

# О диагонализации гамильтониана

Рассмотрим набор систем по возрастанию количества внутренних переменных. Для каждой из них выпишем лагранжиан в некоторой молекулярной системе отсчета и найдем такое преобразование переменных, которое диагонализует лагранжиан. Используем найденное преобразование для диагонализации гамильтониана. Затем выпишем якобианы замены переменных в лагранжиане и в гамильтониане.

## Двухатомная система

Пусть совокупное движение двух тел происходит в плоскости  $Oyz$ . Выберем молекулярную систему отсчета таким образом, чтобы рассматриваемые тела находились на оси  $Z$ . В таком случае, плоскости молекулярной системы  $OYZ$  и лабораторной системы  $Oyz$  совпадают в любой момент времени. При этом угол между осями  $Oy$  и  $OY$  (равный, конечно, углу между  $Oz$  и  $OZ$ ) равен эйлеровому углу  $\theta$  (в рамках стандартного определения эйлеровых углов по Голдстейну). Остальные два эйлеровых угла,  $\phi$  и  $\psi$ , равны 0.

Понятно, что угловая скорость, соответствующая повороту на угол  $\theta$ , направлена вдоль оси вращения  $x = X$ . Следовательно,  $\Omega_x = \dot{\theta}$ . Аналогичный результат можно получить, взяв матрицу  $\mathbb{V}$ , связывающую компоненты угловой скорости с эйлеровыми скоростями, в общем случае и подставив в нее  $\phi = \psi = 0$ :

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \mathbb{V} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$
$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Т.к.  $\dot{\phi} = \dot{\psi} = 0$ , то  $\Omega_x = \dot{\theta}$ ,  $\Omega_y = 0$ ,  $\Omega_z = 0$ .

Выведем кинетическую энергию в лагранжевой форме в предложенной системе координат. Обозначим массы тел за  $m_1$  и  $m_2$ , расстояние между телами – за  $R$ . Тогда координаты тел равны

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & x_2 &= 0 \\ y_1 &= 0 & y_2 &= 0 \\ z_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}R & z_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}R \end{aligned}$$

Тензор инерции будет иметь лишь две ненулевые компоненты, а именно,  $I_{xx} = I_{yy} = \mu R^2$ , где  $\mu$  – приведенная масса системы,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Приведенные выше рассуждения показывают,

что вектор угловой скорости направлен вдоль оси  $x = X$ :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Итак, кинетическая энергия в лагранжевой форме в рассматриваемой молекулярной системе отсчета имеет следующий вид

$$T_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\mu\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu R^2\Omega_x^2$$

Осуществим следующую тривиальную замену переменных

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{1}{2}\mu\dot{R}^2 \\ x_2^2 &= \frac{1}{2}\mu R^2\Omega_x^2 \end{aligned} \quad (1)$$

приводящую лагранжиан к сумме квадратов

$$T_{\mathcal{L}} = x_1^2 + x_2^2. \quad (2)$$

Осуществим стандартную процедуру перехода от лагранжевой кинетической энергии к гамильтоновой, однако будем выполнять промежуточные преобразования через переменные  $x_1$  и  $x_2$ . Выразим лагранжевы переменные  $\dot{R}$ ,  $\Omega_x$  и гамильтоновые переменные  $p_R$ ,  $J_x$  через  $x_1$  и  $x_2$ .

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \sqrt{\frac{2}{\mu}}x_1 & p_R &= \frac{\partial T_{\mathcal{L}}}{\partial \dot{R}} = \mu\dot{R} = \sqrt{2\mu}x_1 \\ \Omega_x &= \sqrt{\frac{2}{\mu R^2}}x_2 & J_x &= \frac{\partial T_{\mathcal{L}}}{\partial \Omega_x} = \mu R^2\Omega_x = \sqrt{2\mu R^2}x_2 \end{aligned}$$

