Метод Якоби

На примере системы N_2-Ar сделаем преобразование координат, аналогичное введению приведенной массы в задаче двух тел, приводящее к возникновению виртуальных масс. Обозначим массы азотов за m_1, m_2, аргона – за m_3. Радиус-векторам относительно лабораторной системы координат припишем соответстующие номера.

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{\mathbf{r}}_3^2 \tag{1}$$

Осуществим замену переменных $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \longrightarrow \mathbf{r}_{12}, \boldsymbol{\rho}_{12}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_{12} = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{12} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{\rho}_{12} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12} - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{\rho}_{12} \end{cases} \tag{2}$$

Подставляя замену (2) в выражение кинетической энергии (1), получаем

$$T = \frac{1}{2}m_{12}\dot{\mathbf{r}}_{12}^2 + \frac{1}{2}\mu_{12}\dot{\boldsymbol{\rho}}_{12}^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{\mathbf{r}}_3^2, \tag{3}$$

где были введены обозначения

$$m_{12} = m_1 + m_2, \qquad \frac{1}{\mu_{12}} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Заметим, что вектор $\boldsymbol{\rho}_{12}$ направлен вдоль линейной молекулы N_2, а вектор $\mathbf{r}_{12}$ – к ее центру масс.
Проделаем аналогичную операцию с парой векторов $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_3$, введя переменные $\boldsymbol{\rho}_\Sigma, \mathbf{r}_\Sigma$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_\Sigma = \mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_\Sigma = \dfrac{m_{12}\mathbf{r}_{12} + m_3\mathbf{r}_3}{m_{12} + m_3} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_\Sigma - \dfrac{m_{12}}{m_{12} + m_3}\boldsymbol{\rho}_\Sigma \\ \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_\Sigma + \dfrac{m_3}{m_{12} + m_3}\boldsymbol{\rho}_\Sigma \end{cases} \tag{4}$$

$$T = \frac{1}{2}m_\Sigma\dot{\mathbf{r}}_\Sigma^2 + \frac{1}{2}\mu_\Sigma\dot{\boldsymbol{\rho}}_\Sigma^2 + \frac{1}{2}\mu_{12}\dot{\boldsymbol{\rho}}_{12}^2, \tag{5}$$

где были введены обозначения

$$m_\Sigma = m_1 + m_2 + m_3, \quad \text{(сумма масс мономеров)}$$
$$\frac{1}{\mu_\Sigma} = \frac{1}{m_1 + m_2} + \frac{1}{m_3}. \quad \text{(приведенная масса мономеров)}$$

Переместив начало системы отсчета в центр масс системы, исключаем первое слагаемое в (5).

$$T = \frac{1}{2}\mu_\Sigma \dot{\boldsymbol{\rho}}_\Sigma^2 + \frac{1}{2}\mu_{12}\dot{\boldsymbol{\rho}}_{12}^2. \tag{6}$$

Это выражение может быть получено альтернативным путем. Вместо того, чтобы последовательно вводить вектора Якоби $\boldsymbol{\rho}_{12}$, $\boldsymbol{\rho}_\Sigma$, сразу выпишем выражения для них через исходные вектора $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, дополненные выражением для вектора центра масс $\mathbf{r}_\Sigma$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \boldsymbol{\rho}_\Sigma = \mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_3 = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} - \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_\Sigma = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{12} \\ \boldsymbol{\rho}_\Sigma \\ \mathbf{r}_\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \dfrac{m_1}{m_1+m_2} & \dfrac{m_2}{m_1+m_2} & -1 \\ \dfrac{m_1}{m_1+m_2+m_3} & \dfrac{m_2}{m_1+m_2+m_3} & \dfrac{m_3}{m_1+m_2+m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Обращая выписанную матрицу, выражаем исходные вектора $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ через вектора Якоби $\boldsymbol{\rho}_{12}, \mathbf{r}_\Sigma, \mathbf{r}_\Sigma$. Затем отделяем центр масс системы, то есть исключаем вектор $\mathbf{r}_\Sigma$ из выражений для $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_2}{m_1+m_2} & \dfrac{m_3}{m_1+m_2+m_3} & 1 \\ -\dfrac{m_1}{m_1+m_2} & \dfrac{m_3}{m_1+m_2+m_3} & 1 \\ 0 & -\dfrac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{12} \\ \boldsymbol{\rho}_\Sigma \\ \mathbf{r}_\Sigma \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{\rho}_{12} + \dfrac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\boldsymbol{\rho}_\Sigma \\ \mathbf{r}_2 = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{\rho}_{12} + \dfrac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\boldsymbol{\rho}_\Sigma \\ \mathbf{r}_3 = -\dfrac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3}\boldsymbol{\rho}_\Sigma \end{cases} \tag{9}$$

