1 Задача двух тел и углы Эйлера

Пусть совокупное движение двух тел происходит в плоскости Oyz. Выберем молекулярную систему отсчета таким образом, чтобы рассматриваемые тела находились на оси Z. В таком случае, плоскости молекулярной системы OYZ и лабораторной системы Oyz совпадают в любой момент времени. При этом угол между осями Oy и OY (равный, конечно, углу между Oz и OZ) равен эйлеровому углу θ (в рамках стандартного определения эйлеровых углов по Голдстейну). Остальные два эйлеровых угла, ϕ и ψ, равны 0. Таким образом, ортогональная матрица $\mathbb{S}$, связывающая лабораторную и молекулярную систему отсчета, имеет вид:

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Матрица $\mathbb{S}_\theta$, таким образом записанная, переводит координаты из лабораторной системы в молекулярную. На примере вектора углового момента:

$$\mathbf{J} = \mathbb{S}_\theta \, \mathbf{j}$$

Понятно, что угловая скорость, соответсвующая повороту на угол θ, направлена вдоль оси вращения $x = X$. Следовательно, $\Omega_x = \dot{\theta}$. Аналогичный результат можно получить, взяв матрицу $\mathbb{V}$, связывающую компоненты угловой скорости с эйлеровыми скоростями, в общем случае и подставив в нее $\phi = \psi = 0$:

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \mathbb{V} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Т.к. $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$, то $\Omega_x = \dot{\theta}$, $\Omega_y = 0$, $\Omega_z = 0$.

Обратим матрицу $\mathbb{V}$ для того, чтобы найти связь между эйлеровыми импульсами и компонентами углового момента.

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \left(\mathbb{V}^{-1}\right)^\top \begin{bmatrix} p_\varphi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{\sin\theta} & 0 & -\operatorname{ctg}\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_\varphi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{bmatrix}$$

Эйлеровы импульсы p_φ, p_ψ, будучи связанными с производными лагранжиана по $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$, соответственно, равны 0 (т.к. эти производные отсутствуют в угловых скоростях, следовательно и в лагранжиане). Получаем однозначную связь между J_x и p_θ:

$$J_x = p_\theta$$

Выведем кинетическую энергию в гамильтоновой форме в предложенной системе координат. Обозначим массы тел за m_1 и m_2, расстояние между телами – за R. Тогда координаты тел равны

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 & x_2 &= 0 \\
y_1 &= 0 & y_2 &= 0 \\
z_1 &= -\frac{m_2}{m_1+m_2}R & z_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2}R
\end{aligned}
$$

Тензор инерции будет иметь лишь две ненулевые компоненты, а именно, $I_{xx} = I_{yy} = \mu R^2$, где μ – приведенная масса системы, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$. Приведенные выше рассуждения показывают, что вектор угловой скорости направлен вдоль оси $x = X$:

$$
\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Итак, кинетическая энергия в лагранжевой форме в молекулярной системе отсчета имеет следующий вид

$$
T_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\mu \dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu R^2 \Omega_x^2
$$

Осуществляя стандартный переход к гамильтоновой форме, получаем

$$
T_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\mu}p_R^2 + \frac{J_x^2}{2\mu R^2}
$$

Если заменить компоненту углового момента на эйлеров импульс, то получим

$$
T_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\mu}p_R^2 + \frac{p_\theta^2}{2\mu R^2}
$$

Если же зафиксировать длину связи (сделав систему палочкой):

$$
T_{\mathcal{H}} = \frac{p_\theta^2}{2\mu l^2} = \frac{1}{2I}p_\theta^2
$$

Используем теорему Донкина для связи между компонентами угловой скорости и производными по компонентам углового момента:

$$
\dot{\theta} = \Omega_x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_x} = \frac{J_x}{\mu R^2}
$$
$$
\frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{\mu R^2}
$$