	20
2.	МКР (блок 2, теоретичні питання)	5	4	1	20
3.	Комп'ютерні практикуми	5	2	6	60
	Всього				100

Наближені числа

Означення.

Наближеним числом *a* називається число, яке незначно відрізняється від точного *A* та використовується замість нього у обчисленнях.

«…Я прилечу за тобою приблизно години о третій, або в чотири, або в п'ять, але ні в якому разі не раніше шести », - сказав йому Карлсон. Малюк так толком і не зрозумів, коли ж, власне, Карлсон має намір прилетіти, і перепитав його. «Вже не пізніше семи, але навряд чи раніше восьми ... Чекай мене приблизно до дев'яти»

Абсолютна похибка

Означення

Абсолютною похибкою наближеного числа називається величина

$$\Delta = |A - a|. \qquad (1)$$

Існує два випадки:

- *A*-відоме. Тоді користуємось (1).
- *A*-невідоме. В такому разі вводять оцінку зверху, так звану граничну абсолютну похибку

$$\Delta = |A - a| \le \Delta_a, \; a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a. \qquad (2)$$

Приклад

Визначити граничну абсолютну похибку числа $a = 3{,}14$, яке використовується замість числа π.

Оскільки $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, то $|a - \pi| < 0{,}01$, $\Delta_a = 0{,}01$.

Абсолютної похибки нам недостатньо!

200±0,5 см

1,1±0,5 см.

Необхідна відносна похибка!

Відносна похибка

Означення. Відносною похибкою наближеного числа а називають:

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

Граничною відносною похибкою наближеного числа а називають будь-яке δ_a:

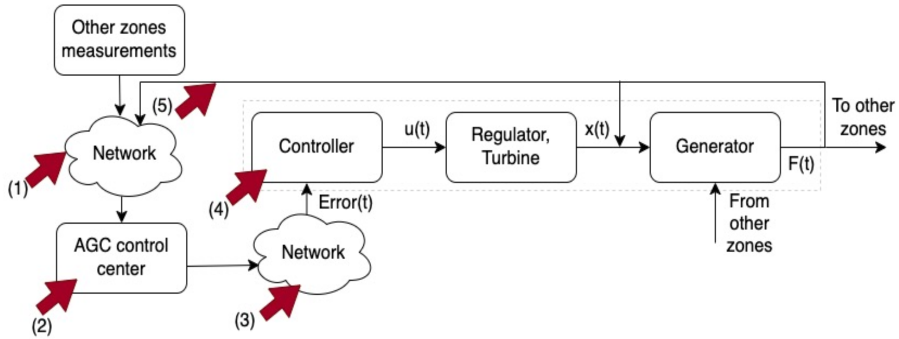
$$\frac{\Delta}{|A|} \le \delta_a, \; \delta_a = \frac{\Delta_a}{a - \Delta_a}.$$

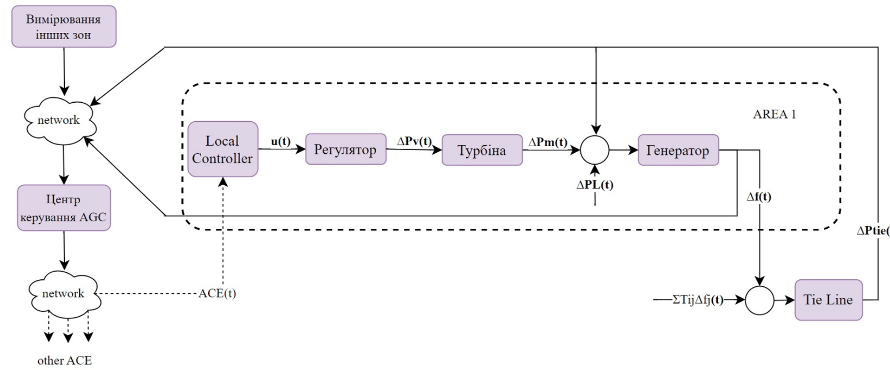
Класифікація похибок

За джерелом походження похибки поділяють на:

- Похибки моделі.
- Похибки метода.
- Залишкові похибки ($\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots + 0(.)$).
- Похибки початкових даних.
- Похибки округлення.
- Похибки дій (+,-,/,*).

