

1. Начальные распределения для задачи двух тел

1.1. Точные формулы для двухатомной системы

Рассмотрим вектор, соединяющий центры атомов. Обозначим \mathbf{r} его координаты в лабораторной системе координат, \mathbf{R} – в молекулярной системе координат. Производные $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{R}}$ связаны при помощи матрицы эйлеровых углов \mathbb{S} и угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbb{S}^{-1} \left(\dot{\mathbf{R}} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}] \right). \quad (1)$$

Пусть атомы в молекулярной системе координат расположены на оси Z , в таком случае правая часть выражения (1) превращается в

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbb{S}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_y R \\ -\Omega_x R \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \mathbb{S} \dot{\mathbf{r}} &= \begin{bmatrix} \Omega_y R \\ -\Omega_x R \\ \dot{R} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Лагранжиан в молекулярной системе координат имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^\top \begin{bmatrix} \mu R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} - U$$

Используя теорему Донкина, находим связь гамильтоновых переменных \mathbf{J} и $\mathbf{p} = [p_R]$ с лагранжевыми переменными $\boldsymbol{\Omega}$ и $\mathbf{q} = [R]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \mathbb{I} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} J_x &= \mu R^2 \Omega_x \\ J_y &= \mu R^2 \Omega_y \\ p_R &= \mu \dot{R} \end{aligned} \quad (3)$$

Выкладка в приложении А показывает, что каждая компонента $\dot{\mathbf{r}}$ имеет нормальное распределение $\dot{\mathbf{r}} \sim \mathcal{N} \left(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{kT}{\mu} \right)$.

“Экспериментально” проверено, что действие равномерно распределенной матрицы поворота \mathbb{S} на $\dot{\mathbf{r}}$ не приводит к изменению распределения $\dot{\mathbf{r}}$. Это интуитивно понятно, но строгого доказательства пока нет. Используем этот “экспериментальный” факт для получения точных распределений для переменных J_x , J_y и p_R :

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \dot{\mathbf{r}} \sim \dot{\mathbf{r}} \sim \begin{bmatrix} \Omega_y R \\ -\Omega_x R \\ \dot{R} \end{bmatrix} &\Rightarrow \begin{aligned} \Omega_x R &\sim \mathcal{N} \left(0, \frac{kT}{\mu} \right) \\ \Omega_y R &\sim \mathcal{N} \left(0, \frac{kT}{\mu} \right) \\ \dot{R} &\sim \mathcal{N} \left(0, \frac{kT}{\mu} \right) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} J_x &\sim \mu \Omega_x R^2 \sim \mathcal{N} (0, kT \mu R^2) \\ J_y &\sim \mu \Omega_y R^2 \sim \mathcal{N} (0, kT \mu R^2) \\ p_R &\sim \mu \dot{R} \sim \mathcal{N} (0, kT \mu) \end{aligned} \end{aligned} \quad (4)$$

