Математическая логика — 2
V семестр

Лектор: Виктор Львович Селиванов
Записывали: Глеб Минаев, Иван Кабашный
Редактировал: Борис Алексеевич Золотов

МКН СПбГУ, осень 2022

Содержание

1 Логика предикатов

1.1 Истинность и доказуемость

1.1.1 Структура

Бурбаки классифицировал структуры как:

1) операции,
2) частичные порядки,
3) топологические структуры.

Последние не имеют приложения в логике — их мы рассматривать не будем. “Операции” — это структуры алгебраические, “частичные порядки” — это структуры, снабжённые каким-либо отношением.

Определение 1. *Сигнатура* — набор функциональных, предикатных и константных символов вместе с функцией, задающей арность этих символов.

Функциональные символы интерпретируются как функции $A^n \to A$, предикатные символы — как функции $A^m \to \{и; л\}$, а константы — как элементы A (или, что равносильно, функции $\{\varnothing\} \to A$).

Будем называть *σ-структурой* (*структурой сигнатуры σ*) пару (A, I), где A — непустое множество, а I — интерпретация сигнатурных символов σ в A.

Пример 1. *Сигнатура упорядоченного кольца — $\langle +,\ \cdot;\ <;\ 0,\ 1 \rangle$. Можно добавить вычитание и взятие противоположного, но они выражаются в имеющейся сигнатуре.*

Определение 2. $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ — σ-структуры. Тогда отображение $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если оно задаёт $\varphi : A \to B$, что для всякой функции f^n из сигнатуры σ и для всяких $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\varphi(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)),$$

для всякого предиката P^m в сигнатуре σ и всяких $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$P_A(a_1, \ldots, a_m) \quad \Longrightarrow \quad P_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))$$

и для всякой константы c сигнатуры σ

$$\varphi(c_A) = c_B.$$

φ — изоморфизм, если φ — гомоморфизм, биективен, и φ^{-1} — гомоморфизм.

$\mathbb{A}$ называется *подструктурой* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi : A \to B, a \mapsto a$ — гомоморфизм.

1.1.2 Термы и формулы

Определение 3. Фиксируем некоторое множество V — *“множество переменных”* — символы $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neq$ и символы $\forall x$ и $\exists x$ для всякого $x \in V$.

Терм — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- переменная — терм,
- константа — терм,
- для всяких термов $t_1, \ldots, t_n$ и функции f^n выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

Формула — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- для всяких термов t_1, t_2 выражение $t_1 = t_2$ — формула,
- для всяких предиката P^n из σ и термов $t_1, \ldots, t_n$ выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$ — формула,
- для всяких формул φ и ψ выражения $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neq \varphi$ — формулы,
- для всяких формулы φ и переменной x выражения $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — формулы.

For_σ — множество всех формул с сигнатурой σ.

Пример 2. *В кольцах всякий терм можно свести к полиному с целыми коэффициентами. В мультипликативных группа — моному с целым коэффициентов.*

Задача 1. Семейства термов и формул задаются контекстно свободными грамматиками.

Определение 4. Переменная x называется *свободной* в формуле φ, если есть вхождение x не покрывается никаким квантором $\forall x$ и никаким квантором $\exists x$. $\mathrm{FV}(\varphi)$ — множество всех свободных переменных формулы φ.

1.1.3 Значение термов и формул

Определение 5. Пусть t — терм в сигнатуре σ, а $\mathbb{A}$ — σ-структура. Тогда $t^{\mathbb{A}} : A^n \to A$ — *означивание* t, некоторая функция, полученная подставлением вместо констант их значений в $\mathbb{A}$ и последующим рекурсивным означиванием по синтаксическому дереву t. Аналогично получается означивание формулы $f^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{и}; \text{л}\}$.

Определение 6. *Предложение* в сигнатуре σ — формула без свободных переменных.

$$\varphi^{\mathbb{A}} \in \{T, F\},$$
$$\varphi^{\mathbb{A}} = T \iff \mathbb{A} \models \varphi.$$

Определение 7. *Моделью* данного множества предложения Γ называется структура, в которой все предложения из Γ истины. Если $\mathbb{A}$ — это модель, то иногда пишут $\mathbb{A} \models \Gamma$.

