

# Introduction à l'échantillonnage

Emmanuel Delaleau & Isabelle Léonard

Décembre 2014

- ① Vocabulaire sur les signaux
- ② Échantillonnage temporel
- ③ Mesure de la qualité de l'échantillonnage
- ④ Numérisation
- ⑤ Numérisation

# Progression

- ① Vocabulaire sur les signaux
  - Signal temporel
  - Signal analogique
  - Signal numérique
- ② Échantillonnage temporel
  - Définition
  - Reconstruction du signal
  - Blocage d'ordre 0
  - Interpolation
  - Formule d'échantillonnage
- ③ Mesure de la qualité de l'échantillonnage
  - Aspect du signal d'erreur - bruit
  - Rapport signal/bruit
  - Quantification
  - Principe
  - Quantification avec intervalles identiques
  - Erreur lié à la quantification
  - Bruit de quantification
- ④ Numérisation

Un signal peut être :

- scalaire (une seule grandeur)
- vectoriel (plusieurs grandeurs)

### Exemples

- signal téléphonique (scalaire)
- signal audio stéréo (vectoriel)
- signal vidéo (vectoriel)
- ...

Dans la plupart des cas, un signal est une fonction du temps et on parle de *signal temporel*

On distingue deux *classes* de signaux temporels suivant la nature de la variable temporelle :

- signaux en temps continu (**TC**) : lorsque la variable temporelle prend ses valeurs dans un ensemble “continu” (ex.  $t \in \mathbb{R}$ )
- *signaux en temps discret* (**TD**) : lorsque la variable temporelle prend ses valeurs dans un ensemble discret (ex.  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$  ou leurs sous-ensembles)

## Attention !

- signal TC  $\neq$  signal continu :

*Il existe des signaux TC discontinus comme les signaux “rectangulaires” ou “carrés”, et les signaux MLI*

- signaux TD  $\neq$  signal discontinu

*Rappelons que dans la “topologie discrète”, une fonction dont l'ensemble de définition est discret est toujours continue !*

Le terme *analogique* s'applique aux phénomènes, aux appareils ou composants électroniques, aux instruments de mesure... qui représentent une information par la variation d'une grandeur physique (ex. : une tension électrique)

Ce terme provient du fait que la mesure d'une valeur naturelle (ou d'un élément de signal électrique ou électronique) varie de manière *analogue* à la source

## Exemples

- Ainsi, un thermomètre au mercure ou à alcool indique la température à l'aide d'une hauteur une échelle graduée. L'analogie est ici la hauteur à mettre en rapport avec la température
- Calculateur analogique
- ...
- ...
- ...

Par extension du sens premier du mot analogique, une grandeur est *dite analogique* si sa mesure donne un nombre réel variant de façon continue. Il existe une infinité de valeurs qui représentent la grandeur physique de *manière analogique*



Par opposition au cas précédent, une grandeur est dite *numérique* ou *digitale* quand la correspondance avec la grandeur physique n'est plus basée sur une analogie mais sur un *code*, en particulier un *code numérique*

## Exemples

- Représentation des signaux audios dans les dispositifs actuels (CD, MP3, DVD, plate-forme de téléchargement...)
- Images représentées par des pixels
- Le langage parlé ou écrit est “numérique” : l'association d'un mot à un objet ou un concept est arbitraire et non basé sur une analogie
- Le codage de la musique est particulier : la hauteur des notes est basée sur une analogie (hauteur du son) alors que le rythme est représentée par un code (rondes, noires, blanches...)

# Progression

- ① Vocabulaire sur les signaux
  - Signal temporel
  - Signal analogique
  - Signal numérique
- ② Échantillonnage temporel
  - Définition
  - Reconstruction du signal
  - Blocage d'ordre 0
  - Interpolation
  - Formule d'échantillonnage
- ③ Mesure de la qualité de l'échantillonnage
  - Aspect du signal d'erreur - bruit
  - Rapport signal/bruit
  - Quantification
  - Principe
  - Quantification avec intervalles identiques
  - Erreur lié à la quantification
  - Bruit de quantification
- ④ Numérisation

Soit un signal temporel  $s$  défini d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$

### Subdivision

On considère une subdivision  $\sigma$  de l'intervalle  $I$ , c'est à dire une séquence de réels de  $I$  strictement croissante :

$$[\cdots <] t_i < t_{i+1} < \cdots < t_j < t_{j+1} [< \cdots]$$

au plus dénombrable

### Échantillons

La séquence des valeurs  $(s(t_k))_{t_k \in \sigma}$  du signal forment les *échantillons* du signal  $s$  relativement à la subdivision  $\sigma$

