

**Білет № 1**

1.	Визначники 2-го, 3-го, n-го порядку, властивості, обчислення.
2.	Задано вершини трикутника $A(1;1;-2)$ , $B(3;-2,1)$ , $C(1;0;2)$ . Знайти довжину та рівняння медіани, проведену із вершини $B$ .
3.	Вектор $\vec{x}$ , перпендикулярний до векторів $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ та $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ , утворює з віссю $OY$ тупий кут. Знайти його координати, якщо $ \vec{x}  = 14$ .
4.	Знайти координати точки $M$ , яка належить прямій $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{-1}$ і розташована на однакових відстанях від точок $A(3;0;-2)$ , та $B(-1;1,5)$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & -7 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

**Білет № 2**

1.	Правило Крамера розв'язання СЛАР.
2.	Задано вершини трикутника $A(1;0;2)$ , $B(3;-1,2)$ , $C(5;4;-7)$ . Знайти його площу та висоту, проведену з точки $B$ .
3.	Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ , якщо $ \vec{p}  = 2\sqrt{2}$ , $ \vec{q}  = 3$ і $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ .
4.	З'ясувати, чи перетинає відрізок $M_1M_2$ площину $x + y + z - 12 = 0$ , якщо $M_1(0;0;0)$ , $M_2(5;6;7)$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & -6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -11 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

**Білет № 3**

1.	Вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійно-залежні та лінійно-незалежні системи векторів. Базис, розкладання вектора за базисом.
2.	Спростить вираз $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}) \times (2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$ .
3.	Перевірити, що вектори $7\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$ і $6\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}$ можуть бути узяті за ребра куба. Знайти третє ребро куба.
4.	Спростити вираз $(\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}) \times (-2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b} + 13\vec{c})$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -12 & 2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -7, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

### Білет № 4

1.	Ортонормовані системи векторів. Метод ортогоналізації.
2.	Задано пряму $\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \\ 6x - y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ . Знайти канонічне рівняння проєкції цієї прямої на площину $XOZ$ .
3.	Задано вершини трикутника $A(1;-1;2)$ , $B(5;-6;2)$ , $C(1;3;-1)$ . Знайти довжину та рівняння висоти, проведену із вершини $A$ .
4.	Знайти точку, яка симетрична точці $A(3;-1;1)$ відносно площини $x + 2y + 2z + 6 = 0$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -9 & 7 & -5 \\ -8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

### Білет № 5

1.	Матриця лінійного оператора при переході до іншого базису.
2.	Спростити вираз $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}) \times (2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$ .
3.	Знайти довжину і рівняння висоти тетраедра, проведену із точки $D$ , якщо координати вершин тетраедра $A(2;1;5)$ , $B(4;0;8)$ , $C(6;-2;6)$ , $D(5;0;3)$ .
4.	Знайти $ \vec{a} - \vec{b} $ , якщо $ \vec{a}  = 13$ , $ \vec{b}  = 19$ і $ \vec{a} + \vec{b}  = 24$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

### Білет № 6

1.	Пряма у просторі. Відстань між прямими.
2.	Задано вершини трикутника $A(1;1;-2)$ , $B(3;-2;1)$ , $C(1;0;2)$ . Знайти довжину та рівняння бісектриси, проведену із вершини $B$ .
3.	Через точку $(1;-1;1)$ провести площину, що перпендикулярна до площин $x - y + z - 1 = 0$ та $2x + y + z + 1 = 0$ .
4.	Для яких значень $\lambda$ вектори $\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \vec{c}$ , $\lambda\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}$ , $\vec{a} + \lambda\vec{b} + \lambda\vec{c}$ компланарні, якщо вектори $\vec{a}$ , $\vec{b}$ , $\vec{c}$ – некомпланарні.
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -7 & -1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -8 & 9 & -7 \\ 5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

**Білет № 7**

1.	Скалярний добуток векторів, його властивості. Довжина вектора, кут між векторами, умови перпендикулярності і паралельності векторів, які задані у координатній формі.
2.	Знайти рівняння площини, що проходить через точку $(1;2;-3)$ паралельно до прямих $\frac{x}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+5}{6}$ та $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+7}{-8}$ .
3.	Через точки $(1;1;1)$ і $(2;2;2)$ провести площину, що перпендикулярна до площини $2x - 3y + z - 1 = 0$ .
4.	Знайти $\left  (2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) \right $ , якщо $ \vec{a}  = 2$ , $ \vec{b}  = 3$ і $ \vec{a} - \vec{b}  = \sqrt{19}$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 5 & -4 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 7 \\ 8 & 9 & -10 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

**Білет № 8**

1.	Векторний добуток векторів, його властивості, обчислення в координатній формі, геометричний зміст.
2.	Задано вершини трикутника $A(-1;2;3)$ , $B(4;5;-6)$ , $C(5;4;-7)$ . Знайти його площу та висоту, проведену із вершини $C$ .
3.	Задано пряму $\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \\ 6x - y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$ . Знайти рівняння проекції цієї прямої на площину $XOY$ .
4.	Відомо, що $ \vec{a}  =  \vec{b}  =  \vec{c}  = 2$ , $\vec{a} \wedge \vec{b} = 120^\circ$ , $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = 60^\circ$ . Знайти $ \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} $ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 8 \\ 10 & -12 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = -9, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