Приклади моделей кібератак на ОКІ (automatic gain control systems)





$$x'(t) = Ax(t) + kBu(t) + \xi u(t) + F,$$
$$u(t) = -C_1 y(t),$$
$$y(t) = C_2 x(t).$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta f_i' \\ \Delta P_{m_i}' \\ \Delta P_{v_i}' \\ \Delta P_{tie_i}' \end{bmatrix}}_{x_i'} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{f_i}} & \frac{K_{f_i}}{T_{f_i}} & 0 & -\frac{K_{f_i}}{T_{f_i}} \\ 0 & -\frac{1}{T_{m_i}} & \frac{K_{m_i}}{T_{m_i}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{v_i}} & 0 \\ 2\pi \sum_j^N T_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{ii}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta f_i \\ \Delta P_{m_i} \\ \Delta P_{v_i} \\ \Delta P_{tie_i} \end{bmatrix}}_{x_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_{v_i}}{T_{v_i}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{ii}} u_i + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T_{f_i}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{F_{ii}} \Delta P_{L_i}$$

$$+ \sum_j^N \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\pi T_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{ij}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta f_j \\ \Delta P_{m_j} \\ \Delta P_{v_j} \\ \Delta P_{tie_j} \end{bmatrix}}_{x_j}$$

де N - кількість зон керування; $\Delta f'_i$ – похідна по часу від показника Δf_i;

$\Delta P'_{mi}$, $\Delta P'_{vi}$, $\Delta P'_{tiei}$ – аналогічно.

Приклад впливу початкових даних

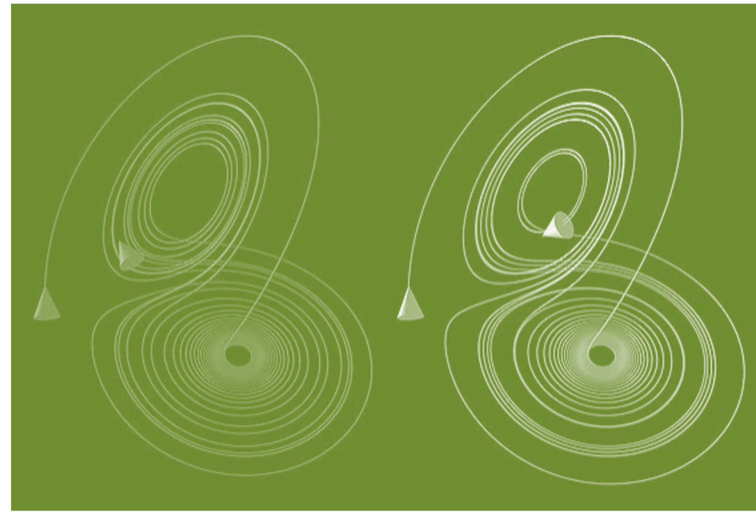
$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X)\,; \qquad r = \frac{R}{R_c};$$

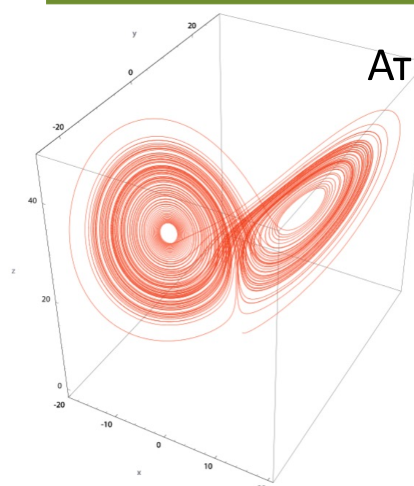
$$\frac{dY}{dt} = -Y + X(r - Z); \qquad b = \frac{4}{1 + k^2};$$

$$\frac{dZ}{dt} = -bZ + XY\,; \qquad \sigma = \frac{\nu}{\kappa};$$

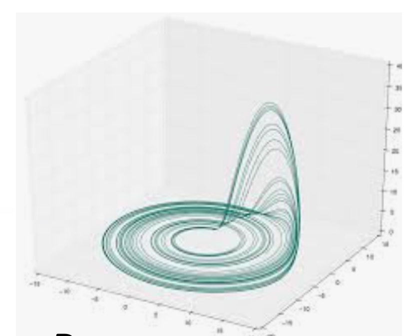
σ = 10, b = 8/3 та r<1; r=5; r=15; r=25.
Початкові умови можна обрати, наприклад, такими:
$x(0) = 2$, $y(0) = -1$, $z(0) = 0$.

Динамічний хаос – при $r > 24{,}74$





Атрактор Лоренца



Атрактор Ресслера

Поняття значущих та вірних цифр

Будь-яке *a>0* :

$$a = \alpha_m 10^m + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \ldots,$$
$$\alpha_m \neq 0.$$

Приклад

$312{,}5\ldots = 3\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-1} + \ldots$

На практиці- скінчені десяткові дроби:

$$b = \beta_m 10^m + \beta_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + \beta_{m-n+1} 10^{m-n+1}, \beta_m \neq 0.$$

Значущі цифри

Означення.

