Математическая логика — 2
V семестр

Лектор: Виктор Львович Селиванов
Записывали: Глеб Минаев, Иван Кабашный
Редактировал: Борис Алексеевич Золотов

МКН СПбГУ, осень 2022

Содержание

1 Логика предикатов

1.1 Истинность и доказуемость

1.1.1 Структура

Бурбаки классифицировал структуры как:

1) операции,

2) частичные порядки,
3) топологические структуры.

Последние не имеют приложения в логике — их мы рассматривать не будем. “Операции” — это структуры алгебраические, “частичные порядки” — это структуры, снабжённые каким-либо отношением.

Определение 1. *Сигнатура* — набор функциональных, предикатных и константных символов вместе с функцией, задающей арность этих символов.

Функциональные символы интерпретируются как функции $A^n \to A$, предикатные символы — как функции $A^m \to \{и; л\}$, а константы — как элементы A (или, что равносильно, функции $\{\varnothing\} \to A$).

Будем называть *σ-структурой* (*структурой сигнатуры σ*) пару (A, I), где A — непустое множество, а I — интерпретация сигнатурных символов σ в A.

Пример 1. *Сигнатура упорядоченного кольца — $\langle +,\ \cdot;\ <;\ 0,\ 1\rangle$. Можно добавить вычитание и взятие противоположного, но они выражаются в имеющейся сигнатуре.*

Определение 2. $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ — σ-структуры. Тогда отображение $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если оно задаёт $\varphi : A \to B$, что для всякой функции f^n из сигнатуры σ и для всяких $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)),$$

для всякого предиката P^m в сигнатуре σ и всяких $a_1, \dots, a_m \in A$

$$P_A(a_1, \dots, a_m) \quad\Longrightarrow\quad P_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m))$$

и для всякой константы c сигнатуры σ

$$\varphi(c_A) = c_B.$$

φ — изоморфизм, если φ — гомоморфизм, биективен, и φ^{-1} — гомоморфизм.

$\mathbb{A}$ называется *подструктурой* $\mathbb{B}$ ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi : A \to B, a \mapsto a$ — гомоморфизм.

1.1.2 Термы и формулы

Определение 3. Фиксируем некоторое множество V — *“множество переменных”* — символы $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neq$ и символы $\forall x$ и $\exists x$ для всякого $x \in V$.

Терм — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- переменная — терм,
- константа — терм,
- для всяких термов $t_1, \dots, t_n$ и функции f^n выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

Формула — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- для всяких термов t_1, t_2 выражение $t_1 = t_2$ — формула,
- для всяких предиката P^n из σ и термов $t_1, \dots, t_n$ выражение $P(t_1, \dots, t_n)$ — формула,
- для всяких формул φ и ψ выражения $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neq \varphi$ — формулы,
- для всяких формулы φ и переменной x выражения $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — формулы.

For_σ — множество всех формул с сигнатурой σ.

Пример 2. *В кольцах всякий терм можно свести к полиному с целыми коэффициентами. В мультипликативных группа — моному с целым коэффициентов.*

Задача 1. Семейства термов и формул задаются контекстно свободными грамматиками.

Определение 4. Переменная x называется *свободной* в формуле φ, если есть вхождение x не покрывается никаким квантором $\forall x$ и никаким квантором $\exists x$. $\mathrm{FV}(\varphi)$ — множество всех свободных переменных формулы φ.

1.1.3 Значение термов и формул

Определение 5. Пусть t — терм в сигнатуре σ, а $\mathbb{A}$ — σ-структура. Тогда $t^{\mathbb{A}} : A^n \to A$ — *означивание* t, некоторая функция, полученная подставлением вместо констант их значений в $\mathbb{A}$ и последующим рекурсивным означиванием по синтаксическому дереву t. Аналогично получается означивание формулы $f^{\mathbb{A}} : A^n \to \{\text{и}; \text{л}\}$.

Определение 6. *Предложение* в сигнатуре σ — формула без свободных переменных.

$$\varphi^{\mathbb{A}} \in \{T, F\},$$
$$\varphi^{\mathbb{A}} = T \iff \mathbb{A} \models \varphi.$$

Определение 7. *Моделью* данного множества предложения Γ называется структура, в которой все предложения из Γ истины. Если $\mathbb{A}$ — это модель, то иногда пишут $\mathbb{A} \models \Gamma$.

Если Γ — множество предложений, φ — предложение. Говорят, что φ логически следует из Γ ($\Gamma \models \varphi$), если φ истино в любой модели Γ.

Определение 8. Предложение φ называется тождественно истино, если оно истино в любой структуре. Иногда пишут $\models \varphi$.

Утверждение 1.

- $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *не имеет модели.*
- φ — *тождественная истина тогда и только тогда, когда* $\models \varphi$.
- Γ — *конечное;* $\Gamma \models \varphi$ *тогда и только тогда, когда* $(\wedge\Gamma) \to \varphi$ — *тожественная истина.*

1.1.4 Ультрафильтры

Определение 9. Пусть I — непустое множество. *Фильтром* на множестве I называется непустое множество $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ (где $\mathcal{P}(I)$ — множество всех подмножеств), которое не содержит $\emptyset \subset I$, а также замкнуто относительно пересечения:

$$\forall A, B \in F \quad A \cap B \in F,$$

и взятия надмножеств:

$$\forall A \in F \quad A \subseteq B \subseteq I \implies B \in F.$$

Фильтр F называется *ультрафильтром*, если $A \in F$ или $\overline{A} \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Утверждение 2.