Получим выражение для гамильтоновой формы кинетической энергии

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{H}} &= \dot{R}p_R + \Omega_x J_x - x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{R} \cdot p_R &= \sqrt{\frac{\mu}{2}}x_1 \cdot \sqrt{2\mu}x_1 = 2x_1^2 \\ \Omega_x \cdot J_x &= \sqrt{\frac{2}{\mu R^2}}x_2 \cdot \sqrt{2\mu R^2}x_2 = 2x_2^2 \\ T_{\mathcal{H}} &= 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Итак, кинетическая энергия в гамильтоновой форме выражается в виде суммы квадратов таким же образом, как и кинетическая энергия в лагранжевой форме. Однако в выражениях переменных  $x_1$  и  $x_2$  необходимо лагранжевые переменные преобразовать в гамильтоновы переменные:

$$\begin{aligned} x_1^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{R}^2 &\longrightarrow x_1^2 = \frac{p_R^2}{2\mu} \\ x_2^2 = \frac{1}{2}\mu R^2\Omega_x^2 &\longrightarrow x_2^2 = \frac{J_x^2}{2\mu R^2} \\ T_{\mathcal{L}} = x_1^2 + x_2^2 &\longrightarrow T_{\mathcal{H}} = x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Получим выражения для якобианов замены переменных в лагранжиане и гамильтониане.

$$[Jac]_{lagr} = \left| \frac{\partial(\dot{R}, \Omega_x)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{R}}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Omega_x}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_x}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{\mu}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{\mu R^2}} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\frac{1}{\mu}} \sqrt{\frac{1}{\mu R^2}} = \frac{2}{\mu R}$$

$$[Jac]_{ham} = \left| \frac{\partial(p_R, J_x)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_R}{\partial x_1} & \frac{\partial p_R}{\partial x_2} \\ \frac{\partial J_x}{\partial x_1} & \frac{\partial J_x}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2\mu} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\mu R^2} \end{vmatrix} = \sqrt{2\mu} \sqrt{2\mu R^2} = 2\mu R$$

Отметим, что якобианы связаны следующим соотношением

$$[Jac]_{lagr} \cdot [Jac]_{ham} = 2^2$$

### Система CO<sub>2</sub>–Ar

Используем стандартную молекулярную систему отсчета для этой системы. Направим ось  $OZ$  вдоль линии  $C - Ar$ , ось  $OX$  перпендикулярно ей в плоскости системы.

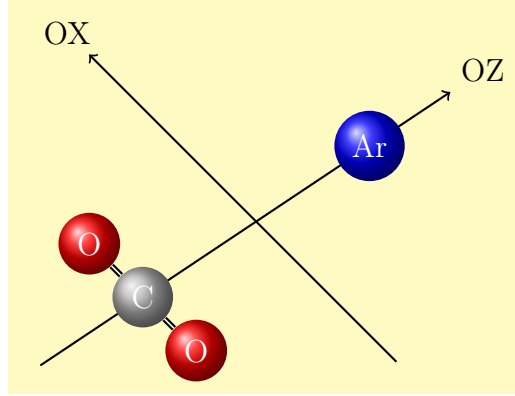


Рис. 1: Молекулярная система отсчета для системы  $Ar - CO_2$ .

Лагранжиан в описанной молекулярной системе отсчета имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu_2\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu_1 l^2 \dot{\Theta}^2 + \mu_1 l^2 \Omega_y^2 \dot{\Theta} + \frac{1}{2}(\mu_1 l^2 \cos^2 \Theta + \mu_2 R^2) \Omega_x^2 + \frac{1}{2}(\mu_1 l^2 + \mu_2 R^2) \Omega_y^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\mu_1 l^2 \Omega_z^2 \sin^2 \Theta - \mu_1 l^2 \Omega_x \Omega_z \sin \Theta \cos \Theta,$$

где приведенные массы  $\mu_1, \mu_2$  связаны с массами кислорода  $m_1$ , аргона  $m_2$  и углерода  $m_3$  следующим образом

$$\mu_1 = \frac{m_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{m_2(2m_1 + m_3)}{2m_1 + m_2 + m_3}$$

