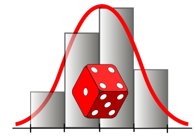


Module : Mathématique de Base 4 **Classe :** $2^{\text{ème}}$ année **AU : 2018 / 2019**

PEG : *Probabilité Discrète*

Objectifs : à l'issue de ce **PEG** l'étudiant sera capable de :

- $\surd$ Acquérir les principales notations et techniques de probabilité.

  espace fondamental **évènement**

  propriétés élémentaires **règles de calcul**

- $\surd$ Connaitre et savoir appliquer les formules de probabilités conditionnelles.
- $\surd$ Savoir calculer la fonction de probabilité et la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.
- $\surd$ Savoir déterminer les mesures caractéristiques d'une variable aléatoire discrète :

  espérance **variance** **écart type**

- $\surd$ Savoir reconnaître une loi usuelle :

  Loi Binomiale **Loi de Bernoulli**

  Loi géométrique **Loi de Poisson**

Introduction au probabilité et analyse combinatoire

Introduction

Dans différents domaines, on s'intéresse aux phénomènes dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude et pour lesquels on décide que l'incertitude sera le fait du Hasard.
Par exemple en lançant un dé, on n'est pas certain qu'elle va tomber sur un nombre paire ou impaire !

L'objet fondamental des probabilités est l'**expérience aléatoire** c'est à dire une expérience qui a plusieurs issues possibles mais qui sont incertaines, autrement dit elle peut conduire à plusieurs résultats possibles et dont on ne connaît pas le résultat à l'avance, par exemple un jeu de Pile et Face, l'observation du fonctionnement d'un appareil sans tomber en panne...

1 Définition de la théorie des probabilités

Cas d'étude : Quel résultat peut-on obtenir :

1. Si on lance un dé ? 

   ....

2. Si on lance une pièce de monnaie ? 

   ....

3. Après un match de Barcelone contre Real Madrid ?

   ....

► **Espace fondamental :** ou Univers, est l'ensemble de touts les résultats possibles d'une expérience aléatoire. On note Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Les éléments de Ω sont souvent notés ω.

Exercice : Déterminer l'univers de chacune des expériences aléatoires :

1. Les trois expériences précédentes.
2. On lance deux dés, on veut le produit des deux valeurs de chaque lancé.

Cas d'étude : Considérant un lot de pièces électroniques, on prélève, au hasard, simultanément 3 pièces, pour chacune d'elle on note si elle est bonne($\mathbf{B}$) ou défectueuse($\mathbf{D}$), alors l'univers de cette expérience aléatoire est :

$$\Omega = \{(\mathbf{D}, \mathbf{D}, \mathbf{D}); (\mathbf{D}, \mathbf{D}, \mathbf{B}); (\mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{B}); (\mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{B})\}$$

Question : Est-il possible d'obtenir 3 pièces défectueuses ? ou au moins deux pièces défectueuses ?

....

- **Evènement :** un ensemble d'éventualités dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisée ou non. Un évènement est est une partie de l'ensemble des résultats possibles, c'est un sous ensemble de l'univers Ω.

Exemple : Restant sur le même exemple du cas d'étude,

$$\begin{aligned} A &= \text{"Obtenir 3 pièces défectueuses"} \\ B &= \text{"Obtenir au moins 2 pièces défectueuses"} \\ C &= \text{"Obtenir au plus une pièce défectueuse "} \end{aligned}$$

Notations :

Notation	Symbole	Explication
Évènement simple	ω	évènement qui se réduit en un résultat.
Évènement composé	$-$	évènement qui correspond à plus qu'un résultat.
Évènement impossible	$\emptyset$	évènement qui ne peut être jamais réaliser.
Évènement certain	Ω	évènement qui est toujours réalisé

1.1 Opérations sur les évènements

Cas d'étude : On reste toujours dans le cas de lot des pièces, et on considère les mêmes évènements de l'exemple, est-il possible d'avoir les deux évènements A et C en même temps ? Autrement dit, "obtenir 3 pièces défectueuses et au plus une pièce défectueuse" ?

