

Домашнее задание 5. Полнота и модельная полнота

1) Докажите, что для непротиворечивой теории равносильны следующие условия:

- теория полна,
- любые две модели теории элементарно эквивалентны,
- теория совпадает с теорией любой своей модели.

Докажите, что непротиворечивая теория T модельно полна (т. е. отношения \subseteq, \preceq совпадают на $\text{Mod}(T)$) тогда и только тогда, когда теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна для любой $\mathbb{A} \models T$.

Здесь $D(\mathbb{A})$ — множество истинных в \mathbb{A} атомарных формул сигнатуры, пополненной константами для всех элементов A , и их отрицаний (см. лекции).

- 2) (а) Докажите, что теория плотного линейного порядка без наименьшего и наибольшего элемента является полной.
- (б) Полна ли теория плотного линейного порядка с наибольшим и наименьшим элементами?
- (в) Сколько пополнений есть у теории плотного линейного порядка? Перечислите их все.
- 3) Являются ли следующие теории полными (модельно полными)?
- (а) Теория групп, теория абелевых групп
- (б) Теория абелевых групп без кручения
- (в) Теория полей, теория полей характеристики 0
- (г) Теория алгебраически замкнутых полей
- (д) Теория алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики
- 4) (а) Является ли полной (модельно полной) теория плотного неоднородного порядка с наибольшим и наименьшим элементами?
- (б) Являются ли модельно полными теории $\text{Th}(\mathbb{N}; \leq)$ и $\text{Th}(\mathbb{N}; +)$?
- 5) Докажите, что теория алгебраически замкнутых полей является модельно полной, но не полной. Перечислите все пополнения этой теории. (Предполагаются известные результаты из курса алгебры об алгебраически замкнутых полях.)