Будем использовать следующую замену для диагонализации лагранжиана

$$\begin{aligned}
 x_1^2 &= \frac{1}{2}\mu_2\dot{R}^2 \\
 x_2^2 &= \frac{1}{2}\mu_1l^2\left(\dot{\Theta} + \Omega_y\right)^2 \\
 x_3^2 &= \frac{1}{2}\mu_2R^2\Omega_y^2 \\
 x_4^2 &= \frac{1}{2}\mu_1l^2\left(\Omega_x\cos\Theta - \Omega_z\sin\Theta\right)^2 \\
 x_5^2 &= \frac{1}{2}\mu_2R^2\Omega_x^2
 \end{aligned} \tag{3}$$

Следующим шагом процедуры является получение выражений лагранжевых и гамильтоновых переменных через  $x_1, \dots, x_5$ . Для нахождения первых решим систему линейных соотношений (3) относительно  $\dot{R}, \dot{\Theta}, \Omega_x, \Omega_y$  и  $\Omega_z$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{R} &= x_1\sqrt{\frac{2}{\mu_2}} \\
 \dot{\Theta} &= x_2\sqrt{\frac{2}{\mu_1l^2}} - x_3\sqrt{\frac{2}{\mu_2R^2}} \\
 \Omega_x &= x_5\sqrt{\frac{2}{\mu_2R^2}} \\
 \Omega_y &= x_3\sqrt{\frac{2}{\mu_2R^2}} \\
 \Omega_z &= x_5\sqrt{\frac{2}{\mu_2R^2}}\cot\Theta - \frac{x_4}{\sin\Theta}\sqrt{\frac{2}{\mu_1l^2}}
 \end{aligned}$$

Действуя блочной матрицей  $\mathbb{B}$  на вектор лагранжевых переменных, получаем вектор гамильтоновых переменных. Подставляя в это выражение лагранжевы переменные через  $x_1, \dots, x_5$ , мы получаем связь гамильтоновых переменных и  $x_1, \dots, x_5$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} &= \frac{\partial T_{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{\Omega}} = \mathbb{I}\mathbf{\Omega} + \mathbb{A}\dot{\mathbf{q}} \\
 \mathbf{p} &= \frac{\partial T_{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbb{A}^\top \mathbf{\Omega} + \mathbb{a}\dot{\mathbf{q}}
 \end{aligned} \implies \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{A} \\ \mathbb{A}^\top & \mathbb{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbb{B} \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 p_R &= \mu_2\dot{R} & p_R &= x_1\sqrt{2\mu_2} \\
 p_\Theta &= \mu_1l^2\left(\dot{\Theta} + \Omega_y\right) & p_\Theta &= x_2\sqrt{2\mu_1l^2} \\
 J_x &= (\mu_1l^2\cos^2\Theta + \mu_2R^2)\Omega_x - \mu_1l^2\Omega_z\sin\Theta\cos\Theta & J_x &= x_4\sqrt{2\mu_1l^2}\cos\Theta + x_5\sqrt{2\mu_2R^2} \\
 J_y &= \mu_1l^2\dot{\Theta} + (\mu_1l^2 + \mu_2R^2)\Omega_y & J_y &= x_2\sqrt{2\mu_1l^2} + x_3\sqrt{2\mu_2R^2} \\
 J_z &= -\mu_1l^2\Omega_x\sin\Theta\cos\Theta + \mu_1l^2\Omega_z\sin^2\Theta & J_z &= -x_4\sqrt{2\mu_1l^2}\sin\Theta
 \end{aligned} \tag{5}$$

