

Математическая логика — 2

V семестр

Лектор: Виктор Львович Селиванов

Записывали: Глеб Минаев, Иван Кабашный

Редактировал: Борис Алексеевич Золотов

МКН СПбГУ, осень 2022

Содержание

1	Логика предикатов	1
1.1	Истинность и доказуемость	1
1.1.1	Структура	1
1.1.2	Термы и формулы	2
1.1.3	Значение термов и формул	3
1.1.4	Ультрафильтры и компактность	3

1 Логика предикатов

1.1 Истинность и доказуемость

1.1.1 Структура

Бурбаки классифицировали структуры как:

- 1) операции,
- 2) частичные порядки,
- 3) топологические структуры.

Последние не имеют приложения в логике — их мы рассматривать не будем. “Операции” — это структуры алгебраические, “частичные порядки” — это структуры, снабжённые каким-либо отношением.

Определение 1. *Сигнатура* — набор функциональных, предикатных и константных символов вместе с функцией, задающей арность этих символов.

Функциональные символы интерпретируются как функции $A^n \rightarrow A$, предикатные символы — как функции $A^m \rightarrow \{\text{и}, \text{л}\}$, а константы — как элементы A (или, что равносильно, функции $\{\emptyset\} \rightarrow A$).

Будем называть σ -структурой (структурой сигнатуры σ) пару (A, I) , где A — непустое множество, а I — интерпретация сигнатурных символов σ в A .

Пример 1. Сигнатура упорядоченного кольца — $\langle +, \cdot; <; 0, 1 \rangle$. Можно добавить вычитание и взятие противоположного, но они выражаются в имеющейся сигнатуре.

Определение 2. \mathbb{A}, \mathbb{B} — σ -структуры. Тогда отображение $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ называется гомоморфизмом, если оно задаёт $\varphi : A \rightarrow B$, что для всякой функции f^n из сигнатуры σ и для всяких $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\varphi(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)),$$

для всякого предиката P^m в сигнатуре σ и всяких $a_1, \dots, a_m \in A$

$$P_A(a_1, \dots, a_m) \implies P_B(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m))$$

и для всякой константы c сигнатуры σ

$$\varphi(c_A) = c_B.$$

φ — изоморфизм, если φ — гомоморфизм, биективен, и φ^{-1} — гомоморфизм.

\mathbb{A} называется *подструктурой* \mathbb{B} ($\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$), если $A \subseteq B$ и $\varphi : A \rightarrow B, a \mapsto a$ — гомоморфизм.

1.1.2 Термы и формулы

Определение 3. Фиксируем некоторое множество V — “множество переменных” — символы $\wedge, \vee, \rightarrow, \neq$ и символы $\forall x$ и $\exists x$ для всякого $x \in V$.

Терм — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- переменная — терм,
- константа — терм,
- для всяких термов t_1, \dots, t_n и функции f^n выражение $f(t_1, \dots, t_n)$ — терм.

Формула — это понятие, рекурсивно определяемое следующими соотношениями:

- для всяких термов t_1, t_2 выражение $t_1 = t_2$ — формула,
- для всяких предиката P^n из σ и термов t_1, \dots, t_n выражение $P(t_1, \dots, t_n)$ — формула,
- для всяких формул φ и ψ выражения $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \neq \varphi$ — формулы,
- для всяких формулы φ и переменной x выражения $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ — формулы.

For_σ — множество всех формул с сигнатурой σ .

Пример 2. В кольцах всякий терм можно свести к полиному с целыми коэффициентами. В мультипликативных группа — моному с целым коэффициентом.

Задача 1. Семейства термов и формул задаются контекстно свободными грамматиками.

Определение 4. Переменная x называется *свободной* в формуле φ , если есть вхождение x не покрываемое никаким квантором $\forall x$ и никаким квантором $\exists x$. $FV(\varphi)$ — множество всех свободных переменных формулы φ .