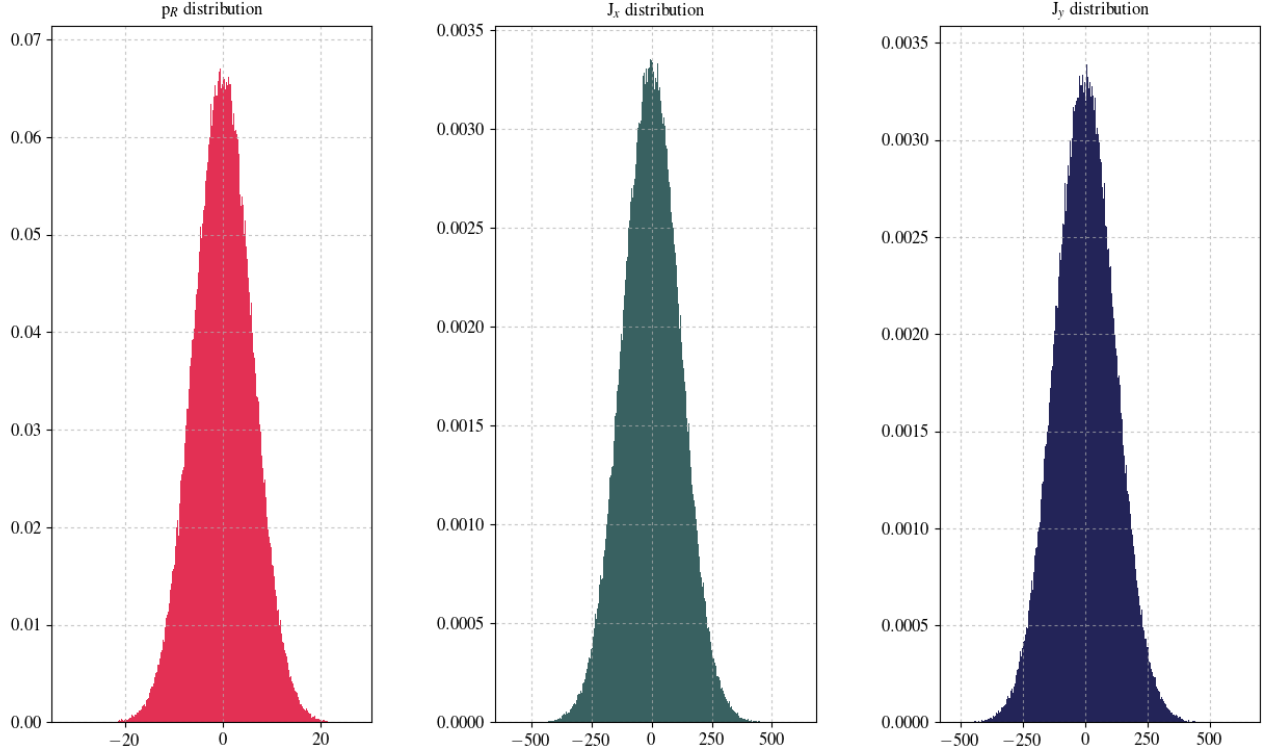


Рис. 1: Распределения переменных p_R , J_x , J_y для двух атомов с массами m_{Ar} и m_{CO_2} при $T = 300K$, 500.000 точек.

```

1 #include <iostream>
2 #include <random>
3
4 using namespace std;
5
6 // boltzmann constant
7 const double BOLTZCONST = 1.38064e-23;
8 // dalton to kg
9 const double DALTON = 1.660539e-27;
10 // atomic length unit to m
11 const double ALU = 5.29177e-11;
12
13 // reduced mass of ar and co2 = m(ar) * m(co2) / (m(ar) + m(co2)) in kg
14 const double MU = 20.952 * DALTON;
15
16 // planck constant
17 const double HBAR = 1.0545718e-34;
18
19 const double temperature = 300;
20
21 // distance between atoms
22 const double RDIST = 20.0;
23
24 // a Mersenne Twister pseudo-random generator of 32-bit numbers with a state size
  // of 19937 bits
25 static thread_local mt19937 generator;

```

```

26
27 double nextGaussian( const double &mean, const double &sigma )
28 {
29     normal_distribution<double> d( mean, sigma );
30     return d( generator );
31 }
32
33 int main( int argc, char* argv[] )
34 {
35     int n = atoi( argv[1] );
36
37     for ( int i = 0; i < n; i++ )
38     {
39         double jx = nextGaussian( 0, RDIST * ALU * sqrt(BOLTZCONST * temperature * MU )
40                                 ) / HBAR;
41         double jy = nextGaussian( 0, RDIST * ALU * sqrt(BOLTZCONST * temperature * MU )
42                                 ) / HBAR;
43         double pR = nextGaussian( 0, sqrt(BOLTZCONST * temperature * MU)) / HBAR * ALU;
44
45         cout << jx << "  " << jy << "  " << pR << endl;
46     }
47     return 0;

```

Пример программы на C++ для генерации значений J_x , J_y и p_R по точным распределениям (4).

1.2. Равномерно распределенные матрицы поворота

Следующий алгоритм к получению равномерно распределенных матриц поворота состоит из двух шагов:

1. равномерно распределенный поворот вокруг оси OZ
2. поворот, приводящий к равномерному на сфере положению северного полюса

Первый шаг осуществить легко; пусть случайная величина x_1 равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, тогда матрица R осуществляет равномерно распределенный поворот вокруг оси OZ

$$R = \begin{bmatrix} \cos(2\pi x_1) & \sin(2\pi x_1) & 0 \\ -\sin(2\pi x_1) & \cos(2\pi x_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Второй шаг может быть выполнен при помощи *преобразования Хаусхолдера* (Householder transform). Точка $z = (0, 0, 1)$ может быть перенесена в любую точку сферы при помощи отражения относительно плоскости, перпендикулярной вектору $\bar{z}p$ и проходящей через центр координат O . Такое отражение описывается *Хаусхолдеровской матрицей*

$$H = 1 - 2vv^\top,$$

где v – единичный вектор, параллельный $\bar{z}p$. Взяв комбинацию хаусхолдеровского отражения и инверсии мы получим поворот, т.к. детерминант такого преобразования будет равен $\det(\cdot) =$

