Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Химический факультет

Кафедра физической химии
Лаборатория строения и квантовой механики молекул

Исследование бифуркации в трехатомных гидридах методом классических траекторий.

Курсовая работа студента 411 группы
Фи740ненко А.А.

Научный руководитель:
к.х.н., Петров С.В.

Москва
2016

Содержание

1 Введение

2 Схема получения полного колебательно-вращательного гамильтониана

2.1 Переход в систему отсчета, связанную с центром масс

Рассмотрим систему n материальных точек. Обозначим их массы через m_i, их радиус-векторы в лабораторной системе координат через $\vec{r}_i$, в подвижной системе координат – через $\vec{R}_i$ $(i = 1 \dots n)$. Разделим движение системы на движение центра масс и движение вокруг центра масс:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_1{}', \\ \quad \dots \\ \vec{r}_n = \vec{r} + \vec{r}_n{}', \end{cases}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор центра масс в лабораторной системе координат и $\vec{r}_i{}'$ – радиус-векторы рассматриваемых точек в системе отсчёта, связанной с центром масс.

Кинетическая энергия T системы принимает вид:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i{}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}_i{}')^2 = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{r}_i')^2 + \dot{\vec{r}}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i{}',$$

где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

Заметим, что последняя сумма является производной следующей суммы, которая равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i{}' = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i{}' = 0.$$

Итак, мы перешли в систему координат, связанную с центром масс, и отделили энергию движения центра масс:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{r}_i')^2.$$

Забудем про слагаемое, отвечающее центру масс; откинем штрихи, чтобы упростить запись.

2.2 Переход в подвижную систему отсчета

Переход от лабораторной системы отсчета к подвижной системе может быть осуществлен при помощи трех последовательных поворотов на углы Эйлера φ, θ и ψ.

Первое вращение происходит вокруг оси z на угол φ. Оно переводит лабораторную систему x, y, z в систему x', y', z'. Угол φ называется углом прецессии.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \$_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

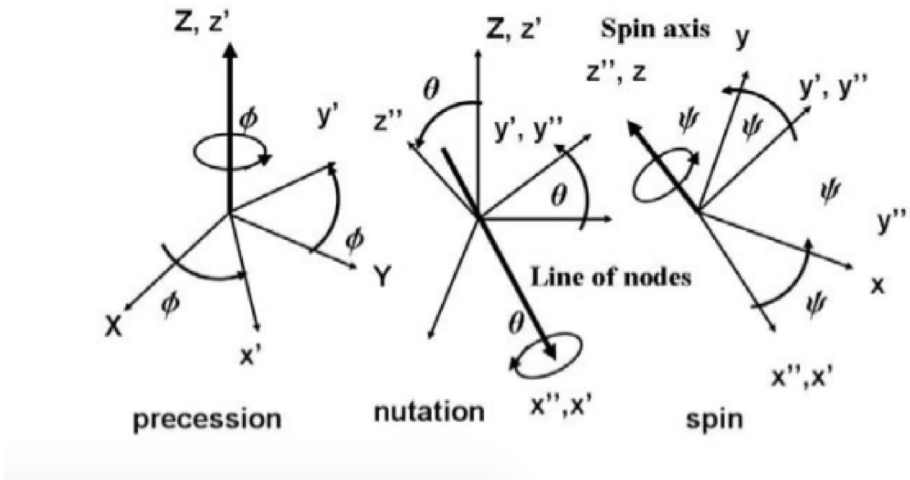

Рис. 1: Углы Эйлера

Оси x', y' лежат в плоскости x, y. Затем происходит поворот вокруг оси x' на угол θ, переводящий систему x', y', z' в систему x'', y'', z''. Ось x'' совпадает с осью x'. Ось этого поворота называется линией узлов. Угол θ называется углом нутации.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbb{S}_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