1.1.3 Значение термов и формул

Определение 5. Пусть t — терм в сигнатуре σ , а \mathbb{A} — σ -структура. Тогда $t^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow A$ — *означивание* t , некоторая функция, полученная подставлением вместо констант их значений в \mathbb{A} и последующим рекурсивным означиванием по синтаксическому дереву t . Аналогично получается означивание формулы $f^{\mathbb{A}} : A^n \rightarrow \{\text{и; л}\}$.

Определение 6. *Предложение* в сигнатуре σ — формула без свободных переменных.

$$\begin{aligned}\varphi^{\mathbb{A}} &\in \{T, F\}, \\ \varphi^{\mathbb{A}} = T &\iff \mathbb{A} \models \varphi.\end{aligned}$$

Определение 7. *Моделью* данного множества предложения Γ называется структура, в которой все предложения из Γ истинны. Если \mathbb{A} — это модель, то иногда пишут $\mathbb{A} \models \Gamma$.

Если Γ — множество предложений, φ — предложение. Говорят, что φ логически следует из Γ ($\Gamma \models \varphi$), если φ истинно в любой модели Γ .

Определение 8. Предложение φ называется *тождественно истинно*, если оно истинно в любой структуре. Иногда пишут $\models \varphi$.

Утверждение 1.

- $\Gamma \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ не имеет модели.
- φ — тождественная истина тогда и только тогда, когда $\models \varphi$.
- Γ — конечное; $\Gamma \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $(\bigwedge \Gamma) \rightarrow \varphi$ — тождественная истина.

1.1.4 Ультрафильтры и компактность

Определение 9. Пусть I — непустое множество. *Фильтром* на множестве I называется непустое множество $F \subseteq P(I)$ (где $P(I)$ — множество всех подмножеств), которое замкнуто относительно пересечения и взятия надмножеств и такое, что $\emptyset \notin F$.

Фильтр F называется *ультрафильтром*, если $A \in F$ или $\bar{A} \in F$ для любого $A \subseteq I$.

Утверждение 2.

- Фильтр F является ультрафильтром тогда и только тогда, когда он является максимальным по включению среди всех фильтров (то есть, нет фильтра, который бы его расширял).
- Пусть F — ультрафильтр и $A, B \subseteq I$, тогда $A \in F \iff \bar{A} \notin F$; $A \cup B \in F \iff A \in F$ или $B \in F$.
- Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

Доказательство.

- Пусть F — ультрафильтр. Утверждается, что нет фильтра F' , который содержал бы F ($F' \supseteq F$). Предположим противное, т.е. что существует такое A , что оно принадлежит F' и не принадлежит F . Раз $A \notin F$, то $\bar{A} \in F$. В силу того, что $F \subseteq F'$, то \bar{A} также принадлежит F' . Таким образом, $\emptyset = A \cap \bar{A} \in F'$, противоречие.

В обратную сторону, F — максимальный по включению фильтр. От противного, пусть есть множество $A \subseteq I$ такое, что $A, \bar{A} \notin F$. Рассмотрим $F' = \{X \subseteq I \mid \exists B \in F (A \cap B \subseteq X)\}$. F' должно быть фильтром (замкнутость вверх по включению понятна, замкнутость относительно пересечения также верна, так как если $X, Y \in F'$, $A \cap B \subseteq X$, $A \cap C \subseteq Y$ для $B, C \in F$, то $A \cap B \cap C \subseteq (X \cap Y)$. $B \cap C \in F$, а значит, $X \cap Y \in F'$. и последнее, если бы $\emptyset \in F'$, то получается очевидное противоречие из того, что $A \cap B$ всегда непусто).

- Пусть F — ультрафильтр. Одновременно A и \bar{A} принадлежать F не могут. Имеем $A \in F \vee \bar{A} \in F$, откуда понятно. Второе утверждение очевидно в левую сторону. В другую сторону, имеем $A \cup B \in F$, предположим противное. Пусть $A, B \notin F$, значит, $\bar{A}, \bar{B} \in F$, а тогда $\bar{A} \cap \bar{B} \in F$. По закону деМоргана, $\overline{A \cup B} \in F$, откуда $A \cup B \notin F$.