+1 (матрица преобразования будет равна $-H$). Таким образом, искомая матрица поворота равна

$$M = -HR$$

Матрица поворота M будет равномерно распределена внутри $SO(3)$, если H равномерно преобразует Северный полюс в любую точку на сфере, а R описывает равномерный поворот вокруг OZ . Оператор H будет удовлетворять поставленному условию, если мы возьмем

$$v = \begin{bmatrix} \cos(2\pi x_2) \sqrt{x_3} \\ \sin(2\pi x_2) \sqrt{x_3} \\ \sqrt{1-x_3} \end{bmatrix},$$

где x_2, x_3 – равномерно распределены на $[0, 1]$. В таком случае матрица H принимает следующий вид

$$H = 1 - 2vv^\top = \begin{bmatrix} 1 - 2\cos^2(2\pi x_2)x_3 & -2\sin(2\pi x_2)\cos(2\pi x_2)x_3 & -2\cos(2\pi x_2)\sqrt{x_3(1-x_3)} \\ -2\sin(2\pi x_2)\cos(2\pi x_2)x_3 & 1 - 2\sin^2(2\pi x_2)x_3 & -2\sin(2\pi x_2)\sqrt{x_3(1-x_3)} \\ -2\cos(2\pi x_2)\sqrt{x_3(1-x_3)} & -2\sin(2\pi x_2)\sqrt{x_3(1-x_3)} & 2x_3 - 1 \end{bmatrix}$$

Действие H на вектор z приводит к вектору p , компоненты которого равны

$$p = Hz = (1 - 2vv^\top) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cos(2\pi x_2)\sqrt{x_3(1-x_3)} \\ -2\sin(2\pi x_2)\sqrt{x_3(1-x_3)} \\ 2x_3 - 1 \end{bmatrix}$$

Заметим, что если положить $\sin \phi = -2\sqrt{x_3(1-x_3)}$, то тогда $\cos \phi = 2x_3 - 1$. Действительно,

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \left[-2\sqrt{x_3(1-x_3)}\right]^2 + [2x_3 - 1]^2 = 1$$

То есть, вектор p может быть представлен в следующей форме

$$p = \begin{bmatrix} \cos(2\pi x_2) \sin \phi \\ \sin(2\pi x_2) \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi x_2) \sqrt{z} \\ \sin(2\pi x_2) \sqrt{z} \\ \sqrt{1-z} \end{bmatrix}.$$

Следовательно p равномерно распределен на сфере, т.к. азимутальный угол и косинус полярного угла $\cos \phi = 2x_3 - 1$ распределены равномерно на $[-1, 1]$. Для упрощения компонент вектора переобозначим $\sqrt{z} = \sqrt{x_3(1-x_3)}$, $\sqrt{1-z} = 2x_3 - 1$. Итак, схема алгоритма представлена ниже.

Algorithm 1 Scheme of [3]

- 1: $x_1, x_2, x_3 \leftarrow 3$ random variables uniformly distributed over $[0, 1]$
 - 2: Pick a rotation about the pole: $\theta \leftarrow 2\pi x_1$
 - 3: Pick a direction to deflect the pole: $\phi \leftarrow 2\pi x_2$
 - 4: Pick the amount of pole deflection: $z \leftarrow x_3$.
 - 5: Construct a vector to perform the reflection: $v = \begin{bmatrix} \cos \phi \sqrt{z} \\ \sin \phi \sqrt{z} \\ \sqrt{1-z} \end{bmatrix}$
 - 6: Construct the rotation matrix by combining two simple rotations: first rotate about the Z -axis, then rotate the Z -axis to a random orientation: $M \leftarrow (2vv^\top - 1) \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$
-

```

1  #include <iostream>
2  #include <random>
3  #include <Eigen/Dense>
4
5  using namespace std;
6  using namespace Eigen;
7
8  //a Mersenne Twister pseudo random generator of 32 bit numbers with a state
   size of 19937 bits
9  random_device rd;
10 mt19937 eng( rd() );
11 uniform_real_distribution<double> distr( 0.0, 1.0);
12
13 void rotationMatrix( Matrix3d &m )
14 {
15     double theta = 2 * M_PI * distr( eng ); // a rotation about the pole
16     double phi = 2 * M_PI * distr( eng ); // a direction to deflect the pole
17     double z = distr( eng ); // the amount of pole deflection
18     double sz = sqrt( z );
19
20     // a vector to perform the reflection
21     Vector3d v ( cos(phi) * sz, sin(phi) * sz, sqrt(1 - z) );
22     // the Householder matrix
23     Matrix3d s = 2 * v * v.transpose() - Matrix<double, 3, 3>::Identity();
24
25     Matrix3d r;
26     r << cos(theta), sin(theta), 0,
27         -sin(theta), cos(theta), 0,
28         0, 0, 1;
29
30     m = s * r;
31 }
32
33 int main( int argc, char* argv[] )
34 {
35     int n = atoi( argv[1] );
36
37     // initial vector
38     Vector3d v ( 0.0, 0.0, 1.0 );
39     // resulting vector
40     Vector3d r;
41
42     for ( int i = 0; i < n; i++ )
43     {
44         // filling rotation matrix
45         Matrix3d m;
46         rotationMatrix( m );
47
48         // performing a random rotation of OZ-vector
49         r = m * v;
50
51         // displaying the components of resulting vector
52         cout << r(0) << "_" << r(1) << "_" << r(2) << endl;
53     }
54
55     return 0;

