Группа вращений трехмерного пространства

Рассмотрим все вращения трехмерного пространства вокруг фиксированной точки – начала координат. Под произведением двух вращений g_1 и g_2 будем понимать вращение g, состоящее в последовательном применении сначала g_2 и затем g_1. Символически запишем это так: $g = g_1 g_2$. Нетрудно проверить, что совокупность G всех вращений образует группу, т.е. что при таком определении умножения выполнены все групповые аксиомы. Единицей группы e, единичным вращением, является поворот на нулевой угол.

Описание группы вращений при помощи ортогональных матриц

Пусть x – некоторый вектор, исходящий из начала координат, вращение g переводит его в вектор x':

$$x' = gx \tag{1}$$

Рассмотрим ортогональную систему координат с центром в точке O, обозначим через e_1, e_2, e_3 единичные вектора, отложенные вдоль координатных осей. Вращение g переводит эту тройку векторов в тройку других взаимно ортогональных векторов, которые будем обозначать g_1, g_2, g_3. Вектора g_k, $k = 1, 2, 3$ задаются проекциями на оси e_i, $i = 1, 2, 3$; обозначим через $g_{ik} = (g_k, e_i)$ проекцию вектора g_k на i-ую ось. Объединим проекции в матрицу

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Будем обозначать эту матрицу так же g и называть ее матрицей вращения g. Выпишем соотношение (1) покоординатно

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} g_{ik} x_k, \tag{3}$$

где x_k – координаты вектора x, а x'_i – координаты вектора x'. Найдем, каким условиям должны удовлетворять числа g_{ik}. Так как вращение не меняет длин и углов, то оно не меняет скалярного произведения векторов. Таким образом, если $x' = gx$ и $y' = gy$, то

$$\sum_{i=1}^{3} x'_i y'_i = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k \tag{4}$$

Подставим в левую часть равенства (4) вместо x'_i и y'_i их выражения по формуле (3):

$$\sum_{i,k,l} g_{ik}\, g_{il}\, x_k y_l = \sum_{k} x_k y_k \tag{5}$$

Сравнивая коэффициенты при произведениях $x_k y_l$ в левой и правой частях, получаем:

$$\sum_{i=1}^{3} g_{ik}\, g_{il} = \delta_{kl}, \tag{6}$$

где δ_{kl} – кронекеровская дельта, определенная следующими соотношениями: $\delta_{kl} = 1$, если $k = l$, $\delta_{kl} = 0$, если $k \neq l$. Равенство (6) может быть записано в матричной форме:

$$g^\top g = e \tag{7}$$

или

$$g^\top = g^{-1}. \tag{8}$$

Матрицы, удовлетворяющие равенствам (7), (8), называются ортогональными матрицами. Если взять детерминант обеих частей равенства (7), то получим $\det\left(g^\top\right)\det(g) = 1$, т.е. $|\det(g)|^2 = 1$, и

$$\det(g) = \pm 1. \tag{9}$$

Итак, группа вращений G может быть реализована (представлена) как группа ортогональных матриц третьего порядка с единичным детерминантом.

Введение параметров в группу вращений

Так как каждое вращение есть вращение вокруг некоторой оси, то оно может быть полностью определено путем задания оси вращения и задания угла поворота вокруг нее. Так, вращение может быть задано вектором $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, направленным вдоль оси вращения и равным по величине углу поворота. Направление вектора будем выбирать так, чтобы угол поворота не превосходил π. Координаты векторов, описывающих всевозможные вращения, будут удовлетворять условию $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leqslant \pi^2$, и, значит, заполнять шар радиуса π. Ясно, что различные внутренние точки шара описывают различные вращения, а две диаметрально противоположные точки на поверхности сферы – одно и то же вращение на угол π (поворот на угол π в двух противоположных направлениях приводит к одному и тому же результату).

Такой способ описания вращений выявляет топологическую структуру группы вращений, а именно, эта группа топологически эквивалентна шару, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки границы.

