

Математическая логика — 2

V семестр

Лектор: Виктор Львович Селиванов

Записывали: Глеб Минаев, Иван Кабашный

Редактировал: Борис Алексеевич Золотов

МКН СПбГУ, осень 2022

Содержание

1	Логика предикатов	1
1.1	Истинность и доказуемость	1
1.1.1	Структура	1
1.1.2	Термы и формулы	2
1.1.3	Значение термов и формул	3
1.1.4	Ультрафильтры	4
1.1.5	Декартово и фильтрованное произведения структур	5
1.1.6	Теорема Гёделя о компактности	6
1.2	Лекция 3	6
1.3	Лекция 4	8
1.4	Лекция 5	9
1.5	Аксиоматизированные классы	10
2	Неразрешимость и неполнота	11
3	Введение в вычислимость	11

1 Логика предикатов

1.1 Истинность и доказуемость

1.1.1 Структура

Бурбаки классифицировал структуры как:

- 1) операции,
- 2) частичные порядки,
- 3) топологические структуры.

Последние не имеют приложения в логике — их мы рассматривать не будем. “Операции” — это структуры алгебраические, “частичные порядки” — это структуры, снабжённые каким-либо отношением.

Определение 1. *Сигнатура* — набор функциональных, предикатных и константных символов вместе с функцией, задающей арность этих символов.

Функциональные символы интерпретируются как функции $A^n \rightarrow A$, предикатные символы — как функции $A^m \rightarrow \{\text{и}; \text{л}\}$, а константы — как элементы A (или, что равносильно, функции $\{\emptyset\} \rightarrow A$).

Будем называть σ -структурой (*структурой сигнатуры σ*) пару (A, I) , где A — непустое множество, а I — интерпретация сигнатурных символов σ в A .

Пример 1. *Сигнатура упорядоченного кольца* — $\langle +, \cdot; <; 0, 1 \rangle$. Можно добавить вычитание и взятие противоположного, но они выражаются в имеющейся сигнатуре.

Определение 2. \mathbb{A}, \mathbb{B} — σ -структуры. Тогда отображение $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если оно задаёт $\varphi : A \rightarrow B$, что для всякой функции f^n из сигнатуры σ и для всяких $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)),$$

для всякого предиката P^m в сигнатуре σ и всяких $a_1, \dots, a_m \in A$

$$P_A(a_1, \dots, a_m) \implies P_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m))$$

и для всякой константы c сигнатуры σ

$$\varphi(c_A) = c_B.$$

φ — изоморфизм, если φ — гомоморфизм, биективен, и φ^{-1} — гомоморфизм.

\mathbb{A} называется *подструктурой* \mathbb{B} ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi : A \rightarrow B, a \mapsto a$ — гомоморфизм.

1.1.2 Термы и формулы

Определение 3. Фиксируем некоторое множество V — “множество переменных” — символы $\wedge, \vee, \rightarrow, \neq$ и символы $\forall x$ и $\exists x$ для всякого $x \in V$.

Терм — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- переменная — терм,
- константа — терм,
- для всяких термов t_1, \dots, t_n и функции f^n выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

Формула — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- для всяких термов t_1, t_2 выражение $t_1 = t_2$ — формула,
- для всяких предиката P^n из σ и термов t_1, \dots, t_n выражение $P(t_1, \dots, t_n)$ — формула,
- для всяких формул φ и ψ выражения $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \neg \varphi$ — формулы,
- для всяких формулы φ и переменной x выражения $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — формулы.

For_σ — множество всех формул с сигнатурой σ .

Пример 2. В кольцах всякий терм можно свести к полиному с целыми коэффициентами. В мультипликативных группах — моному с целым коэффициентом.

Задача 1. Семейства термов и формул задаются контекстно свободными грамматиками.