```

Пример программы на C++ с применением библиотеки линейной алгебры *Eigen*. Программа принимает на вход количество рассчитываемых векторов n . Внутри главного цикла генерируется по описанному алгоритму случайная матрица поворота и применяется для поворота вектора $v = [0, 0, 1]$. На выходе получаем n равномерно распределенных на сфере векторов.

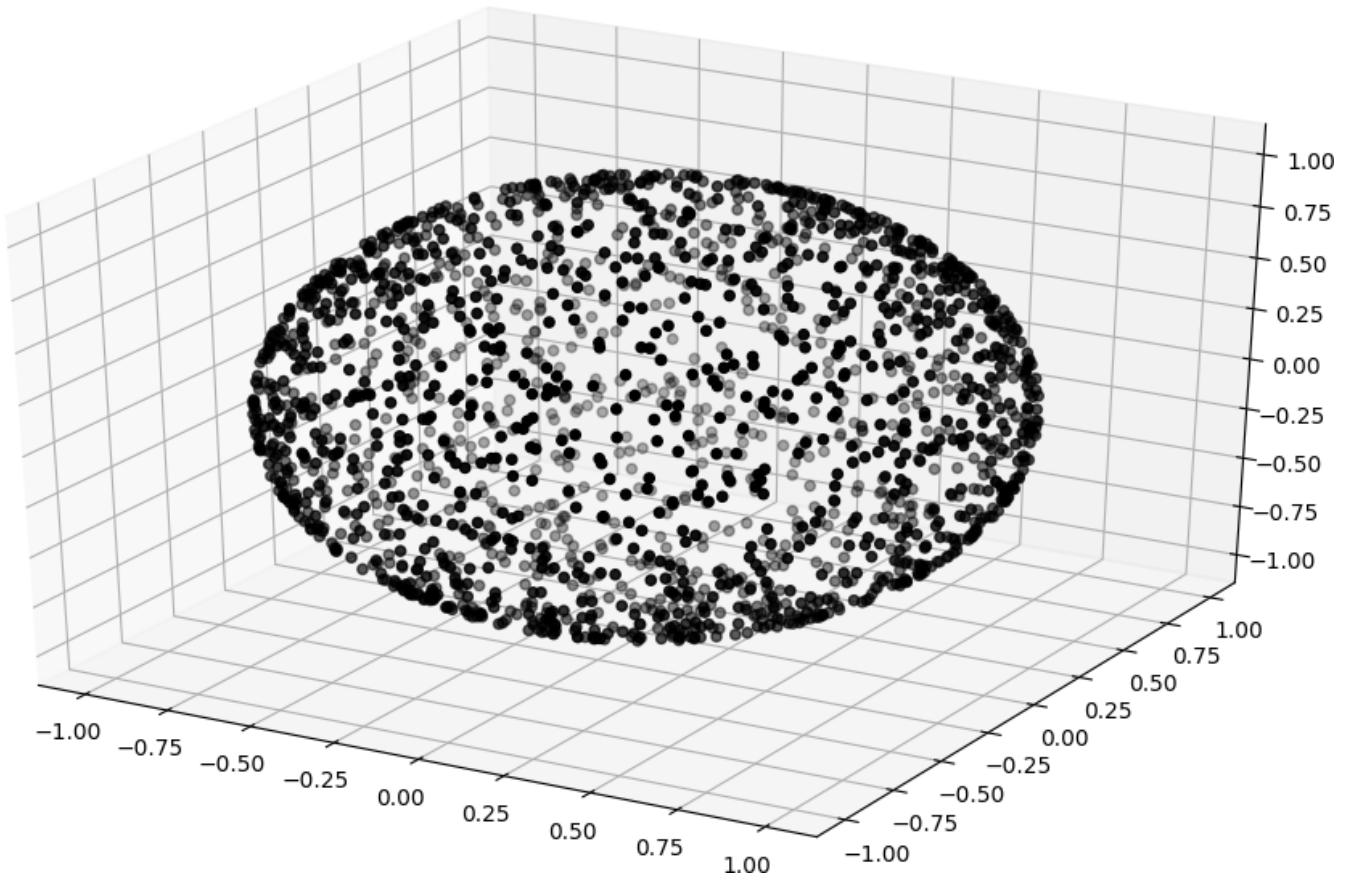


Рис. 2: Пример равномерно распределенных на сфере точек, полученных в результате приведенной выше программы. 2000 точек.

1.3. MCMC-sampling

Предположим мы генерируем последовательность случайных величин, $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$, такую что в каждый момент $t \geq 0$ следующее состояние X_{t+1} выбирается исходя из распределения $P(X_{t+1}|X_t)$, которое зависит от текущего состояния X_t , но не от предыдущего набора состояний $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_{t-1}\}$. То есть, состояние X_{t+1} определяется исключительно предыдущим X_t . Такая последовательность состояний называется *цепью Маркова*.

Рассмотрим алгоритм Метрополиса-Гастингса, позволяющий получать последовательность точек – элементов Марковской цепи – распределенную согласно заданной плотности вероятности $\pi(\cdot)$.

Первым шагом алгоритма является выбор случайной точки (эта величина выбирается определенным образом на основе распределения; я же выбирал ее совершенно случайным

Algorithm 2 Scheme of Metropolis-Hastings algorithm from [1]

```

Initialize  $x^{(0)} \sim q(x)$ 
2: for iteration  $i = 1, 2, \dots$  do
    Propose:  $x^{cand} \sim q(x^{(i)}|x^{(i-1)})$ 
4:   Acceptance probability:
        $\alpha(x^{cand}|x^{(i-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{q(x^{(i-1)}|x^{cand})\pi(x^{cand})}{q(x^{cand}|x^{(i-1)})\pi(x^{(i-1)})} \right\}$ 