Значущою цифрою наближеного числа називається будь яка цифра в його десятковому представленні , відмінна від нуля, і нуль, якщо він міститься між значущими цифрами чи є представником збереженого десяткового розряду.

Приклад

123,04 – 5 значущих цифр.

0,123 – 3 значущі цифри (1,2,3).

123,000 – не менше 3 значущих цифр

123,010 - ?

Вірні цифри

Означення.

Перші n значущих цифр $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_{m-n+1}$ наближеного числа вірні, якщо:

$$\Delta \le \frac{1}{2} 10^{m-n+1}$$

<u>Приклад</u>

Знайти кількість вірних цифр у наближеному числі *a*=39,00, якщо *A*=38,99.

За означенням вірних цифр ,

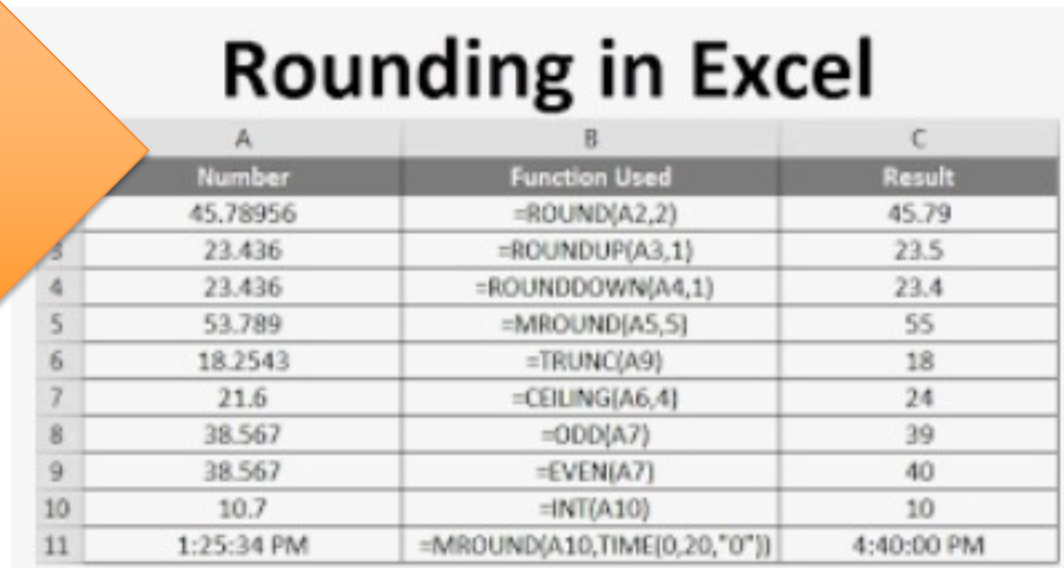
$$\Delta = | A - a | = 0{,}01 < \frac{1}{2} 10^{-1}, \; m - n + 1 = -1$$

Звідси одержуємо *n*=3- три вірних цифри.

Округлення

Означення. Округлення – це заміна наближеного чи точного числа *a* числом a_1 з меншою кількістю значущих цифр. Число a_1 обирають так, щоб величина $|a-a_1|$ була якнайменшою.

Але ми так робити не будемо



Rounding in Excel

Number	Function Used	Result
45.78956	=ROUND(A2,2)	45.79
23.436	=ROUNDUP(A3,1)	23.5
23.436	=ROUNDDOWN(A4,1)	23.4
53.789	=MROUND(A5,5)	55
18.2543	=TRUNC(A9)	18
21.6	=CEILING(A6,4)	24
38.567	=ODD(A7)	39
38.567	=EVEN(A7)	40
10.7	=INT(A10)	10
1:25:34 PM	=MROUND(A10,TIME(0,20,"0"))	4:40:00 PM

При застосуванні Правила похибка округлення не перевищує половини одиниці десяткового розряду, який визначається останньою залишеною значущею цифрою

Правило округлення за доповненням

$$b=\beta_m 10^m+\beta_{m-1}10^{m-1}+\ldots+\beta_{m-n+1}10^{m-n+1}+\beta_{m-n}10^{m-n}+\ldots,\beta_m\neq 0.$$

Треба відкинути

Тут йдеться все-ж таки про округлення дробових чисел!