Определение 4. Переменная x называется *свободной* в формуле φ , если есть вхождение x не покрываемое никаким квантором $\forall x$ и никаким квантором $\exists x$. $\text{FV}(\varphi)$ — множество всех свободных переменных формулы φ .

1.1.3 Значение термов и формул

Определение 5. Пусть t — терм в сигнатуре σ , а \mathbb{A} — σ -структура. Тогда $t^\mathbb{A} : A^n \rightarrow A$ — *означивание* t , некоторая функция, полученная подставлением вместо констант их значений в \mathbb{A} и последующим рекурсивным означиванием по синтаксическому дереву t . Аналогично получается означивание формулы $f^\mathbb{A} : A^n \rightarrow \{\text{и}, \text{л}\}$.

Определение 6. *Предложение* в сигнатуре σ — формула без свободных переменных.

$$\begin{aligned} \varphi^\mathbb{A} &\in \{T, F\}, \\ \varphi^\mathbb{A} = T &\iff \mathbb{A} \models \varphi. \end{aligned}$$

Определение 7. *Моделью* данного множества предложения Γ называется структура, в которой все предложения из Γ истинны. Если \mathbb{A} — это модель, то иногда пишут $\mathbb{A} \models \Gamma$.

Если Γ — множество предложений, φ — предложение. Говорят, что φ логически следует из Γ ($\Gamma \models \varphi$), если φ истинно в любой модели Γ .

Определение 8. Предложение φ называется *тождественно истинно*, если оно истинно в любой структуре. Иногда пишут $\models \varphi$.

Утверждение 1.

- $\Gamma \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ не имеет модели.
- φ — тождественная истина тогда и только тогда, когда $\models \varphi$.
- Γ — конечное; $\Gamma \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $(\bigwedge \Gamma) \rightarrow \varphi$ — тождественная истина.

1.1.4 Ультрафильтры

Определение 9. Пусть I — непустое множество. *Фильтром* на множестве I называется непустое множество $F \subseteq (I)$ (где (I) — множество всех подмножеств), которое не содержит $\emptyset \subset I$, а также замкнуто относительно пересечения:

$$\forall A, B \in F \quad A \cap B \in F,$$

и взятия надмножеств:

$$\forall A \in F \quad A \subseteq B \subseteq I \implies B \in F.$$

Фильтр F называется *ультрафильтром*, если $A \in F$ или $\bar{A} \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Утверждение 2.

- 1) Фильтр F является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным по включению среди всех фильтров (то есть, нет фильтра, который бы его расширял).
- 2) Пусть F — ультрафильтр и $A, B \subseteq I$, тогда

$$\begin{aligned} A \in F &\iff \bar{A} \notin F, \\ A \cup B \in F &\iff A \in F \text{ или } B \in F. \end{aligned}$$

- 3) Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

Доказательство. Докажем 1.

Пусть F — ультрафильтр. Утверждается, что нет фильтра F' , который содержал бы F ($F' \supseteq F$). Предположим противное, т.е. что существует такое A , что оно принадлежит F' и не принадлежит F . Раз $A \notin F$, то $\bar{A} \in F$. В силу того, что $F \subseteq F'$, то \bar{A} также принадлежит F' . Таким образом, $\emptyset = A \cap \bar{A} \in F'$, противоречие.

В обратную сторону, F — максимальный по включению фильтр. От противного, пусть есть множество $A \subseteq I$ такое, что $A, \bar{A} \notin F$. Рассмотрим

$$F' = \{X \subseteq I \mid \exists B \in F \quad A \cap B \subseteq X\}.$$

F' должно быть фильтром (замкнутость вверх по включению понятна, замкнутость относительно пересечения также верна, так как если $X, Y \in F'$, $A \cap B \subseteq X$, $A \cap C \subseteq Y$ для $B, C \in F$, то $A \cap B \cap C \subseteq (X \cap Y)$. $B \cap C \in F$, а значит, $X \cap Y \in F'$. и последнее, если бы $\emptyset \in F'$, то получается очевидное противоречие из того, что $A \cap B$ всегда непусто).

