

## 1. Определение углов Эйлера вращения, являющегося композицией двух вращений

Рассмотрим композицию двух вращений  $\mathbb{S}_1$  и  $\mathbb{S}_2$ , параметризованных наборами углов Эйлера  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  и  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ , соответственно, определенными в Голдстейне (zxz; 313 extrinsic).

$$\mathbb{S}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot \mathbb{S}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = \mathbb{S}_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) \quad (1)$$

Перейдем от представления вращений при помощи эйлеровых углов к кватернионному, которое позволяет более удобным образом описывать параметры вращения, являющегося композицией вращений. Рассчитав компоненты кватерниона, соответствующего композиции вращений, через наборы углов Эйлера 1 и 2, выразим через них углы Эйлера результирующего вращения. Компоненты кватерниона  $q_1$ , соответствующего вращению 1, связаны с углами Эйлера следующими соотношениями:

$$q_1 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} \sin \frac{\beta_1}{2} \\ \sin \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} \sin \frac{\beta_1}{2} \\ \sin \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} \cos \frac{\beta_1}{2} \\ \cos \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} \cos \frac{\beta_1}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Кватернионы представляют в виде пары [действительное число, вектор]:  $q_1 = [q_1^0, \mathbf{q}_1]$ . Произведение кватернионов в векторной форме представлено соотношением

$$q_1 \cdot q_2 = (q_1^0 q_2^0 - \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) + q_1^0 \mathbf{q}_2 + q_2^0 \mathbf{q}_1 + [\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2] \quad (3)$$

Подставив выражения для  $q_1$  и  $q_2$  в определение (3), получаем выражение для компонент кватерниона  $q_3 = q_1 \cdot q_2$ :

$$q_3 = \begin{bmatrix} \sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} \cos \left( \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} + \frac{\alpha_2 - \gamma_2}{2} \right) - \cos \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} \cos \left( \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} - \frac{\alpha_2 + \gamma_2}{2} \right) \\ \sin \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} \sin \left( \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} + \frac{\alpha_2 - \gamma_2}{2} \right) + \cos \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} \sin \left( \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} - \frac{\alpha_2 + \gamma_2}{2} \right) \\ \sin \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} \sin \left( \frac{\alpha_2 + \gamma_2}{2} - \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} \right) + \cos \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} \sin \left( \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} + \frac{\alpha_2 - \gamma_2}{2} \right) \\ \sin \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\beta_2}{2} \cos \left( \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{2} - \frac{\alpha_2 + \gamma_2}{2} \right) + \cos \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_2}{2} \cos \left( \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2} + \frac{\alpha_2 - \gamma_2}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Углы Эйлера  $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$  связаны с компонентами кватерниона  $q_3$  соотношениями

$$\tan \alpha_3 = \frac{(q_3)_1(q_3)_3 + (q_3)_0(q_3)_2}{(q_3)_0(q_3)_1 - (q_3)_2(q_3)_3} \quad (5)$$

$$\cos \beta_3 = (q_3)_0^2 + (q_3)_3^2 - (q_3)_1^2 - (q_3)_2^2 \quad (6)$$

$$\tan \gamma_3 = \frac{(q_3)_1(q_3)_3 - (q_3)_0(q_3)_2}{(q_3)_2(q_3)_3 + (q_3)_0(q_3)_1} \quad (7)$$

Опуская промежуточные выкладки, приходим к следующим выражениям

$$\tan \alpha_3 = \frac{(\sin \beta_2 \cos \beta_1 + \sin \beta_1 \cos \beta_2 \cos(\gamma_2 - \alpha_1)) \sin \alpha_2 + \sin \beta_1 \cos \alpha_2 \sin(\gamma_2 - \alpha_1)}{[-\cos \beta_2(\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \beta_1) \cos \alpha_1 + \cos \beta_2 \sin \alpha_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_1 + \\ + \cos \gamma_1(\sin \beta_1 \sin \beta_2 - \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_2 \cos \beta_2)] \sin \alpha_2 + \\ + (\sin \gamma_1 \cos \gamma_2 + \sin \gamma_2 \cos \beta_1 \cos \gamma_1) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \\ + \sin \alpha_1(\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \beta_1) \cos \alpha_2} \quad (8)$$

$$\tan \gamma_3 = \frac{\cos \beta_1 \cos(\gamma_2 - \alpha_1) \sin \gamma_1 - \cos \gamma_1 \sin(\gamma_2 - \alpha_1) \sin \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \cos \beta_2}{\sin(\gamma_2 - \alpha_1)(\cos \beta_2 \cos \gamma_1 \cos \alpha_2 + \sin \gamma_1 \cos \beta_1 \sin \alpha_2) + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \gamma_1 \cos \alpha_2 + \\ + \cos(\gamma_2 - \alpha_1)(\sin \alpha_2 \cos \gamma_1 - \sin \gamma_1 \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \alpha_2)} \quad (9)$$

$$\cos \beta_3 = -\sin \gamma_1 \sin \alpha_2 \sin \beta_1 \sin \beta_2 + (\sin \gamma_1 \sin \alpha_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \alpha_2) \cos \alpha_1 \cos \gamma_2 + \\ + (\sin \gamma_1 \sin \alpha_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \alpha_2) \sin \alpha_1 \sin \gamma_2 + \\ + (\sin \alpha_2 \cos \beta_2 \cos \gamma_1 - \sin \gamma_1 \cos \alpha_2 \cos \beta_1) \sin(\alpha_1 - \gamma_2) \quad (10)$$