Riset Operasional

Pertemuan 2:
“Program Linier: Penyelesaian Grafik (1)”

Dosen : MOH. ALI ALBAR, ST., M.Eng

Program Studi Teknik Informatika

Fakultas Teknik UNRAM

2.1 Model Program Linier

- Masalah yang dapat diselesaikan dengan model program linier memiliki ciri sebagai berikut:
  1. Semua variabel penyusunnya bernilai tidak negatif.

     Jika bernilai negatif → bisa diselesaikan dengan suatu transformasi
  2. Fungsi objektif dapat dinyatakan sebagai fungsi linier variabel-variabelnya.
     - ✓ Setiap variabel memiliki koefisien konstan.
     - ✓ Tidak boleh ada variabel yang berpangkat lebih dari 1
     - ✓ Tidak boleh ada pergandaan variabel.
     - ✓ Berlaku juga untuk semua kendalanya.
  3. Kendala dapat dinyatakan sebagai suatu sistem persamaan linier.

- Secara matematis, bentuk standar model program linier adalah

Mencari $X = x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

yang memaksimumkan/meminimumkan $f\; X = f\; x_1, x_2, \ldots, x_n = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

dengan kendala:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Contoh 2.1

- Telitilah mana di anatara model-model berikut ini yang dapat diselesaikan dengan program linier:

a. Maksimumkan $f(x_1, x_2) = 5x_1 + x_2^2$

Kendala:

$$-x_1 + 4x_2 = 3$$
$$3x_1 + 4x_2 = -5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

b. Minimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 2x_2 - x_3$

Kendala:

$$2x_1 - 4x_1x_2 = 3$$
$$5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

c. Minimumkan $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Kendala:

$$4x_1 + x_2 = 2$$
$$3x_1 - x_2 = 1$$

d. Maksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 3x_2$

Kendala:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1$$
$$3x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

e. Minimumkan $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$

Kendala:

$$x_1^3 x_2^2 \geq e^3$$
$$x_1 x_2^4 \geq e^4$$
$$x_1^2 x_2^3 \geq e$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Penyelesaian

a. Bukan merupakan bentuk program linier karena fungsi sasarannya mengandung suku x_2^2

b. Bukan merupakan bentuk program linier meskipun fungsi sasarannya merupakan bentuk linier dalam X_1 , X_2 , X_3 , tetapi ada kendala yang memuat bentuk pergandaan variabel $4x_1x_2$

c. Model program linier, msekipun tidak ada syarat $x_1 , x_2 \geq 0$

d. Model program linier dalam 3 variabel X_1 , X_2 , X_3

e. Meskipun tampak bahwa model bukan merupakan model program linier, tetapi dengan suatu transformasi dapat dijadikankan program linier.

Misalkan: $y_1 = \ln(x_1)\ dan\ y_2 = \ln(x_2)$

Ingat bahwa:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln(x^a) = a\ \ln(x)$$

$$\ln(e) = 1$$

Fungsi sasaran dapat dituliskan sebagai:

$$g\ \ y_1, y_2 = \ln\ \ f\ \ x_1, x_2 = \ln x_1^2\, x_2^2 = \ln x_1^2\ + \ln\ x_2^2$$

$$= 2\ \ln x_1 + 2\ \ln x_2 = 2y_1 + 2y_2$$

Maka model hasil transformasi adalah:

Minimumkan $g\ \ y_1, y_2 = 2y_1 + 2y_2$

Kendala:

$$3y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 4$$

$$2y_1 + 3y_2 \geq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Contoh 2.2
Program Linier – Penyelesaian Grafik (1)

Seorang pengusaha bahan kimia membuat 2 macam cairan pembunuh serangga yaitu jenis superior (C_1) dan jenis standard (C_2). Kedua jenis cairan dibuat dari 2 macam bahan yang sama yaitu A dan B dengan komposisi yang berbeda.

Setiap liter cairan jenis superior dibuat dari campuran 1 unit bahan A dan 3 unit bahan B, sedangkan setiap liter jenis standard dibuat dari campuran 2 unit bahan A dan 1 unit bahan B. Karena keterbatasan pasokan, setiap harinya ia hanya dapat memperoleh 20 unit bahan A dan 20 unit bahan B.