Докажем 2. Пусть F — ультрафильтр. Одновременно A и \bar{A} принадлежать F не могут. Имеем $A \in F \vee \bar{A} \in F$, откуда понятно. Второе утверждение очевидно в левую сторону.

В другую сторону, имеем $A \cup B \in F$, предположим противное. Пусть $A, B \notin F$, значит, $\bar{A}, \bar{B} \in F$, а тогда $\bar{A} \cap \bar{B} \in F$. По закону деМоргана, $\overline{A \cup B} \in F$, откуда $A \cup B \notin F$.

Докажем 3. Пусть имеется F . Утверждается, что существует ультрафильтр F^* , который содержит F ($F^* \supseteq F$). Данное утверждение нетривиально и в каком-то смысле схоже с аксиомой выбора. Применим лемму Цорна.

Лемма 3 (Цорн). Пусть $(P; \leq)$ — частичный порядок, в котором всякая линейная цепь $A \subseteq P$ имеет верхнюю границу. Тогда в этом частичном порядке есть максимальный элемент.

Рассмотрим множество всех фильтров $P = \{G \mid G \text{ — фильтр} \mid F \subseteq G\}$, и порядок \subseteq . Пусть \mathfrak{F} — множество фильтров $F_1 \subseteq F_2 \vee F_2 \subseteq F$, а $F' = \bigcup \mathfrak{F}$. F' — фильтр, что проверяется ручками. По лемме, существует F^* — максимальное расширение. \square

Пример 3.

- Пусть есть I , тогда $\{I\}$ — фильтр.
- Пусть $\emptyset \neq A \subseteq I$, тогда $F = \{X \subseteq I \mid A \subseteq X\}$ — фильтр.

Задача 2. Если I бесконечное, то в $P(I)$ есть неглавные ультрафильтры. Для доказательства рассматриваем $F = \{A \subseteq I \mid A \text{ — коконечно}\}$, и существующий по доказанному ранее $F^* \supseteq F$.

1.1.5 Декартово и фильтрованное произведения структур

Пусть имеется некоторое проиндексированное семейство σ -структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$.

Определение 10 (Декартово произведение). Определим σ -структуру на декартовом произведении нескольких σ -структур. Мы будем обозначать её $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$.

Носителем структуры будет множество

$$A = \prod_{i \in I} A_i = \left\{ a: I \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} A_i \mid a(i) \in A_i \right\}.$$

Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

- 1) $c^{\mathbb{A}}(i) = c^{\mathbb{A}_i}$ — отображение, возвращающее в каждой структуре соответствующую константу;
- 2) $(f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n))(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ — действуем функцией в каждой структуре, собираем из образов элемент декартова произведения;
- 3) $P^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ выполнен для всех $i \in I$.

Определение 11 (Фильтрованное произведение). Пусть F — фильтр на множестве I . *Фильтрованное произведение* нескольких структур (обозначается \mathbb{A}_F) получается факторизацией их декартова произведения по следующему отношению эквивалентности:

$$a \equiv_F b \stackrel{\text{def}}{\iff} \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in F$$

(говорят, что $a(i) = b(i)$ для F -большинства i).

Носителем фильтрованного произведения будет фактор-множество A/\equiv_F , состоящее из классов эквивалентности $\{[a] \mid a \in A\}$. Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

- 1) $c^{\mathbb{A}_F} = [c^{\mathbb{A}}]$ — класс элемента, собранного из соответствующих констант во всех структурах;
- 2) $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)]$ — надо проверить, что определено однозначно (потому что пересечение множеств фильтра принадлежит фильтру);
- 3) $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ для F -большинства i .

Если F — ультрафильтр, то \mathbb{A}_F называется *ультрапроизведением*.