Представленные выше результаты показывают, что вращение g может быть описано при помощи девяти параметров, а именно элементами g_{ik} матрицы вращения g; однако эти параметры не являются независимыми, они связаны соотношениями (6). Примером описания вращения при помощи независимых параметров являются углы Эйлера.

Пусть вращение g переводит координатные оси Ox, Oy, Oz в оси Ox', Oy', Oz'. Обозначим линию пересечения плоскостей xOy и $x'Oy'$ через Ol (ее принято называть *линией узлов*). Придадим ей направление таким образом, чтобы наблюдатель, смотря вдоль заданного направления, видел угол между осями Oz и Oz' (меньше π), отложенным против часовой стрелки. Это условие задает направление линии узлов во всех ситуциях, за исключением тех, в которых угол между осями Oz, Oz' равен 0 или π.

Обозначим через φ угол между осью Ox и линией узлов Ol, через ψ – угол между Ol и осью Ox' и через θ – между Oz и Oz'. Пусть g_φ и g_ψ обозначают вращения вокруг оси Oz, g_θ – вращение вокруг оси Ox.

Вращение g может быть представлено композицией $g = \widetilde{g}_\psi \widetilde{g}_\theta g_\varphi$ трех поворотов g_φ, $\widetilde{g}_\theta$, $\widetilde{g}_\psi$ вокруг осей Oz, Ol, Oz', соответственно. В результате вращения g_φ ось Ox совпадет с линией узлов Ol; ось Oz перейдет в ось Oz' в результате вращения $\widetilde{g}_\theta$; вращение $\widetilde{g}_\psi$ переведет линию узлов Ol в Ox' (ось Oy в результате вращений g_φ и $\widetilde{g}_\psi$ перейдет в Oy').

Повороты $\widetilde{g}_\theta$ и $\widetilde{g}_\psi$ были сделаны вокруг вспомогательных осей Ol и Oz'; представим их в виде поворотов относительно первоначальных осей Ox и Oz. Поворот $\widetilde{g}_\theta$ является преобразованием новой системы координатных осей, полученной из первоначальной, действием g_φ, следовательно $\widetilde{g}_\theta = g_\varphi g_\theta g_\varphi^{-1}$. Аналогично, $\widetilde{g}_\psi = (\widetilde{g}_\theta g_\varphi) g_\psi (\widetilde{g}_\theta g_\varphi)^{-1}$. Подставим в выражение для композиции поворотов g:

$$g = \widetilde{g}_\psi \widetilde{g}_\theta g_\varphi = (\widetilde{g}_\theta g_\varphi) g_\psi (\widetilde{g}_\theta g_\varphi)^{-1} \widetilde{g}_\theta g_\varphi = \widetilde{g}_\theta g_\varphi g_\theta = g_\varphi g_\theta g_\psi \tag{10}$$

То есть, последовательность поворотов на углы φ, θ, ψ вокруг вспомогательных систем осей, получаемых в результате осуществления каждого следующего поворота, эквивалентна последовательности поворотов относительно исходных осей, сделанных в обратном порядке ψ, θ, φ.

Три угла φ, θ, ψ являются независимыми и полностью определяют поворот g. Согласно определениям, они изменяются в пределах, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Разные наборы эйлеровых углов (φ, θ, ψ), взятые из этих интервалов, определяют разные повороты, за исключением случаев $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. В этих особых случаях плоскости xOy и $x'Oy'$ совпадают, и линия их пересечения, линия узлов Ol, оказывается неопределена. Варьируя ориентацию линии узлов в плоскости, заключаем, что в случае $\theta = 0$ пары углов (φ, ψ) и $(\varphi + \alpha, \psi - \alpha)$ определяют один и тот же поворот для любого α; аналогично, в случае $\theta = \pi$ пары углов (φ, ψ) и $(\varphi + \alpha, \psi + \alpha)$ эквивалентны для любого α. Выразим элементы матрицы поворота g через углы Эйлера. Вспользуемся полученным выражением для поворота g через повороты g_φ, g_θ и g_ψ относительно исходной системы координат.

$$g_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad g_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g = g_\varphi g_\theta g_\psi = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Заметим, что замена $(\varphi,\theta,\psi) \to (\pi-\varphi,\theta,\pi-\psi)$ переводит матрицу g в $g^\top = g^{-1}$. То есть, если поворот g задан углами (φ,θ,ψ), то обратный поворот задается углами $(\pi-\varphi,\theta,\pi-\psi)$.