....

Considérant deux évènements A et B d'un univers Ω,

Opération	Notation	Explication
Disjonction	$A \cup B$	$A \cup B = \{......................................\}$ $\Rightarrow$ ....
Conjonction	$A \bigcap B$	$A \bigcap B = \{......................................\}$ $\Rightarrow$ ....
Inclusion ou implication	$A \subset B$	....
Contraire	$\overline{A}$	.... $\overline{A} = \{...................................\}$
Incompatibilité	A et B sont incompatibles	$A \bigcap B = \emptyset$

Exercice : Retournons à l'exemple des pièces électroniques, et on considère les évènements suivants :

$$\begin{aligned} C &= \text{"obtenir au plus une pièce défectueuse"} \\ D &= \text{"n'obtenir aucune pièce déféctueuse"} \\ E &= \text{"obtenir exactement une pièce déféctueuse"} \\ F &= \text{"Obtenir 3 pièces défectueuses"} \end{aligned}$$

1. Que peut-on dire de D et E ?
2. Que peut-on dire de C et E ?
3. Déterminer le complémentaire de F

1.2 Probabilité d'un évènement

Cas d'étude : On réalise l'expérience aléatoire, lancer un dé, et on note le numéro.
Question : Quels sont les résultats possibles ? Déterminer l'espace fondamental de l'expérience.

$$\Omega = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}; \quad card(\Omega) = \ldots\ldots\ldots$$

Soit l'évènement

$$B = \text{"Obtenir un numéro impaire"}$$

Question : Quels sont les résultats possibles de B ?

$$B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}; \quad card(B) = \ldots\ldots\ldots$$

Question : Quelle est la chance de réalisation de l'évènement de B ?
....

- **Probabilité :** est une fonction qui permet de mesurer la chance de réalisation d'un évènement.
  Soient Ω un espace fondamental d'une expérience aléatoire et Ξ la collection des évènements de Ω, la probabilité est la fonction définie par :

$$\begin{aligned} P : \Xi &\to [0,1] \\ A &\mapsto P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} \end{aligned}$$

Remarque : On appelle (Ω, Ξ, P) un espace de probabilité.

Exercice : On considère l'expérience précédente, lancer un dé, calculer les probabilités des évènements suivants :

1. $A =$"Obtenir un numéro paire"
2. $B =$"Obtenir un numéro inférieur ou égal à 2"
3. $C =$"Ne pas obtenir un 6"

Propriétés

Soient A et B deux évènements d'un espace de probabilité (Ω, Ξ, P),

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$
- $P(A \bigcap B) = P(A) - P(A \bigcap \overline{B}) = P(B) - P(B \bigcap \overline{A})$
- A et B sont incompatibles

$$\begin{aligned} P(A \bigcap B) &= P(\emptyset) = ... \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) = ... \end{aligned}$$

- $A \subset B \quad \Rightarrow P(A) \quad .... \quad P(B)$

Exercice : On jette deux pièces de monnaie,

1. Déterminer l'espace fondamental Ω
2. Calculer la probabilité des évènements
   (a) $E =$"Obtenir deux faces"
   (b) $F =$"Obtenir au moins une face"
   (c) $\overline{E}$
   (d) $E \cup F$

2 Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire présente les formules nécessaire pour dénombrer les différentes dispositions que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble fini.

On se place dans le cadre d'un espace de probabilité (Ω, Ξ, P) avec les deux hypothèses :

- ∗ L'ensemble fondamental Ω est **fini**. $\Omega = \{\omega_i, \quad i \in I\}$
- ∗ Les résultats de Ω sont **équiprobables** : $\forall \omega_i, \omega_j \in \Omega; \quad P(\omega_i) = P(\omega_j)$

2.1 Dispositions

Cas d'étude : On reste toujours dans le cas de lot des pièces, on effectue un tirage successive de 3 pièces. Déterminer l'espace fondamental

$$\Omega = \{(P, P, P); (P, P, F); (P, F, P); (P, F, F); (F, P, P); (F, P, F); (F, F, P); (F, F, F)\}$$

- **Dispositions ordonnées :** si deux dispositions contenant les **mêmes éléments** sont considérées comme **différentes** lorsque ces éléments sont placés dans un **ordre différent**.