Contoh 2.2
Program Linier – Penyelesaian Grafik (2)

Untuk setiap liter cairan jenis superior yang ia buat, ia akan memperoleh keuntungan sebesar 30.000. Untuk setiap liter cairan jenis standard, ia akan memperoleh keuntungan sebesar 20.000.

Jika diasumsikan bahwa semua cairan yang dibuat akan laku terjual, berapa liter cairan masing-masing jenis harus ia buat tiap harinya agar keuntungan yang didapatkan maksimum ?

Contoh 2.2
Program Linier – Penyelesaian Grafik (3)

Penyelesaian

Yang menentukan besarnya keuntungan adalah jumlah (liter) kedua jenis cairan yang dibuat (dengan keterbatasan bahan). Maka yang dijadikan variabel keputusan adalah jumlah (liter) tiap cairan yang dibuat

Misalkan

x_1 = jumlah cairan jenis superior yang dibuat.

x_2 = jumlah cairan jenis standard yang dibuat.

Jelas bahwa x_1 dan x_2 harus >= 0.

Harga x_1 dan x_2 inilah yang akan dicari agar keuntungannya maksimum

Contoh 2.2
Program Linier – Penyelesaian Grafik (4)

Bahan	Superior	Standar	Kapasitas
A	1	2	20
B	3	1	20
Untung	30.000	20.000	

Misalkan
x_1 = jumlah cairan jenis superior yang dibuat.
x_2 = jumlah cairan jenis standard yang dibuat.

Model yang sesuai adalah :

Maksimumkan $f(x_1, x_2) = 30.000\,x_1 + 20.000\,x_2$

$= 3\,x_1 + 2\,x_2$ (puluhan ribu)

Kendala
$$x_1 + 2x_2 \leq 20$$
$$3x_1 + x_2 \leq 20 \quad ; \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Contoh 2.3

- Perusahaan Adianto & Co memproduksi 3 buah model almari (A, B dan C). Ketiga model membutuhkan jenis bahan baku dan tenaga kerja yang sama, tetapi dengan jumlah yang berbeda. Waktu pembuatan (jam kerja) dan harga pembelian bahan baku (ratusan ribu rupiah) tiap almari dapat dilihat pada Tabel.

	Model Almari		
	A	B	C
Waktu Pembuatan (jam)	7	3	6
Harga Bahan Baku (ratusan ribu)	4	4	5

- Karena keterbatasan modal, biaya pembelian bahan baku terbatas sebesar 200 (ratusan ribu) rupiah dan waktu pembuatan juga terbatas selama 150 (jam kerja).
- Hasil penjualan tiap almari model A, B, dan C memberikan keuntungan masing-masing sebesar 400.000, 200.000 dan 300.000
- Buatlah model program linier yang sesuai untuk menentukan jumlah almari tiap model yang harus dibuat agar keuntungannya maksimum.

Penyelesaian

- Variabel keputusan yang hendak dicari nilainya adalah jumlah almari tiap jenis. Karena ada 3 jenis almari, maka ada 3 buah variabel keputusan, yaitu:

  x_A = jumlah almari model A yang dibuat

  x_B = jumlah almari model B yang dibuat

  x_C = jumlah almari model C yang dibuat

  Fungsi sasaran:

  Maksimumkan $f(x_A, x_B, x_C) = 400.000x_A + 200.000x_B + 300.000x_C$

  Kendala:

$$7x_A + 3x_B + 6x_C \leq 150$$

$$4x_A + 4x_B + 5x_C \leq 200$$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0 \text{ dan bulat}$$

Contoh 2.4

- Seorang kontraktor merencanakan untuk membangun 3 tipe rumah (sederhana, menengah, dan mewah) yang biaya pembuatan per unitnya adalah 20, 50, dan 80 (juta rupiah). Dana yang tersedia adalah sebesar 4000 (juta rupiah).
- Menurut peraturan pemerintah, dari keseluruhan rumah yang ia bangun, minimal 50% diantaranya harus rumah sederhana dan paling banyak 20% diantaranya adalah rumah mewah.
- Keuntungan yang diperoleh dari penjualan sebuah rumah tipe sederhana, menengah dan mewah masing-masing adalah sebesar 5, 15, dan 30 (juta rupiah).
- Berapa jumlah rumah tiap tipe yang harus ia bangun (mengingat dana yang tersedia dan peraturan pemerintah) agar keuntungan yang ia dapatkan maksimum?

