Математическая логика — 2
V семестр

Лектор: Виктор Львович Селиванов
Записывали: Глеб Минаев, Иван Кабашный
Редактировал: Борис Алексеевич Золотов

МКН СПбГУ, осень 2022

Содержание

1 Логика предикатов

1.1 Истинность и доказуемость

1.1.1 Структура

Бурбаки классифицировал структуры как:

1) операции,
2) частичные порядки,
3) топологические структуры.

Последние не имеют приложения в логике — их мы рассматривать не будем. “Операции” — это структуры алгебраические, “частичные порядки” — это структуры, снабжённые каким-либо отношением.

Определение 1. *Сигнатура* — набор функциональных, предикатных и константных символов вместе с функцией, задающей арность этих символов.

Функциональные символы интерпретируются как функции $A^n \to A$, предикатные символы — как функции $A^m \to \{\text{и}; \text{л}\}$, а константы — как элементы A (или, что равносильно, функции $\{\varnothing\} \to A$).

Будем называть *σ-структурой* (*структурой сигнатуры* σ) пару (A, I), где A — непустое множество, а I — интерпретация сигнатурных символов σ в A.

Пример 1. *Сигнатура упорядоченного кольца — $\langle +,\ \cdot;\ <;\ 0,\ 1\rangle$. Можно добавить вычитание и взятие противоположного, но они выражаются в имеющейся сигнатуре.*

Определение 2. $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ — σ-структуры. Тогда отображение $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если оно задаёт $\varphi : A \to B$, что для всякой функции f^n из сигнатуры σ и для всяких $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\varphi(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)),$$

для всякого предиката P^m в сигнатуре σ и всяких $a_1, \ldots, a_m \in A$

$$P_A(a_1, \ldots, a_m) \quad\Longrightarrow\quad P_B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))$$

и для всякой константы c сигнатуры σ

$$\varphi(c_A) = c_B.$$

φ — изоморфизм, если φ — гомоморфизм, биективен, и φ^{-1} — гомоморфизм.

$\mathbb{A}$ называется *подструктурой* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi : A \to B, a \mapsto a$ — гомоморфизм.

1.1.2 Термы и формулы

Определение 3. Фиксируем некоторое множество V — *"множество переменных"* — символы $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neq$ и символы $\forall x$ и $\exists x$ для всякого $x \in V$.

Терм — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- переменная — терм,
- константа — терм,
- для всяких термов $t_1, \ldots, t_n$ и функции f^n выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

Формула — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- для всяких термов t_1, t_2 выражение $t_1 = t_2$ — формула,
- для всяких предиката P^n из σ и термов $t_1, \ldots, t_n$ выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$ — формула,
- для всяких формул φ и ψ выражения $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neq \varphi$ — формулы,
- для всяких формулы φ и переменной x выражения $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — формулы.

For_σ — множество всех формул с сигнатурой σ.

Пример 2. *В кольцах всякий терм можно свести к полиному с целыми коэффициентами. В мультипликативных группа — моному с целым коэффициентов.*

Задача 1. Семейства термов и формул задаются контекстно свободными грамматиками.

Определение 4. Переменная x называется *свободной* в формуле φ, если есть вхождение x не покрывается никаким квантором $\forall x$ и никаким квантором $\exists x$. $\mathrm{FV}(\varphi)$ — множество всех свободных переменных формулы φ.

1.2 Значение термов и формул

Определение 5. Пусть t — терм в сигнатуре σ, а $\mathbb{A}$ — σ-структура. Тогда $t^{\mathbb{A}} : A^n \to A$ — *означивание* t, некоторая функция, полученная подставлением вместо констант их значений в $\mathbb{A}$ и последующим рекурсивным означиванием по синтаксическому дереву t. Аналогично получается означивание формулы $f^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{и}; \text{л}\}$.

Определение 6. *Предложение* в сигнатуре σ — формула без свободных переменных.

$$\varphi^{\mathfrak{A}} \in \{T, F\},$$
$$\varphi^{\mathfrak{A}} = T \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi.$$

Определение 7. *Моделью* данного множества предложения Γ называется структура, в которой все предложения из Γ истины. Если $\mathfrak{A}$ — это модель, то иногда пишут $\mathfrak{A} \models \Gamma$.

Если Γ — множество предложений, φ — предложение. Говорят, что φ логически следует из Γ ($\Gamma \models \varphi$), если φ истино в любой модели Γ.

Определение 8. Предложение φ называется тождественно истино, если оно истино в любой структуре. Иногда пишут $\models \varphi$.

Утверждение 1.

- $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *не имеет модели.*
- φ *— тождественная истина тогда и только тогда, когда* $\models \varphi$.
- Γ *— конечное;* $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\wedge\Gamma) \to \varphi$ *— тожественная истина.*

1.3 4. Ультрафильтры и компактность

Определение 9. Пусть I — непустое множество. *Фильтром* на множестве I называется непустое множество $F \subseteq P(I)$ (где $P(I)$ — множество всех подмножеств), которое замкнуто относительно пересечения и взятия надмножеств и такое, что $\emptyset \notin F$.

Фильтр F называется *ультрафильтром*, если $A \in F$ или $\overline{A} \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Утверждение 2.

- *Фильтр F является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным по включению среди всех фильтров (то есть, нет фильтра, который бы его расширял).*

- *Пусть F — ультрафильтр и A, $B \subseteq I$, тогда $A \in F \Longrightarrow \overline{A} \notin F$; $A \cup B \in F \Longrightarrow A \in F$ или $B \in F$.*

- *Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.*

Доказательство.