Связь группы вращений с группой унитарных матриц второго порядка

Покажем, что вращения трехмерного пространства можно описывать комплексными матрицами второго порядка. Для этого рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость – каждой точке P сферы относится точка ζ в плоскости, лежащая на луче NP, исходящем из северного полюса N. Вращение трехмерного пространства вокруг центра сферы переводит друг в друга точки сферы и порождает тем самым некоторое преобразование в плоскости.

Рассмотрим сферу диаметра 1. Из подобия треугольников ΔANP и ΔBNζ получаем связь между координатами x, y, z точки P сферы и координатами ξ, η точки ζ плоскости:

$$\xi = \frac{x}{\frac{1}{2}-z}, \qquad \eta = \frac{y}{\frac{1}{2}-z}. \tag{11}$$

Вводим комплексную переменную $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z} \tag{12}$$

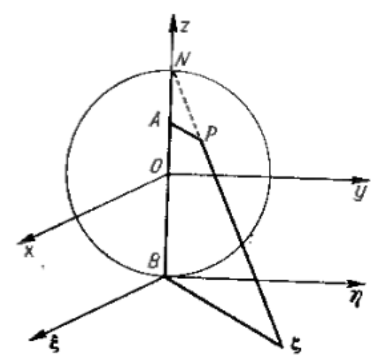

Рис. 1: Стереографическая проекция

Т.к. точка P принадлежит сфере единичного диаметра, то ее координаты x, y, z удовлетворяют соотношению

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{4}. \tag{13}$$

Используем это соотношение при преобразовании ζ:

$$\zeta = \frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z} = \frac{(x+iy)\,(x-iy)}{\left(\frac{1}{2}-z\right)(x-iy)} = \frac{x^2+y^2}{\left(\frac{1}{2}-z\right)(x-iy)} = \frac{\left(\frac{1}{2}-z\right)\left(\frac{1}{2}+z\right)}{\left(\frac{1}{2}-z\right)(x-iy)} = \frac{\frac{1}{2}+z}{x-iy}. \tag{14}$$

Найдем преобразование плоскости, отвечающее вращению на угол φ вокруг оси Oz. Имеем:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' &= z \end{aligned} \tag{15}$$

$$\zeta' = \frac{x'+iy'}{\frac{1}{2}-z} = \frac{x(\cos\varphi+i\sin\varphi)+iy(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\frac{1}{2}-z} = \exp(i\varphi)\,\frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z} = \exp(i\varphi)\,\zeta \tag{16}$$

Т.е. вращению на угол φ отвечает преобразование плоскости $\zeta' = \exp(i\varphi)\,\zeta$. Рассмотрим вращение на угол θ вокруг оси Ох. Заметим, что при таком вращении выражение

$$\omega = \frac{y+iz}{\frac{1}{2}-x} \tag{17}$$

умножается на $\exp(i\theta)$, т.е.

