Дискретные сигналы и преобразование Фурье

Время принципиально по-разному проявляется в непрерывных и дискретных сигналах, что приводит к разному представлению частот в непрерывном и дискретном случаях. Продемонстрируем это на примере. Пусть нам дан список пар значений сигнала, и нас просят определить частоту колебания, подходящее для описания сигнала. Мы отложим на графике дискретные значения и, скажем, угодаем синусоидальную волну в них. Мы можем сказать, что волна повторяется каждые 20 точек, то есть ее период составляет 20 точек. Но использовать это соображение для нахождения частоты колебания невозможно, имея лишь значения сигнала. Для того, чтобы определить частоту колебания нам необходимо, например, время между значениями сигнала t_s. Пусть нам дано $t_s = 0.05$ мс, в таком случае период колебания равен $20 \cdot 0.05$ мс $= 1$ мс. Т.к. частота колебания обратна периоду, то получаем частоту колебания 1 кГц.

Неопределенность сигнала в частотной области

Рассмотрим сигнал $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ с частотой f_0 Гц. Пусть нам дана совокупность значений сигнала, сделанных через равные промежутки времени с частотой f_s Гц (обозначим время между замерами $t_s = 1/f_s$). Т.к. значение синуса не меняется, если изменить значение аргумента на любое целое m количество раз по 2π радиан

$$\sin\varphi = \sin(\varphi + 2\pi m),$$

то мы можем преобразовать значение $x(n)$ следующим образом

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi f_0 n t_s + 2\pi m) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{m}{n t_s}\right) n t_s\right).$$

Выберем m кратное n и обозначим их отношение за k: $m = kn$.

$$x(n) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{k}{t_s}\right) n t_s\right)$$

Заменив t_s на $1/f_s$ получаем

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi(f_0 + k f_s) n t_s).$$

Таким образом, если дискретная последовательность $x(n)$ описывает гармоническое колебание с частотой f_0 Гц, то также оно описывает гармонические колебания с частотами $f_0 + k f_s$ Гц (то есть, в таком случае дискретная последовательность $x(n)$ описывает бесконечное количество гармонических сигналов). Этот эффект проиллюстрирован на рис. 1.

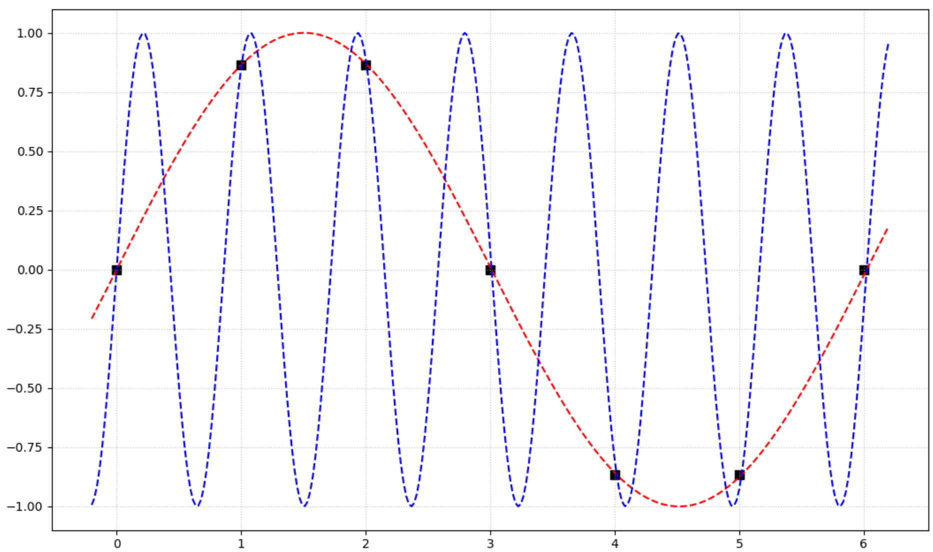

Рис. 1: Несколько гармонических сигналов, соответствующих одному дискретному набору точек