1) *Фильтр F является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным по включению среди всех фильтров (то есть, нет фильтра, который бы его расширял).*

2) *Пусть F — ультрафильтр и A, $B \subseteq I$, тогда*

$$A \in F \iff \overline{A} \notin F,$$
$$A \cup B \in F \iff A \in F \text{ или } B \in F.$$

3) *Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.*

Доказательство. Докажем 1.

Пусть F — ультрафильтр. Утверждается, что нет фильтра F', который содержал бы F ($F' \supseteq F$). Предположим противное, т.е. что существует такое A, что оно принадлежит F' и не принадлежит F. Раз $A \notin F$, то $\overline{A} \in F$. В силу того, что $F \subseteq F'$, то $\overline{A}$ также принадлежит F'. Таким образом, $\emptyset = A \cap \overline{A} \in F'$, противоречие.

В обратную сторону, F — максимальный по включению фильтр. От противного, пусть есть множество $A \subseteq I$ такое, что $A, \overline{A} \notin F$. Рассмотрим

$$F' = \{X \subseteq I \mid \exists B \in F \ A \cap B \subseteq X\}.$$

F' должно быть фильтром (замкнутость вверх по включению понятна, замкнутость относительно пересечения также верна, так как если $X, Y \in F'$, $A \cap B \subseteq X$, $A \cap C \subseteq Y$ для $B, C \in F$, то $A \cap B \cap C \subseteq (X \cap Y)$. $B \cap C \in F$, а значит, $X \cap Y \in F'$. и последнее, если бы $\emptyset \in F'$, то получается очевидное противоречие из того, что $A \cap B$ всегда непусто).

Докажем 2. Пусть F — ультрафильтр. Одновременно A и $\overline{A}$ принадлежать F не могут. Имеем $A \in F \vee \overline{A} \in F$, откуда понятно. Второе утверждение очевидно в левую сторону.

В другую сторону, имеем $A \cup B \in F$, предоположим противное. Пусть $A, B \notin F$, значит, $\overline{A}, \overline{B} \in F$, а тогда $\overline{A} \cap \overline{B} \in F$. По закону деМоргана, $\overline{A \cup B} \in F$, откуда $A \cup B \notin F$.

Докажем 3. Пусть имеется F. Утверждается, что существует ультрафильтр F^*, который сожержит F ($F^* \supseteq F$). Данное утверждение нетривиально и в каком-то смысле схоже с аксиомой выбора. Применим лемму Цорна.

Лемма 3 (Цорн). *Пусть $(P; \leq)$ — частичный порядок, в котором всякая линейная цепь $A \supseteq P$ имеет верхнюю границу. Тогда в этом частичном порядке есть максимальный элемент.*

Рассмотрим множество всех фильтров $P = \{G$ — фильтр $|F \subseteq G\}$, и порядок $\subseteq$. Пусть $\mathfrak{F}$ — множество фильтров $F_1 \subseteq F_2 \vee F_2 \subseteq F$, а $F' = \bigcup \mathfrak{F}$. F' — фильтр, что проверяется ручками. По лемме, существует F^* — максимальное расширение. $\square$

Пример 3.

- *Пусть есть I, тогда $\{I\}$ — фильтр.*
- *Пусть $\emptyset \neq A \subseteq I$, тогда $F = \{X \subseteq |A \subseteq X\}$ — фильтр.*

Задача 2. Если I бесконечное, то в $P(I)$ есть неглавные ультрафильтры. Для доказательства рассматриваем $F = \{A \subseteq I | A$ — коконечно$\}$, и существующий по доказанному ранее $F^* \supseteq F$.

1.1.5 Декартово и фильтрованное произведения структур

Пусть имеется некоторое проиндексированное семейство σ-структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$.

Определение 10 (Декартово произведение)**.** Определим σ-структуру на декартовом произведении нескольких σ-структур. Мы будем обозначать её $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$.

Носителем структуры будет множество

$$A = \prod_{i \in I} A_i = \left\{ a \colon I \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; a(i) \in A_i \right\}.$$

Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

1) $c^{\mathbb{A}}(i) = c^{\mathbb{A}_i}$ — отображение, возвращающее в каждой структуре соответствующую константу;

2) $\big(f^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n)\big)(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ — действуем функцией в каждой структуре, собираем из образов элемент декартова произведения;

3) $P^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_n) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ выполнен для всех $i \in I$.

Определение 11 (Фильтрованное произведение)**.** Пусть F — фильтр на множестве I. *Фильтрованное произведение* нескольких структур (обозначается $\mathbb{A}_F$) получается факторизацией их декартова произведения по следующему отношению эквивалентности:

$$a \equiv_F b \overset{\text{def}}{\iff} \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in F$$

(говорят, что $a(i) = b(i)$ *для F-большинства i).*

Носителем фильтрованного произведения будет фактор-множество $A/{\equiv_F}$, состоящее из классов эквивалентности $\{[a] \mid a \in A\}$. Константы, функции и предикаты интерпретируются следующим образом:

1) $c^{\mathbb{A}_F} = \left[c^{\mathbb{A}}\right]$ — класс элемента, собранного из соответствующих констант во всех структурах;

2) $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = \left[f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)\right]$ — надо проверить, что определено однозначно (потому что пересечение множеств фильтра принадлежит фильтру);

3) $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ для F-большинства i.

