Математическая логика — 2
V семестр

Лектор: Виктор Львович Селиванов
Записывали: Глеб Минаев, Иван Кабашный
Редактировал: Борис Алексеевич Золотов

МКН СПбГУ, осень 2022

Содержание

1 Логика предикатов

1.1 Истинность и доказуемость

1.1.1 Структура

Бурбаки классифицировал структуры как:

1) операции,
2) частичные порядки,
3) топологические структуры.

Последние не имеют приложения в логике — их мы рассматривать не будем. “Операции” — это структуры алгебраические, “частичные порядки” — это структуры, снабжённые каким-либо отношением.

Определение 1. *Сигнатура* — набор функциональных, предикатных и константных символов вместе с функцией, задающей арность этих символов.

Функциональные символы интерпретируются как функции $A^n \to A$, предикатные символы — как функции $A^m \to \{\text{и}; \text{л}\}$, а константы — как элементы A (или, что равносильно, функции $\{\varnothing\} \to A$).

Будем называть *σ-структурой* (*структурой сигнатуры σ*) пару (A, I), где A — непустое множество, а I — интерпретация сигнатурных символов σ в A.

Пример 1. *Сигнатура упорядоченного кольца — $\langle +,\ \cdot;\ <;\ 0,\ 1\rangle$. Можно добавить вычитание и взятие противоположного, но они выражаются в имеющейся сигнатуре.*

Определение 2. $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ — σ-структуры. Тогда отображение $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если оно задаёт $\varphi : A \to B$, что для всякой функции f^n из сигнатуры σ и для всяких $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\varphi(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)),$$

для всякого предиката P^m в сигнатуре σ и всяких $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$P_A(a_1, \ldots, a_m) \quad \Longrightarrow \quad P_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))$$

и для всякой константы c сигнатуры σ

$$\varphi(c_A) = c_B.$$

φ — изоморфизм, если φ — гомоморфизм, биективен, и φ^{-1} — гомоморфизм.

$\mathbb{A}$ называется *подструктурой* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi : A \to B, a \mapsto a$ — гомоморфизм.

1.1.2 Термы и формулы

Определение 3. Фиксируем некоторое множество V — *“множество переменных”* — символы $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neq$ и символы $\forall x$ и $\exists x$ для всякого $x \in V$.

Терм — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- переменная — терм,
- константа — терм,
- для всяких термов $t_1, \ldots, t_n$ и функции f^n выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

Формула — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- для всяких термов t_1, t_2 выражение $t_1 = t_2$ — формула,
- для всяких предиката P^n из σ и термов $t_1, \ldots, t_n$ выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$ — формула,
- для всяких формул φ и ψ выражения $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neq \varphi$ — формулы,

- для всяких формулы φ и переменной x выражения $\forall x\varphi$ и $\exists x\varphi$ — формулы.

For_σ — множество всех формул с сигнатурой σ.

Пример 2. *В кольцах всякий терм можно свести к полиному с целыми коэффициентами. В мультипликативных группа — моному с целым коэффициентов.*

Задача 1. Семейства термов и формул задаются контекстно свободными грамматиками.

Определение 4. Переменная x называется *свободной* в формуле φ, если есть вхождение x не покрывается никаким квантором $\forall x$ и никаким квантором $\exists x$. $\mathrm{FV}(\varphi)$ — множество всех свободных переменных формулы φ.

1.1.3 Значение термов и формул

Определение 5. Пусть t — терм в сигнатуре σ, а $\mathbb{A}$ — σ-структура. Тогда $t^{\mathbb{A}} : A^n \to A$ — *означивание* t, некоторая функция, полученная подставлением вместо констант их значений в $\mathbb{A}$ и последующим рекурсивным означиванием по синтаксическому дереву t. Аналогично получается означивание формулы $f^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{и}; \text{л}\}$.

Определение 6. *Предложение* в сигнатуре σ — формула без свободных переменных.

$$\varphi^{\mathbb{A}} \in \{T, F\},$$
$$\varphi^{\mathbb{A}} = T \Longleftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi.$$

Определение 7. *Моделью* данного множества предложения Γ называется структура, в которой все предложения из Γ истины. Если $\mathbb{A}$ — это модель, то иногда пишут $\mathbb{A} \models \Gamma$.

Если Γ — множество предложений, φ — предложение. Говорят, что φ логически следует из Γ ($\Gamma \models \varphi$), если φ истино в любой модели Γ.

Определение 8. Предложение φ называется тождественно истино, если оно истино в любой структуре. Иногда пишут $\models \varphi$.

Утверждение 1.

- $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *не имеет модели.*
- φ *— тождественная истина тогда и только тогда, когда* $\models \varphi$.
- Γ *— конечное;* $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\wedge\Gamma) \to \varphi$ *— тожественная истина.*

1.1.4 Ультрафильтры

Определение 9. Пусть I — непустое множество. *Фильтром* на множестве I называется непустое множество $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ (где $\mathcal{P}(I)$ — множество всех подмножеств), которое не содержит $\emptyset \subset I$, а также замкнуто относительно пересечения:

$$\forall A, B \in F \quad A \cap B \in F,$$

и взятия надмножеств:

$$\forall A \in F \ \ A \subseteq B \subseteq I \implies B \in F.$$

Фильтр F называется *ультрафильтром*, если $A \in F$ или $\overline{A} \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Утверждение 2.

1) *Фильтр F является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным по включению среди всех фильтров (то есть, нет фильтра, который бы его расширял).*

2) *Пусть F — ультрафильтр и A, $B \subseteq I$, тогда*

$$\begin{aligned} A \in F &\iff \overline{A} \notin F, \\ A \cup B \in F &\iff A \in F \text{ *или* } B \in F. \end{aligned}$$

3) *Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.*

Доказательство. Докажем 1.