Cas d'étude : On reste toujours dans le cas de lot des pièces, on effectue un tirage simultané de 3 pièces. Déterminer l'espace fondamental

$$\Omega = \{(P, P, P); (P, P, F); (F, F, P); (F, F, F)\}$$

- **Dispositions non ordonnées :** si deux dispositions contenant les **mêmes éléments** sont considérées comme **identiques** **quelque soit l'ordre** dans lequel sont placés leur éléments.

2.2 Principes de base

Cas d'étude : Dans un magasin, j'ai le choix entre trois ordinateurs portables de même dimension et 2 pochettes. Combien ai-je de choix possibles ?

$3 * 2 = 6$ choix possibles

- **Principe de multiplication :** Si on considère deux opérations

  Opération A avec n résultats possibles

  Opération B avec m résultats possibles

  alors les résultats possibles des deux opérations effectués **successivement** est $n \times m$

Cas d'étude : A ESPRIT, il y a 7 professeurs de maths hommes et 5 professeurs de maths femmes. Combien y a-t-il de possibilités d'avoir un des professeurs de maths ?

$7 + 5 = 12$ prof possibles

- **Principe d'addition :** Si on considère deux opérations

  Opération A avec n résultats possibles

  Opération B avec m résultats possibles

  alors il y a $n + m$ façons de réaliser **l'une ou l'autre** de ces deux opérations.

2.3 Arrangement

Cas d'étude : On considère l'ensemble $J = \{1, a, 2, b\}$, on prend à chaque fois deux éléments de J, quelles sont les dispositions ordonnées possibles ?

$(1, a), (1, 2), (1, b), (a, 1), (a, 2), (a, b), (2, 1), (2, a), (2, b), (b, 1), (b, a), (b, 2)$

- **Arrangement sans répétition :** Pour un ensemble J de n éléments distincts , on appelle arrangement **sans répétition** une disposition **ordonnée** de $r(r \leq n)$ éléments **distincts** choisis parmi les n éléments de J.

$$A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemple : Combien de mots de 3 lettres distinctes peuvent être formés dans un alphabet de 26 lettres ?

$$A_3^{26} = \frac{26!}{23!} = 26 * 25 * 24 = 15600$$

Exercice : Dans un groupe on compte 16 filles et 12 garçons. On veut former un comité exécutif de quatre membres pour remplir les postes de président, de vice-président, de secrétaire et de trésorier. De combien de façons peut-on former ce comité si :

1. il n'y a aucune contrainte ?

   Deux méthodes possibles :

   (a) Multiplication :

   $$28 * 27 * 26 * 25 = 491400$$

   (b) Arrangement :

   $$A_4^{28} = \frac{28!}{24!} = 28 * 27 * 26 * 25 = 491400$$

2. les postes de président et de secrétaire doivent être occupés par une fille et les autres postes par un garçon ?

   Deux méthodes possibles :

   (a) Multiplication :

   $$16 * 12 * 15 * 11 = 31680$$

   (b) Arrangement :

   $$A_2^{16} * A_2^{12} = \frac{16!}{14!} * \frac{12!}{10!} = 16 * 12 * 15 * 11 = 31680$$

2.4 Combinaison

Cas d'étude : On revient à l'ensemble $J = \{1, a, 2, b\}$, on prend à chaque fois deux éléments de J, quelles sont les dispositions possibles(non ordonnées) ?

$$(1, a), (1, 2), (1, b), (a, 2), (a, b), (2, b)$$

- **Combinaison sans répitition :** Pour un ensemble J de n éléments distincts, on appelle combinaison **sans répétition** de n éléments pris r à la fois toute disposition **non ordonnée** de $r(r \leq n)$ éléments **distincts** choisis dans J.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Exemple : On a 15 médicaments et on veut tester leur compatibilité en groupe de 4. Combien y a-t-il de groupes possibles ?

