

Домашнее задание 10–11. Рекурсивность и вычислимость.

(16 ноября → 23 ноября)

1) Докажите рекурсивность функций:

(а) $\max\{x, y\}$; максимум, минимум двух рекурсивных функций;

(б) $|x - y|$; $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$;

(в)

$$f(x) = \begin{cases} n, & x = 2n \\ 0, & x = 2n + 1; \end{cases}$$

(г)

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} g_1(\bar{x}), & P_1(\bar{x}) = \text{И} \\ g_2(\bar{x}), & P_2(\bar{x}) = \text{И} \\ \dots & \dots \\ g_k(\bar{x}), & P_k(\bar{x}) = \text{И}, \end{cases}$$

здесь g_i — рекурсивные функции, P_i — дизъюнктивные рекурсивные предикаты, $\bigcup P_i = \mathbb{N}^d$.

2) Докажите, что любая рекурсивная функция f вычислима на машине Тьюринга. Докажите, что предикат $<$ рекурсивен.

3) Докажите, что любая рекурсивная функция f представима как λ -выражение: существует терм F такой, что

$$f(n_1, \dots, n_k) = n \iff F \mathbf{n}_1 \dots \mathbf{n}_k \xrightarrow{\beta} \mathbf{n}.$$

4 а) Докажите, что множество натуральных чисел разрешимо тогда и только тогда, когда оно само и его дополнение перечислимы. (*Теорема Поста*)

(б) Докажите, что множество всех логических следствий перечислимой теории конечной сигнатуры перечислимо.

5) Докажите, что следующие теории разрешимы:

(а) множество всех логических следствий аксиом нетривиальных делимых абелевых групп без кручения;

(б) —//— аксиом плотного линейного порядка;

(в) —//— аксиом алгебраически замкнутых полей;

(г) —//— аксиом любой полной перечислимой теории.