Если F — ультрафильтр, то $\mathbb{A}_F$ называется *ультрапроизведением.*

Теорема 4 (об ультрапроизведениях)**.** *Пусть F — ультрафильтр на множестве I, $\mathbb{A}_i$ — семейство стркутур, $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ — σ-формула и пусть $a_1, \dots, a_k \in \prod_i A_i$. Тогда $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_k])$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_n(i))$ для F-большинства индексов.*

1.1.6 Теорема Гёделя о компактности

Теорема 5. *Бесконечное множество предложений Γ имеет модель, если каждое его конечное подмножество Γ' имеет модель.*

1.2 3 лекция

Утверждение 6.

$$\varphi([a_1], \dots, [a_k]) \iff \{i | \mathbb{A} \models \varphi(a_1(i), \dots, a_k(i))\} \in F.$$

Утверждение 7 (Следствие)**.**

$$\mathbb{A}_F \models \varphi \iff \{i | \mathbb{A}_i \models \varphi\} \in F.$$

Ультрапроизведения. Доказательство приведём индукцией по построению формулы. Простейшие формулы в виде предиката и равенства двух термов рассматриваются очевидно, это - база. Обратим внимание на функциональный символ $f \in \sigma$. Как он интерпретируется?

$$f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_k]) := [\lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i))]$$

Из определения декартового у нас было

$$f^{\mathbb{A}}([a_1], \dots, [a_k]) := \lambda_i f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i)),$$

где $i \mathbb{A} psto f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_k(i))$, и $\lambda x f(x) = f$. Причём согласно фильтру

$$\begin{gathered} a_1 \equiv_F a_1' \\ \vdots \\ a_k \equiv_F a_k' \\ f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_k) \equiv_F f^{\mathbb{A}}(a_1', \dots, a_k'). \end{gathered}$$

$J_i\{i|a_1(i) = a_1'(i)\} \in F$, $f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_k(i)) = J_1 \cap \ldots, \cap J_k \in F = f^{\mathbb{A}}(a_1', \ldots, a_k')$. Константы $c^{\mathbb{A}}$ интерпретируются как $\lambda_i c^{\mathbb{A}_i}$, переменные означиваются каким-то образом $x_j \mathbb{A} pstoa_j(i)$, $t^{\mathbb{A}_i} = f^{\mathbb{A}_i}(t_1^{\mathbb{A}_i}, \ldots, t_k^{\mathbb{A}_i})$, значит, $t^{\mathbb{A}}(a_1, \ldots, a_k) = f^{\mathbb{A}}(t_1^{\mathbb{A}}(\overline{a}), \ldots, t_k^{\mathbb{A}}(\overline{a}))$. Соответственно, из определения это верно для простейших формул. Перейдём теперь к сложным формулам.

Более сложные формулы строятся из простых при помощи логических связок и кванторов. Достаточно рассматривать только конъюнкцию, отрицанию и существование (остальные выражаются через них). Пусть мы хотим проверить

$$\mathbb{A}_F \models (\varphi \wedge \psi)(a_1, \ldots, a_k).$$

Это означает, что $\mathbb{A}_F \models \varphi([\overline{a}])$ и $\mathbb{A} \models \psi([\overline{a}])$. $J = \{i|\mathbb{A}_i \models \varphi(\overline{a(i)})\} \in F$. Проверяется $i \in J \cap K$,

$$\{\mathbb{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)(a_1(i), \ldots, a_k(i))\} \in F.$$

Отрицание также легко проверяется для ультрафильтров, так как есть свойство дополнения.

$$\mathbb{A}_F \models \neg\varphi([\overline{a}])$$
$$\neg(\mathbb{A}_F \models \varphi([\overline{a}]))$$
$$\ldots$$

Существование проверяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(x_1, \ldots, x_k), \\ \varphi &= \exists x \theta(x, x_1, \ldots, x_k). \\ \mathbb{A}_F &\models \varphi([a_1], \ldots, [a_k]), \\ \mathbb{A}_F &\models \theta([b], [a_1], \ldots, [a_k]) \text{ для некоторого } b \in \mathbb{A}. \end{aligned}$$

И нам нужно доказать в две стороны. Для этого рассматриваем

$$\begin{aligned} J &= \{i|\mathbb{A}_i \models \theta(b(i), a_1(i), \ldots, a_k(i))\}, \\ K &= \{i|\mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \ldots, a_k(i))\}. \end{aligned}$$

Это – элементы F, которые в разных случаях лежат друг в друге. Не уловил суть, надо будет дописать и переписать. □

Теорема 8. *Бесконечное множество* Γ *имеет модель, если каждое его конечное подмножество* Γ *имеет модель.*

Доказательство. Пусть $I = \{i|i$ – конечное подмножество $\Gamma\}$. Для каждого $i \in I \mapsto \mathbb{A}_i$ существует своя структура. Тогда можно построить следующее семейство структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$, где $\mathbb{A}_i \models i$. Рассмтрим декартово произведение $\mathbb{A} = \prod_i \mathbb{A}_i$ и $G_i = \{j \in I|i \subseteq j\}$. Если $k \in I$, то $G_i \cap G_k = G_{i\cup k}$ (I - бесконечно). Утверждается, что $F = \{A \subseteq I|\exists_i(G_i \subseteq A)\}$ - ультрафильтр. Свойства проверяются очевидно. □

Определение 12.