Penyelesaian

- Variabel keputusan adalah jumlah rumah tipe sederhana, menengah, dan mewah yang dibangun. Misalkan:

  x_1 = jumlah rumah tipe sederhana yang dibangun

  x_2 = jumlah rumah tipe menengah yang dibangun

  x_3 = jumlah rumah tipe mewah yang dibangun

  Fungsi sasaran:

  Maksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3$

  Kendala:

$$20x_1 + 50x_2 + 80x_3 \le 4000$$

$$x_1 \ge 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_3 \le 0.2(x_1 + x_2 + x_3)$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$ dan bulat

Contoh 2.5

- Seorang petani akan menanam 2 jenis pohon, yaitu A dan B pada area 4400 m^2. Sebuah pohon A membutuhkan lahan seluas 25 m^2, sedangkan pohon B membutuhkan lahan seluas 40 m^2. Kebutuhan air pohon A adalah 30 unit dan pohon B sebanyak 15 unit untuk tiap pohonnya. Air yang tersedia hanyalah 3300 unit.
- Perbandingan pohon B dan pohon A yang harus ditanam tidak boleh kurang dari 6/19 dan tidak boleh lebih dari 17/8.
- Keuntungan yang didapat dari sebuah pohon A diperkirakan 1,5 kali pohon B. Berapa jumlah pohon dari masing-masing jenis harus ditanam supaya keuntungan maksimum?

Penyelesaian

- Variabel keputusan adalah jumlah pohon jenis A dan B yang harus ditanam. Misalkan:

  x_A = jumlah pohon A yang ditanam

  x_B = jumlah pohon B yang ditanam

  Misalkan keuntungan dari sebuah pohon B = k,

  maka keuntungan dari sebuah pohon A = 1,5k

Fungsi sasaran:

Maksimumkan

$$f\ x_A,\ x_B = 1{,}5k\ x_A + k\ x_B$$
$$= k(1{,}5x_A + x_B)$$

Kendala:

$$25x_A + 40x_B \le 4400$$

$$30x_A + 15x_B \le 3300$$

$$\frac{x_B}{x_A} \ge \frac{6}{19} \quad atau \quad 19x_B - 6x_A \ge 0$$

$$\frac{x_B}{x_A} \le \frac{17}{8} \quad atau \quad 8x_B - 17x_A \le 0$$

$x_A,\ x_B \ge 0$ dan bulat

Contoh 2.6

- Perusahaan alatumah tangga KAA ingin mengiklankan produknya di 3 media, yaitu TV (siang dan malam hari), radio dan koran. Tujuannya adalah untuk menjangkau sebanyak mungkin pelanggan potensial. Tabel dibawah ini menunjukkan data hasil

	Media Iklan			
	TV (siang)	TV (malam)	Radio	Koran
Biaya iklan per tayang (juta)	4	7.5	3	1.5
Jumlah pelanggan (ribuan) potensial yang dapat dijangkau untuk tiap tayangan	400	900	500	200
jumlah pelanggan wanita (ribuan) yang dapat dijangkau tiap tayangan	300	400	200	100

- Anggaran yang disediakan untuk seluruh iklan adalah 80 juta, dan maksimum 50 juta diantaranya untuk iklan di TV. Jumlah pelanggan wanita yang dijangkau paling sedikit 2 juta orang.
- Di samping itu, jumlah iklan di TV siang hari paling sedikit 3 kali tayang, dan paling sedikit 2 kali tayang di waktu malam. Jumlah iklan di radio dan koran masing-masing harus antara 5-10 kali.
- Tentukan cara pengaturan iklan yang paling optimal.

Penyelesaian

- Variabel keputusannya adalah jumlah iklan di tiap media. Misalkan:

  x_1 = jumlah iklan di TV siang hari

  x_2 = jumlah iklan di TV malam hari

  x_3 = jumlah iklan di radio

  x_4 = jumlah iklan di koran

  Fungsi sasaran:

  Maksimumkan $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4$

- Kendala:

$$4x_1 + 7.5x_2 + 3x_3 + 1.5x_4 \leq 80$$
$$4x_1 + 7.5x_2 \leq 50$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 20$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_3 \geq 5$$
$$x_3 \leq 10$$
$$x_4 \geq 5$$
$$x_4 \leq 10$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0$$

SELESAI