Теорема 4 (об ультрапроизведениях). Пусть F — ультрафильтр на множестве I , \mathbb{A}_i — семейство структур, $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ — σ -формула и пусть $a_1, \dots, a_k \in \prod_i A_i$. Тогда $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_k])$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_k(i))$ для F -большинства индексов.

1.1.6 Теорема Гёделя о компактности

Теорема 5. Бесконечное множество предложений Γ имеет модель, если каждое его конечное подмножество Γ' имеет модель.

1.2 Лекция 3

Утверждение 6.

$$\varphi([a_1], \dots, [a_k]) \iff \{i | \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_k(i))\} \in F.$$

Утверждение 7 (Следствие).

$$\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i | \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F.$$

Ультрапроизведения. Доказательство приведём индукцией по построению формулы. Простейшие формулы в виде предиката и равенства двух термов рассматриваются очевидно, это — база. Обратим внимание на функциональный символ $f \in \sigma$. Как он интерпретируется?

$$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_k]) := [\lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i))]$$

Из определения декартового у нас было

$$f^{\mathbb{A}}([a_1], \dots, [a_k]) := \lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i)),$$

где $i \mapsto f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i))$, и $\lambda x f(x) = f$. Причём согласно фильтру

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv_F a'_1 \\ &\vdots \\ a_k &\equiv_F a'_k \\ f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) &\equiv_F f^{\mathbb{A}}(a'_1, \dots, a'_k). \end{aligned}$$

$J_i\{i|a_1(i) = a'_1(i)\} \in F$, $f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i)) = J_1 \cap \dots \cap J_k \in F = f^{\mathbb{A}}(a'_1, \dots, a'_k)$. Константы $c^{\mathbb{A}}$ интерпретируются как $\lambda_i c^{\mathbb{A}_i}$, переменные означиваются каким-то образом $x_j \text{Aps} \text{to} a_j(i)$, $t^{\mathbb{A}_i} = f^{\mathbb{A}_i}(t_1^{\mathbb{A}_i}, \dots, t_k^{\mathbb{A}_i})$, значит, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}}(\bar{a}), \dots, t_k^{\mathbb{A}}(\bar{a}))$. Соответственно, из определения это верно для простейших формул. Перейдём теперь к сложным формулам.

Более сложные формулы строятся из простых при помощи логических связок и кванторов. Достаточно рассматривать только конъюнкцию, отрицанию и существование (остальные выражаются через них). Пусть мы хотим проверить

$$\mathbb{A}_F \models (\varphi \wedge \psi)(a_1, \dots, a_k).$$

Это означает, что $\mathbb{A}_F \models \varphi([\bar{a}])$ и $\mathbb{A} \models \psi([\bar{a}])$. $J = \{i | \mathbb{A}_i \models \varphi(\overline{a(i)})\} \in F$. Проверяется $i \in J \cap K$,

$$\{\mathbb{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)(a_1(i), \dots, a_k(i))\} \in F.$$

Отрицание также легко проверяется для ультрафильтров, так как есть свойство дополнения.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_F \models \neg \varphi([\bar{a}]) \\ \neg(\mathbb{A}_F \models \varphi([\bar{a}])) \\ \dots \end{aligned}$$

Существование проверяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(x_1, \dots, x_k), \\ \varphi &= \exists x \theta(x, x_1, \dots, x_k). \\ \mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_k]), \\ \mathbb{A}_F \models \theta([b], [a_1], \dots, [a_k]) \text{ для некоторого } b \in \mathbb{A}. \end{aligned}$$

И нам нужно доказать в две стороны. Для этого рассматриваем

$$\begin{aligned} J &= \{i | \mathbb{A}_i \models \theta(b(i), a_1(i), \dots, a_k(i))\}, \\ K &= \{i | \mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_k(i))\}. \end{aligned}$$

Это – элементы F , которые в разных случаях лежат друг в друге. Не уловил суть, надо будет дописать и переписать. \square