6:    $u \sim \text{Uniform}(0, 1)$ 
       if  $u < \alpha$  then
8:     Accept the proposal:  $x^{(i)} \leftarrow x^{cand}$ 
       else
10:    Reject the proposal:  $x^{(i)} \leftarrow x^{(i-1)}$ 
       end if
12: end for

```

образом, но так, чтобы она не оказалась в какой-то физически маловероятной области). Следующий за ним главный цикл алгоритма состоит из трех частей: (1) Получать следующую точку ("кандидата") x^{cand} исходя из вспомогательного распределения $q(x^{(i)}|x^{(i-1)})$; (2) Рассчитать вероятность перехода в новую точку $\alpha(x^{cand}|x^{(i-1)})$, основываясь на распределении q и функции распределения π ; (3) Принять новую точку с вероятностью α .

Обратим внимание на то, что точка, полученная исходя из вспомогательного распределения $q(\cdot)$, принимается не всегда, а лишь с вероятностью $\alpha(\cdot)$. Рассматривают вспомогательные распределения двух классов – симметричные и асимметричные. Симметричным называется распределение, удовлетворяющее следующему соотношению

$$q(x^{(i)}|x^{(i-1)}) = q(x^{(i-1)}|x^{(i)})$$

К часто используемым симметричным распределениям относятся гауссово и равномерное распределения. В качестве примера рассмотрим вспомогательное распределение Гаусса:

$$x^{cand} = x^{(i-1)} + \text{Normal}(0, \sigma)$$

Понятно, что $\text{Normal}(x^{cand} - x^{(i-1)}; 0, \sigma) = \text{Normal}(x^{(i-1)} - x^{cand}; 0, \sigma)$, то есть Гауссово распределение в действительности задает симметричное вспомогательное распределение. Среднеквадратичное отклонение σ является параметром модели. Значение этого параметра будет определять динамику Марковской цепи в рассматриваемом пространстве.