Получим выражение для кинетической энергии в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{H}} &= \dot{R}p_R + \dot{\Theta}p_{\Theta} + \Omega_x J_x + \Omega_y J_y + \Omega_z J_z - T_{\mathcal{L}} = [2x_1^2] + \left[ 2x_2^2 - 2x_2x_3\sqrt{\frac{\mu_1 l^2}{\mu_2 R^2}} \right] + \\
&+ \left[ 2x_5^2 + 2x_4x_5 \cos \Theta \sqrt{\frac{\mu_1 l^2}{\mu_2 R^2}} \right] + \left[ 2x_3^2 + 2x_2x_3\sqrt{\frac{\mu_1 l^2}{\mu_2 R^2}} \right] + \left[ 2x_4^2 - 2x_4x_5 \cos \Theta \sqrt{\frac{\mu_1 l^2}{\mu_2 R^2}} \right] - T_{\mathcal{L}} = \\
&= 2(x_1^2 + \dots + x_5^2) - (x_1^2 + \dots + x_5^2) = x_1^2 + \dots + x_5^2
\end{aligned}$$

Используя левый столбец формул в (5), выразим лагранжевы переменные через гамильтоновы, чтобы использовать их для преобразования выражений  $x_1, \dots, x_5$ .

$$\begin{aligned}
\dot{R} &= \frac{1}{\mu_2} p_R \\
\dot{\Theta} &= -\frac{1}{\mu_2 R^2} J_y + p_{\Theta} \left( \frac{1}{\mu_2 R^2} + \frac{1}{\mu_1 l^2} \right) \\
\Omega_x &= \frac{1}{\mu_2 R^2} J_x + \frac{\cot \Theta}{\mu_2 R^2} J_z \\
\Omega_y &= \frac{J_y - p_{\Theta}}{\mu_2 R^2} \\
\Omega_z &= \frac{\cot \Theta}{\mu_2 R^2} J_x + \frac{\cot^2 \Theta}{\mu_2 R^2} J_z + \frac{1}{\mu_1 l^2 \sin^2 \Theta} J_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= \frac{1}{2} \mu_2 \dot{R}^2 & x_1^2 &= \frac{1}{2\mu_2} p_R^2 \\
x_2^2 &= \frac{1}{2} \mu_1 l^2 \left( \dot{\Theta} + \Omega_y \right)^2 & x_2^2 &= \frac{1}{2\mu_1 l^2} p_{\Theta}^2 \\
x_3^2 &= \frac{1}{2} \mu_2 R^2 \Omega_y^2 & \iff & x_3^2 &= \frac{1}{2\mu_2 R^2} (p_{\Theta} - J_y)^2 \\
x_4^2 &= \frac{1}{2} \mu_1 l^2 (\Omega_x \cos \Theta - \Omega_z \sin \Theta)^2 & x_4^2 &= \frac{1}{2\mu_1 l^2 \sin^2 \Theta} J_z^2 \\
x_5^2 &= \frac{1}{2} \mu_2 R^2 \Omega_x^2 & x_5^2 &= \frac{1}{2\mu_2 R^2} (J_x + J_z \cot \Theta)^2 \\
T_{\mathcal{L}} &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 & \iff & T_{\mathcal{H}} &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2
\end{aligned}$$

Выпишем выражения для якобианов замены переменных в лагранжиане и гамильтониане

$$\begin{aligned}
 [Jac]_{lagr} &= \left| \frac{\partial(\dot{R}, \dot{\Theta}, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)} \right| = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{\mu_2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{\mu_1 l^2}} & -\sqrt{\frac{2}{\mu_2 R^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{\mu_2 R^2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{\mu_2 R^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{\mu_1 l^2 \sin^2 \Theta}} & \sqrt{\frac{2}{\mu_2 R^2}} \cot \Theta \end{vmatrix} = \\
 &= 2^{5/2} \sqrt{\frac{1}{\mu_2}} \sqrt{\frac{1}{\mu_1 l^2}} \sqrt{\frac{1}{\mu_1 l^2 \sin^2 \Theta}} \frac{1}{\mu_2 R^2} = 2^{5/2} \mu_1^{-1} \mu_2^{-3/2} l^{-2} R^{-2} \sin^{-1} \Theta \\
 [Jac]_{ham} &= \left| \frac{\partial(p_R, p_\Theta, J_x, J_y, J_z)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)} \right| = \begin{vmatrix} \sqrt{2\mu_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2\mu_1 l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2\mu_2 R^2} & -\sqrt{2\mu_1 l^2} \cos \Theta \\ 0 & \sqrt{2\mu_1 l^2} & -\sqrt{2\mu_2 R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2\mu_1 l^2} \sin \Theta \end{vmatrix} = \\
 &= 2^{5/2} \mu_1 \mu_2^{3/2} l^2 R^2 \sin \Theta
 \end{aligned}$$