**Білет № 9**

1.	Мішаний добуток векторів, властивості, обчислення, геометричний зміст, застосування.
2.	Відомо, що $ \vec{a}  =  \vec{b}  =  \vec{c}  = 2$ , $\vec{a} \wedge \vec{b} = 120^\circ$ , $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = 60^\circ$ . Знайти $ \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} $ .
3.	Через точку $(2;1;1)$ провести пряму, що паралельна площинам $2x - y + 1 = 0$ та $y - 1 = 0$ .
4.	Відомо, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некомпланарні, а вектори $\lambda\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ , $4\vec{a} + 5\vec{b}$ , $7\vec{a} + 8\vec{b} + 9\vec{c}$ – компланарні. Знайти $\lambda$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 7 \\ 6 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

**Білет № 10**

1.	Площина у просторі. Кут між площинами, умови паралельності і перпендикулярності площин. Відстань між площинами.
2.	Задано вершини трикутника $A(1;1;-2)$ , $B(3;-2;1)$ , $C(1;0;2)$ . Знайти довжину та рівняння бісектриси, проведеної із вершини $A$ .
3.	Знайти рівняння площини, що проходить через точку $(-1;-2;3)$ паралельно до прямих $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{6}$ і $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}$ .
4.	Знайти координати вектора $\vec{x}$ , що перпендикулярний до площини $ABC$ : $A(1;3;4)$ , $B(-1;0;9)$ , $C(3;2;3)$ , якщо $ \vec{x}  = 5\sqrt{3}$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

### Білет № 11

1.	Власні числа і власні вектори лінійних операторів.
2.	Знайти об'єм тетраедра, якщо відомі координати його вершин $A(-1;3;2)$ , $B(0;-1;5)$ , $C(2;3;-5)$ і $D(6;1;2)$ однієї площини. Скласти рівняння цієї площини.
3.	Скласти рівняння площини, що проходить через точку $(2;-3;1)$ та через пряму $\frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$ .
4.	Знайти $\left  (\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \right $ , якщо $ \vec{a}  =  \vec{b}  =  \vec{c}  = 3$ , $\vec{a} \wedge \vec{b} = 150^\circ$ , $\vec{a} \perp \vec{c}$ , $\vec{b} \perp \vec{c}$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

### Білет № 12

1.	Канонічна форма запису рівнянь еліпса, гіперболи та параболі.
2.	Відомо, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – некопланарні, а вектори $\lambda\vec{a} + 2\vec{b} + 3\lambda\vec{c}$ , $4\vec{a} + 5\vec{b}$ , $7\vec{a} + 8\vec{b} + 9\lambda\vec{c}$ – компланарні. Знайти $\lambda$ .
3.	Провести через пряму $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ площину, що паралельна до прямої $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ .
4.	Знайти координати вектора $\vec{x}$ , що паралельний до вектора $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ , щоб $ \vec{x}  = 45$ та $\vec{x}$ утворював з віссю $OZ$ гострий кут.
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 1 \\ -5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

### Білет № 13

1.	Матриці. Дії з матрицями. Обернена матриця. Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь.
2.	Знайти $\left (\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a})\right $ , якщо $ \vec{a}  =  \vec{b}  =  \vec{c}  = 5$ , $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$ , $\vec{a} \perp \vec{c}$ , $\vec{b} \perp \vec{c}$ .
3.	Встановити взаємне розміщення прямих $\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-(a-2)^2}{a}$ і $\frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z}{1}$ в залежності від $a$ .
4.	Знайти кут між $\vec{a}$ та $\vec{b}$ , якщо $ \vec{a}  = 1$ , $ \vec{b}  = 2$ , $ 2\vec{a} - 3\vec{b}  = \sqrt{52}$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

#### Білет № 14

1.	Метод Гаусса-Жордана розв'язання СЛАР.
2.	Задано вершини трикутника $A(1;-1;2)$ , $B(5;-6;2)$ , $C(1;3;-1)$ . Знайти довжину і рівняння висоти, проведену із вершини $B$ .
3.	Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1;3;0)$ і яка паралельна до прямих $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 5z + 1 = 0 \end{cases}$ , $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 5x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ .
4.	Спростіти вираз $(\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) \times (-2\vec{a} + 5\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (\vec{a} - 4\vec{b} + 8\vec{c})$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

#### Білет № 15

1.	Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду.
2.	Перевірити, чи належать точки $A(-1;3;4)$ , $B(0;1;5)$ , $C(-2;3;5)$ і $D(6;0;0)$ одній площині. Скласти рівняння цієї площини.
3.	Знайти площину, що проходить через точку $A(-1;1;2)$ і пряму $\begin{cases} x + 5y - 7z + 1 = 0 \\ 3x - y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$ .
4.	Знайти координати вектора $\vec{x}$ , перпендикулярного одночасно до векторів $\vec{a} = \vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{k}$ , щоб $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 28$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$

#### Білет № 16

1.	Ранг матриці, його обчислення. Дослідження розв'язності системи лінійних рівнянь, теорема Кронекера-Капеллі.
2.	Спростить вираз $(2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \times (\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c})$ .
3.	Скласти рівняння площини, що перпендикулярна до площини $x + 3y - z + 2 = 0$ і що проходить через пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ .
4.	Знайти відстань між прямими $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$ .
5.	Знайти добуток матриць $AB$ та $BA$ , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .
	Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11. \end{cases}$