## Période d'échantillonnage

Lorsque la subdivision ne comporte que des instants régulièrement espacés dans le temps, i.e.

$$\exists T_e > 0, \forall t_k, t_{k+1} \in \sigma,$$

$$t_{k+1} - t_k = T_e$$

on dit que  $T_e$  est la *période d'échantillonnage*

## Fréquence d'échantillonnage

Et son inverse

$$f_e = \frac{1}{T_e}$$

est appelée *fréquence d'échantillonnage*

## Reconstruction

L'opération “inverse” qui consiste à essayer de retrouver le signal TC à partir de ses échantillons (signal TD) est appelé *reconstruction* ou *interpolation*

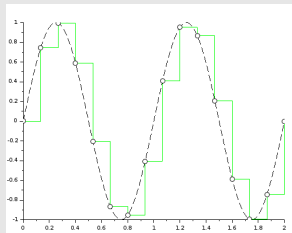
## Remarques

Comme dans l'opération d'échantillonnage on a “oublié” toutes les valeurs du signal entre les instant d'échantillonnage, il est facile de comprendre :

- qu'il existe une infinité de manière de reconstruire un signal qui a les mêmes échantillons que le signal initial
- suivant la méthode de reconstruction et suivant la méthode d'échantillonnage, l'approximation du signal initial par un signal reconstruite sera plus ou moins “bonne” / “fine”

## Reconstruction par simple “blocage”

C'est une manière très simple de reconstruire un signal TC à partir d'une suite d'échantillons : il suffit de générer le signal qui vaut  $s(t_k)$  sur tout l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}[$  :

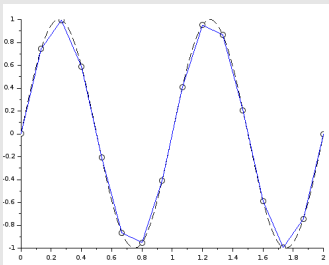


- Cette méthode est simple à mettre en œuvre
- On dit que l'on a fait un “blocage d'ordre 0” car le signal est maintenu constant entre deux instants d'échantillonnages successifs
- À chaque instant la reconstruction ne dépend que de l'échantillon précédent (reconstruction causale)

## Reconstruction par interpolation linéaire

Dans ce cas on détermine la valeur du signal à reconstruire entre deux échantillons successifs par interpolation linéaire :

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}[ , s_r(t) = s(t_k) + (t - t_k) \frac{s(t_{k+1}) - s(t_k)}{(t_{k+1} - t_k)}$$



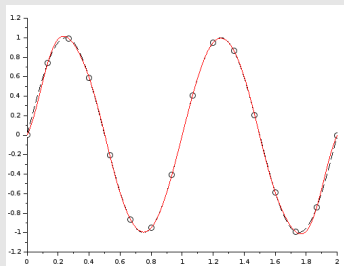
- Cette méthode est plus précise que la précédente
- La reconstruction ne dépend que de 2 échantillons : le précédent et le suivant (non causale)

## Formule d'échantillonnage de Nyquist-Shannon

C'est une formule qui permet de reconstruire un signal à tout instant en tenant compte de tous les échantillons dont on dispose :

$$s(t) = \sum_k s(t_k) \cdot \text{sinc}\left(\pi \cdot \frac{t - t_k}{T_e}\right)$$

- Le reconstruction dépend de tous les échantillons (non causale)

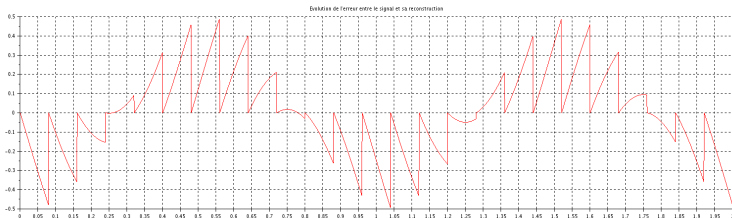
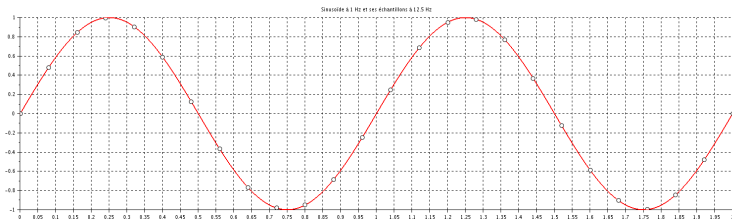




