Системы аксиом, тавтологии, правила вывода

В. Л. Селиванов

25 октября 2022 г.

Содержание

1 Основные равносильности

1) $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$;
2) $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$;
3) $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \neg\psi)$;
4) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$;
5) $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$;
6) $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$;
7) $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$;
8) $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$;
9) $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$;
10) $\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$.

11) $\neg(\forall x\varphi) \equiv \exists x(\neg\varphi)$;
12) $\neg(\exists x\varphi) \equiv \forall x(\neg\varphi)$;
13) $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$;
14) $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$;
15) $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$;
16) $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$ (x не входит свободно в ψ);
17) $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$;
18) $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$ (y не входит в φ).

2 Основные тавтологии

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
2) $(\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to (\varphi \to \theta)\big)$;
3) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$;
4) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$;
5) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$;
6) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$;
7) $\psi \to (\varphi \vee \psi)$;
8) $(\varphi \to \theta) \to \Big((\psi \to \theta) \to \big((\varphi \vee \psi) \to \theta\big)\Big)$;
9) $(\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big)$;
10) $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

3 Гильбертовское исчисление предикатов

3.1 Аксиомы

1) Тавтологии сигнатуры σ;
2) Кванторные аксиомы:

$$\forall x\varphi(x) \to \varphi(t) \ \text{ и } \ \varphi(t) \to \exists x\varphi(x).$$

3.2 Аксиомы равенства

1) $\forall x(x = x)$,
2) $\forall x\forall y(x = y \to y = x)$,
3) $\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$,
4) $\forall x_1\forall y_1 \ldots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$,
5) $\forall x_1\forall y_1 \ldots \forall x_n\forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n))$.

3.3 Правила вывода

$$\frac{\varphi, \quad \varphi \to \psi}{\psi}, \quad \frac{\psi \to \varphi(y)}{\psi \to \forall x\varphi(x)}, \quad \frac{\varphi(y) \to \psi}{\exists x\varphi(x) \to \psi},$$

где y — переменная, не входящая свободно в нижнюю формулу.

Вариант ИП$^*_\sigma$ получается, если вместо всех тавтологий берутся только *основные* тавтологии.

4 Генценовское исчисление предикатов (без равенства)

4.1 Аксиомы

$$\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$$

4.2 Правила вывода

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi;\ \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta;\ \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi;\ \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(y)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)},$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(y) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta}, \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)},$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi;\ \Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

5 Минимальная арифметика и арифметика Пеано

1) $0 + 1 = 1$;
2) $\forall x \neg (x + 1 = 0)$;
3) $\forall x \forall y (x + 1 = y + 1 \to x = y)$;
4) $\forall x (x + 0 = x)$;
5) $\forall x \forall y (x + (y + 1) = (x + y) + 1)$;
6) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$;
7) $\forall x \forall y (x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x)$;
8) $\forall x \neg (x < 0)$;
9) $\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$;
10) $\forall x \forall y (x < y + 1 \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$.

Арифметика Пеано ПА получается из МА добавлением схемы аксиом индукции:

$$(\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \to \varphi(x + 1))) \to \forall x \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — любая формула сигнатуры МА.

6 Аксиомы теории множеств

1) $\exists x (x = x)$.
2) $\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y$ (аксиома объёмности).
3) $\forall u \forall v \exists X \forall z (z \in X \leftrightarrow z = u \vee z = v)$ (существование мн-ва из двух элементов).
4) $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u))$ (аксиома выделения).
5) $\forall X \exists Y \forall u \forall z (u \in z \wedge z \in X \to u \in Y)$ (существование объединения семейства мн-в).
6) $\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)$ (существование множества подмножеств).
7) $\forall x \forall y \forall y' (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, y') \to y = y')$
   $\to \forall X \exists Y \forall x \forall y (x \in X \wedge \varphi(x, y) \to y \in Y)$ (существование образа функции).
8) $\exists Y (\emptyset \in Y \wedge \forall y (y \in Y \to y \cup \{y\} \in Y))$ (существование бесконечного мн-ва).
9) $\forall X (X \neq \emptyset \to \exists x (x \in X \wedge \forall u (u \in x \to u \notin X)))$ (аксиома регулярности).
10) $\forall X \exists f ((f : (P(X) \setminus \{\emptyset\}) \to X) \wedge \forall Y (Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \to f(Y) \in Y))$.