- $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ iff значения простых формул в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ совпадают;
- $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, если $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ и значения любых формул в A и B совпадают (элементарная подструктура);
- $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, если они удовлетворяют одни и те же предложения (элементарная эквивалентность).

Утверждение 9. $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, *тогда* $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ *и* $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$.

Теорема 10 (Лёвингейма-Сколема, понижение)**.** *Пусть есть* $\mathbb{A}$, $X \subseteq \mathbb{A}$, $|X| \leq |For_\sigma|$. *Тогда существует* $\mathbb{B} \preceq \mathbb{A}$: $X \subseteq \mathbb{B}$ *и* $|\mathbb{B}| \leq |For_\sigma|$.

1.3 Лекция 4

Доказательство. Построим последовательность $X = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots$, где

$$S_{n+1} = S_n \cup \{\eta(e) | e \in E_n\},$$

где E_n и $\eta : E_n \to A$ определены следующим образом:

$$E_n = \{(\overline{a}, \varphi(\overline{x}, y)) | \overline{a} \in S_n \text{ и } \mathbb{A} \models \exists y \varphi(\overline{a}, y)\}$$

и $\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}, \eta(e))$ $(e \in E)$. В качестве B просто возьмём $\bigcup_n S_n$. Нужно проверить, что $|B| \leq |\mathrm{For}_\sigma|$ – это делается по индукции по S_i. E_n по мощности не превосходит For_σ посредством сравнения через For_σ^2, откуда и получаем требуемое.

Рассмторим теперь $\mathbb{B} = (B, I)$ с сигнатурой σ и проверим, что B замкнуто относительно интерпретаций элементов сигнатуры. Это получается несложно, а предикаты мы зададим как

$$P^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_n) \Longrightarrow P^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n) = T.$$

Осталось лишь проверить, что для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ и для любых значений переменных $(a_1, \ldots, a_k) = \overline{a} \in B$, тогда значение на этих элементах в $\mathbb{B}$ будет совпадать со занчением в $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a}) \Longleftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi(\overline{a}).$$

Проверяется это, конечно, индукцией по построению формулы. Рассмотрим $\wedge, \neg$ и $\exists$, через них всё выражается и провреим для них. Конъюнкция – очевидна, ровно как и отрицание. Интерес представляет существование. Пусть $\psi(\overline{x}) = \exists y \varphi(\overline{x}, y)$. Пусть для φ уже доказано, что $\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a}, c) \Longleftrightarrow \mathbb{A} \models (\overline{a}, c)$. Слева направо требуемое очевидно, а справа налево я проспал. $\square$

Замечание. На этом месте могло бы быть лирическое отступление про ZFC.

Пусть теперь $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$. τ называется *обогащением* структуры σ, если последняя лежит в первой и дополнение непусто.

Определение 13.

1) Пусть $\mathbb{A}$ – σ-структура. $\sigma_{\mathbb{A}} = \sigma \cup \{c_a | a \in A\}$, c_a – новые константные символы, причём $c_a \neq c_b$ при $a \neq b$. $D(\mathbb{A})$ – множество атомарных формул сигнатуры $\sigma_{\mathbb{A}}$ и их отрицаний, истинных в $\mathbb{A}$ при интерпретации $\sigma_a \models a$. (*диаграмма* $\mathbb{A}$)

2) *Элементарная диаграмма* $\mathbb{A}$ – это множество $D^*(\mathbb{A})$ всех предлжений $\sigma_{\mathbb{A}}$, истинных в $\mathbb{A}$. ($D(\mathbb{A}) \subseteq D^*(\mathbb{A})$)

Утверждение 11.

1) *Если $\mathbb{B} \models D(\mathbb{A})$, то $\mathbb{B}|_\sigma$ содержит подструктуту $\mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}|_\sigma$, такую что $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{A}$.*

2) *Если $\mathbb{B} \models D^*(\mathbb{A})$, то $\mathbb{B}|_\sigma$ содержит элементарную подструктуру, изоморфную $\mathbb{A}$.*

Доказательство. *на доске рисуются картинки* ☐

Теорема 12. *Пусть имеется бесконечная $\mathbb{A}$ – σ-структура и $H \geq \max(|A|, |For_\sigma|)$. Тогда найдётся $\mathbb{B} \succeq \mathbb{A}$ можности хотя бы H.*

Доказательство. Рассмотрим $\sigma \mapsto \sigma_{\mathbb{A}} \models \tau = \sigma_{\mathbb{A}} \cup \{d_x | x \in H\}$ так, что $x \neq x' \Rightarrow d_x \neq d_{x'}$. И построим

$$\Gamma = D^*(A) \cup \{\neg(d_x = d_{x'} | x, x' \in H, x \neq x')\}$$

множество предложений сигнатуры τ. Любое конечное $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ имеет модель, являющуюся τ-расширением структуры $\mathbb{A}$ (легко проверяется). По теореме о компактности существует $\mathbb{C}$ – τ-структура, такая, что $\mathbb{C} \models \Gamma$. И как-то завершаем доказательство. ☐

Определение 14. *Теория* (T) – множество всех предложений в структуре σ.

1.4 Лекция 5

Утверждение 13 (следствие Лёвингейма-Сколема)**.**

1) *Если σ-теория имеет бесконечную модель, то она имеет модель любой мощности хотя бы $|For_\sigma|$;*

2) *Если σ-теория имеет конечные модель сколь угодно большой мощности, то она имеет модель любой мощности хотя бы $|For_\sigma|$.*

Доказательство. *рисуются картинки* ☐

Теорема 14 (без доказательства)**.** *Логика предикатов – единственная логика, для которой верны и теорема о компактности и теорема о понижении мощности.*

1.5 Аксиоматизированные классы

Определение 15.