$$C_4^{15} = \frac{15!}{4!11!} = \frac{15 * 14 * 13 * 12}{4 * 3 * 2} = 15 * 13 * 7 = 1365$$

Exercice : Dans une université, il y a 6 économistes et 4 sociologues. On doit former un comité composé de 3 économistes et de 2 sociologues. Combien de comités différentes pourrait-on former si :

1. Tous peuvent y participer ?

$$C_3^6 * C_2^4 = \frac{6!}{3!3!} * \frac{4!}{2!2!} = \frac{6 * 5 * 4}{3 * 2} \times \frac{4 * 3}{2} = 6 * 5 * 4 = 120$$

2. Un économiste ne peut y participer ?

$$C_3^5 * C_2^4 = \frac{5!}{3!2!} * \frac{4!}{2!2!} = \frac{5 * 4}{2} \times \frac{4 * 3}{2} = 5 * 3 * 4 = 60$$

3. Deux sociologues doivent absolument faire partie de ce comité ?

$$C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 * 5 * 4}{3 * 2} = 5 * 4 = 20$$

3 Probabilité conditionnelle

<u>Cas d'étude :</u> Un sachet de 50 bonbons contient 20 bonbons acidulés les autres bonbons sont 30 à la guimauve. 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange et 10 bonbons sont acidulés et au parfum orange. Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise.
On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet. On note :

A : " le bonbon choisi est acidulé "
G : " le bonbon choisi est à la guimauve "
F : " le bonbon choisi est à la fraise "
O : " le bonbon choisi est au parfum orange "

Supposons maintenant la condition suivante réalisée : "le bonbon choisi est à la guimauve".
Quelle est alors la probabilité que le bonbon choisi soit au parfum orange ?

$$\frac{\text{nombre des bonbons à la guimauve et au parfum orange}}{\text{nombre des bonbons à la guimauve}} = \frac{18}{30} = 0.6$$

- **Probabilité conditionnelle :** est la probabilité qu'un événement se réalise étant donné qu'un autre événement s'est déjà réalisé.

  Soient A et B deux événements de Ω, avec $P(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B (probabilité que l'événement A soit réalisé sachant que l'événement B est réalisé) est le nombre noté

$$P(A/B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$$

Exercice : Revenons à l'exemple des bonbons, calculer

1. $P(A/G)$

$$P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{0}{30} = 0$$

2. $P(F/G)$

$$P(F/G) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{12}{30} = 0.4$$

3. $P(O/G)$

$$P(O/G) = \frac{P(O \cap G)}{P(G)} = \frac{18}{30} = 0.6$$

4. $P(\overline{A}/F)$

$$P(\overline{A}/F) = \frac{P(\overline{A} \cap F)}{P(F)} = \frac{P(G \cap F)}{P(F)} = \frac{12}{22} = 0.54$$

► **Probabilité conditionnelle d'un évènement contraire :** Soient A et B deux événements de Ω, avec $P(B) \neq 0$.

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \bigcap B)}{P(B)} = 1 - P(A/B)$$

