Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

# Лабораторная работа №7

# «Работа с системой компьютерной вёрстки TEX»

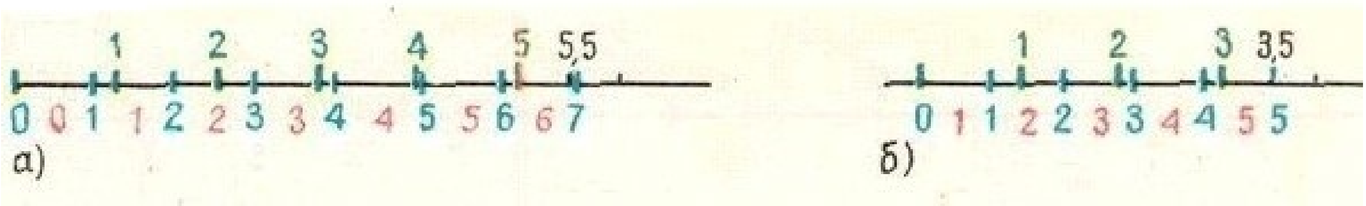
Выполнил:

Иннокентьев Артем P3113

Преподаватель:

Малышева Татьяна Алексеевна

Санкт-Петербург 2019




с зелеными, причем все зеленые точки попадут в какие-то из построенных интервалов ($|a|\frac{p}{2} > |a|k$). Легко заметить, что фигурирующее в лемме число $\nu$ - это число зеленых точек, попавших в интервалы с нечетными номерами (докажите!).
Подвергнем теперь нашу картинку преобразованию подобия с коэффициентом $\frac{1}{a}$ (рис.1 перейдет в рис.2). При этом синие точки перейдут в точки, делящие отрезок $[0, \frac{p}{2}]$на $|a|$ равных частей, а зеленые точки - в целочисленные точки $1, 2, \cdots, k$
Нумерация интервалов теперь будет зависеть от знака $a$: при $a > 0$ они нумеруются номерами левых концов, при $a < 0$ - номерами правых концов; $\nu$ - число целочисленных точек в интервалах с нечетными номерами. Если мы увеличим p на $4al$, то в каждый интервал добавится точка $2l$ целых точек. Это следует из того, что при сдвиге интервала на целое число количество целых точек в нем не меняется, а на любом отрезке целочисленной длины $n$ или интервале длины $n$ с нецелочисленными концами имеется ровно n целых точек (докажите!). Итак, при изменении p на $p+4al$ величина $\nu$ изменится на четное число, а $(-1)^{\nu}$ не изменится. Значит, для всех p в арифметической прогрессии $p = 4aq+r$ значение $(-1)^{\nu}$ - одно и то же, и гипотеза Эйлера доказана
Одновременно указан некоторый способ выяснить, является ли $a$ квадратичным вычетом для p. Нужно взять остаток $r$ от деления p на 4a (для удобства положительный); разделить $(0, \frac{r}{2})$ на $|a|$ частей, занумеровав их номерами левых (правых) концов, если a - положительное (отрицательное); сосчитать число $\nu$ целых чисел точек, попавших в интервалы с нечетными номерами; a - квадратичный вычет в том и только том случае, когда $\nu$ четн Проделаем эти вычисления для = 2, чтобы подтвердить наблюдения Эйлера, о которых говорилось на стр. 5. Пусть = 2; тогда достаточно рассмотреть $r = 1, 3, 5, 7$, поскольку в остальных случаях арифметическая прогрессия не будет содержать простых чисел. Как видно из рис.3, число 2 является квадратичным вычетом для

$$p = 8q + 1, p = 8q + 7,$$

то есть $p = 8q \pm 1$

Упражнение. Покажите, что $-2$ есть квадратичный вычет для $p = 8q + 1, p = 8q + 3$

Аналогично рассматривается случай $a = \pm 3$. Приведем итоги вычислений (таблица для $\nu$):

| a \ r | 1 | 5 | 7 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| -3 | 0 | 1 | 2 | 3 |