Теорема 8. *Бесконечное множество Γ имеет модель, если каждое его конечное подмножество Γ имеет модель.*

Доказательство. Пусть $I = \{i | i \text{ – конечное подмножество } \Gamma\}$. Для каждого $i \in I \mapsto \mathbb{A}_i$ существует своя структура. Тогда можно построить следующее семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$, где $\mathbb{A}_i \models i$. Рассмотрим декартово произведение $\mathbb{A} = \prod_i \mathbb{A}_i$ и $G_i = \{j \in I | i \subseteq j\}$. Если $k \in I$, то $G_i \cap G_k = G_{i \cup k}$ (I – бесконечно). Утверждается, что $F = \{A \subseteq I | \exists_i (G_i \subseteq A)\}$ – ультрафильтр. Свойства проверяются очевидно. \square

Определение 12.

- $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ iff значения простых формул в \mathbb{A} и \mathbb{B} совпадают;
- $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, если $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ и значения любых формул в \mathbb{A} и \mathbb{B} совпадают (элементарная подструктура);
- $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, если они удовлетворяют одни и те же предложения (элементарная эквивалентность).

Утверждение 9. $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, тогда $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ и $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

Теорема 10 (Лёвингейма-Сколема, понижение). Пусть есть \mathbb{A} , $X \subseteq \mathbb{A}$, $|X| \leq |\text{For}_\sigma|$. Тогда существует $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq \mathbb{B}$ и $|\mathbb{B}| \leq |\text{For}_\sigma|$.

1.3 Лекция 4

Доказательство. Построим последовательность $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$, где

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) \mid e \in E_n\},$$

где E_n и $\eta : E_n \rightarrow A$ определены следующим образом:

$$E_n = \{(\bar{a}, \varphi(\bar{x}, y)) \mid \bar{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)\}$$

и $\mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}, \eta(e))$ ($e \in E$). В качестве B просто возьмём $\bigcup_n S_n$. Нужно проверить, что $|B| \leq |\text{For}_\sigma|$ – это делается по индукции по S_i . E_n по мощности не превосходит For_σ посредством сравнения через For_σ^2 , откуда и получаем требуемое.

Рассмотрим теперь $\mathbb{B} = (B, I)$ с сигнатурой σ и проверим, что B замкнуто относительно интерпретаций элементов сигнатуры. Это получается несложно, а предикаты мы зададим как

$$P^\mathbb{B}(b_1, \dots, b_n) \implies P^\mathbb{A}(b_1, \dots, b_n) = T.$$

Осталось лишь проверить, что для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ и для любых значений переменных $(a_1, \dots, a_k) = \bar{a} \in B$, тогда значение на этих элементах в \mathbb{B} будет совпадать со значением в \mathbb{A} :

$$\mathbb{B} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathbb{A} \models \varphi(\bar{a}).$$

Проверяется это, конечно, индукцией по построению формулы. Рассмотрим \wedge , \neg и \exists , через них всё выражается и проверим для них. Конъюнкция – очевидна, ровно как и отрицание. Интерес представляет существование. Пусть $\psi(\bar{x}) = \exists y \varphi(\bar{x}, y)$. Пусть для φ уже доказано, что $\mathbb{B} \models \varphi(\bar{a}, c) \iff \mathbb{A} \models (\bar{a}, c)$. Слева направо требуемое очевидно, а справа налево я проспал. \square

Замечание. На этом месте могло бы быть лирическое отступление про ZFC.

Пусть теперь $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$. τ называется *обогащением* структуры σ , если последняя лежит в первой и дополнение не пусто.

Определение 13.

- 1) Пусть \mathbb{A} – σ -структура. $\sigma_{\mathbb{A}} = \sigma \cup \{c_a | a \in A\}$, c_a – новые константные символы, причём $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. $D(\mathbb{A})$ – множество атомарных формул сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ и их отрицаний, истинных в \mathbb{A} при интерпретации $\sigma_a \models a$. (*диаграмма* \mathbb{A})
- 2) *Элементарная диаграмма* \mathbb{A} – это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех предложений $\sigma_{\mathbb{A}}$, истинных в \mathbb{A} . ($D(\mathbb{A}) \subseteq D^*(\mathbb{A})$)

Утверждение 11.