И наконец, вращение вокруг оси z'' на угол ψ переводит систему x'', y'', z'' в систему x, y, z. Угол ψ называется углом собственного вращения.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \mathbb{S}_\psi \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Суммарное вращение представляет собой последовательное применение описанных поворотов и имеет следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbb{S} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_\psi \mathbb{S}_\theta \mathbb{S}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\psi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Проектируя вектор угловой скорости Ω на базис, образованный Эйлеровыми угловыми скоростями $\dot\varphi$, $\dot\theta$, $\dot\psi$, получаем соотношение, известное как кинематическое уравнение Эйлера:

$$\begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{pmatrix}$$

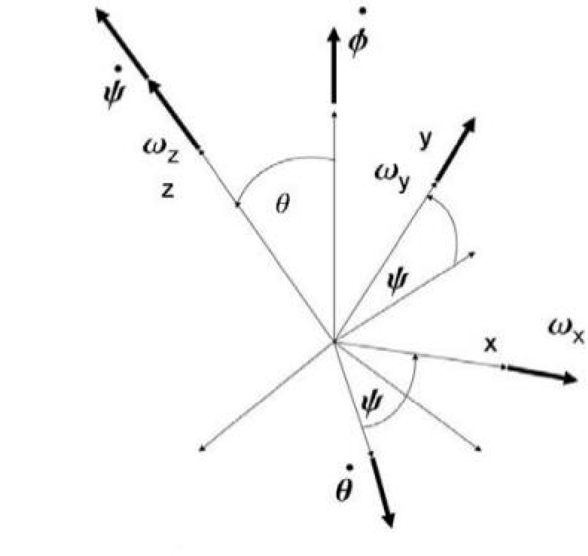

Рис. 2: Угловые скорости

ПОПРАВИТЬ НА КАРТИНКЕ МАЛЕНЬКИЕ БУКВЫ НА БОЛЬШИЕ

Я НЕ ЗНАЮ КАК СВЯЗАТЬ НАПИСАННОЕ НИЖЕ С ТЕМ, ЧТО ДОПИСАНО СЕЙЧАС

Перейдём в подвижную систему координат при помощи ортогональной матрицы $\mathbb{S}$:

$$\vec{r}_i = \mathbb{S}\vec{R}_i, \quad i = 1 \ldots n.$$

Введем матрицу $\mathbb{A}$ следующим образом: $\mathbb{A} = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^{-1}$. Покажем, что она является кососимметрической матрицей; для этого продифференцируем единичную матрицу:

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E} = \frac{d}{dt}\left(\mathbb{S}\mathbb{S}^{-1}\right) = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^{-1} + \mathbb{S}\dot{\mathbb{S}}^{-1} = 0.$$

Заметим, что первое слагаемое и есть матрица $\mathbb{A}$, а второе – транспонированная матрица $\mathbb{A}$ (т.к. $\mathbb{S}^\top = \mathbb{S}^{-1}$ в силу ортогональности). Следовательно,

$$\mathbb{A} + \mathbb{A}^\top = 0,$$

т.е. по определению матрица $\mathbb{A}$ является кососимметрической.

Так как размерность пространства кососимметрических матриц равна 3, то существует естественный изоморфизм, позволяющий сопоставить каждой кососимметрической матрице единственный псевдовектор:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

причем для любого вектора $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ имеем $\mathbb{A}\vec{x} = [\vec{\omega} \times \vec{x}]$, где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости в лабораторной системе координат.

Получим выражение для квадратов скоростей рассматриваемых точек в лабораторной системе координат через координаты и скорости в подвижной системе координат:

