

Домашнее задание 8. Выводимость.

(26 октября → 2 ноября)

- 1) Докажите, что “основные равносильности логики предикатов” (т. е. равносильности, используемые при приведении формул к ДНФ и к предваренному виду) выводимы в двух версиях гильбертовского ИП и в генценовском исчислении секвенций.
- 2) Докажите, что “основные тавтологии” (т. е. аксиомы гильбертовского ИП, не содержащие кванторов в явном виде), выводимы в генценовском исчислении секвенций.

Докажите, что выводимы — то есть, сначала объясните “на пальцах”, а затем попытайтесь формализовать в одной из систем (Генценовской или Гильбертовской):

- 3) Из аксиом упорядоченных абелевых групп — формулы, выражающие следующие утверждения:
 - (а) если элемент x положителен, то элементы $x + x$ и $x + x + x$ также положительны;
 - (б) если элемент x отрицателен, то элементы $x + x$ и $x + x + x$ также отрицательны;
 - (в) квадрат любого ненулевого элемента положителен;
 - (г) порядок является плотным.
- 4) Из аксиом арифметики Пеано — формулы, выражающие следующие утверждения:
 - (а) сложение ассоциативно и коммутативно;
 - (б) умножение ассоциативно и коммутативно;
 - (в) умножение дистрибутивно относительно сложения;
 - (г) между x и $x + 1$ нет других элементов.
- 5) Из аксиом ZFC — формулы, выражающие следующие утверждения:
 - (а) существует единственное пустое множество;
 - (б) для любых двух множеств существуют и единственны их объединение, пересечение, и разность;
 - (в) две упорядоченные пары (в смысле $\{\{a\}, \{a, b\}\}$) равны в точности тогда, когда равны их первые и вторые компоненты;
 - (г) если x — ординал, то $x + 1 = x \cup \{x\}$ тоже ординал, и между ними нет других ординалов;
 - (д) существует единственное множество натуральных чисел (определяемых как ординалы специального вида).