Ориентируем лабораторную систему координат в начальный момент времени таким образом, что вектор $\mathbf{j}$ ориентирован вдоль оси OZ. Матрица, связывающие координаты векторов в лабораторной и подвижной системах координат выглядит следующим образом:

$$\mathbf{j} = \mathbb{S}\,\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Так как матрица $\mathbb{S}$ ортогональна, то $\mathbb{S}^{-1} = \mathbb{S}^{\top}$. Получаем следующие соотношения на углы θ, ψ:

$$\begin{cases} J_x = J\sin\psi\sin\theta \\ J_y = J\cos\psi\sin\theta \\ J_z = J\cos\theta \end{cases}$$

Из связи между вектором угловой скорости и вектор эйлеровых скоростей получим выражение для $\dot{\varphi}$:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbb{V}\dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\psi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sin\psi}{\sin\theta} & \dfrac{\cos\psi}{\sin\theta} & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ -\sin\psi\operatorname{ctg}\theta & -\cos\psi\operatorname{ctg}\theta & 1 \end{bmatrix} \mathbf{\Omega}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\Omega_x\sin\psi + \Omega_y\cos\psi\right) = J\cdot\frac{J_x\Omega_x + J_y\Omega_y}{J_x^2 + J_y^2}$$

Интегрируя, получаем значение угла $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = J\cdot\int_0^t \frac{J_x(\xi)\Omega_x(\xi) + J_y(\xi)\Omega_y(\xi)}{J_x^2(\xi) + J_y^2(\xi)}d\xi$$

Компоненты матрицы $\mathbb{S}$ несложно выразить через компоненты углового момента и φ:

$$\mathbb{S} = \frac{1}{\sqrt{J_x^2 + J_y^2}} \begin{bmatrix} J_y\cos\varphi - \dfrac{1}{J}J_xJ_z\sin\varphi & J_x\cos\varphi + \dfrac{1}{J}J_yJ_z\sin\varphi & \dfrac{J_x^2 + J_y^2}{J}\sin\varphi \\ J_y\sin\varphi + \dfrac{1}{J}J_xJ_z\cos\varphi & -J_x\sin\varphi + \dfrac{1}{J}J_yJ_z\cos\varphi & -\dfrac{J_x^2 + J_y^2}{J}\cos\varphi \\ \dfrac{J_x}{J}\sqrt{J_x^2 + J_y^2} & \dfrac{J_y}{J}\sqrt{J_x^2 + J_y^2} & \dfrac{J_z}{J}\sqrt{J_x^2 + J_y^2} \end{bmatrix}$$