Если Γ — множество предложений, φ — предложение. Говорят, что φ логически следует из Γ ($\Gamma \models \varphi$), если φ истино в любой модели Γ.

Определение 8. Предложение φ называется тождественно истино, если оно истино в любой структуре. Иногда пишут $\models \varphi$.

Утверждение 1.

- $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *не имеет модели.*
- φ *— тождественная истина тогда и только тогда, когда* $\models \varphi$.
- Γ *— конечное;* $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\wedge\Gamma) \to \varphi$ *— тожественная истина.*

1.1.4 Ультрафильтры

Определение 9. Пусть I — непустое множество. *Фильтром* на множестве I называется непустое множество $F \subseteq (I)$ (где (I) — множество всех подмножеств), которое не содержит $\emptyset \subset I$, а также замкнуто относительно пересечения:

$$\forall A, B \in F \quad A \cap B \in F,$$

и взятия надмножеств:

$$\forall A \in F \quad A \subseteq B \subseteq I \implies B \in F.$$

Фильтр F называется *ультрафильтром*, если $A \in F$ или $\overline{A} \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Утверждение 2.

1) *Фильтр F является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным по включению среди всех фильтров (то есть, нет фильтра, который бы его расширял).*

2) *Пусть F — ультрафильтр и A, $B \subseteq I$, тогда*

$$A \in F \iff \overline{A} \notin F,$$
$$A \cup B \in F \iff A \in F \text{ или } B \in F.$$

3) *Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.*

Доказательство. Докажем 1.

Пусть F — ультрафильтр. Утверждается, что нет фильтра F', который содержал бы F ($F' \supseteq F$). Предположим противное, т.е. что существует такое A, что оно принадлежит F' и не принадлежит F. Раз $A \notin F$, то $\overline{A} \in F$. В силу того, что $F \subseteq F'$, то $\overline{A}$ также принадлежит F'. Таким образом, $\emptyset = A \cap \overline{A} \in F'$, противоречие.

В обратную сторону, F — максимальный по включению фильтр. От противного, пусть есть множество $A \subseteq I$ такое, что $A, \overline{A} \notin F$. Рассмотрим

$$F' = \{X \subseteq I \mid \exists B \in F \ A \cap B \subseteq X\}.$$

F' должно быть фильтром (замкнутость вверх по включению понятна, замкнутость относительно пересечения также верна, так как если $X, Y \in F'$, $A \cap B \subseteq X$, $A \cap C \subseteq Y$ для $B, C \in F$, то $A \cap B \cap C \subseteq (X \cap Y)$. $B \cap C \in F$, а значит, $X \cap Y \in F'$. и последнее, если бы $\emptyset \in F'$, то получается очевидное противоречие из того, что $A \cap B$ всегда непусто).

Докажем 2. Пусть F — ультрафильтр. Одновременно A и $\overline{A}$ принадлежать F не могут. Имеем $A \in F \vee \overline{A} \in F$, откуда понятно. Второе утверждение очевидно в левую сторону.

В другую сторону, имеем $A \cup B \in F$, предоположим противное. Пусть $A, B \notin F$, значит, $\overline{A}, \overline{B} \in F$, а тогда $\overline{A} \cap \overline{B} \in F$. По закону деМоргана, $\overline{A \cup B} \in F$, откуда $A \cup B \notin F$.

Докажем 3. Пусть имеется F. Утверждается, что существует ультрафильтр F^*, который сожержит F ($F^* \supseteq F$). Данное утверждение нетривиально и в каком-то смысле схоже с аксиомой выбора. Применим лемму Цорна.

Лемма 3 (Цорн)**.** *Пусть* $(P; \leq)$ *— частичный порядок, в котором всякая линейная цепь* $A \supseteq P$ *имеет верхнюю границу. Тогда в этом частичном порядке есть максимальный элемент.*

Рассмотрим множество всех фильтров $P = \{G - \text{фильтр} \mid F \subseteq G\}$, и порядок $\subseteq$. Пусть $\mathfrak{F}$ — множество фильтров $F_1 \subseteq F_2 \vee F_2 \subseteq F$, а $F' = \bigcup \mathfrak{F}$. F' — фильтр, что проверяется ручками. По лемме, существует F^* — максимальное расширение. □

Пример 3.

