

## Домашнее задание 1. Логика предикатов

- 1) Запишите аксиомы теории групп предложениями следующих сигнатур:

$$\{\cdot\}; \quad \{\cdot, e\}; \quad \{\cdot, e, {}^{-1}\}; \quad \{f\}$$

(последняя — трехместный функциональный символ, обозначающий график умножения). Какая из этих сигнатур лучше соответствует изложению теории групп?

- 2) Докажите, что если формула сигнатуры, состоящей из  $n$  одноместных предикатных символов и не содержащей равенства, имеет модель, то она имеет модель мощности не более  $2^n$ .
- 3) Существует ли алгоритм, вычисляющей значение  $\varphi^A$  по любой конечной сигнатуре  $\sigma$ ,  $\sigma$ -предложению  $\varphi$ , и конечной  $\sigma$ -структуре  $A$ . Если да, оцените время работы вашего алгоритма.
- 4) Докажите, что отношение  $\leq$  не определимо в структуре  $(\mathbb{Z}; +)$ , а операция  $+$  не определима в структуре  $(\mathbb{Z}; \leq)$ .
- 5) Напишите предложения сигнатуры  $\{\leq\}$  (с равенством) такие, что любая модель получившегося множества предложений является плотным линейным порядком с наименьшим, но без наибольшего элемента. Докажите, что любые две счетные модели этого множества изоморфны. Верно ли это для моделей мощности континуум?