Домашнее задание 2. Определимость

1) Постройте модели минимальной арифметики, в которых

   (а) Не выполняется коммутативность сложения,

   (б) Бывает так, что $x \not< x + 1$.

2) Докажите, что вещественное число определимо в структуре

$$(\mathbb{R};\ =,\ +,\ \cdot\ ,\ 0,\ 1)$$

тогда и только тогда, когда оно алгебраическое. Охарактеризуйте вещественные числа, определимые в структуре

$$(\mathbb{R};\ =,\ +,\ 0,\ 1).$$

3) Докажите, что комплексное число определимо в структуре

$$(\mathbb{C};\ =,\ +,\ \cdot\ ,\ 0,\ 1)$$

тогда и только тогда, когда оно рациональное.

4) Пусть A — k-буквенный алфавит, $k \geq 2$. Определим бинарные отношения $\leq_p$, $\leq_s$, $\leq_i$, $\preceq$ на A^* следующим образом:

   – $u \leq_p v$, если $ux = v$ для некоторого $x \in A^*$ (u — *префикс* v);
   – $u \leq_s v$, если $xu = v$ для некоторого $x \in A^*$ (u — *суффикс* v);
   – $u \leq_i v$, если $xuy = v$ для некоторых $x, y \in A^*$ (u — *подслово* v);
   – $u \preceq v$, если u получается из v стиранием некоторых букв (u — *подпоследовательность* v).

   Докажите, что:

   (а) отношение $\leq_i$ определимо в A^* через отношения $\leq_p$ и $\leq_s$;

   (б) пустое слово определимо через любое из этих отношений;

   (в) множество всех слов фиксированной длины определимо через любое из этих отношений;

   (г) никакое фиксированное непустое слово не определимо через все эти отношения;

   (д) существует двухбуквенное слово, не определимое через все эти отношения и однобуквенные слова;

   (е) опишите двухбуквенные слова, не определимые как в предыдущем вопросе.

5) Докажите, что любой элемент структуры $(A^*; \leq_i)$, обогащенной константами для всех слов длины не более двух, определим. Охарактеризуйте группу автоморфизмов структуры $(A^*; \leq_i)$. Докажите аналогичные результаты для отношения $\preceq$ вместо $\leq_i$.