В случае симметричных вспомогательных распределений выражение для вероятности выбора новой точки $\alpha(\cdot)$ существенно упрощается:

$$\alpha(x^{cand}|x^{(i-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(x^{cand})}{\pi(x^{(i-1)})} \right\}$$

Заметим, что если плотность вероятности (точнее говоря, величина, пропорциональная плотности вероятности) в новой точке $\pi(x^{cand})$ больше, чем плотность вероятности в текущей $\pi(x^{(i-1)})$, то их отношение будет больше 1, а значит вероятность перехода в новую точку будет равна 1: $\alpha(x^{cand}|x^{(i-1)}) = 1$. Другими словами, если новая точка выбрана таким образом, что плотность вероятности в ней больше, чем в текущей, то в нее осуществляется переход.

Устройство алгоритма таково, что Марковская цепь "склонна" посещать те точки пространства, в которых моделируемая плотность вероятности выше. Однако, если новая точка была выбрана таким образом, что плотность вероятности в ней меньше, чем в текущей, то тогда вероятность перейти в нее будет определяться отношением плотностей вероятности:

$$\alpha(x^{cand}|x^{(i-1)}) = \frac{\pi(x^{cand})}{\pi(x^{(i-1)})}$$

То есть, если вероятность в новой точке будет мала по сравнению с текущей, то и переход в нее будет маловероятен.

Вид вероятности перехода в новую точку из текущей определяется *условием детального баланса* [2]. Последнее гарантирует, что полученная Марковская цепь в действительности будет удовлетворять заданной плотности вероятности.

2. Литература

1. Yildirim I. Bayesian Inference: Metropolis-Hastings Sampling. MIT Online Library
2. Gilks, W.R., Richardson, S., & Spiegelhalter, D.J. (1996). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. London: Chapman and Hall.
3. D. Kirk. Graphics Gems III. III. 4. Fast random rotation matrices.

Appendices

Приложение А. Приложение А. Распределения в лабораторной системе координат

Вспользуемся следующими двумя выводами из теории вероятностей:

1. Пусть случайная величина ξ распределена с плотностью $f_\xi(x)$. Тогда случайная величина $\eta = a\xi + b$ распределена с плотностью

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

2. Если две независимые случайные величины X и Y распределены с плотностями $X \sim f_1(x)$ и $Y \sim f_2(x)$ соответственно, то случайная величина $Z = X + Y$ распределена с плотностью

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx$$

Т.к. вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ равен разнице радиус-векторов двух атомов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в лабораторной системе координат соответственно, то $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$. Используя п.1 и п.2 получим распределение для компонент \mathbf{r} :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_{1x} \sim f_1(x) = \sqrt{\frac{m_1}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{m_1 x^2}{2kT}\right) \\ -\dot{\mathbf{r}}_{2x} \sim f_2(x) = \sqrt{\frac{m_2}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{m_2 x^2}{2kT}\right) \end{cases}$$
$$\dot{\mathbf{r}}_x \sim \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx = \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{2\pi kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{m_1 x^2}{2kT}\right) \exp\left(-\frac{m_2 (z-x)^2}{2kT}\right) dx \quad (6)$$

Отдельно рассмотрим получившийся интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{m_1 x^2}{2kT} - \frac{m_2 (z-x)^2}{2kT}\right) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(m_1 + m_2) x^2 - 2m_2 z x + m_2 z^2}{2kT}\right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{m_1 + m_2} x - \frac{m_2}{\sqrt{m_1 + m_2}} z\right)^2}{2kT}\right) \exp\left(-\frac{m_2 z^2 - \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} z^2}{2kT}\right) dx = \\ &= \left[y = \frac{\sqrt{m_1 + m_2} x - \frac{m_2}{\sqrt{m_1 + m_2}} z}{\sqrt{2kT}} \right] = \sqrt{\frac{2kT}{m_1 + m_2}} \exp\left(-\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2) kT} z^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) dy = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi kT}{m_1 + m_2}} \exp\left(-\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2) kT} z^2\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя значение интеграла (7) в выражение для плотности распределения $\dot{\mathbf{r}}_x$ (6), получаем

$$\dot{\mathbf{r}}_x \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi kT}} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \exp\left(-\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2) kT} z^2\right) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{\mu z^2}{2kT}\right),$$

где через μ была обозначена приведенная масса двухатомной системы $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.