

Домашнее задание 7. Игры Эренфойхта и элементарная эквивалентность.

19 октября → 26 октября

Последнее в разделе “Логика предикатов”

- 1) Пусть \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} — структуры сигнатуры $\{=, <\}$ с обычным отношением порядка. С помощью игр Эренфойхта обоснуйте, какие из этих структур элементарно эквивалентны, а какие нет. В последнем случае найдите наименьшее n , для которого первый игрок имеет выигрышную стратегию в соответствующей n -игре Эренфойхта, и опишите эту стратегию.
- 2) Решите задачу 1 для структур \mathbb{N} , $\mathbb{N} + \mathbb{N}$, $\mathbb{N} + \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$, где сумма двух порядков определяется как их дизъюнктное объединение, в котором каждый элемент первого порядка меньше каждого элемента второго.
- 3) (а) Решите задачу 1 для структур \mathbb{N} , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} + \mathbb{N})$, где \times есть декартово произведение структур. Напомним, порядок в декартовом произведении определяется покомпонентно:

$$(x, y) < (p, q) \iff (x < p) \wedge (y < q).$$

- (б) Решите ту же задачу для структур с теми же носителями, но теперь порядок определён *лексикографически*:

$$(x, y) < (p, q) \iff (x < p) \vee (x = p \wedge y < q).$$

- 4) Докажите, что для любого n найдется m такое, что любые два линейных порядка с более чем m элементами n -элементарно эквивалентны.

Выведите из этого, что не существует $\{=, <\}$ -предложения, которое истинно на всех конечных линейных порядках с четным числом элементов и ложно на всех конечных линейных порядках с нечетным числом элементов.

- 5) Структуры сигнатуры $\{=, <, P\}$ (P — одноместный предикатный символ) на множестве \mathbb{N} естественным образом отождествляются с бесконечными двоичными словами (т. е. с последовательностями битов). Докажите, что не существует $\{=, <, P\}$ -предложения, истинного в точности на бесконечных двоичных словах с четным числом единиц.