Продифференцировав полученные выражения и подставив в (1), приходим к (6)

$$T = \frac{1}{2}\mu_\Sigma \dot{\boldsymbol{\rho}}_\Sigma^2 + \frac{1}{2}\mu_{12}\dot{\boldsymbol{\rho}}_{12}^2 \tag{10}$$

Введем подвижную систему координат таким образом, чтобы линейная молекула и атом всегда находились в плоскости XZ, а атом лежал на оси OZ. Введем внутренние координаты $\mathbf{q} = \{R, \Theta\}$; R – длина вектора $\boldsymbol{\rho}_\Sigma$, равная расстоянию между центром масс N_2 и Ar, Θ – угол поворота N_2 относительно линии связи в подвижной плоскости.

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{\rho}_\Sigma \to \mathbf{R}_1 = \{0, 0, R\} \\
\boldsymbol{\rho}_{12} \to \mathbf{R}_2 = \{l\cos\Theta, 0, l\sin\Theta\}
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
X_1 = 0 & X_2 = l\sin\Theta \\
Y_1 = 0 & Y_2 = 0 \\
Z_1 = R & Z_2 = l\cos\Theta
\end{array}
$$

«Японский гамильтониан»

Рассмотрим два произвольных мономера. Обозначим радиус-вектора их центров масс за $\mathbf{r}_{\text{mon}_1}$ и $\mathbf{r}_{\text{mon}_2}$. Поместим систему отсчета в центр масс системы как целого; параметризуем ось, соединяющую центры масс мономеров сферическими углами Θ, Φ; обозначим вектор, направленный от центра масс первого мономера к центру масс второго за $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{mon}_1} &= -\frac{m_{\text{mon}_2}}{M}\mathbf{R} = -\frac{m_{\text{mon}_2}}{M}\begin{bmatrix} R\sin\Theta\cos\Phi \\ R\sin\Theta\sin\Phi \\ R\cos\Theta \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r}_{\text{mon}_2} &= \frac{m_{\text{mon}_1}}{M}\mathbf{R} = \frac{m_{\text{mon}_1}}{M}\begin{bmatrix} R\sin\Theta\cos\Phi \\ R\sin\Theta\sin\Phi \\ R\cos\Theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

где M – сумма масс мономеров. Пусть второй мономер состоит из n точек, радиус-вектора которых во введенной системе отсчета обозначим $\left\{\mathbf{r}_2^k\right\}_{k=1\dots n}$, а относительно центра масс второго мономера – $\left\{\mathbf{r}_{\text{mon}_2}^k\right\}_{k=1\dots n}$. Тогда для k-й точки вектора связаны соотношением

$$\mathbf{r}_2^k = \mathbf{r}_{\text{mon}_2} + \mathbf{r}_{\text{mon}_2}^k \tag{12}$$

Преобразуем выражение кинетической энергии второго мономера.