1) $\mathrm{Sent}_\sigma \supseteq T$, $\mathrm{Str}_\sigma \supseteq K$. Сопоставим $T \mapsto \mathrm{Mod}(T)$, $K \mapsto \mathrm{Th}(K) = \{\varphi | \forall \mathbb{A} \in K(\mathbb{A} \models \varphi)\}$. Класс K называется *аксиоматизируемым*, если $K = \mathrm{Mod}(T)$ для всех T;

2) K – *конечно аксиоматизируемый*, если $K = \mathrm{Mod}(T)$ для некоторого конечного $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$

Предложение 15.

1) *$T \subseteq T'$, тогда $Mod(T) \supseteq Mod(T')$;*

2) *$K \subseteq K'$, тогда $Th(K) \supseteq Th(K')$;*

3) *$K \subseteq Mod(Th(K))$: $T \subseteq ThMod(T)$;*

4) *Любое пересечение аксиоматизированных классов является аксиоматизированным классом. Объединение двух аксиоматизированных классов является аксиоматизированным классом;*

5) *Класс K является аксиоматизированным тогда и только тогда, когда $K = Mod(Th(K))$;*

6) *K конечно аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда K и $Str_\sigma \backslash K$ аксиоматизируемы;*

7) *K – аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда K замкнут относительно $\equiv$ и ультрапроизведений.*

Доказательство. Докажем (7) в левую сторону (в правую – д/з). Пусть $\{\mathbb{A}\}_{i \in I} \in K$, тогда $\mathsf{MA}_F \in K$. Проверим, что K совпадает с множеством $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(K))$ (5), причём из третьего свойства включение K в множество моделей очевидно, а с другим придётся повозиться.

Пусть$\mathbb{A} \models \mathrm{Th}(K)$, и нам нужно показать, что $\mathbb{A} \in K$. $\mathbb{A} \equiv \mathbb{B}_{F^*}$, где F^* – некий ультрафильтр на подходящем множестве I; $B_i \in K$. Откуда взять множество I? Недолго думая, возьмём $I := \mathrm{Th}(A)$. Утверждается, что для любого $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A}) \exists \mathbb{B} \in K(\mathbb{B} \models \varphi)$.

Возьмём любое φ и предположим, что это не верно. То есть, для любой структуры $\mathbb{B} \in K$, $\mathbb{B} \models \neg\varphi$, тогда $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(K)$ и в $\mathbb{A}$ истино $\neg\varphi$ – противоречие. Таким образом $\varphi \mapsto \mathbb{B}_\varphi \models \varphi$, и мы получили семейство структур. Надо построить ультрафильтр.

Для каждого $\varphi \in I$ рассмотрим $U_\varphi := \{\psi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A}) | \models \psi \to \varphi\}$, $\varphi \in U_\varphi$. $U_\varphi \cap U_{\varphi'} = U_{\varphi \wedge \varphi'} \neq \emptyset$ и принадлежит $\mathrm{Th}(\mathbb{A})$. Пусть $F = \{J \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{A}) | \exists \varphi (J \supseteq U_\varphi)\}$. Это – конечно, ультрафильтр. F^* – любой ультрафильтр, расширяющий F, должен нам подойти.

$\mathbb{A} \models \varphi$, $\varphi \in I = \mathrm{Th}(\mathbb{A})$, $\mathbb{B}_\varphi \models \varphi$.

$$U_\varphi \subseteq \{\psi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A}) | \mathbb{B}_\psi \models \varphi\} \in F \subseteq F^*$$

$\psi \in U_\varphi$, $\psi \in \mathrm{Th}(\mathbb{A})$. $\models \psi \to \varphi$, $\mathbb{B}_\psi \models \psi$, $\mathbb{B}_F \models \varphi$. $\square$

Определение 16. Σ_n ($n \in \mathbb{N}$) – множество σ-формул (равносильных):

- Σ_0 – бескванторные формулы;
- Σ_1 – формулы вида $\exists \overline{x} \psi(\overline{x}, \overline{y})$, а ψ – бескванторная;
- Σ_2 – формулы вида $\exists \overline{x_1} \forall \overline{x_2} \psi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{y})$;
- и так далее по *иерархии σ-формул по числу перемен кванторов в предварённой нормальной форме* получаем $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Π_n – определяется аналогично с заменой $\exists$ на $\forall$ и наоборот.

Предложение 16.

- $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$*;*
- $\varphi \in \Pi_n$ *тогда и только тогда, когда* $\neg\varphi \in \Sigma_n$*;*
- $\bigcup \Sigma_n = \bigcup \Pi_n = For_\sigma$*.*

Теорема 17. *Аксиоматизируемый класс является* Π_1 *аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур (если какая-то структура лежит в классе, то любая еэ подструктура тоже лежит в нём).*

Доказательство. Докажем слева направо. Пусть у нас есть класс $K = \mathrm{Mod}(T)$, где T – множество Π_1 предложений. Нам нужно доказать, что он замкнут относительно подструктур. Если $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \models T$, то утверждается, что $\mathbb{A} \models T$. По-другому это можно расписать как $A \subseteq \mathbb{B} \models \varphi = \forall \overline{x} \psi(\overline{x})$. И это верно, потому что очевидно. Начнём с конца: $\mathbb{A} \models \psi(\overline{a})$ при $\overline{a} \in A$, тогда $\mathbb{B} \models \psi(\overline{a})$. $\square$

1.6 Лекция 6

В прошлый раз мы остановились на доказательстве теоремы.

