

Математическая логика — 2

V семестр

Лектор: Виктор Львович Селиванов

Записывал: *Глеб Минаев*

Редактировал: Борис Алексеевич Золотов

МКН СПбГУ, осень 2022

Содержание

1	Логика предикатов	1
1.1	Истинность и доказуемость	1
1.1.1	Структура	1
1.1.2	Термы и формулы	2
1.2	Значение термов и формул	3
2	Неразрешимость и неполнота	3
3	Введение в вычислительность	3

1 Логика предикатов

1.1 Истинность и доказуемость

1.1.1 Структура

Бурбаки классифицировал структуры как:

- 1) операции,
- 2) частичные порядки,
- 3) топологические структуры.

Последние не имеют приложения в логике — их мы рассматривать не будем. “Операции” — это структуры алгебраические, “частичные порядки” — структуры отношением.

Определение 1. *Сигнатура* — набор функциональных, предикатных и константных символов вместе с функцией, задающей аридность этих символов.

Функциональные символы интерпретируются как функции $A^n \rightarrow A$, предикатные символы — как функции $A^m \rightarrow \{\text{и}; \text{л}\}$, а константы — как элементы A (или, что равносильно, функции $\{\emptyset\} \rightarrow A$).

σ -структуры (структуры сигнатуры σ) — пара (A, I) , где A — непустое множество, а I — интерпретация сигнатурных символов σ в A .

Пример 1. Сигнатура упорядоченного кольца — $\langle +, \cdot; <; 0, 1 \rangle$. Можно добавить вычитание и взятие противоположного, но они выражаются в имеющейся сигнатуре.

Определение 2. \mathbb{A}, \mathbb{B} — σ -структуры. Тогда $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ называется гомоморфизм, если оно задаёт $\varphi : A \rightarrow B$, что для всякой функции f^n из сигнатуры σ и для всяких $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)),$$

для всякого предиката P^m в сигнатуре σ и всяких $a_1, \dots, a_m \in A$

$$P_A(a_1, \dots, a_m) \implies P_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m))$$

и для всякой константы c сигнатуры σ

$$\varphi(c_A) = c_B.$$

φ — изоморфизм, если φ — гомоморфизм, биективен, и φ^{-1} — гомоморфизм.

\mathbb{A} называется *подструктурой* \mathbb{B} ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi : A \rightarrow B, a \mapsto a$ — гомоморфизм.

1.1.2 Термы и формулы

Определение 3. Фиксируем некоторое множество V — “множество переменных” —, символы $\wedge, \vee, \rightarrow, \neq$ и символы $\forall x$ и $\exists x$ для всякого $x \in V$.

Терм — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- переменная — терм,
- константа — терм,
- для всяких термов t_1, \dots, t_n и функции f^n выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

Формула — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- для всяких термов t_1, t_2 выражение $t_1 = t_2$ — формула,
- для всяких предиката P^n из σ и термов t_1, \dots, t_n выражение $P(t_1, \dots, t_n)$ — формула,
- для всяких формул φ и ψ выражения $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \neq \varphi$ — формулы,
- для всяких формулы φ и переменной x выражения $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — формулы.

For_σ — множество всех формул с сигнатурой σ .

Пример 2. В кольцах всякий терм можно свести к полиному с целыми коэффициентами. В мультипликативных группах — моному с целым коэффициентом.

Задача 1. Семейства термов и формул задаются контекстно свободными грамматиками.

Определение 4. Переменная x называется *свободной* в формуле φ , если есть вхождение x не покрываемое никаким квантором $\forall x$ и никаким квантором $\exists x$. $\text{FV}(\varphi)$ — множество всех свободных переменных формулы φ .

1.2 Значение термов и формул

Определение 5. Пусть t — терм в сигнатуре σ , а \mathbb{A} — σ -структура. Тогда $t^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow A$ — *означивание* t , некоторая функция, полученная подставлением вместо констант их значений в \mathbb{A} и последующим рекурсивным означиванием по синтаксическому дереву t . Аналогично получается означивание формулы $f^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{и}; \text{л}\}$.

2 Неразрешимость и неполнота

3 Введение в вычислительность