$$\dot{\vec{r}}_i = \mathbb{S}\dot{\vec{R}}_i + \dot{\mathbb{S}}\vec{R}_i = \dot{\mathbb{S}}\mathbb{S}^{-1}\vec{r}_i + \mathbb{S}\dot{\vec{R}}_i = \mathbb{A}\vec{r}_i + \mathbb{S}\dot{\vec{R}}_i = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i] + \mathbb{S}\dot{\vec{R}}_i = [\mathbb{S}\vec{\Omega} \times \mathbb{S}\vec{R}_i] + \mathbb{S}\dot{\vec{R}}_i =$$
$$= \mathbb{S}\left([\vec{\Omega} \times \vec{R}_i] + \dot{\vec{R}}_i\right),$$
$$\dot{r}_i^2 = \dot{\vec{r}}_i^{\top}\dot{\vec{r}}_i = \left(\dot{\vec{R}}_i + [\vec{\Omega} \times \vec{R}_i]\right)^{\top} \mathbb{S}^{\top}\mathbb{S}\left(\dot{\vec{R}}_i + [\vec{\Omega} \times \vec{R}_i]\right) = \dot{R}_i^2 + 2\dot{\vec{R}}_i\ [\vec{\Omega} \times \vec{R}_i] + [\vec{\Omega} \times \vec{R}_i]^2,$$

где $\vec{\Omega}$ – вектор угловой скорости в подвижной системе координат.

Рассмотрим последнее слагаемое как смешанное произведение и применим правило Лагранжа:

$$([\vec{\Omega} \times \vec{R}_i], [\vec{\Omega} \times \vec{R}_i]) = \vec{\Omega}^{\top}[\vec{R}_i \times [\vec{\Omega} \times \vec{R}_i]] = \vec{\Omega}^{\top}\left(\vec{\Omega}(\vec{R}_i, \vec{R}_i) - \vec{R}_i(\vec{R}_i, \vec{\Omega})\right).$$

Итак, с учётом выполненных преобразований имеем:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{R}_i^2 + \vec{\Omega}^{\top}\sum_{i=1}^{n} m_i[\vec{R}_i \times \dot{\vec{R}}_i] + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^{\top}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{\Omega}(\vec{R}_i, \vec{R}_i) - \vec{R}_i(\vec{R}_i, \vec{\Omega})\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{R}_i^2 + \vec{\Omega}^{\top}\sum_{i=1}^{n} m_i[\vec{R}_i \times \dot{\vec{R}}_i] + \vec{\Omega}^{\top}\mathbb{I}\,\vec{\Omega}.$$

где $\mathbb{I}$ – матрица тензора инерции в подвижной системе координат.

Пусть исследуемая система содержит s внутренних степеней свободы. Осуществим переход от векторов в подвижной системе к внутренним координатам $q_j, j = 1 \ldots s$:

$$\begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_1(q_1, \ldots, q_s), \\ \quad\ldots \\ \vec{R}_n = \vec{R}_n(q_1, \ldots, q_s); \end{cases}$$
$$\frac{d}{dt}\vec{R}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_j}\ \dot{q}_j.$$

Подставляя $\dot{\vec{R}}_i$ в выражение для кинетической энергии, получим:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \vec{\Omega}^{\top}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\vec{R}_i \times \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_j}\ \dot{q}_j\right] + \vec{\Omega}^{\top}\mathbb{I}\,\vec{\Omega} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \vec{\Omega}^{\top}\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\vec{R}_i \times \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_j}\right]\right)\dot{q}_j + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^{\top}\mathbb{I}\,\vec{\Omega}.$$

Обозначая $a_{jk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_k}$, $A_{jk} = \sum_{i=1}^{n} m_i\left[\vec{R}_i \times \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial q_k}\right]_{\alpha}$ (здесь $\alpha = x, y, z$ соответствуют $j = 1, 2, 3$), представим кинетическую энергию в виде:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^{\top}\mathbb{a}\ \dot{\vec{q}} + \vec{\Omega}^{\top}\mathbb{A}\ \dot{\vec{q}} + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^{\top}\mathbb{I}\,\vec{\Omega},$$

где $\mathbb{a} = (a_{jk})_{j=1\ldots s,\ k=1\ldots s}$, $\mathbb{A} = (A_{jk})_{j=1\ldots 3,\ k=1\ldots s}$.