$$\begin{aligned} T_2 = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\dot{\mathbf{r}}_2^k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2} + \dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}^k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}^k + \left(\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}^k\right)^2\right] = \\ = m_{\text{mon}_2}\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_{\text{mon}_2}^k\right] + \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}^k\right)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Второе слагаемое в (13) равно нулю, т.к. в квадратных скобках представлен вектор, направленный в центр масс второго мономера, в системе, связанной с центром масс второго мономера, то есть нуль-вектор. Производная $\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}$ в сферической системе координат имеет следующий вид

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2} = \dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\dot{\Phi}^2\sin^2\Theta \tag{14}$$

Подставим выражение для производной (14) в кинетическую энергию второго мономера (13):

$$T_2 = m_{\text{mon}_2}\frac{m_{\text{mon}_1}^2}{M^2}\left[\dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\dot{\Phi}^2\sin^2\Theta\right] + \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\dot{\mathbf{r}}_{\text{mon}_2}^k\right)^2 \tag{15}$$

Будем описывать ориентацию второго мономера при помощи матрицы $\mathbb{S}_2$. Обозначим систему векторов $\left\{\mathbf{r}^k_{\mathrm{mon}_2}\right\}_{k=1\dots n}$ в начальный момент времени за $\left\{\mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}\right\}_{k=1\dots n}$. Тогда в момент времени t системы векторов связаны при помощи матрицы $\mathbb{S}_2$:

$$\mathbf{r}^k_{\mathrm{mon}_2}(t) = \mathbb{S}_2(t)\,\mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}, \qquad k = 1\dots n \tag{16}$$

Получим выражение для производной k-го вектора $\mathbf{r}^k_{\mathrm{mon}_2}$:

$$\dot{\mathbf{r}}^k_{\mathrm{mon}_2} = \dot{\mathbb{S}}_2\,\mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2} = \dot{\mathbb{S}}_2\,\mathbb{S}_2^{-1}\mathbf{r}^k_{\mathrm{mon}_2} = \left[\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}^k_{\mathrm{mon}_2}\right] = \mathbb{S}_2\left[\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}\right] \tag{17}$$

Просуммируем масс-взвешенные производные векторов:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\dot{\mathbf{r}}^k_{\mathrm{mon}_2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k\left[\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}\right]^\top \mathbb{S}_2^\top\mathbb{S}_2\left[\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}\right] = \sum_{k=1}^{n} m_k\left[\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}\right]^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} m_k\,\boldsymbol{\Omega}_2^\top\left[\mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2} \times \left[\boldsymbol{\Omega}_2 \times \mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}\right]\right] = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\Omega}_2^\top\left(\left(\mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}, \mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}\right) - \mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}\left(\mathbf{R}^k_{\mathrm{mon}_2}, \boldsymbol{\Omega}_2\right)\right) =$$
$$= \boldsymbol{\Omega}_2^\top\mathbb{I}_2\,\boldsymbol{\Omega}_2,$$

где $\mathbb{I}_2$ – тензор инерции второго мономера. Положим, что в начальный момент система координат, находящаяся в центре масс пары, совпадала с системой главных осей второго мономера. Тогда тензор инерции $\mathbb{I}_2$ принимает диагональный вид (верхний индекс – номер мономера)

$$\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} I_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3^2 \end{bmatrix}$$

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}_2$ связан с вектором эйлеровых скоростей $\dot{\mathbf{e}}_2$ матрицей $\mathbb{V}_2$:

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} \sin\theta_2\sin\psi_2 & \sin\theta_2 & \cos\psi_2 & 0 \\ \sin\theta_2\cos\psi_2 & -\sin\psi_2 & 0 \\ \cos\theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \mathbb{V}_2\dot{\mathbf{e}}_2$$

Итак, выражение кинетической энергии второго мономера T_2 приходит к виду

$$T_2 = m_{\mathrm{mon}_2}\frac{m^2_{\mathrm{mon}_1}}{M^2}\left[\dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\dot{\Phi}^2\sin^2\Theta\right] + \dot{\mathbf{e}}_2^\top\mathbb{V}_2^\top\mathbb{I}_2\,\mathbb{V}_2\dot{\mathbf{e}}_2 \tag{18}$$