2,13->2,1 1) Якщо $\beta_{m-n}<5$, то інші цифри зліва залишаються без зміни;

2,17->2,2 2) Якщо $\beta_{m-n}>5$, то $\beta_{m-n+1}=\beta_{m-n+1}+1$;

3) Якщо $\beta_{m-n}=5$ та

2,153 -> 2,2 3.1) $\exists\beta_i\neq 0,\ i\leq m-n-1$, то $\beta_{m-n+1}=\beta_{m-n+1}+1$;

3.2) $\forall\beta_i=0,\ i\leq m-n-1$ та

2,4500..->2,4 3.2.1) $\beta_{m-n+1}=2l,\ l\in Z$, то усі цифри зліва від β_{m-n} залишаються без зміни;

2,1500..->2,2 3.2.2) $\beta_{m-n+1}=2l+1,\ l\in Z$, то $\beta_{m-n+1}=\beta_{m-n+1}+1$.

… додаткове правило

При виконанні наближених обчислень число значущих цифр проміжкових результатів не повинно перевищувати кількості вірних цифр більше, ніж на 1 або 2 одиниці.

Приклад. Округлюючи число 3,141592… до 5, 4, 3 значущих цифр, одержимо

3,1416, абс. похибка менше $1/2*10^{-4}$
3,142 абс. похибка менше $1/2*10^{-3}$
3,14 ……………………………………..

Як впливає точність округлень?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

З формули для коренів:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Припустимо:

$$a = 1, \quad b = 10^8, \quad c = 1$$

Аналітично:

$$x_{1,2} = \frac{-10^8 \pm \sqrt{(10^8)^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{-10^8 \pm \sqrt{10^{16} - 4}}{2}$$

Реальні наслідки:
Подібні помилки призводили до серйозних наслідків:
•**Помилка ракети Ariane 5 (1996):** помилка обробки чисел з плаваючою комою спричинила вибух ракети вартістю $370 млн.
•**Помилки в фінансових алгоритмах:** навіть мікроскопічні похибки можуть призвести до серйозних фінансових втрат при багатьох ітераціях.

На типових машинах з обмеженою точністю обчислення виглядатимуть так:

- $(10^8)^2 = 10^{16}$
- $\sqrt{10^{16} - 4} \approx 10^8$, оскільки різниця в 4 настільки незначна, що вона втрачається через обмежену точність (особливо у float з 7–8 значущими цифрами).

Через величезну різницю в порядках чисел, обчислення $\sqrt{10^{16} - 4}$ на машинному рівні дає приблизно 10^8, бо віднімання 4 майже не впливає на результат.

$$x_2 \approx \frac{-10^8 - 10^8}{2} = \frac{-2 \cdot 10^8}{2} = -10^8$$

Порівняння результатів:

- **Аналітично (точно):** $x_1 \approx -10^{-8}$
- **Машинне обчислення:** $x_1 \approx 0$

Теорема

Якщо $a>0$ має n вірних десяткових знаків, то відносна похибка δ цього числа задовольняє нерівності:

$\delta \le \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\frac{1}{\alpha_m}$, α_m - перша значуща цифра числа a.

Доведення

$$\Delta = |A - a| \le \frac{1}{2}10^{m-n+1},$$

$$A \ge a - \frac{1}{2}10^{m-n+1} \ge \alpha_m 10^m - \frac{1}{2}10^{m-n+1} = \frac{1}{2}10^m\left(2\alpha_m - \frac{1}{10^{n-1}}\right).$$

$$A \ge \frac{1}{2}10^m(2\alpha_m - 1) \ge \frac{1}{2}\alpha_m 10^m.$$

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \le \frac{\frac{1}{2}10^{m-n+1}}{\frac{1}{2}\alpha_m 10^m} = \frac{1}{\alpha_m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}.$$

Похибки дій: сума

Похибка суми-?

$$f = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n.$$

$$|\Delta f| = |\pm \Delta x_1 \pm \Delta x_2 \pm \ldots \pm \Delta x_n|.$$

$$|\Delta f| \le |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \ldots + |\Delta x_n|.$$

$$\Delta_f = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \ldots + \Delta_{x_n}.$$

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{|\cancel{A}\; f|}.$$

Похибки дій: різниця

Похибка при відніманні?

$$\Delta f = \Delta x_1 - \Delta x_2$$

$$\Delta x_1 = x_{1t} - x_{1n}$$

$$\Delta x_2 = x_{2t} - x_{2n}$$

$$|\Delta f| = x_{1t} - x_{1n} - x_{2t} + x_{2n} = |(x_{1t} - x_{2t}) - (x_{1n} - x_{2n})|$$

$$|\Delta f| = |\Delta x_1 + \tilde{\Delta} x_2|$$

$$\Delta_f = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \, .$$

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{|A|}$$

Похибки дій: добуток

Похибка добутку?