- 1) Если $\mathbb{B} \models D(\mathbb{A})$, то $\mathbb{B}|_{\sigma}$ содержит подструктуру $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}|_{\sigma}$, такую что $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{A}$.
- 2) Если $\mathbb{B} \models D^*(\mathbb{A})$, то $\mathbb{B}|_{\sigma}$ содержит элементарную подструктуру, изоморфную \mathbb{A} .

Доказательство. *на доске рисуются картинки* □

Теорема 12. Пусть имеется бесконечная \mathbb{A} – σ -структура и $H \geq \max(|A|, |For_{\sigma}|)$. Тогда найдётся $\mathbb{B} \succeq \mathbb{A}$ мощности хотя бы H .

Доказательство. Рассмотрим $\sigma \mapsto \sigma_{\mathbb{A}} \models \tau = \sigma_{\mathbb{A}} \cup \{d_x | x \in H\}$ так, что $x \neq x' \Rightarrow d_x \neq d_{x'}$. И построим

$$\Gamma = D^*(A) \cup \{\neg(d_x = d_{x'} | x, x' \in H, x \neq x')\}$$

множество предложений сигнатуры τ . Любое конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ имеет модель, являющуюся τ -расширением структуры \mathbb{A} (легко проверяется). По теореме о компактности существует \mathbb{C} – τ -структура, такая, что $\mathbb{C} \models \Gamma$. И как-то завершаем доказательство. □

Определение 14. *Теория* (T) – множество всех предложений в структуре σ .

1.4 Лекция 5

Утверждение 13 (следствие Лёвингейма-Сколема).

- 1) Если σ -теория имеет бесконечную модель, то она имеет модель любой мощности хотя бы $|For_{\sigma}|$;
- 2) Если σ -теория имеет конечные модель сколь угодно большой мощности, то она имеет модель любой мощности хотя бы $|For_{\sigma}|$.

Доказательство. *рисуются картинки* □

Теорема 14 (без доказательства). *Логика предикатов – единственная логика, для которой верны и теорема о компактности и теорема о понижении мощности.*

1.5 Аксиоматизированные классы

Определение 15.

- 1) $\text{Sent}_\sigma \supseteq T$, $\text{Str}_\sigma \supseteq K$. Сопоставим $T \mapsto \text{Mod}(T)$, $K \mapsto \text{Th}(K) = \{\varphi \mid \forall \mathbb{A} \in K (\mathbb{A} \models \varphi)\}$. Класс K называется *аксиоматизируемым*, если $K = \text{Mod}(T)$ для всех T ;
- 2) K – *конечно аксиоматизируемый*, если $K = \text{Mod}(T)$ для некоторого конечного $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ($\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$)

Предложение 15.

- 1) $T \subseteq T'$, тогда $\text{Mod}(T) \supseteq \text{Mod}(T')$;
- 2) $K \subseteq K'$, тогда $\text{Th}(K) \supseteq \text{Th}(K')$;
- 3) $K \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(K)) : T \subseteq \text{ThMod}(T)$;
- 4) Любое пересечение аксиоматизированных классов является аксиоматизированным классом. Объединение двух аксиоматизированных классов является аксиоматизированным классом;
- 5) Класс K является аксиоматизированным тогда и только тогда, когда $K = \text{Mod}(\text{Th}(K))$;
- 6) K конечно аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда K и $\text{Str}_\sigma \setminus K$ аксиоматизируемы;
- 7) K – аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда K замкнут относительно \equiv и ультрапроизведений.