$$\omega' = \exp(i\theta)\,\omega. \tag{18}$$

Выразим ω через ζ (и соответственно ω' через ζ'). Рассмотрим отношение:

$$\frac{\omega+i}{\omega-i} = \frac{\dfrac{y+iz}{\frac{1}{2}-x}+i}{\dfrac{y+iz}{\frac{1}{2}-x}-i} = \frac{y+iz+i\left(\frac{1}{2}-x\right)}{y+iz-i\left(\frac{1}{2}-x\right)} = \frac{-(x+iy)+\left(z+\frac{1}{2}\right)}{(x-iy)+\left(z-\frac{1}{2}\right)}, \tag{19}$$

$$x+iy = \zeta\left(\frac{1}{2}-z\right), \quad x-iy = \left(z+\frac{1}{2}\right)\zeta^{-1} \tag{20}$$

$$\frac{\omega+i}{\omega-i} = \frac{\zeta\left(z-\frac{1}{2}\right)+\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\zeta^{-1}\left(z+\frac{1}{2}\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \zeta \tag{21}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\omega'+i}{\omega'-i} = \zeta'. \tag{22}$$

Выражаем ω через ζ в выражении (21) и ω' через ζ' в выражении (22), подставляем выражения в соотношение (18), связывающее ω и ω':

$$\omega = -i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \qquad \omega' = -i\frac{1+\zeta'}{1-\zeta'} \tag{23}$$

$$\frac{\zeta'+1}{\zeta'-1} = \exp(i\theta)\,\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \tag{24}$$

Решая это уравнение относительно ζ', мы получаем преобразование, отвечающее вращения на угол θ вокруг оси Ох:

$$\zeta' = \frac{\zeta\left(\exp(i\theta)+1\right)+\left(\exp(i\theta)-1\right)}{\zeta\left(\exp(i\theta)-1\right)+\left(\exp(i\theta)+1\right)} \tag{25}$$

$$\frac{\exp(i\theta)+1}{\exp(i\theta)-1} = \frac{\exp(2i\theta)-1}{\exp(2i\theta)-2\exp(i\theta)+1} = \frac{\exp(i\theta)-\exp(-i\theta)}{\exp(i\theta)+\exp(-i\theta)-2} = -i\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = -i\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\zeta' = \frac{\zeta\left(\exp\left(i\theta\right)+1\right)+\left(\exp\left(i\theta\right)-1\right)}{\zeta\left(\exp\left(i\theta\right)-1\right)+\left(\exp\left(i\theta\right)+1\right)} = \frac{\zeta\dfrac{\exp\left(i\theta\right)+1}{\exp\left(i\theta\right)-1}+1}{\zeta+\dfrac{\exp\left(i\theta\right)+1}{\exp\left(i\theta\right)-1}} = \frac{-i\zeta\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}+1}{\zeta-i\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}} \tag{26}$$

$$\zeta' = \frac{\zeta\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}}{i\zeta\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}} \tag{27}$$

Таким образом, мы видим, что вращениям вокруг осей Ox и Oz отвечают дробно-линейные преобразования в плоскости ζ. Ясно, кроме того, что произведению вращений отвечает произведение преобразований в плоскости. Так как всякое вращение можно получить как произведение вращей вокруг осей Oz и Ox, то всякому вращению отвечает отвечает дробно-линейное преобразование общего вида

$$\zeta' = \frac{a\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}. \tag{28}$$

Дробно-линейное преобразование (28) однозначно определяется комплексной матрицей второго порядка

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}. \tag{29}$$

Так как ζ' из формулы (28) не меняется при умножении числителя и знаменателя правой части на одно и то же число, то умножив α, β, γ, δ на $\pm\dfrac{1}{\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}}$, мы можем считать определитель матрицы (29) равным 1. Таким образом, каждому вращению отвечает определенная с точностью до знака матрица вида (29), для которой $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Выпишем матрицы, отвечающие вращениям g_φ и g_θ вокруг осей Oz и Ox. Вращению g_θ отвечает матрица

$$g_\theta \sim \begin{bmatrix}\cos\dfrac{\theta}{2} & i\sin\dfrac{\theta}{2}\\ i\sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2}\end{bmatrix}. \tag{30}$$

Вращению g_φ отвечает преобразование $\zeta' = \exp\left(i\varphi\right)\zeta$. Записав его в виде $\zeta' = \dfrac{\exp\left(\dfrac{i\varphi}{2}\right)\zeta}{\exp\left(-\dfrac{i\varphi}{2}\right)}$, мы получим матрицу преобразования

$$g_\varphi \sim \begin{bmatrix} \exp\left(\dfrac{i\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\dfrac{i\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{31}$$

с определителем, равным единице.