Несложно заметить, что матрица $\mathbb{a}$ является симметричной: $\mathbb{a} = \mathbb{a}^{\top}$.

2.3 Применение теоремы Донкина

Перепишем выражение для кинетической энергии в матричном виде для того, чтобы перейти к гамильтоновым переменным.

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\vec{\Omega}^\top & \dot{\vec{q}}^\top\end{bmatrix} \mathbb{B} \begin{bmatrix}\vec{\Omega} \\ \dot{\vec{q}}\end{bmatrix},$$

где $\mathbb{B}$ – блочная матрица:

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix}\mathbb{I} & \mathbb{A} \\ \mathbb{A}^\top & \mathbb{a}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p})}$$

$$\boxed{\vec{p} = \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}} \qquad \boxed{\dot{\vec{q}} = \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{p}}}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{\Omega})} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{J})}$$

$$\boxed{\vec{J} = \tfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\Omega}}} \qquad \boxed{\vec{\Omega} = \tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{J}}}$$

Текст, поясняющий, что угловая скорость и угловой момент являются такими же сопряженными переменными как $\vec{q}$ и $\vec{p}$.

Сейчас мы работаем исключительно с выражением для кинетической энергии, так что обозначим имеющееся у нас выражение $T_{\mathcal{L}}$ (в лагранжевом представлении), а искомое представление – $T_{\mathcal{H}}$.

$$\vec{p} = \frac{\partial T_{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\vec{q}}} = \mathbb{A}^\top \vec{\Omega} + \mathbb{a}\dot{\vec{q}}$$
$$\vec{J} = \frac{\partial T_{\mathcal{L}}}{\partial \vec{\Omega}} = \mathbb{I}\,\vec{\Omega} + \mathbb{A}\dot{\vec{q}}$$

Заметим, что блочный вектор $\begin{bmatrix}\vec{J} \\ \vec{p}\end{bmatrix}$ связан с вектором $\begin{bmatrix}\vec{\Omega} \\ \dot{\vec{q}}\end{bmatrix}$ линейным преобразованием, причем матрица этого линейного преобразования есть $\mathbb{B}$:

$$\begin{bmatrix}\vec{J} \\ \vec{p}\end{bmatrix} = \mathbb{B}\begin{bmatrix}\vec{\Omega} \\ \dot{\vec{q}}\end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{bmatrix}\vec{\Omega} \\ \dot{\vec{q}}\end{bmatrix} = \mathbb{B}^{-1}\begin{bmatrix}\vec{J} \\ \vec{p}\end{bmatrix}$$

Инвертирование блочной матрицы $\mathbb{B}$ легче всего осуществить с применением формул Фробениуса. (Аппендикс B). Обозначим $\mathbb{G} = \mathbb{B}^{-1} = \begin{bmatrix}G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}$, ее элементы имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{11} &= \left(\mathbb{I} - \mathbb{A}\mathbb{a}^{-1}\mathbb{A}^\top\right)^{-1} \\
\mathbb{G}_{12} &= -\mathbb{I}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{G}_{22} = -\mathbb{G}_{11}\mathbb{A}\mathbb{a}^{-1} \\
\mathbb{G}_{21} &= -\mathbb{a}^{-1}\mathbb{A}^\top\mathbb{G}_{11} = \mathbb{G}_{22}\mathbb{A}^\top\mathbb{I}^{-1} \\
\mathbb{G}_{22} &= \left(\mathbb{a} - \mathbb{A}^\top\mathbb{I}^{-1}\mathbb{A}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Легко заметить, что $\mathbb{G}_{12} = \mathbb{G}_{21}^\top$. Используем этот факт в ходе стандартной процедуры перехода к гамильтоновому представлению кинетической энергии.

$$\begin{bmatrix} \vec{\Omega} \\ \dot{\vec{q}} \end{bmatrix} = \mathbb{G} \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \vec{p} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \vec{\Omega}^\top & \dot{\vec{q}}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{J}^\top & \vec{p}^\top \end{bmatrix} \mathbb{G}$$

$$T_{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \vec{\Omega}^\top & \dot{\vec{q}}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \vec{p} \end{bmatrix} - T_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{J}^\top & \vec{p}^\top \end{bmatrix} \mathbb{G} \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \vec{p} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\vec{J}^\top\mathbb{G}_{11}\vec{J} + \frac{1}{2}\vec{p}^\top\mathbb{G}_{22}\,\vec{p} + \vec{J}^\top\mathbb{G}_{12}\,\vec{p}$$

A Про угловой момент..