3.1 Indépendance

Soient A et B deux événements de Ω, on dit que A et B sont indépendants si

$$P(A \bigcap B) = P(A)P(B)$$

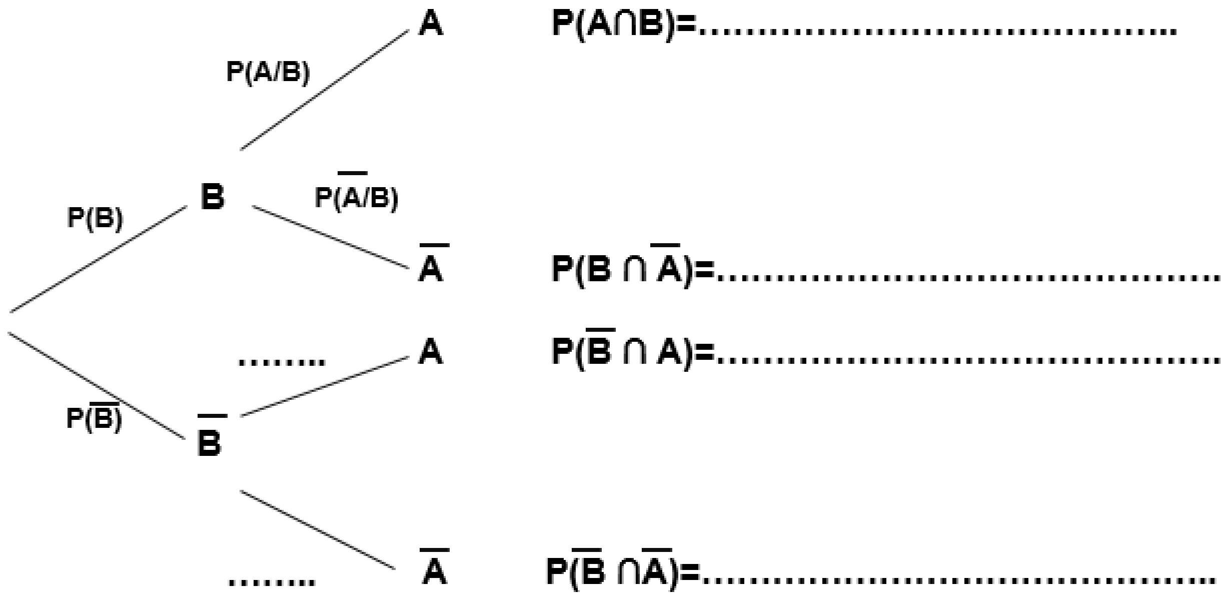
Remarque : Ne pas confondre entre deux évènements **indépendants** et deux évènements **incompatibles** !

3.2 Arbre pondéré pour deux évènements

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω

♦ **Une branche** relie deux événements. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante.

♦ **Un chemin** est une suite de branches ; il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin. La probabilité d'un chemin est la probabilité de l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.



Exercice : Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement 2 boules sans remise On note :

$$\begin{array}{lcl} B_1 & : & \text{"la première boule tirée est blanche"} \\ B_2 & : & \text{"la seconde boule tirée est blanche"} \end{array}$$

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Décrire les évènements $B_1 \bigcap B_2$, $\overline{B}_2 \bigcap B_1$

   $B_1 \bigcap B_2$: la deuxième boule est blanche et la première est blanche

   $\overline{B}_2 \bigcap B_1$: la deuxième boule est rouge et la première est blanche
3. Calculer $P(B_1 \bigcap \overline{B}_2)$ et $P(\overline{B}_1 \bigcap \overline{B}_2)$.

$$\begin{aligned} P(B_1 \bigcap \overline{B}_2) &= P(B_1/B_2)P(B_1) = \frac{2}{6} * \frac{3}{7} = \frac{1}{7} = 0.14 \\ P(\overline{B}_1 \bigcap \overline{B}_2) &= P(\overline{B}_1/\overline{B}_2)P(\overline{B}_1) = \frac{3}{6} * \frac{4}{7} = \frac{2}{7} = 0.28 \end{aligned}$$

⧫ **Formule des probabilités composées :** Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset \Omega$ tels que $P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n) \neq 0$ alors on a

$$P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i/(A_{i+1} \bigcap A_{i+2} \bigcap \cdots \bigcap A_n))$$

Exercice : Soit l'expérience qui consiste à tirer au hasard, l'une après l'autre, sans remise, deux ampoules électriques dans une boîte contenant 10 ampoules dont 3 sont défectueuses et 7 sont bonnes. On considère les évènements :

$$\begin{array}{lll} D_i & : & \text{"l'ampoule choisie au } i^{\text{ème}} \text{ tirage est Défectueuse " ;} \quad i = 1,2 \\ B_i & : & \text{"l'ampoule choisie au } i^{\text{ème}} \text{ tirage est Bonne " ;} \quad\quad\quad i = 1,2 \end{array}$$

On pourrait s'intéresser à l'événement

$$A \quad : \quad \text{"choisir deux ampoules défectueuses dans les deux tirages "}$$

Calculer la probabilité de l'évènement A.