Вращение g с эйлеровыми углами φ, θ, ψ может быть записано как произведение вращений $g = g_\varphi g_\theta g_\psi$. Пребразованию g отвечает матрица

$$g \sim \begin{bmatrix} \exp\left(\dfrac{i\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\dfrac{i\varphi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} & i\sin\dfrac{\theta}{2} \\ i\sin\dfrac{\theta}{2} & \cos\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp\left(\dfrac{i\psi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\dfrac{i\psi}{2}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2}\exp\left(\dfrac{i}{2}(\varphi+\psi)\right) & i\sin\dfrac{\theta}{2}\exp\left(-\dfrac{i}{2}(\psi-\varphi)\right) \\ i\sin\dfrac{\theta}{2}\exp\left(\dfrac{i}{2}(\psi-\varphi)\right) & \cos\dfrac{\theta}{2}\exp\left(-\dfrac{i}{2}(\varphi+\psi)\right) \end{bmatrix} \tag{32}$$

Матрицы (30) и (31) являются унитарными матрицами с детерминантом 1. Поэтому и их произведение – матрица (32), отвечающая произвольному вращению, также униатрана и имеет детерминант, равный 1.

Покажем теперь, что, обратно, всякой унитарной матрице с единичным детерминантом отвечает некоторое вращение. Условия унитарности матрицы с элементами α, β, γ, δ дают следующие соотношения

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^* + \beta\beta^* &= 1, \\ \alpha\gamma^* + \beta\delta^* &= 0, \\ \gamma\alpha^* + \delta\beta^* &= 0, \\ \gamma\gamma^* + \delta\delta^* &= 1. \end{aligned} \tag{33}$$

Используем также условие единичности детерминанта:

$$\begin{gathered} \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\alpha^*\delta - \alpha^*\beta\gamma = \alpha^* \\ (1-\beta\beta^*)\,\delta - \alpha^*\beta\gamma = \alpha^* \\ (1-\beta\beta^*)\,\delta + \beta\beta^*\delta = \alpha^* \quad \Longrightarrow \; \alpha^* = \delta \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha\beta^*\delta - \beta\beta^*\gamma = \beta^* \\ \alpha\beta^*\delta - (1-\alpha\alpha^*)\,\gamma = \beta^* \\ -\alpha\alpha^*\gamma - (1-\alpha\alpha^*)\,\gamma = \beta^* \quad \Longrightarrow \quad \gamma = -\beta^* \end{gathered}$$

Поэтому произвольная матрица рассматриваемого типа может быть представлена в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}, \tag{34}$$

где

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{35}$$

Ясно что матрицу (34) при условии (35) можно представить в виде (32), если положить (т.к. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$)

$$\cos\frac{\theta}{2} = |\alpha|, \quad \sin\frac{\theta}{2} = |\beta|, \tag{36}$$

а углы φ и ψ определить из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\varphi + \psi) &= \arg\alpha, \\ -\frac{1}{2}(\psi - \varphi) + \frac{\pi}{2} &= \arg\beta. \end{aligned} \tag{37}$$

Таким образом, каждое вращение можно задавать двумя комплексными числами, удовлетворяющими условию (35), или, что то же, четырьмя вещественными числами, сумма квадратов которых равна 1.

Итак, показано, что всякй унитарной матрице второго порядка с детерминантом 1 отвечает вращение в трехмерном пространстве. Обратно, всякому вращению отвечают *две* такие матрицы, отличающиеся знаком.