Покажем истинность следующего результата:

$$\vec{J} = \mathbb{A}\dot{\vec{q}} + \mathbb{I}\,\vec{\Omega}$$

Рассмотрим угловой момент в лабораторной системе координат.

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right]$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \mathbb{S}^{-1}\left(\left[\vec{\Omega} \times \vec{R}_i\right] + \dot{\vec{R}}_i\right)$$

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{r}_i \times \mathbb{S}^{-1}\left(\left[\vec{\Omega} \times \vec{R}_i\right] + \dot{\vec{R}}_i\right)\right] = \mathbb{S}^{-1}\sum_i m_i \left[\vec{R}_i \times \dot{\vec{R}}_i\right] + \mathbb{S}^{-1}\sum_i m_i \left[\vec{R}_i \times \left[\vec{\Omega} \times \vec{R}_i\right]\right]$$

Внимательно посмотрим на слагаемое, содержащее двойное векторное произведение:

$$\sum_i m_i \left[\vec{R}_i \times \left[\vec{\Omega} \times \vec{R}_i\right]\right] = \sum_i \left(R_i^2\vec{\Omega} - \left(\vec{R}_i, \vec{\Omega}\right)\vec{R}_i\right) = \mathbb{I}\vec{\Omega}$$

Используем результат, умножаем обе части на $\mathbb{S}$, учтем, что $\vec{J} = \mathbb{S}\vec{j}$:

$$\vec{J} = \mathbb{A}\dot{\vec{q}} + \mathbb{I}\,\vec{\Omega}$$

B Формулы Фробениуса

Рассмотрим блочную матрицу $\mathbb{U} = \begin{bmatrix} \mathbb{U}_{11} & \mathbb{U}_{12} \\ \mathbb{U}_{21} & \mathbb{U}_{22} \end{bmatrix}$, т.ч. $\mathbb{U}_{11} = \left(\mathbb{U}_{11}^{jk}\right)_{\substack{j=1\dots m \\ k=1\dots m}}$, $\mathbb{U}_{22} = \left(\mathbb{U}_{22}^{jk}\right)_{\substack{j=1\dots n \\ k=1\dots n}}$ – обратимые матрицы; $\mathbb{U}_{12} = \left(\mathbb{U}_{12}^{jk}\right)_{\substack{j=1\dots m \\ k=1\dots n}}$, $\mathbb{U}_{21} = \left(\mathbb{U}_{21}^{jk}\right)_{\substack{j=1\dots n \\ k=1\dots m}}$.

Положим $\mathbb{V} = \begin{bmatrix} \mathbb{V}_{11} & \mathbb{V}_{12} \\ \mathbb{V}_{21} & \mathbb{V}_{22} \end{bmatrix}$ – это матрица, удовлетворяющая следующему соотношению:

$$\mathbb{U}\mathbb{V} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{m\times m} & \mathbb{O}_{m\times n} \\ \mathbb{O}_{n\times m} & \mathbb{E}_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$\mathbb{E}_{m\times m}$ – единичная матрица, $\dim \mathbb{E} = m \times m$
$\mathbb{O}_{m\times n}$ – матрица, заполненная нулями, $\dim \mathbb{O} = m \times n$.