....
Ввести модулі

$$f = x_1 x_2 \dots x_n .$$

$$\ln f = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n .$$

$$\Delta \ln x \approx d \ln x = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\frac{\Delta f}{f} \le \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \dots + \frac{\Delta x_n}{x_n} .$$

Якщо A_i - точні значення x_i та $|\Delta x_i| << x_i$,

$$\left|\frac{\Delta x_i}{x_i}\right| \approx \left|\frac{\Delta x_i}{A_i}\right| = \delta_i \text{, а також } \left|\frac{\Delta f}{f}\right| = \delta_f .$$

$$\delta_f = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n .$$

$$\Delta_f = |f|\,\delta_f .$$

Похибки дій: частка

Похибка при діленні?

$$f = \frac{x_1}{x_2}$$

……………………………………………….
Логарифмування

……………………………………………………………
Різниця ln точного та наближеного значень

…………………………………………………………………
Перехід через dlnx

……………………………………………….
Перехід до модулів

$$\delta_f = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$$

$$\Delta_f = |f|\,\delta_f.$$

Похибки дій: степінь

Похибка при піднесенні в степінь?

$$f = x^m, \text{ де } m = const.$$

……………………………………………………
Логарифмування

……………………………………………………
Різниця ln точного та наближеного значень

……………………………………………………
Перехід через dlnx

……………………………………………………
Перехід до модулів

$$\delta_f = m\delta_x.$$

$$\Delta_f = |f|\delta_f.$$

Основна (пряма) задача теорії похибок

Задано неперервно диференційовану функцію $f=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$, також відомі абсолютні похибки аргументів x_i. Необхідно знайти абсолютну похибку функції f.

$$|\Delta f| = |f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) - f(x_1, \ldots x_n)|\cdot$$

$$|\Delta f| \approx |df(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i|\cdot$$

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}$$

Зворотна задача теорії похибок

Визначити, якими мають бути абсолютні похибки аргументів, щоб абсолютна похибка функції не перевищувала заданої величини.

Задача недовизначена: граничну похибку функції, яка менш або дорівнює заданій величині, можна забезпечити при різних сукупностях значень абсолютних похибок аргументів.
Найпростіший розв’язок цієї задачі дається принципом рівних впливів.

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}.$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta_{x_1} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta_{x_2} = \ldots = \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta_{x_n} = \frac{\Delta_f}{n}.$$

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_f}{n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Приклад 1

Приклад.

Знайти Δ для $V = \frac{1}{6}\pi d^3$

$d = 3{,}7 \pm 0{,}05.$

$\pi = 3{,}14.$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6} d^3 = 8{,}44.$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2 = 21{,}5.$$

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right| |\Delta \pi| + \left|\frac{\partial V}{\partial d}\right| |\Delta d| = 1{,}088 \approx 1{,}1.$$

0,05

0,0016

Приклад 2

$R \approx 2, \quad h \approx 3.$

З якими абсолютними похибками треба визначити R та h , щоби об'єм $V = \pi R^2 h$ можна було обчислити з точністю до 0,1м³.

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 h = 12.$$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi \mathrm{RH} = 37{,}7.$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2 = 12{,}6.$$

$$\Delta x_i = \frac{\Delta_V}{n\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|}.$$

$\Delta_\pi =$

$\Delta_R =$

$\Delta_H =$

Приклад 3

Коли варто відступати від Принципу Рівних Впливів?

$$\delta S < 0{,}1\% = \underline{0{,}001}.$$

$$S = \pi R^2.$$

$$\ln S = \ln \pi + 2 \ln R\,.$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{2\Delta R}{R} = 0{,}001.$$

$$\underline{\frac{\Delta \pi}{\pi} = 0{,}0005, \frac{2\Delta R}{R} = 0{,}0005.}$$

$$\Delta \pi \le 0{,}0016, \Delta R \le 0{,}00025R = \underline{0{,}0076.}$$

!! $\pi = \underline{3{,}142,}\ \underline{\frac{\Delta \pi}{\pi} = 0{,}00013,}\ \frac{2\Delta R}{R} = 0{,}001 - 0{,}00013 = 0{,}0087,\ \ \Delta R \le 0{,}13.$