- Пусть F — ультрафильтр. Утверждается, что нет фильтра F', который содержал бы F ($F' \supseteq F$). Предположим противное, т.е. что существует такое A, что оно принадлежит F' и не принадлежит F. Раз $A \notin F$, то $\overline{A} \in F$. В силу того, что $F \subseteq F'$, то $\overline{A}$ также принадлежит F'. Таким образом, $\emptyset = A \cap \overline{A} \in F'$, противоречие.

  В обратную второну, F — максимальный по влючению фильтр. От противного, пусть есть множество $A \subseteq I$ такое, что $A, \overline{A} \notin F$. Рассмотрим $F' = \{X \subseteq I | \exists B \in F (A \cap B \subseteq X)\}$. F' должно быть фильтром (замкнутость вверх по включению понятна, замкнутость относительно пересечения также верна, так как если $X, Y \in F'$, $A \cap B \subseteq X$, $A \cap C \subseteq Y$ для $B, C \in F$, то $A \cap B \cap C \subseteq (X \cap Y)$. $B \cap C \in F$, а значит, $X \cap Y \in F'$. и последнее, если бы $\emptyset \in F'$, то получается очевидное противоречие из того, что $A \cap B$ всегда непусто).

- Пусть F — ультрафильтр. Одновременно A и $\overline{A}$ принадлежать F не могут. Имеем $A \in F \vee \overline{A} \in F$, откуда понятно. Второе утверждение очевидно в левую сторону.

  В другую сторону, имеем $A \cup B \in F$, предоположим противное. Пусть $A, B \notin F$, значит, $\overline{A}, \overline{B} \in F$, а тогда $\overline{A} \cap \overline{B} \in F$. По закону деМоргана, $\overline{A \cup B} \in F$, откуда $A \cup B \notin F$.

- Пусть имеется F. Утверждается, что существует ультрафильтр F^*, который сожержит F ($F^* \supseteq F$). Данное утверждение нетривиально и в каком-то смысле схоже с аксиомой выбора. Применим лемму Цорна.

  Лемма 3 (Цорн)**.** *Пусть $(P; \leq)$ — частичный порядок, в котором всякая линейная цепь $A \supseteq P$ имеет верхнюю границу. Тогда в этом частичном порядке есть максимальный элемент.*

  Рассмотрим множество всех фильтров $P = \{G$ $^-$ фильтр $|F \subseteq G\}$, и порядок $\subseteq$. Пусть $\mathfrak{F}$ — множество фильтров $F_1 \subseteq F_2 \vee F_2 \subseteq F$, а $F' = \bigcup \mathfrak{F}$. F' — фильтр, что проверяется ручками. По лемме, существует F^* — максимальное расширение.

□

Пример 3.

- *Пусть есть I, тогда $\{I\}$ — фильтр.*

- *Пусть* $\emptyset \neq A \subseteq I$, *тогда* $F = \{X \subseteq |A \subseteq X\}$ *— фильтр.*

Задача 2. Если I бесконечное, то в $P(I)$ есть неглавные ультрафильтры. Для доказательства рассматриваем $F = \{A \subseteq I | A^{-}$ коконечно$\}$, и существующий по доказанному ранее $F^* \supseteq F$.

Пусть имеется некоторое проиндексированное семейство σ-структур $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$.

Определение 10 (Декартово произведение)**.** $\mathfrak{A} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ — определяем σ-структуру.

$A = \prod_{i \in I} A_i$ — множество функций a на множестве I, такое что $a(i) \in A_i$ для любого $i \in I$. $a : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ — проектирование $(a \mapsto a(i))$. $c^{\mathfrak{A}}(i) = c^{\mathfrak{A}_i}$, таким образом получается интерпретация константного символа. $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$. Предикат $P^{\mathfrak{A}}(-//-) \Longrightarrow P^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)) = T\ \forall i \in I$.

Если же имеется ещё и F — фильтр на множестве I, определим *фильтрованное произведение*, которое будем обозначать $\mathfrak{A}_F = \mathfrak{A}/_{\equiv_F}$. Эквивалентность определяется следующим образом. Пусть $a, b \in A$, тогда $a \equiv_F b \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \{i \in I | a(i) = b(i)\} \in F$ $(a(i) = b(i)$ для F-большинства $i)$. Нетрудно убедиться в том, что мы получили действительно отношение эквивалентности, и более того, отношение конгруэнтности на структуре $\mathfrak{A}$.

$A/_{\equiv_F}\{[a] | a \in A\}$ соответственно отображению $A \overset{p}{\to} A/_{\equiv_F}$ $(a \mapsto [a])$ и $[a]_F = \{b | b \equiv_F a\}$.

$\mathfrak{A}_F = (A/_{\equiv_F}; I)$, где

- $c^{\mathfrak{A}_F} = [c^{\mathfrak{A}}]$;
- $f^{\mathfrak{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n]) = [f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)]$;
- $P^{\mathfrak{A}_F}([a_1], \ldots, [a_n])\ {}^{-}T \Longrightarrow P^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ для F-большинства i.

Если F — ультрапроизведение, то $\mathfrak{A}/_F$ называется *ультрапроизведением.*

Теорема 4 (об ультрапроизведениях)**.** *Пусть* F *— ультрафильтр на множестве* I, $\mathfrak{A}_i$ *— семейство стркутур,* $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *—* σ*-формула и пусть* $a_1, \ldots, a_k \in \prod_i A_i$. *Тогда* $\mathfrak{A}_F \models \varphi([a_1], \ldots, [a_k])$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ *для* F*-большинства индексов.*

Теорема 5. *Бесконечное множество* Γ *имеет модель, если каждое его конечное подмонжество* Γ *имеет модель.*