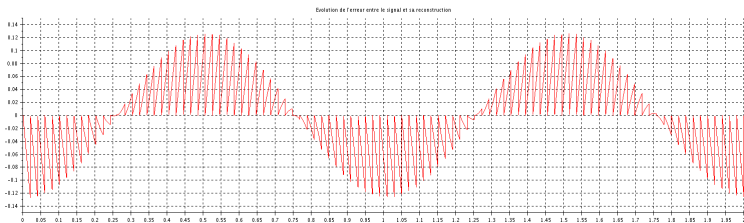
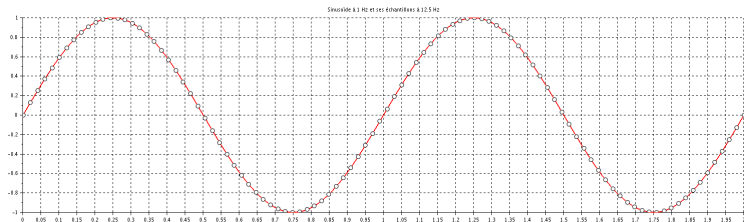
# Progression

- ① Vocabulaire sur les signaux
  - Signal temporel
  - Signal analogique
  - Signal numérique
- ② Échantillonnage temporel
  - Définition
  - Reconstruction du signal
  - Blocage d'ordre 0
  - Interpolation
  - Formule d'échantillonnage
- ③ Mesure de la qualité de l'échantillonnage
  - Aspect du signal d'erreur - bruit
  - Rapport signal/bruit
  - Quantification
  - Principe
  - Quantification avec intervalles identiques
  - Erreur lié à la quantification
  - Bruit de quantification
- ④ Numérisation

## Échantillonnage à 12.5 Hz :



## Échantillonnage à 49.5 Hz :



Le signal d'erreur, c'est-à-dire la différence entre le signal reconstruit à partir des échantillons et le signal analogique peut être vu comme un “bruit”

## Notations

On note :

- signal initial :  $s(t)$
- signal reconstruit :  $s_r(t)$
- erreur :  $e(t) = s_r(t) - s(t)$

### Remarque

Le *rapport signal à bruit* ou *rapport signal sur bruit* est défini comme la valeur en décibels du rapport de la puissance du signal sur la puissance du bruit :

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left( \frac{\int_I s^2(t) dt}{\int_I e^2(t) dt} \right)$$

### Remarque

Pour désigner le rapport signal à bruit on utilise aussi parfois l'abréviation “SNR” qui est l'acronyme de l'expression anglaise correspondante : “*signal-to-noise ratio*”

### Remarque

On ne peut se contenter de calculer une approximation de la formule précédente sur les instants d'échantillonnage puisque l'on a la plupart du temps  $e(t_k) = 0$  et la puissance du bruit serait approchée par 0 !

## Quantification

Quantifier une grandeur ou un signal c'est en donner une représentation à l'aide d'un nombre fini de valeurs, donc une représentation *discrète*

L'intérêt de la quantification est d'avoir une *représentation plus simple* d'un signal qui normalement peut prendre ses valeurs dans un ensemble non dénombrable

L'opération de quantification implique forcément une *perte d'information*

## Quantification d'une grandeur scalaire

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On considère une partition de l'intervalle  $I$ , c'est-à-dire une collection finie de  $q$  intervalles de  $\mathbb{R}$  tels que

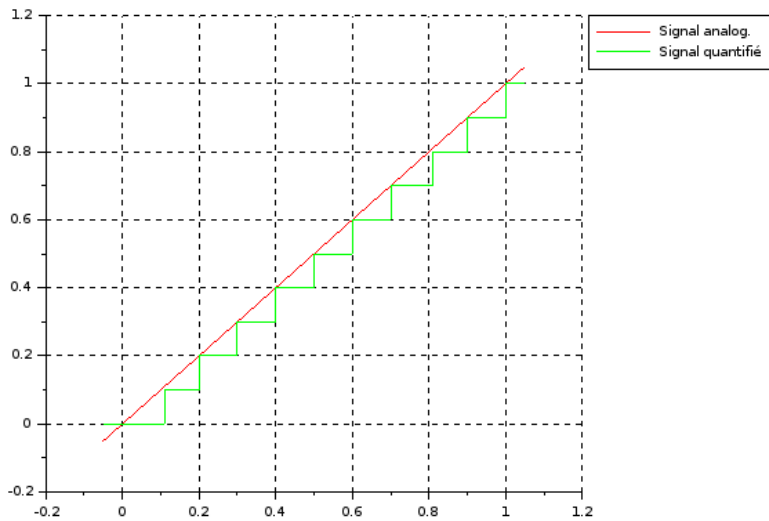
$$\begin{aligned}\forall q, \quad I_q &\subset I \\ \forall q, r, \quad q \neq r, \quad I_q \cap I_r &= \emptyset \\ \bigcup_q I_q &= I\end{aligned}$$