Якобианы связаны следующим соотношением

$$[Jac]_{lagr} \cdot [Jac]_{ham} = 2^5$$

### Система N<sub>2</sub>–N<sub>2</sub>

Используем следующую замену для диагонализации лагранжиана

$$\begin{aligned}
 x_1^2 &= \frac{1}{2} \mu_2 l_2^2 (-\dot{\varphi} \sin \theta_2 + \Omega_x \cos \varphi \cos \theta_2 + \Omega_y \sin \varphi \cos \theta_2 - \Omega_z \sin \theta_2)^2 \\
 x_2^2 &= \frac{1}{2} \mu_2 l_2^2 \left( \dot{\theta}_2 - \Omega_x \sin \varphi + \Omega_y \cos \varphi \right)^2 \\
 x_3^2 &= \frac{1}{2} \mu_1 l_1^2 (\Omega_x \cos \theta_1 - \Omega_z \sin \theta_1)^2 \\
 x_4^2 &= \frac{1}{2} \mu_3 R^2 \Omega_x^2 \\
 x_5^2 &= \frac{1}{2} \mu_3 R^2 \Omega_y^2 \\
 x_6^2 &= \frac{1}{2} \mu_1 l_1^2 \left( \dot{\theta}_1 + \Omega_y \right)^2 \\
 x_7^2 &= \frac{1}{2} \mu_3 \dot{R}^2
 \end{aligned} \tag{6}$$

Выражаем лагранжевы переменные через  $x_1, \dots, x_7$ :

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}_1 &= x_6 \sqrt{\frac{2}{\mu_1 l_1^2}} - x_5 \sqrt{\frac{2}{\mu_3 R^4}} \\
\dot{\varphi} &= -\frac{x_1}{\sin \Theta_2} \sqrt{\frac{2}{\mu_2 l_2^2}} + \frac{x_4 \cos \varphi \cos \Theta_2}{\sin \Theta_2} \sqrt{\frac{2}{\mu_3 R^2}} + \frac{x_5 \sin \varphi \cos \Theta_2}{\sin \Theta_2} \sqrt{\frac{2}{\mu_3 R^2}} + \frac{x_3}{\sin \Theta_1} \sqrt{\frac{2}{\mu_1 l_1^2}} - \frac{x_4 \cos \Theta_1}{\sin \Theta_1} \sqrt{\frac{2}{\mu_3 R^2}} \\
\dot{\Theta}_2 &= x_2 \sqrt{\frac{2}{\mu_2 l_2^2}} + x_4 \sin \varphi \sqrt{\frac{2}{\mu_3 R^2}} - x_5 \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\mu_3 R^2}} \\
\dot{R} &= x_7 \sqrt{\frac{2}{\mu_3}} \\
\Omega_x &= x_4 \sqrt{\frac{2}{\mu_3 R^2}} \\
\Omega_y &= x_5 \sqrt{\frac{2}{\mu_3 R^2}} \\
\Omega_z &= -\frac{x_3}{\sin \Theta_1} \sqrt{\frac{2}{\mu_1 l_1^2}} + \frac{x_4 \cos \Theta_1}{\sin \Theta_1} \sqrt{\frac{2}{\mu_3 R^2}}
\end{aligned}$$