Доказательство. Докажем (7) в левую сторону (в правую – д/з). Пусть $\{\mathbb{A}\}_{i \in I} \in K$, тогда $\text{MA}_F \in K$. Проверим, что K совпадает с множеством $\text{Mod}(\text{Th}(K))$ (5), причём из третьего свойства включение K в множество моделей очевидно, а с другим придётся повозиться.

Пусть $\mathbb{A} \models \text{Th}(K)$, и нам нужно показать, что $\mathbb{A} \in K$. $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}_{F^*}$, где F^* – некий ультрафильтр на подходящем множестве I ; $B_i \in K$. Откуда взять множество I ? Недолго думая, возьмём $I := \text{Th}(\mathbb{A})$. Утверждается, что для любого $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \exists \mathbb{B} \in K (\mathbb{B} \models \varphi)$.

Возьмём любое φ и предположим, что это не верно. То есть, для любой структуры $\mathbb{B} \in K$, $\mathbb{B} \models \neg \varphi$, тогда $\neg \varphi \in \text{Th}(K)$ и в \mathbb{A} истинно $\neg \varphi$ – противоречие. Таким образом $\varphi \mapsto \mathbb{B}_\varphi \models \varphi$, и мы получили семейство структур. Надо построить ультрафильтр.

Для каждого $\varphi \in I$ рассмотрим $U_\varphi := \{\psi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \models \psi \rightarrow \varphi\}$, $\varphi \in U_\varphi$. $U_\varphi \cap U_{\varphi'} = U_{\varphi \wedge \varphi'} \neq \emptyset$ и принадлежит $\text{Th}(\mathbb{A})$. Пусть $F = \{J \subseteq \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \exists \varphi (J \supseteq U_\varphi)\}$. Это – конечно, ультрафильтр. F^* – любой ультрафильтр, расширяющий F , должен нам подойти.

$$\mathbb{A} \models \varphi, \varphi \in I = \text{Th}(\mathbb{A}), \mathbb{B}_\varphi \models \varphi.$$

$$U_\varphi \subseteq \{\psi \in \text{Th}(\mathbb{A}) \mid \mathbb{B}_\psi \models \varphi\} \in F \subseteq F^*$$

$$\psi \in U_\varphi, \psi \in \text{Th}(\mathbb{A}). \models \psi \rightarrow \varphi, \mathbb{B}_\psi \models \psi, \mathbb{B}_F \models \varphi.$$

□

Определение 16. Σ_n ($n \in \mathbb{N}$) – множество σ -формул (равносильных):

- Σ_0 – бескванторные формулы;
- Σ_1 – формулы вида $\exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{y})$, а ψ – бескванторная;
- Σ_2 – формулы вида $\exists \bar{x}_1 \forall \bar{x}_2 \psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$;
- и так далее по иерархии σ -формул по числу переменных кванторов в предварённой нормальной форме получаем $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Π_n – определяется аналогично с заменой \exists на \forall и наоборот.

Предложение 16.

- $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$;
- $\varphi \in \Pi_n$ тогда и только тогда, когда $\neg \varphi \in \Sigma_n$;
- $\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = \text{For}_\sigma$.

Теорема 17. Аксиоматизируемый класс является Π_1 аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (если какая-то структура лежит в классе, то любая её подструктура тоже лежит в нём).

Доказательство. Докажем слева направо. Пусть у нас есть класс $K = \text{Mod}(T)$, где T – множество Π_1 предложений. Нам нужно доказать, что он замкнут относительно подструктур. Если $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \models T$, то утверждается, что $\mathbb{A} \models T$. По-другому это можно расписать как $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \models \varphi = \forall \bar{x} \psi(\bar{x})$. И это верно, потому что очевидно. Начнём с конца: $\mathbb{A} \models \psi(\bar{a})$ при $\bar{a} \in A$, тогда $\mathbb{B} \models \psi(\bar{a})$. □

2 Неразрешимость и неполнота

3 Введение в вычислимость