- Пусть имеется F . Утверждается, что существует ультрафильтр F^* , который содержит F ($F^* \supseteq F$). Данное утверждение нетривиально и в каком-то смысле схоже с аксиомой выбора. Применим лемму Цорна.

Лемма 3 (Цорн). Пусть $(P; \leq)$ — частичный порядок, в котором всякая линейная цепь $A \supseteq P$ имеет верхнюю границу. Тогда в этом частичном порядке есть максимальный элемент.

Рассмотрим множество всех фильтров $P = \{G \mid \text{фильтр} \mid F \subseteq G\}$, и порядок \subseteq . Пусть \mathfrak{F} — множество фильтров $F_1 \subseteq F_2 \vee F_2 \subseteq F$, а $F' = \bigcup \mathfrak{F}$. F' — фильтр, что проверяется ручками. По лемме, существует F^* — максимальное расширение.

□

Пример 3.

- Пусть есть I , тогда $\{I\}$ — фильтр.
- Пусть $\emptyset \neq A \subseteq I$, тогда $F = \{X \subseteq I \mid A \subseteq X\}$ — фильтр.

Задача 2. Если I бесконечное, то в $P(I)$ есть неглавные ультрафильтры. Для доказательства рассматриваем $F = \{A \subseteq I \mid A^- \text{ конечно}\}$, и существующий по доказанному ранее $F^* \supseteq F$.

Пусть имеется некоторое проиндексированное семейство σ -структур $\{\mathbb{A}_i\}_{i \in I}$.

Определение 10 (Декартово произведение). $\mathbb{A} = \prod_{i \in I} \mathbb{A}_i$ — определяем σ -структуру.

$A = \prod_{i \in I} A_i$ — множество функций a на множестве I , такое что $a(i) \in A_i$ для любого $i \in I$. $a : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ — проектирование ($a \mapsto a(i)$). $c^{\mathbb{A}}(i) = c^{\mathbb{A}_i}$, таким образом получается интерпретация константного символа. $f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)(i) = f^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$. Предикат $P^{\mathbb{A}}(-//-) \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i)) = T \ \forall i \in I$.

Если же имеется ещё и F — фильтр на множестве I , определим *фильтрованное произведение*, которое будем обозначать $\mathbb{A}_F = \mathbb{A}/_{\equiv_F}$. Эквивалентность определяется следующим образом. Пусть $a, b \in A$, тогда $a \equiv_F b \stackrel{\text{def}}{\iff} \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in F$ ($a(i) = b(i)$ для F -большинства i). Нетрудно убедиться в том, что мы получили действительно отношение эквивалентности, и более того, отношение конгруэнтности на структуре \mathbb{A} .

$A/_{\equiv_F} \{[a] \mid a \in A\}$ соответственно отображению $A \xrightarrow{p} A/_{\equiv_F}$ ($a \mapsto [a]$) и $[a]_F = \{b \mid b \equiv_F a\}$.

$\mathbb{A}_F = (A/_{\equiv_F}; I)$, где

- $c^{\mathbb{A}_F} = [c^{\mathbb{A}}]$;
- $f^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = [f^{\mathbb{A}}(a_1, \dots, a_n)]$;
- $P^{\mathbb{A}_F}([a_1], \dots, [a_n]) = T \iff P^{\mathbb{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i))$ для F -большинства i .

Если F — ультрапроизведение, то $\mathbb{A}/_F$ называется *ультрапроизведением*.

Теорема 4 (об ультрапроизведениях). Пусть F — ультрафильтр на множестве I , \mathbb{A}_i — семейство структур, $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ — σ -формула и пусть $a_1, \dots, a_k \in \prod_i A_i$. Тогда $\mathbb{A}_F \models \varphi([a_1], \dots, [a_k])$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_i \models \varphi(a_1(i), \dots, a_k(i))$ для F -большинства индексов.

Теорема 5. Бесконечное множество Γ имеет модель, если каждое его конечное подмножество Γ имеет модель.