Module : Mathématique de Base 4 **Classe :** $2^{\text{ème}}$ année **AU : 2018 / 2019**

PEG : *Lois discrètes usuelles*

1 Loi uniforme

Cas d'étude : Si on lance un dé régulier, on considère la variable aléatoire X = numéro apparaissant sur le dé.

$$\begin{array}{rcccl} X & : & \Omega & \rightarrow & \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} \\ & & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

Compléter le tableau :

x_i						
$f_X(x_i) = P(X = x_i)$						

- **Loi uniforme discrète :** est la loi d'une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ avec la même probabilité

$$P(X = i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Exercice : Calculer

1. $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} iP(X = i) =$ ....
2. $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) =$ ....

2 Loi de Bernoulli

Cas d'étude : Une urne contient 6 boules rouges et 18 boules noires. On considère l'évènement

$$S = \text{"tirer une boule rouge."}$$

On considère la variable aléatoire X qui prend 1 si S est réalisé et 0 si non.

$$\begin{array}{rccl} X & : & \Omega & \rightarrow & \{.........................\} \\ & & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

x_i		
$f_X(x_i) = P(X = x_i)$		

- **Une épreuve de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$:** est une expérience aléatoire ayant deux issues :
  - le succès S, avec une probabilité p.
  - l'échec E, avec une probabilité $q = 1 - p$.

Exercice : Calculer

1. $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i P(X = x_i) =$ ....
2. $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) =$ ....

3 Loi Binomiale

<u>Cas d'étude :</u> On reste sur le même cas, on effectue n tirages avec remise d'une boule On considère la variable aléatoire X qui prend le nombre des boules rouges tirées.

$$\begin{array}{rccl} X & : & \Omega & \rightarrow & \{...............................\} \\ & & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

- **Schéma de Bernoulli :** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p, (avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 < p < 1$).
- **Loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:** On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, la variable associée au nombre de succès obtenus.
  - La probabilité d'avoir k succès de n épreuves.

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}$$

  - L'espérance : $\mathbb{E}(X) =$ ....
  - La variance : $V(X) =$ ....

4 Loi de Poisson

- **Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:** Soit X une variable aléatoire discrète qui suit la loi de Poissant de paramètre $\lambda > 0$

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$$

- La probabilité de X

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^k$$

- L'espérance : $\mathbb{E}(X) =$ ....
- La variance : $V(X) =$ ....

5 Loi géométrique

► **Description de l'expérience :** On considère des épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p, (avec $0 < p < 1$).

- Le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance.
- On s'arrête lorsque le succès est obtenu pour la première fois.

$$X = \text{"nombre d'épreuves nécessaires au 1er succès"}$$

$$X \ : \ \Omega \ \rightarrow \ \mathbb{N}^*$$

La probabilité d'avoir le succès au $k^{\text{ème}}$ épreuves.

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

- L'espérance : $\mathbb{E}(X) =$ ....
- La variance : $V(X) =$ ....

Exercice : Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir, avec 10 clefs dont une seule est la bonne.

$$X = \text{"le nombre d'essais jusqu'à ce que la porte s'ouvre"}$$

1. Il met de côté celles qu'il a déjà essayées. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer l'espérance ainsi que la variance.
3. Donner la probabilité de réussir en moins de 8 coups.