Домашнее задание 10–11. Рекурсивность и вычислимость.

(16 ноября → 23 ноября)

1) Докажите рекурсивность функций:

   (а) $\max\{x, y\}$; максимум, минимум двух рекурсивных функций;

   (б) $|x - y|$; $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$;

   (в)
$$f(x) = \begin{cases} n, & x = 2n \\ 0, & x = 2n+1; \end{cases}$$

   (г)
$$f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}), & P_1(\bar{x}) = \text{И} \\ g_2(\bar{x}), & P_2(\bar{x}) = \text{И} \\ \dots & \dots \\ g_k(\bar{x}), & P_k(\bar{x}) = \text{И}, \end{cases}$$

   здесь g_i — рекурсивные функции, P_i — дизъюнктные рекурсивные предикаты, $\bigcup P_i = \mathbb{N}^d$.

2) Докажите, что любая рекурсивная функция f вычислима на машине Тьюринга. Докажите, что предикат $<$ рекурсивен.

3) Докажите, что любая рекурсивная функция f представима как λ-выражение: существует терм F такой, что

$$f(n_1, \dots, n_k) = n \iff F\ \mathbf{n}_1\ \dots\ \mathbf{n}_k \xrightarrow{\beta} \mathbf{n}.$$

4 а) Докажите, что множество натуральных чисел разрешимо тогда и только тогда, когда оно само и его дополнение перечислимы. *(Теорема Поста)*

   (б) Докажите, что множество всех логических следствий перечислимой теории конечной сигнатуры перечислимо.

5) Докажите, что следующие теории разрешимы:

   (а) множество всех логических следствий аксиом нетривиальных делимых абелевых групп без кручения;

   (б) —//— аксиом плотного линейного порядка;

   (в) —//— аксиом алгебраически замкнутых полей;

   (г) —//— аксиом любой полной перечислимой теории.

6) Пусть $P(\bar{x}, y)$ — рекурсивный предикат. Докажите, что рекурсивны также предикаты

$$\widetilde{P}(\bar{x}, z) \coloneqq \exists\, y < z\ P(\bar{x}, y), \qquad \overset{\text{海浪}}{P}(\bar{x}, z) \coloneqq \forall\, y < z\ P(\bar{x}, y).$$