Теорема 18. *Аксиоматизируемый класс* Π_1*-аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подструктур.*

Доказательство. Справа налево. $K = \mathrm{Mod}(T)$, и введём класс аксиом $\Gamma = \{\varphi \in \Pi_1 | T \models \varphi\}$. И оказывается, что $K = \mathrm{Mod}(\Gamma)$, мы хотим это доказать. Включение K в $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ – очевидно. В другую – возьмём некоторую модель множества Γ ($\mathbb{B} \models \Gamma$), тогда нужно проверить, что $\mathbb{B} \in K$, Конечно, нужно воспользоваться замкнутостью. Достаточно найти $\mathbb{C} \in K$, что $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}$. Утверждается, что существует $\mathbb{A} \models T$ такая, что $\mathrm{Th}_{\Sigma_1} \supseteq \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$.

Определение 17. Если что, $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \{\varphi | \mathbb{A} \models \varphi\}$, $\Phi \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, $\mathrm{Th}_\Phi(\mathbb{A}) = \{\varphi \in \Phi | \mathbb{A} \models \varphi\}$.

В точности нам нудно доказать, что для $T \cup \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B})$ имеется модель. Предположим, $T \cup \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ не имеет модель. $\psi = \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \in \Sigma_1$, $T \cup \{\psi\}$ не имеет модели. $T \models \neg\psi \in \Pi_1$, а значит, $\mathbb{B} \models \neg\psi$, а с другой стороны $\mathbb{B} \models \psi$, противоречие.

Нам нужно вложить $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C} \models T$. Это всё равно, что найти модель для её диаграммы. То есть равносильно, что $T \cup D(\mathbb{B})$ имеет модель. Применим в очередной раз теорему о компактности. То есть хочется, чтобы $T \cup \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ имело модель, где $\delta_1 = \delta_i(\overline{c})$ $(c \in \sigma_B)$. Возьмём какие-то новые переменные и подставим: $\mathbb{B} \models \exists \overline{x}(\delta_1(\overline{x}) \wedge \ldots \wedge \delta_m(\overline{x}))$. Это предложение истино в $\mathbb{B}$, лежит в Σ_1, а значит, истино и в $\mathbb{A}$. Тогда при подходящей интерпретации $\mathbb{A}$ – искомая модель. □

Докажем теперь аналогичную теорему для Π_2.

Теорема 19 (Теорема Чэна-Лося-Сушко)**.** *Аксиоматизируемый класс Π_2-аксиоматизируемый тогда и только тогда, когда он замкнут относительно объединений цепей стртуктур.*

Замечание. Что значит последнее условие? Если у нас есть возрастающая бесконечная цепочка структур $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \ldots$, тогда можно построить $\mathbb{A} = \bigcup \mathbb{A}_n$. $A = \bigcup A_n$, предикаты, функции и константы интерпретируются просто через объединение $P^{\mathbb{A}} = \bigcup P^{\mathbb{A}_n}$, и даже если с первого взгляда не верится, это – корректное определение структуры. Таким образом, класс замкнут относительно объединений цепей, если $\forall n(\mathbb{A}_n \in K)$, $\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \ldots$, $\bigcup \mathbb{A}_n \in K$.

Доказательство. Докажем сначала в лёгкую сторону, слева направо. Пусть у нас есть $K = \mathrm{Mod}(T)$, $T \subseteq \Pi_2$. А также цепочка $\mathbb{A}_i \in K$, тогда нам нужно показать, что их объединение $\mathbb{A} \in K$. Рассмотрим $\varphi \in T$, мы хотим проверить, что $\mathbb{A} \models \varphi$. $\varphi : \forall \overline{x} \exists \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y})$, ψ – бескванторная. $\mathbb{A}_n \models \varphi$ при любом n. $\overline{a} \in A$ – значение $\overline{x}$. Тогда нужно доказать, что $\mathbb{A} \models \exists \overline{y} \psi(\overline{a}, \overline{y})$. $\overline{a} \in A_n$ для некоторого $n \geq 0$ $(\mathbb{A}_n \subseteq \mathbb{A})$. $\mathbb{A}_n \models \exists \overline{y} \psi(\overline{a}, \overline{y})$. И найдутся $\overline{b} \in A_n$, $\mathbb{A}_n \models \psi(\overline{a}, \overline{b})$. Ладно, я не успеваю и теряюсь в логике повествования.

В обратную сторону начало аналогичное. Включение слева направо опять понятно, и далее схема тоже схожа, мы только хотим, чтобы $\mathbb{B} \models T$. Найдём объединение возрастающей цепочки K-структур $\mathbb{B}_\omega \succeq \mathbb{B}$. Ну то есть, мы её построим для начала. Доказательство того, что существует $A \models T$ такое, что $\mathrm{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{A}) \subseteq \mathrm{Th}_{\Sigma_2}(\mathbb{B})$, аналогично предыдущей теореме. Докажем ещё одно вспомогательное утверждение.