Соотношение (1) эквивалентно следующей системе:

$$\mathbb{U}_{11}\mathbb{V}_{11} + \mathbb{U}_{12}\mathbb{V}_{21} = \mathbb{E}_{m\times m} \tag{2}$$

$$\mathbb{U}_{11}\mathbb{V}_{12} + \mathbb{U}_{12}\mathbb{V}_{22} = \mathbb{O}_{m\times n} \tag{3}$$

$$\mathbb{U}_{21}\mathbb{V}_{11} + \mathbb{U}_{22}\mathbb{V}_{21} = \mathbb{O}_{n\times m} \tag{4}$$

$$\mathbb{U}_{21}\mathbb{V}_{12} + \mathbb{U}_{22}\mathbb{V}_{22} = \mathbb{E}_{n\times n} \tag{5}$$

Выразим из уравнений (3) и (4) $\mathbb{V}_{12}$ и $\mathbb{V}_{21}$ соответственно:

$$\mathbb{V}_{12} = -\mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\mathbb{V}_{22}$$
$$\mathbb{V}_{21} = -\mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\mathbb{V}_{11}$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (2) и (5) и выражая $\mathbb{V}_{11}$ и $\mathbb{V}_{22}$ получаем:

$$\mathbb{V}_{11} = \left(\mathbb{U}_{11} - \mathbb{U}_{12}\mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\right)^{-1}$$
$$\mathbb{V}_{22} = \left(\mathbb{U}_{22} - \mathbb{U}_{21}\mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\right)^{-1}$$

Приходим к следующему виду матрицы $\mathbb{V}$:

$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} \left(\mathbb{U}_{11} - \mathbb{U}_{12}\mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\right)^{-1} & -\mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\left(\mathbb{U}_{22} - \mathbb{U}_{21}\mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\right)^{-1} \\ -\mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\left(\mathbb{U}_{11} - \mathbb{U}_{12}\mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\right)^{-1} & \left(\mathbb{U}_{22} - \mathbb{U}_{21}\mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Хитрый прием. Мы нашли выражение для обратной (справа) матрицы, теперь найдем выражение для обратной (слева) матрицы $\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q}_{11} & \mathbb{Q}_{12} \\ \mathbb{Q}_{21} & \mathbb{Q}_{22} \end{bmatrix}$:

$$\mathbb{Q}\mathbb{U} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{m\times m} & \mathbb{O}_{m\times n} \\ \mathbb{O}_{n\times m} & \mathbb{E}_{n\times n} \end{bmatrix}$$

Проводя аналогичные вычисления приходим к следующему виду матрицы $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} \left(\mathbb{U}_{11} - \mathbb{U}_{12}\mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\right)^{-1} & -\left(\mathbb{U}_{11} - \mathbb{U}_{12}\mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\right)^{-1}\mathbb{U}_{12}\mathbb{U}_{22}^{-1} \\ -\left(\mathbb{U}_{22} - \mathbb{U}_{21}\mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\right)^{-1}\mathbb{U}_{21}\mathbb{U}_{11}^{-1} & \left(\mathbb{U}_{22} - \mathbb{U}_{21}\mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

Так как обратная слева матрица совпадает с обратной справа матрицей, то получаем следующие два тождества:

$$\begin{cases} \mathbb{V}_{12} = \mathbb{Q}_{12} \\ \mathbb{V}_{21} = \mathbb{Q}_{21} \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\left(\mathbb{U}_{22} - \mathbb{U}_{21}\mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\right)^{-1} = \left(\mathbb{U}_{11} - \mathbb{U}_{12}\mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\right)^{-1}\mathbb{U}_{12}\mathbb{U}_{22}^{-1} \\ \mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\left(\mathbb{U}_{11} - \mathbb{U}_{12}\mathbb{U}_{22}^{-1}\mathbb{U}_{21}\right)^{-1} = \left(\mathbb{U}_{22} - \mathbb{U}_{21}\mathbb{U}_{11}^{-1}\mathbb{U}_{12}\right)^{-1}\mathbb{U}_{21}\mathbb{U}_{11}^{-1} \end{cases}$$