Тензорный подход к выражениям для второго спектрального момента

12 мая 2017

Запишем вектор дипольного момента в МСК и его производную по времени в нотации Эйнштейна, N_α – орты МСК:

$$\mu = \mu^\alpha N_\alpha, \quad \dot{\mu} = \dot{\mu}^\alpha N_\alpha + \mu^\alpha \dot{N}_\alpha$$

Матрица $\mathbb{S}$ связывает координаты вектора в разных базисах: $N_\alpha = \mathbb{S}_\alpha^\beta n_\beta$. Производные ортов подвижной системы могут быть представлены с использованием скобки Пуссона по эйлеровым углам и импульсам:

$$\dot{N}_\alpha = \{N_\alpha, \mathcal{H}\}$$

Производная вектора дипольного момента преобразуется к виду:

$$\dot{\mu} = \dot{\mu}^\alpha \mathbb{S}_\alpha^\beta n_\beta + \mu^\alpha \left\{\mathbb{S}_\alpha^\beta, \mathcal{H}\right\} n_\beta$$

Несложно заметить, что матричный аналог первого слагаемого есть:

$$\dot{\mu}^\alpha S_\alpha^\beta n_\beta = \mathbb{S}^\top \begin{bmatrix} \dot{\mu}_X \\ \dot{\mu}_Y \\ \dot{\mu}_Z \end{bmatrix}$$

Второе слагаемое может быть представлено в следующем виде:

$$\left\{\mathbb{S}_\alpha^\beta, \mathcal{H}\right\} = \left(\partial_k \mathbb{S}_\alpha^\beta\right) \left(\partial^l \mathcal{H}\right) J_l^k,$$

где под ∂ понимается следующий дифференциальный оператор, действующий в фазовом пространстве:

$$\partial = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{p}_e} \end{bmatrix}$$

Несложно сообразить, что тензор J_l^k имеет следующее матричное представление (в виде блочной матрицы):

$$J_l^k = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{E} \\ -\mathbb{E} & 0 \end{bmatrix}$$

Осуществим переход к дифференциальному оператору, содержащему производные по компонентам углового момента:

$$\widetilde{\partial} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \end{bmatrix} = \mathbb{U}\,\partial = \begin{bmatrix} \mathbb{E} & 0 \\ 0 & \mathbb{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{p}_e} \end{bmatrix}$$

Осуществим замену дифференциального оператора в выражении для скобки Пуассона:

$$\left\{\mathbb{S}_\alpha^\beta, \mathcal{H}\right\} = \left(\partial_k \mathbb{S}_\alpha^\beta\right)\left(\partial^l \mathcal{H}\right) J_l^k = \left(\partial_k \mathbb{S}_\alpha^\beta\right)\left(\mathbb{U}_m^l \widetilde{\partial}^m \mathcal{H}\right) J_l^k = \left(\partial_k \mathbb{S}_\alpha^\beta\right)\left(\widetilde{\partial}^m \mathcal{H}\right) \widetilde{J}_m^k, \quad \widetilde{J}_m^k = \mathbb{U}_m^l J_l^k$$

Матричное представление тензора $\widetilde{J}_m^k$ выглядит следующим образом:

$$\widetilde{J}_m^k = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{E} \\ -\mathbb{E} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{E} & 0 \\ 0 & \mathbb{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{G} \\ -\mathbb{E} & 0 \end{bmatrix}$$

Приходим к следующему выражению для скобки Пуассона:

$$\left\{\mathbb{S}_\alpha^\beta, \mathcal{H}\right\} = \left(\frac{\partial \mathbb{S}_\alpha^\beta}{\partial \mathbf{e}}\right)^\top \mathbb{G}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{J}}, \quad \mathbb{G} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{bmatrix} \sin\psi & \cos\psi\sin\theta & -\cos\theta\sin\psi \\ \cos\psi & \sin\psi\sin\theta & -\cos\theta\cos\psi \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{bmatrix}$$

Подставляя полученный результат в выражение для производной дипольного момента и переходя к матричной нотации:

$$\dot{\mu} = \mathbb{S}^\top \begin{bmatrix} \dot{\mu_X} \\ \dot{\mu_Y} \\ \dot{\mu_Z} \end{bmatrix} + \mathbb{W} \begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \\ \mu_Z \end{bmatrix}, \quad \mathbb{W} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbb{S}^\top}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \mathbb{S}^\top}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \mathbb{S}^\top}{\partial \psi} \end{bmatrix} \mathbb{G}^\top \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_x} \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_y} \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_z} \end{bmatrix}$$

(матрица $\mathbb{W}$ получается как результат произведения матричного вектора, обычной матрицы и обычного вектора)