Установленное ранее соответствие между вращениями и дробно-линейными преобразованиями однозначно. С другой стороны, мы видели, что каждое дробно-линейное преобразование может быть записано с помощью двух матриц с детерминантом, равным 1. Таким образом, каждому вращению отвечают *две* матрицы вида (34). Естественного способа избавиться от двузначности этого соотвествия нет. Рассмотрим, например, вращение на угол φ вокруг оси Oz. Ему отвечает матрица

$$\begin{bmatrix} \exp\left(\dfrac{i\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\dfrac{i\varphi}{2}\right) \end{bmatrix}. \tag{38}$$

В частности, единичному вращению $\varphi = 2k\pi$ отвечают две матрицы

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Если бы мы сопоставили этому вращению лишь матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{40}$$

то, изменяя угол φ непрерывно от 0 до 2π, мы пришли бы при $\varphi = 2\pi$ к матрице

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Таким образом, для сохранения непрерывности мы должны считать, что единичному вращению отвечают обе матрицы (39).

Инвариантный интеграл на группе вращений

Будем говорить, что задана функция $\omega = f(g)$ на группе G, если каждому вращению $g \in G$ отвечает некоторое число ω. Если задавать вращение g эйлеровыми углами φ, θ, ψ, то $f(g)$ станет просто функцией от φ, θ, ψ:

$$f(g) = f(\varphi, \theta, \psi),$$

причем

$$f(\varphi + 2\pi, \theta, \psi) = f(\varphi, \theta, \psi + 2\pi) = f(\varphi, \theta, \psi).$$

Инвариантным интегралом функции $f(g)$ на группе G называют интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(g)\omega(g)\,d\varphi\,d\theta\,d\psi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi, \theta, \psi)\omega(\varphi, \theta, \psi)\,d\varphi\,d\theta\,d\psi, \tag{42}$$

в котором множитель $\omega(g)$ выбран так, чтобы для любой функции $f(g) = f(\varphi, \theta, \psi)$, непрерывной относительно φ, θ, ψ, выполнялось условие

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(gg_0)\omega(g)\,d\varphi\,d\theta\,d\psi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(g)\omega(g)\,d\varphi\,d\theta\,d\psi \tag{43}$$

Непосредственным вычислением можно показать, что множитель $\omega(g)$ этим условием определяется однозначно с точностью до числового множителя (интересно, как?). Этот результат вытекает также без всяких вычислений из общий теории интегрирования на топологической группе [1]. Покажем, что функция

$$\omega(g) = \sin\theta \quad \text{при} \quad g = g_\varphi g_\theta g_\psi \tag{44}$$

удовлетворяет условию (43), так что выражение

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(g)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi \tag{45}$$

есть инвариантный интеграл на группе G. Положим $\widetilde{g} = gg_0$ и обозначим через $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\theta}$, $\widetilde{\psi}$ эйлеровы углы вращения $\widetilde{g}$; очевидно, $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\theta}$, $\widetilde{\psi}$ являются функциями эйлеровых углов φ, θ, ψ вращения g, и условие (43) для интеграла (45) означает, что должно быть

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\widetilde{\varphi},\widetilde{\theta},\widetilde{\psi})\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi,\theta,\psi)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi. \tag{46}$$

Переходя в интеграле слева от переменных интегрирования φ, θ, ψ к переменным $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\theta}$, $\widetilde{\psi}$, видим, что он будет равен интегралу в правой части, если при этом преобразовании переменных $\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi$ преобразуется в $\sin\widetilde{\theta}\, d\widetilde{\varphi}\, d\widetilde{\theta}\, d\widetilde{\psi}$, т.е. если

$$\sin\widetilde{\theta}\, d\widetilde{\varphi}\, d\widetilde{\theta}\, d\widetilde{\psi} = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi. \tag{47}$$

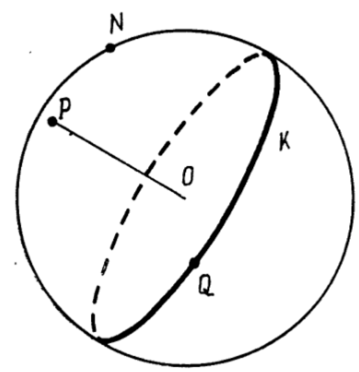

Рис. 2:

Обозначим через P точку на единичной сфере, в которую в результате вращения $g^{-1} = g^\top$ переходит северный полюс N(0, 0, 1), а через Q – точку, в которую в результате вращения $g^\top$ переходит точка (1, 0, 0). Вращение g полностью определяется точками P, Q, причем точку P можно выбирать произвольным образом на сфере, а точку Q после этого – произвольным образом на большом круге K, плоскость которого перпендикулярна к радиусу OP (так как образы векторов OP, OQ будут перпендикулярны). В результате применения матрицы $g^\top$ вектор (0, 0, 1) переходит в вектор $(g_{31}, g_{32}, g_{33}) = (\sin\psi\sin\theta, \cos\psi\sin\theta, \cos\theta)$. Следовательно $\dfrac{\pi}{2} - \psi, \theta$ – сферические координаты точки P; $dS = \sin\theta\, d\psi\, d\theta$ есть элемент площади поверхности сферы в точке P (в силу соотношения $dS = \left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi}\right|$). $d\varphi$ есть элемент дуги круга K, так как изменение φ на $d\varphi$ (при фиксированных θ, ψ) не приведет к изменению положения точки P; ему отвечает вращение на $d\varphi$ вокруг OP, т.е. сдвиг точки Q на $d\varphi$.

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi \\ -\cos\varphi\sin\psi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\theta \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$dQ\Big|_{\substack{\psi=\text{const}\\ \theta=\text{const}}} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi \\ \sin\varphi\sin\psi - \cos\theta\cos\psi\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \end{bmatrix} d\varphi \tag{49}$$

$$\left[dQ\Big|_{\substack{\psi=\mathrm{const}\\ \theta=\mathrm{const}}} \right]^2 = (d\varphi)^2 \quad \Longrightarrow \quad dQ\Big|_{\substack{\psi=\mathrm{const}\\ \theta=\mathrm{const}}} = d\varphi \tag{50}$$

Но точки $\widetilde{\mathrm{P}}$ и $\widetilde{\mathrm{Q}}$, отвечающие вращению $\widetilde{g} = gg_0$, получаются из точек P и Q вращением $g_0^\top$. При этом вращении и элемент $dS = \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ площади поверхности сферы, и элемент $d\varphi$ дуги круга K остаются инвариантными; следовательно их произведение $\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi$ также остается инвариантным, чем и доказывается формула (47).

Очевидно, при любом положительном постоянном c вес $\omega(g) = c\sin\theta$ также удовлетворяет условию (43). Выберем c так, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} c\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi = 1, \tag{51}$$

т.е.

$$c = \frac{1}{8\pi^2}, \quad \omega(g) = \frac{1}{8\pi^2}\sin\theta. \tag{52}$$

Выражение $\dfrac{1}{8\pi^2}\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi$ называют элементом инвариантного объема на группе G и обозначают через dg. Условие инвараинтности (43) примет тогда вид

$$\int f(gg_0)dg = \int f(g)dg. \tag{53}$$

Отметим, что, кроме того,

$$\int f(g^{-1})dg = \int f(g)dg \tag{54}$$

и

$$\int f(g_0 g)dg = \int f(g)dg. \tag{55}$$

Действительно, переходу от g к g^{-1} отвечает переход от φ, θ, ψ к $\pi-\varphi, \theta, \pi-\psi$, в результате которого выражение $\sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, d\psi$ не изменяется; отсюда следует формула (54).

Список литературы

[1] Вейль А. *Интегрирование в топологических группах.* 1950.

[2] Шапиро З.Я. Гельфанд И.М., Минлос Р.А. *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения.*

[3] Наймарк М.А. *Линейные представления группы Лоренца.* 1958.