Проводя аналогичные рассуждения приходим к выражению для кинетической энергии первого мономера T_1. Получаем выражение для полной кинетической энергии пары:

$$T = T_1 + T_2 = \left[m_{\mathrm{mon}_1}\frac{m^2_{\mathrm{mon}_2}}{M^2} + m_{\mathrm{mon}_2}\frac{m^2_{\mathrm{mon}_1}}{M^2}\right] \times \left[\dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\dot{\Phi}^2\sin^2\Theta\right] +$$
$$+\dot{\mathbf{e}}_1^\top\mathbb{V}_1^\top\mathbb{I}_1\,\mathbb{V}_1\dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\mathbf{e}}_2^\top\mathbb{V}_2^\top\mathbb{I}_2\,\mathbb{V}_2\dot{\mathbf{e}}_2, \tag{19}$$

$$T = \frac{1}{2}\mu\left[\dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\dot{\Phi}^2\sin^2\Theta\right] + \dot{\mathbf{e}}_1^\top\mathbb{V}_1^\top\mathbb{I}_1\,\mathbb{V}_1\dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\mathbf{e}}_2^\top\mathbb{V}_2^\top\mathbb{I}_2\,\mathbb{V}_2\dot{\mathbf{e}}_2, \tag{20}$$

где $\mu = \dfrac{m_{\text{mon}_1} m_{\text{mon}_2}}{m_{\text{mon}_1} + m_{\text{mon}_2}}$.

Для перехода к гамильтоновой форме кинетической энергии выпишем выражения для эйлеровых импульсов второго волчка (нижний индекс обозначает номер волчка):

$$\mathbf{p}_2^e = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{e}}_2} = \mathbb{V}_2 \mathbb{I}_2 \, \mathbb{V}_2 \dot{\mathbf{e}}_2$$

$$\begin{aligned} p_2^\varphi =& I_1^2 \left(\dot\varphi_2 \sin\theta_2 \sin\psi_2 + \dot\theta_2 \cos\psi_2 \right) \sin\theta_2 \sin\psi_2 + \\ &+ I_2^2 \left(\dot\varphi_2 \sin\theta_2 \cos\psi_2 - \dot\theta_2 \sin\psi_2 \right) \sin\theta_2 \cos\psi_2 + \\ &+ I_3^2 \left(\dot\varphi_2 \cos\theta_2 + \dot\psi_2 \right) \cos\theta_2 \\ p_2^\theta =& I_1^2 \left(\dot\varphi_2 \sin\theta_2 \sin\psi_2 + \dot\theta_2 \cos\psi_2 \right) \cos\psi - \\ &- I_3^2 \left(\dot\varphi_2 \sin\theta_2 \cos\psi_2 - \dot\theta_2 \sin\psi_2 \right) \sin\psi_2 \\ p_2^\psi =& I_3^2 \left(\dot\varphi_2 \cos\theta_2 + \dot\psi_2 \right) \end{aligned} \tag{21}$$

Перепишем систему в матричном виде и разрешим ее относительно вектора эйлеровых скоростей $\dot{\mathbf{e}}_2$:

$$\begin{bmatrix} \left(I_1^2 \sin^2\psi_2 + I_2^2 \cos^2\psi_2 \right) \sin^2\theta_2 + I_3^2 \cos^2\theta_2 & \left(I_1^2 - I_2^2 \right) \sin\theta_2 \sin\psi_2 \cos\psi_2 & I_3^2 \cos\theta_2 \\ \left(I_1^2 - I_2^2 \right) \sin\theta_2 \sin\psi_2 \cos\psi_2 & I_1^2 \cos^2\psi_2 + I_2^2 \sin^2\psi_2 & 0 \\ I_3^2 \cos\theta_2 & 0 & I_3^2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{p}_2^e$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{I_1^2 I_2^2 \sin^2\theta} \times \begin{bmatrix} \alpha & \beta & -\alpha\cos\theta_2 \\ \beta & \left(I_1^2 \sin^2\psi_2 + I_2^2 \cos^2\psi_2 \right) \sin^2\theta_2 & -\beta \sin\theta_2 \cos\theta_2 \\ -\alpha\cos\theta_2 & -\beta\sin\theta_2\cos\theta_2 & \dfrac{I_1^2 I_2^2}{I_3^2} \sin^2\theta_2 + \alpha\cos^2\theta_2 \end{bmatrix} \mathbf{p}_2^e,$$

$$\alpha = I_1^2 \cos^2\psi_2 + I_2^2 \sin^2\psi_2, \quad \beta = \left(I_2^2 - I_1^2 \right) \sin\psi_2 \cos\psi_2$$

Подставив полученные выражения эйлеровых скоростей через эйлеровы импульсы в матричное произведение $\dot{\mathbf{e}}_2^\top \mathbb{V}_2^\top \mathbb{I}_2 \, \mathbb{V}_2 \dot{\mathbf{e}}_2$, вроде как (?), получаем

$$\begin{aligned} T_2^{\mathcal{H}} =& \frac{1}{2 I_1^2 \sin^2\theta_2} \left[\left(p_2^\varphi - p_2^\psi \cos\theta_2 \right) \cos\psi_2 - p_2^\theta \sin\theta_2 \sin\psi_2 \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2 I_2^2 \sin^2\theta_2} \left[\left(p_2^\varphi - p_2^\psi \cos\theta_2 \right) \sin\psi_2 + p_2^\theta \sin\theta_2 \cos\psi_2 \right]^2 + \frac{1}{2 I_3^2} \left(p_2^\psi \right)^2 \end{aligned} \tag{22}$$

Выражения для импульсов, сопряженных координатам R, Θ, Φ существенно проще:

$$p_R = \frac{\partial T}{\partial \dot{R}} = \mu \dot{R}$$
$$p_\Theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} = \mu R^2 \dot{\Theta}$$
$$p_\Phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}} = \mu R^2 \dot{\Phi} \sin^2 \Theta$$

Итого, приходим к следующему выражению для «японского гамильтониана»:

$$\begin{gathered}
T_{\mathcal{H}} = \frac{p_R^2}{2\mu} + \frac{p_\Theta^2}{2\mu R^2} + \frac{p_\Phi^2}{2\mu R^2 \sin^2 \Theta} + \\
+ \frac{1}{2 I_1^2 \sin^2 \theta_2} \left[\left(p_2^\varphi - p_2^\psi \cos \theta_2 \right) \cos \psi_2 - p_2^\theta \sin \theta_2 \sin \psi_2 \right]^2 + \\
+ \frac{1}{2 I_2^2 \sin^2 \theta_2} \left[\left(p_2^\varphi - p_2^\psi \cos \theta_2 \right) \sin \psi_2 + p_2^\theta \sin \theta_2 \cos \psi_2 \right]^2 + \frac{1}{2 I_3^2} \left(p_2^\psi \right)^2 + \\
+ \frac{1}{2 I_1^1 \sin^2 \theta_1} \left[\left(p_1^\varphi - p_1^\psi \cos \theta_1 \right) \cos \psi_1 - p_1^\theta \sin \theta_1 \sin \psi_1 \right]^2 + \\
+ \frac{1}{2 I_2^1 \sin^2 \theta_1} \left[\left(p_1^\varphi - p_1^\psi \cos \theta_1 \right) \sin \psi_1 + p_1^\theta \sin \theta_1 \cos \psi_1 \right]^2 + \frac{1}{2 I_3^1} \left(p_1^\psi \right)^2
\end{gathered}$$