Существуют $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$ и $\mathbb{B}' \succeq \mathbb{B}$ такие, что $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}' \subseteq \mathbb{B}'$. Рассмотрим $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$, где $\mathbb{B}_B$ – естественное σ_B-обогащение $\mathbb{B}$. Если взять любое конечное множество из второй теории объединения, то аналогично предыдущей теореме, они они имеют константы: $\delta_1(\overline{c}), \dots, \delta_m(\overline{c})$. Значит,

$$\mathbb{B} \models \exists \overline{x}(\delta_1(\overline{x}) \wedge \ldots \wedge \delta_m(\overline{x})) \in \Sigma_2,$$

следовательно, истино и в $\mathbb{A}_B$. $\mathbb{A}'_B$ – любая модель $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) \cup \mathrm{Th}_{\Pi_1}(\mathbb{B}_B)$ ($\mathbb{A}'$ – объединение до σ-структуры). $\mathbb{A}' \equiv \mathbb{A}$ и $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}'$, $\mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{B}_B) \supseteq \mathrm{Th}_{\Sigma_1}(\mathbb{A}'_B)$.

Рассмторим теперь $D(\mathbb{A}'_B) \cup \mathrm{Th}(\mathbb{B}_B)$. Точно так же рассуждая, как и выше, эта теория имеет модель $\mathbb{B}'_{A'}$ такую, что $\mathbb{B} \preceq \mathbb{B}'$. Исходя из этого и будем строить цепочку.

Возьмём структуры $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 (\equiv \mathbb{A}) \subseteq \mathbb{B}_1$. Берём теперь опять $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}_1$, для них применяем опять утверждение из третьего абзаца, получаем, что $\mathbb{B}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 (\equiv \mathbb{A}) \subseteq \mathbb{B}_2$, и так далее. $\mathbb{A}_n \models T$, $\mathbb{A}_\omega = \bigcup \mathbb{A}_n \models T$. $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \preceq \mathbb{B}_1 \preceq \ldots$. Значится, $\mathbb{B}_\omega = \mathbb{A}_\omega$, $\mathbb{B}_0 \preceq \mathbb{B}_\omega$, откуда и получается требуемое. □

1.6.1 Полнота, модельная полнота, элиминация кванторов.

Определение 18. Теория T называется *полной*, если она имеет модель и из неё следует либо φ, либо $\neg\varphi$ для любого σ-предложения.

Утверждение 20. *Для непротиворечивой теории T равносильны следующие условия:*

1) T – полна;

2) $[T] = Th(\mathbb{A})$, для любой $\mathbb{A} \models T$ (где $[T] = \{\varphi | T \models \varphi\}$);

3) $Th(\mathbb{A}) = Th(\mathbb{B})$ для любых $\mathbb{A}$, $\mathbb{A} \models T$.

Теорема 21 (тест Воота)**.** *Если теория не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\geq |For_\sigma|$, то она полна.*

Определение 19. T называется категоричной в можщности H, если T имеет единственную с точностью до изоморфизма модель мощности H.

Определение 20. T модельно полна, если $\subseteq$ и $\preceq$ на $\mathrm{Mod}(T)$ совпадают.

1.7 Лекция 7

Теорема 22.

1) T – модельно полна;

2) Для любой $\mathbb{A} \models T$, теория $T \cup D(\mathbb{A})$ полна;

3) (Тест Робинсона) Для любых $\mathbb{A}, \mathbb{B} \models T$ из $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ следует, что любое Σ_1-предложение в сигнатуре σ_A, которое истинно в $\mathbb{B}$, будет истинно и в $\mathbb{A}$;

4) $\Sigma_1 = \Pi_1$ по модулю T, то есть любая Σ_1-формула $\varphi(\overline{x})$ равносильна подходящей Π_1-формуле $\psi(\overline{x})$ в T (то есть $T \models \forall \overline{x}\ (\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$);

5) Любая формула $\varphi(\overline{x})$ равносильна подходящей Π_1-формуле в T.

Замечание. Пока мы ввели иерархию только для предложений. Она точно так же строится для формул со свободными переменными.

Доказательство. На практиках мы уже доказали $1 \Rightarrow 2$, $2 \Rightarrow 3$.

Нетривиальным является следствие $3 \Rightarrow 4$. Пусть $\varphi(\overline{y})$ – Σ_1-формула. Нам нужно найти Π_1-формулу $\psi(\overline{y})$ такую, что $T \models \forall \overline{y}\ (\varphi(\overline{y}) \leftrightarrow \psi(\overline{y}))$. Скажем, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_k)$, обогатим сигнатуру константными символами $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_k)$. Тогда достаточно доказать, что $T \models \varphi(\overline{c}) \leftrightarrow \psi(\overline{c})$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma \in \Pi_1 \mid T \models \varphi(\overline{c}) \to \gamma\}$. Достаточно доказать, что $T \cup \Gamma \models \varphi(\overline{c})$. Действительно, если это так, то для конечного подмножества Γ выполнено $T \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \models \varphi$, тогда $\psi = \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_k \in \Pi_1$ – искомая формула.