- *Пусть есть* I*, тогда* $\{I\}$ *— фильтр.*
- *Пусть* $\emptyset \neq A \subseteq I$*, тогда* $F = \{X \subseteq \mid A \subseteq X\}$ *— фильтр.*

Задача 2. Если I бесконечное, то в $P(I)$ есть неглавные ультрафильтры. Для доказательства рассматриваем $F = \{A \subseteq I \mid A - \text{коконечно}\}$, и существующий по доказанному ранее $F^* \supseteq F$.

1.1.5 Декартово и фильтрованное произведения структур

Пусть имеется некоторое проиндексированное семейство σ-структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$.

Определение 10 (Декартово произведение)**.** Определим σ-структуру на декартовом произведении нескольких σ-структур. Мы будем обозначать её $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$.

Носителем структуры будет множество

$$A = \prod_{i \in I} A_i = \left\{ a \colon I \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; a(i) \in A_i \right\}.$$

Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

1) $c^{\mathbb{A}}(i) = c^{\mathbb{A}_i}$ — отображение, возвращающее в каждой структуре соответствующую константу;
2) $\big(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)\big)(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ — действуем функцией в каждой структуре, собираем из образов элемент декартова произведения;
3) $P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ выполнен для всех $i \in I$.

Определение 11 (Фильтрованное произведение)**.** Пусть F — фильтр на множестве I. *Фильтрованное произведение* нескольких структур (обозначается $\mathbb{A}_F$) получается факторизацией их декартова произведения по следующему отношению эквивалентности:

$$a \equiv_F b \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in F$$

(говорят, что $a(i) = b(i)$ *для* F*-большинства* i*).*

Носителем фильтрованного произведения будет фактор-множество $A/{\equiv_F}$, состоящее из классов эквивалентности $\{[a] \mid a \in A\}$. Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

1) $c^{\mathbb{A}_F} = \left[c^{\mathbb{A}}\right]$ — класс элемента, собранного из соответствующих констант во всех структурах;

2) $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = \left[f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)\right]$ — надо проверить, что определено однозначно (потому что пересечение множеств фильтра принадлежит фильтру);

3) $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ для F-большинства i.

Если F — ультрафильтр, то $\mathbb{A}_F$ называется *ультрапроизведением.*

Теорема 4 (об ультрапроизведениях)**.** *Пусть F — ультрафильтр на множестве I, $\mathbb{A}_i$ — семейство стркутур, $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ — σ-формула и пусть $a_1, \dots, a_k \in \prod_i A_i$. Тогда $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_k])$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_n(i))$ для F-большинства индексов.*

1.1.6 Теорема Гёделя о компактности

Теорема 5. *Бесконечное множество предложений Γ имеет модель, если каждое его конечное подмножество Γ' имеет модель.*

1.2 3 лекция

Утверждение 6.

$$\varphi([a_1], \dots, [a_k]) \iff \{i | \mathbb{A} \models \varphi(a_1(i), \dots, a_k(i))\} \in F.$$

Утверждение 7 (Следствие)**.**

$$\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i | \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F.$$

Ультрапроизведения. Доказательство приведём индукцией по построению формулы. Простейшие формулы в виде предиката и равенства двух термов рассматриваются очевидно, это - база. Обратим внимание на функциональный символ $f \in \sigma$. Как он интерпретируется?

$$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_k]) := [\lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i))]$$

Из определения декартового у нас было

$$f^{\mathbb{A}}([a_1], \dots, [a_k]) := \lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i)),$$

где $i \mathbb{A} psto f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i))$, и $\lambda x f(x) = f$. Причём согласно фильтру

$$\begin{gathered} a_1 \equiv_F a_1' \\ \vdots \\ a_k \equiv_F a_k' \\ f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) \equiv_F f^{\mathbb{A}}(a_1', \dots, a_k'). \end{gathered}$$

