1. Определение углов Эйлера вращения, являющегося композицией двух вращений

Рассмотрим композицию двух вращений $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$, параметризованновых наборами углов Эйлера $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, соответсвенно, определенными в Голдстейне (zxz; 313 extrinsic).

$$\mathbb{S}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot \mathbb{S}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = \mathbb{S}_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) \tag{1}$$

Для этого перейдем от представления вращений при помощи эйлеровых углов к кватернионному, которое позволяет более удобным образом описывать параметры вращения, являющегося композицией вращений. Рассчитав компоненты кватерниона, соотвествующего композиции вращений, через наборы углов Эйлера 1 и 2, выразим углы Эйлера результирующего вращения. Компоненты кватерниона q_1, соответствующего вращению 1, связаны с углами Эйлера следующими соотношениями:

$$q_1 = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} \sin\dfrac{\beta_1}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} \sin\dfrac{\beta_1}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} \cos\dfrac{\beta_1}{2} \\ \cos\dfrac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} \cos\dfrac{\beta_1}{2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Кватернионы представляют в виде пары [действительное число, вектор]: $q_1 = \left[q_1^0, \mathbf{q}_1\right]$. Произведение кватернионов в векторной форме представлено соотношением

$$q_1 \cdot q_2 = \left(q_1^0 q_2^0 - \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2\right) + q_1^0 \mathbf{q}_2 + q_2^0 \mathbf{q}_1 + [\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2] \tag{3}$$

Подставив выражения для q_1 и q_2 в определение (3), получаем выражение для компонент кватерниона $q_3 = q_1 \cdot q_2$:

$$q_3 = \begin{bmatrix} \sin\dfrac{\beta_1}{2} \sin\dfrac{\beta_2}{2} \cos\left(\dfrac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} + \dfrac{\alpha_2 - \gamma_2}{2}\right) - \cos\dfrac{\beta_1}{2} \cos\dfrac{\beta_2}{2} \cos\left(\dfrac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} - \dfrac{\alpha_2 + \gamma_2}{2}\right) \\ \sin\dfrac{\beta_1}{2} \sin\dfrac{\beta_2}{2} \sin\left(\dfrac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} + \dfrac{\alpha_2 - \gamma_2}{2}\right) + \cos\dfrac{\beta_1}{2} \cos\dfrac{\beta_2}{2} \sin\left(\dfrac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} - \dfrac{\alpha_2 + \gamma_2}{2}\right) \\ \sin\dfrac{\beta_1}{2} \cos\dfrac{\beta_2}{2} \sin\left(\dfrac{\alpha_2 + \gamma_2}{2} - \dfrac{\alpha_1 - \gamma_1}{2}\right) + \cos\dfrac{\beta_1}{2} \sin\dfrac{\beta_2}{2} \sin\left(\dfrac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} + \dfrac{\alpha_2 - \gamma_2}{2}\right) \\ \sin\dfrac{\beta_1}{2} \cos\dfrac{\beta_2}{2} \cos\left(\dfrac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} - \dfrac{\alpha_2 + \gamma_2}{2}\right) + \cos\dfrac{\beta_1}{2} \sin\dfrac{\beta_2}{2} \cos\left(\dfrac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} + \dfrac{\alpha_2 - \gamma_2}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Углы Эйлера $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ связаны с компонентами кватерниона q_3 соотношениями

$$\tan\alpha_3 = \frac{(q_3)_1(q_3)_3 + (q_3)_0(q_3)_2}{(q_3)_0(q_3)_1 - (q_3)_2(q_3)_3} \tag{5}$$

$$\cos\beta_3 = (q_3)_0^2 + (q_3)_3^2 - (q_3)_1^2 - (q_3)_2^2 \tag{6}$$

$$\tan\gamma_3 = \frac{(q_3)_1(q_3)_3 - (q_3)_0(q_3)_2}{(q_3)_2(q_3)_3 + (q_3)_0(q_3)_1} \tag{7}$$

Опуская промежуточные выкладки, приходим к следующим выражениям

$$\tan\alpha_3 = \frac{(\sin\beta_2\cos\beta_1 + \sin\beta_1\cos\beta_2\cos(\gamma_2-\alpha_1))\sin\alpha_2 + \sin\beta_1\cos\alpha_2\sin(\gamma_2-\alpha_1)}{\begin{aligned}&[-\cos\beta_2(\sin\gamma_1\sin\gamma_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2\cos\beta_1)\cos\alpha_1 + \cos\beta_2\sin\alpha_1\cos\gamma_2\sin\gamma_1 +\\ &+\cos\gamma_1(\sin\beta_1\sin\beta_2 - \sin\alpha_1\cos\beta_1\sin\gamma_2\cos\beta_2)]\sin\alpha_2 +\\ &+(\sin\gamma_1\cos\gamma_2 + \sin\gamma_2\cos\beta_1\cos\gamma_1)\cos\alpha_1\cos\alpha_2 +\\ &+\sin\alpha_1(\sin\gamma_1\sin\gamma_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2\cos\beta_1)\cos\alpha_2\end{aligned}} \tag{8}$$

$$\tan\gamma_3 = \frac{\cos\beta_1\cos(\gamma_2-\alpha_1)\sin\gamma_1 - \cos\gamma_1\sin(\gamma_2-\alpha_1)\sin\beta_2 + \sin\beta_1\sin\gamma_1\cos\beta_2}{\begin{aligned}&\sin(\gamma_2-\alpha_1)(\cos\beta_2\cos\gamma_1\cos\alpha_2 + \sin\gamma_1\cos\beta_1\sin\alpha_2) + \sin\beta_1\sin\beta_2\sin\gamma_1\cos\alpha_2 +\\ &+\cos(\gamma_2-\alpha_1)(\sin\alpha_2\cos\gamma_1 - \sin\gamma_1\cos\beta_1\cos\beta_2\cos\alpha_2)\end{aligned}} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\cos\beta_3 = &-\sin\gamma_1\sin\alpha_2\sin\beta_1\sin\beta_2 + (\sin\gamma_1\sin\alpha_2\cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\alpha_2)\cos\alpha_1\cos\gamma_2 +\\ &+(\sin\gamma_1\sin\alpha_2\cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\alpha_2)\sin\alpha_1\sin\gamma_2 +\\ &+(\sin\alpha_2\cos\beta_2\cos\gamma_1 - \sin\gamma_1\cos\alpha_2\cos\beta_1)\sin(\alpha_1-\gamma_2)\end{aligned} \tag{10}$$