Рассмотрим произвольную модель $\mathbb{A} \models T \cup \Gamma$. Наша цель – показать, что $\mathbb{A} \models \varphi$. Сначала докажем, что $T \cup \{\varphi\} \cup D(\mathbb{A})$ имеет модель. Предположим противное, тогда по теореме о компактности для некоторых $\{\delta_1, \ldots, \delta_m\} \subseteq D(\mathbb{A})$ у $T \cup \{\varphi\} \cup \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ нет модели. Пусть $\delta = \delta_1 \wedge \ldots \wedge \delta_m$. По определению диаграммы, $\mathbb{A} \models \exists \overline{x}\ \delta(\overline{x})$. С другой стороны, из-за отсутствия модели, $T \cup \{\varphi\} \models \forall x \neg\delta(\overline{x})$, поэтому $T \models \varphi \to \forall \overline{x}\ \neg\delta(\overline{x})$. По определению Γ, $\forall \overline{x}\ \neg\delta(\overline{x}) \in \Gamma$, значит эта формула верна в $\mathbb{A}$. Но и её отрицание верно в $\mathbb{A}$. Противоречие.

Пусть $\mathbb{B} \models T \cup \{\varphi\} \cup D(\mathbb{A})$. Тогда $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, φ – Σ_1-предложение. Тогда из пункта 3 получаем $\mathbb{A} \models \varphi$, что мы и пытались доказать.

$4 \Rightarrow 5$. Рассмотрим произвольную φ. Она лежит на одном из уровней иерархии формул. Расссмотрим только случаи $\varphi \in \Pi_2$ и $\varphi \in \Sigma_2$. В остальных случаях рассуждения аналогичны.

Для формулы $\varphi(\overline{z}) \in \Pi_2$ существует запись в виде $\forall \overline{x}\ \exists \overline{y}\ \psi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$. Формула $\exists \overline{y}\ \psi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ лежит в Σ_1, поэтому по пункту 4 существует $\psi'(\overline{x}, \overline{z}) \in \Pi_1$, эквивалентная ей по модулю T. Значит $\varphi \equiv_T \forall \overline{x}\ \psi' \in \Pi_1$.

Для формулы $\varphi \in \Sigma_2$ выполнено $\neg\varphi \in \Pi_2$. Поэтому $\exists \psi \in \Pi_1$ такая, что $\neg\varphi \equiv_T \psi$. Тогда $\varphi \equiv_T \neg\psi \in \Sigma_1$. А $\neg\psi$ в свою очередь эквивалентна формуле Π_1 из пункта 4.

$5 \Rightarrow 1$. Нам нужно, чтобы выполнялось $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A} \preceq \mathbb{B}$, где $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – модели T. Рассмотрим произвольную формулу φ. Из пункта 5 следует существование универсальной формулы ψ с условием $\varphi(\overline{x}) \equiv_T \psi(\overline{x})$.

Для $\overline{a} \in \mathbb{A}$, если $\mathbb{B} \models \varphi(\overline{a})$, то и $\mathbb{B} \models \psi(\overline{a})$, из универсальности $\mathbb{A} \models \psi(\overline{a})$, из равносильности $\mathbb{A} \models \varphi(\overline{a})$. Мы доказали $\mathbb{B} \models \varphi \Rightarrow \mathbb{A} \models \varphi$. Для доказательства в обратную сторону можно рассмотреть формулу $\neg\varphi$. $\square$

Предложение 23 (Свойства модельно полных теорий)**.**

1) *Любая модельно полная теория Π_2-аксиоматизируемая;*

2) *(Тест Линдстрёма) Если теория Π_2-аксиоматизируема, не имеет конечных моделей и категорична в некоторой мощности $\lambda \geq |For_\sigma|$, то она модельно полна;*

3) *Если модельно полная теория T имеет модель, котоаря вкладывается в любую модель T, то T – полная;*

4) Если для любых двух моделей модельно полной теории T существует третья модель, в которую они обе вкладываются, то T полна.

Доказательство.

1) T – модель полная. Достаточно доказать, что $\mathrm{Mod}(T)$ замкнут относительно объединения цепей (по теореме Чэна-Лося-Сушко)

$$\mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{A}_1 \subseteq \dots \quad \mathbb{A} = \bigcup_n \mathbb{A}_n,$$

где $\mathbb{A}_i \models T_i$. Из модельной полноты имеем $\mathbb{A}_0 \preceq \mathbb{A}_1 \preceq \dots$, отсюда нетрудно показать, что $\mathbb{A}_n \preceq \mathbb{A}$, тогда $T \dashv \mathbb{A}_n \equiv \mathbb{A}$.

2) Остаётся на совесть юных читателей! (доказательство не было закончено)

3) $\mathbb{A}$ – структура, изоморфная подструктуре любой модели $\mathbb{B} \models T$, тогда из модельной полноты $\forall \mathbb{B}$ $(\mathbb{A} \preceq \mathbb{B})$. Для любой φ выполнено либо $\mathbb{A} \models \varphi$, либо $\mathbb{A} \models \neg\varphi$. Тогда одна из этих формул верна во всех моделях T, откуда и получим, что из T следует либо эта формула, либо её отрицание.

4) Рассмотрим $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ – модели T. По предположению, существует третья модель $\mathbb{C}$ с двумя подструктурами $\mathbb{A}', \mathbb{B}'$, причём выполнено $\mathbb{A} \simeq \mathbb{A}' \subseteq \mathbb{C}$ и аналогичное для $\mathbb{B}$. T модельно полна, поэтому $\mathrm{Th}(\mathbb{A}') = \mathrm{Th}(C)$. Значит $\mathrm{Th}(\mathbb{A}) = \mathrm{Th}(\mathbb{C}) = \mathrm{Th}(\mathbb{B})$. Значит T полна.

□

2 Неразрешимость и неполнота

3 Введение в вычислимость