$J_i\{i|a_1(i) = a'_1(i)\} \in F$, $f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_k(i)) = J_1 \cap \ldots, \cap J_k \in F = f^{\mathbb{A}}(a'_1, \ldots, a'_k)$. Константы $c^{\mathbb{A}}$ интерпретируются как $\lambda_i c^{\mathbb{A}_i}$, переменные означиваются каким-то образом $x_j \mathbb{A} pstoa_j(i)$, $t^{\mathbb{A}_i} = f^{\mathbb{A}_i}(t_1^{\mathbb{A}_i}, \ldots, t_k^{\mathbb{A}_i})$, значит, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}}(\overline{a}), \ldots, t_k^{\mathbb{A}}(\overline{a}))$. Соответственно, из определения это верно для простейших формул. Перейдём теперь к сложным формулам.

Более сложные формулы строятся из простых при помощи логических связок и кванторов. Достаточно рассматривать только конъюнкцию, отриcанию и существование (остальные выражаются через них). Пусть мы хотим проверить

$$\mathbb{A}_F \models (\varphi \wedge \psi)(a_1, \ldots, a_k).$$

Это означает, что $\mathbb{A}_F \models \varphi([\overline{a}])$ и $\mathbb{A} \models \psi([\overline{a}])$. $J = \{i|\mathbb{A}_i \models \varphi(\overline{a(i)})\} \in F$. Проверяется $i \in J \cap K$,

$$\{\mathbb{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)(a_1(i), \ldots, a_k(i))\} \in F.$$

Отрицание также легко проверяется для ультрафильтров, так как есть свойство дополнения.

$$\begin{gathered}\mathbb{A}_F \models \neg\varphi([\overline{a}]) \\ \neg(\mathbb{A}_F \models \varphi([\overline{a}])) \\ \ldots\end{gathered}$$

Существование проверяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi(x_1, \ldots, x_k), \\ \varphi &= \exists x \theta(x, x_1, \ldots, x_k). \\ \mathbb{A}_F &\models \varphi([a_1], \ldots, [a_k]), \\ \mathbb{A}_F &\models \theta([b], [a_1], \ldots, [a_k]) \text{ для некоторого } b \in \mathbb{A}.\end{aligned}$$

И нам нужно доказать в две стороны. Для этого рассматриваем

$$\begin{aligned}J &= \{i|\mathbb{A}_i \models \theta(b(i), a_1(i), \ldots, a_k(i))\}, \\ K &= \{i|\mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_k(i))\}.\end{aligned}$$

Это – элементы F, которые в разных случаях лежат друг в друге. Не уловил суть, надо будет дописать и переписать. □

Теорема 8. *Бесконечное множество* Γ *имеет модель, если каждое его конечное подмножество* Γ *имеет модель.*

Доказательство. Пусть $I = \{i|i$ – конечное подмножество $\Gamma\}$. Для каждого $i \in I \mapsto \mathbb{A}_i$ существует своя структура. Тогда можно построить следующее семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$, где $\mathbb{A}_i \models i$. Рассмтрим декартово произведение $\mathbb{A} = \prod_i \mathbb{A}_i$ и $G_i = \{j \in I|i \subseteq j\}$. Если $k \in I$, то $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$ (I - бесконечно). Утверждается, что $F = \{A \subseteq I|\exists_i(G_i \subseteq A)\}$ - ультрафильтр. Свойства проверяются очевидно. □

Определение 12.

- $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ iff значения простых формул в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ совпадают;
- $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, если $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ и значения любых формул в A и B совпадают (элементарная подструктура);
- $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, если они удовлетворяют одни и те же предложения (элементарная эквивалентность).

Утверждение 9. $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, *тогда* $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ *и* $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

Теорема 10 (Лёвингейма-Сколема, понижение)**.** *Пусть есть* $\mathbb{A}$, $X \subseteq \mathbb{A}$, $|X| \leq |For_\sigma|$. *Тогда существует* $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$*:* $X \subseteq \mathbb{B}$ *и* $|\mathbb{B}| \leq |For_\sigma|$.