Действуем матрицей  $\mathbb{B}$  на вектор лагранжевых переменных и подставляем их выражения через  $x_1, \dots, x_7$ :

$$\begin{aligned}
J_x &= x_4 \sqrt{2\mu_3 R^2} + x_3 \sqrt{2\mu_1 l_1^2} \cos \Theta_1 + x_1 \sqrt{2\mu_2 l_2^2} \cos \varphi \cos \Theta_2 - x_2 \sqrt{2\mu_2 l_2^2} \sin \varphi \\
J_y &= x_5 \sqrt{2\mu_3 R^2} + x_6 \sqrt{2\mu_1 l_1^2} + x_1 \sqrt{2\mu_2 l_2^2} \sin \varphi \cos \Theta_2 + x_2 \sqrt{2\mu_2 l_2^2} \cos \varphi \\
J_z &= -x_3 \sqrt{2\mu_1 l_1^2} \sin \Theta_1 - x_1 \sqrt{2\mu_2 l_2^2} \sin \Theta_2 \\
p_{\Theta_1} &= x_6 \sqrt{2\mu_1 l_1^2} \\
p_\varphi &= -x_1 \sqrt{2\mu_2 l_2^2} \sin \Theta_2 \\
p_{\Theta_2} &= x_2 \sqrt{2\mu_2 l_2^2} \\
p_R &= \sqrt{2\mu_3} x_7
\end{aligned}$$

Правильность полученных выражений подтверждается следующей связью

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{H}} &= \Omega_x J_x + \Omega_y J_y + \Omega_z J_z + p_{\Theta_1} \dot{\Theta}_1 + p_{\Theta_2} \dot{\Theta}_2 + p_\varphi \dot{\varphi} + p_R \dot{R} - T_{\mathcal{L}} = \\
&= [2x_1^2 + \dots + 2x_7^2] - [x_1^2 + \dots + x_7^2] = x_1^2 + \dots + x_7^2
\end{aligned}$$

Выражения, связывающие лагранжевы переменные с гамильтоновыми приводить здесь не буду, они слишком громоздки, однако руками мне удалось получить компактный вид для 6 из 7 выражений. Подставив эти выражения в (6), получаем новые переменные  $x_1, \dots, x_7$  в

гамильтоновых переменных:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\mu_2 l_2^2} \sin \Theta_2} p_\varphi \\
x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\mu_2 l_2^2}} p_{\Theta_2} + \frac{\sqrt{2\mu_2 l_2^2}}{\mu_3 R^2} p_{\Theta_1} \cot^2 \Theta_1 \sin \varphi \cos \Theta_2 \\
x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\mu_1}} \frac{J_z - p_\varphi}{\sin \Theta_1} \\
x_4 &= \frac{1}{\sqrt{2\mu_3 R^2}} (p_{\Theta_2} \sin \varphi + J_x + J_z \cos \Theta_1 + p_\varphi \cot \Theta_2 \cos \varphi - p_\varphi \cot \Theta_1) \\
x_5 &= \frac{1}{\sqrt{2\mu_3 R^2}} (p_\varphi \sin \varphi \cot \Theta_2 + J_y - p_{\Theta_2} \cos \varphi - p_{\Theta_1}) \\
x_6 &= \frac{1}{\sqrt{2\mu_1 l_1^2}} p_{\Theta_1} \\
x_7 &= \frac{1}{\sqrt{2\mu_3}} p_R
\end{aligned} \tag{7}$$

Несмотря на значительный размер выражений, якобианы замены переменных как в случае лагранжиана так и в случае гамильтониана могут быть получены в компактном виде без дополнительных упрощений руками. Представляю конечный результат:

$$\begin{aligned}
[Jac]_{lagr} &= \left| \frac{\partial(\dot{R}, \dot{\Theta}_1, \dot{\Theta}_2, \dot{\varphi}, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)} \right| = 2^{7/2} \mu_1^{-1} l_1^{-2} \mu_2^{-1} l_2^{-2} \mu_3^{-3/2} R^{-2} \sin^{-1} \Theta_1 \sin^{-1} \Theta_2 \\
[Jac]_{ham} &= \left| \frac{\partial(p_R, p_{\Theta_1}, p_{\Theta_2}, p_\varphi, J_x, J_y, J_z)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)} \right| = 2^{7/2} \mu_1 l_1^2 \mu_2 l_2^2 \mu_3^{3/2} R^2 \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \\
[Jac]_{lagr} \cdot [Jac]_{ham} &= 2^7
\end{aligned}$$