Пусть F — ультрафильтр. Утверждается, что нет фильтра F', который содержал бы F ($F' \supseteq F$). Предположим противное, т.е. что существует такое A, что оно принадлежит F' и не принадлежит F. Раз $A \notin F$, то $\overline{A} \in F$. В силу того, что $F \subseteq F'$, то $\overline{A}$ также принадлежит F'. Таким образом, $\emptyset = A \cap \overline{A} \in F'$, противоречие.

В обратную сторону, F — максимальный по включению фильтр. От противного, пусть есть множество $A \subseteq I$ такое, что $A, \overline{A} \notin F$. Рассмотрим

$$F' = \{X \subseteq I \mid \exists B \in F \ A \cap B \subseteq X\}.$$

F' должно быть фильтром (замкнутость вверх по включению понятна, замкнутость относительно пересечения также верна, так как если $X, Y \in F'$, $A \cap B \subseteq X$, $A \cap C \subseteq Y$ для $B, C \in F$, то $A \cap B \cap C \subseteq (X \cap Y)$. $B \cap C \in F$, а значит, $X \cap Y \in F'$. и последнее, если бы $\emptyset \in F'$, то получается очевидное противоречие из того, что $A \cap B$ всегда непусто).

Докажем 2. Пусть F — ультрафильтр. Одновременно A и $\overline{A}$ принадлежать F не могут. Имеем $A \in F \vee \overline{A} \in F$, откуда понятно. Второе утверждение очевидно в левую сторону.

В другую сторону, имеем $A \cup B \in F$, предоположим противное. Пусть $A, B \notin F$, значит, $\overline{A}, \overline{B} \in F$, а тогда $\overline{A} \cap \overline{B} \in F$. По закону деМоргана, $\overline{A \cup B} \in F$, откуда $A \cup B \notin F$.

Докажем 3. Пусть имеется F. Утверждается, что существует ультрафильтр F^*, который сожержит F ($F^* \supseteq F$). Данное утверждение нетривиально и в каком-то смысле схоже с аксиомой выбора. Применим лемму Цорна.

Лемма 3 (Цорн). *Пусть $(P; \leq)$ — частичный порядок, в котором всякая линейная цепь $A \supseteq P$ имеет верхнюю границу. Тогда в этом частичном порядке есть максимальный элемент.*

Рассмотрим множество всех фильтров $P = \{G — \text{фильтр} \mid F \subseteq G\}$, и порядок $\subseteq$. Пусть $\mathfrak{F}$ — множество фильтров $F_1 \subseteq F_2 \vee F_2 \subseteq F$, а $F' = \bigcup \mathfrak{F}$. F' — фильтр, что проверяется ручками. По лемме, существует F^* — максимальное расширение. $\square$

Пример 3.

- *Пусть есть I, тогда $\{I\}$ — фильтр.*
- *Пусть $\emptyset \neq A \subseteq I$, тогда $F = \{X \subseteq \mid A \subseteq X\}$ — фильтр.*

Задача 2. Если I бесконечное, то в $P(I)$ есть неглавные ультрафильтры. Для доказательства рассматриваем $F = \{A \subseteq I \mid A — \text{коконечно}\}$, и существующий по доказанному ранее $F^* \supseteq F$.

1.1.5 Декартово и фильтрованное произведения структур

Пусть имеется некоторое проиндексированное семейство σ-структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$.

Определение 10 (Декартово произведение)**.** Определим σ-структуру на декартовом произведении нескольких σ-структур. Мы будем обозначать её $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$.

Носителем структуры будет множество

$$A = \prod_{i \in I} A_i = \left\{ a\colon I \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; a(i) \in A_i \right\}.$$

Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

1) $c^{\mathbb{A}}(i) = c^{\mathbb{A}_i}$ — отображение, возвращающее в каждой структуре соответствующую константу;
2) $\big(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)\big)(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ — действуем функцией в каждой структуре, собираем из образов элемент декартова произведения;
3) $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ выполнен для всех $i \in I$.

Определение 11 (Фильтрованное произведение)**.** Пусть F — фильтр на множестве I. *Фильтрованное произведение* нескольких структур (обозначается $\mathbb{A}_F$) получается факторизацией их декартова произведения по следующему отношению эквивалентности:

$$a \equiv_F b \overset{\text{def}}{\iff} \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in F$$

(говорят, что $a(i) = b(i)$ *для F-большинства i).*

Носителем фильтрованного произведения будет фактор-множество $A/{\equiv_F}$, состоящее из классов эквивалентности $\{[a] \mid a \in A\}$. Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

1) $c^{\mathbb{A}_F} = \left[c^{\mathbb{A}}\right]$ — класс элемента, собранного из соответствующих констант во всех структурах;

2) $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = \left[f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)\right]$ — надо проверить, что определено однозначно (потому что пересечение множеств фильтра принадлежит фильтру);

3) $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ для F-большинства i.

Если F — ультрафильтр, то $\mathbb{A}_F$ называется *ультрапроизведением.*

Теорема 4 (об ультрапроизведениях)**.** *Пусть F — ультрафильтр на множестве I, $\mathbb{A}_i$ — семейство стркутур, $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ — σ-формула и пусть $a_1, \ldots, a_k \in \prod_i A_i$. Тогда $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \ldots, [a_k])$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ для F-большинства индексов.*

1.1.6 Теорема Гёделя о компактности

Теорема 5. *Бесконечное множество предложений Γ имеет модель, если каждое его конечное подмножество Γ' имеет модель.*