1.3 Лекция 4

Доказательство. Построим последовательность $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$, где

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) | e \in E_n\},$$

где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены следующим образом:

$$E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) | \overline{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\overline{a}, y)\}$$

и $\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ $(e \in E)$. В качестве B просто возьмём $\bigcup_n S_n$. Нужно проверить, что $|B| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$ – это делается по индукции по S_i. E_n по мощности не превосходит For_σ посредством сравнения через For_σ^2, откуда и получаем требуемое.

Рассмторим теперь $\mathbb{B} = (B, I)$ с сигнатурой σ и проверим, что B замкнуто относительно интерпретаций элементов сигнатуры. Это получается несложно, а предикаты мы зададим как

$$P^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_n) \Longrightarrow P^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n) = T.$$

Осталось лишь проверить, что для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ и для любых значений переменных $(a_1, \ldots, a_k) = \overline{a} \in B$, тогда значение на этих элементах в $\mathbb{B}$ будет совпадать со занчением в $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a}) \Longleftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}).$$

Проверяется это, конечно, индукцией по построению формулы. Рассмотрим $\wedge, \neg$ и $\exists$, через них всё выражается и провреим для них. Конъюнкция – очевидна, ровно как и отрицание. Интерес представляет существование. Пусть $\psi(\overline{x}) = \exists y \varphi(\overline{x}, y)$. Пусть для φ уже доказано, что $\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a}, c) \Longleftrightarrow \mathbb{A} \models (\overline{a}, c)$. Слева направо требуемое очевидно, а справа налево я проспал. □

Замечание. На этом месте могло бы быть лирическое отступление про ZFC.

Пусть теперь $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$. τ называется *обогащением* структуры σ, если последняя лежит в первой и дополнение непусто.

Определение 13.

1) Пусть $\mathbb{A}$ – σ-структура. $\sigma_{\mathbb{A}} = \sigma \cup \{c_a | a \in A\}$, c_a – новые константные символы, причём $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. $D(\mathbb{A})$ – множество атомарных формул сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ и их отрицаний, истинных в $\mathbb{A}$ при интерпретации $\sigma_a \models a$. (*диаграмма* $\mathbb{A}$)

2) *Элементарная диаграмма* $\mathbb{A}$ – это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех предлжений $\sigma_{\mathbb{A}}$, истинных в $\mathbb{A}$. ($D(\mathbb{A}) \subseteq D^*(\mathbb{A})$)

Утверждение 11.

1) Если $\mathbb{B} \models D(\mathbb{A})$, то $\mathbb{B}|_\sigma$ содержит подструктуту $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}|_\sigma$, такую что $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{A}$.

2) Если $\mathbb{B} \models D^*(\mathbb{A})$, то $\mathbb{B}|_\sigma$ содержит элементарную подструктуру, изоморфную $\mathbb{A}$.

Доказательство. *на доске рисуются картинки* □

Теорема 12. *Пусть имеется бесконечная $\mathbb{A}$ – σ-структура и $H \geq \max(|A|, |For_\sigma|)$. Тогда найдётся $\mathbb{B} \succeq \mathbb{A}$ можности хотя бы H.*

Доказательство. Рассмотрим $\sigma \mapsto \sigma_{\mathbb{A}} \models \tau = \sigma_{\mathbb{A}} \cup \{d_x | x \in H\}$ так, что $x \neq x' \Rightarrow d_x \neq d_{x'}$. И построим

$$\Gamma = D^*(A) \cup \{\neg(d_x = d_{x'} | x, x' \in H, x \neq x')\}$$

множество предложений сигнатуры τ. Любое конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ имеет модель, являющуюся τ-расширением структуры $\mathbb{A}$ (легко проверяется). По теореме о компактности существует $\mathbb{C}$ – τ-структура, такая, что $\mathbb{C} \models \Gamma$. И как-то завершаем доказательство. □

Определение 14. *Теория* (T) – множество всех предложений в структуре σ.

2 Неразрешимость и неполнота

3 Введение в вычислимость