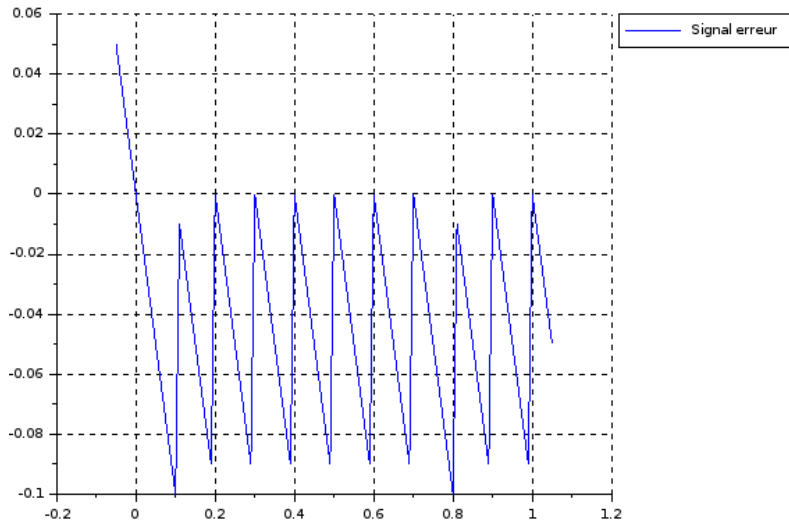
A chaque intervalle  $I_q$  de la partition on associe une valeur unique  $Q_q \in \mathbb{R}$

Un signal scalaire  $s$  est *quantifié* de la manière suivante : on lui associe un autre signal scalaire,  $s^{\text{qtf}}$  défini par :

$$\forall t, s(t) \in I_q, \quad s^{\text{qtf}}(t) = Q_q$$







### Caractérisation du bruit de quantification

Comme pour la reconstruction d'un signal échantillonné, l'erreur due à la quantification peut être considérée comme un *bruit ajouté* au signal d'origine

Ce niveau de bruit est caractérisé par le rapport signal sur bruit

# Progression

- ① Vocabulaire sur les signaux
  - Signal temporel
  - Signal analogique
  - Signal numérique
- ② Échantillonnage temporel
  - Définition
  - Reconstruction du signal
  - Blocage d'ordre 0
  - Interpolation
  - Formule d'échantillonnage
- ③ Mesure de la qualité de l'échantillonnage
  - Aspect du signal d'erreur - bruit
  - Rapport signal/bruit
  - Quantification
  - Principe
  - Quantification avec intervalles identiques
  - Erreur lié à la quantification
  - Bruit de quantification
- ④ Numérisation

## Numérisation d'un signal

*Numériser* un signal c'est lui appliquer conjointement deux opérations ;

- Échantillonnage
- Quantification

Après numérisation, un signal peut être manipulé par un calculateur numérique (ordinateur, carte DSP, FPGA, microcontrôleur...)

Dans un calculateur la quantification est réalisée selon un code numérique binaire, chaque échantillon du signal est codé sur un certain nombre de bits (par exemple 16 bits pour l'audio HiFi...)

# Progression

- ① Vocabulaire sur les signaux
  - Signal temporel
  - Signal analogique
  - Signal numérique
- ② Échantillonnage temporel
  - Définition
  - Reconstruction du signal
  - Blocage d'ordre 0
  - Interpolation
  - Formule d'échantillonnage
- ③ Mesure de la qualité de l'échantillonnage
  - Aspect du signal d'erreur - bruit
  - Rapport signal/bruit
  - Quantification
  - Principe
  - Quantification avec intervalles identiques
  - Erreur lié à la quantification
  - Bruit de quantification
- ④ Numérisation

## CAN

L'opération de numérisation est réalisée par un *convertisseur analogique numérique (CAN)*.

En anglais, on dit *Analog to digital converteur (ADC)*

## CNA

L'opération inverse de reconstruction d'un signal analogique à partir d'un signal numérique est réalisée par un *Convertisseur numérique analogique (CNA)*

En anglais on dit : *Digital to analog converter (DAC)*