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D2/D_1) = \frac{3}{10} * \frac{2}{9} = \frac{1}{15} = 0.066$$

♦ **Formule des probabilités totales :** Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset \Omega$ deux à deux incompatibles $(P(A_i \bigcap A_j) = 0, \quad \forall i \neq j)$ tels que $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 1$. Pour tout évènement B de Ω, on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

Exercice : Revenons à l'exercice des boules rouges et blanches, en utilisant la formule des probabilités totales calculer $P(B_1)$ et $P(B_2)$.

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(B_2)P(B_1/B_2) + P(\overline{B}_2)P(B_1/\overline{B}_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap \overline{B}_2) = \frac{3}{7} * \frac{2}{6} + \frac{33}{7} * \frac{4}{6} = \frac{3}{7} \\ P(B_2) &= P(B_1)P(B_2/B_1) + P(\overline{B}_1)P(B_2/\overline{B}_1) = \frac{3}{7} * \frac{2}{6} + \frac{4}{7} * \frac{3}{6} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

♦ **Formule Bayes :** Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset \Omega$ tels que $P(A_i) \neq 0, \quad \forall i$ et $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 1$. Pour tout évènement B de Ω, on a

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_i)P(A_j)}$$

Exercice : On sait que dans la population 5 hommes sur 100 sont daltoniens(colour-blind), contre 25 femmes sur 100. Un daltonien est choisi au hasard dans la population ; quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

On suppose qu'on a le même pourcentage des hommes que des femmes dans la population.

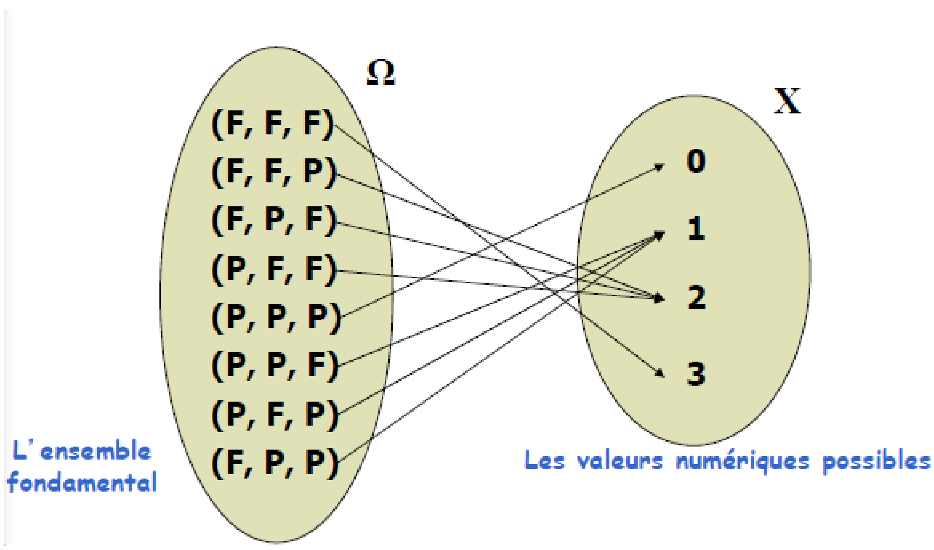
$$P(H/D) = \frac{P(D/H)P(H)}{P(D/H)P(H) + P(D/F)P(F)} = \frac{\frac{5}{100} * 0.5}{\frac{5}{100} * 0.5 + \frac{25}{100} * 0.5} = \frac{5}{5+25} = \frac{1}{6}$$

4 Variable aléatoire discrète

Cas d'étude : On lance une pièce de monnaie tris fois de suite, on obtient les résultats suivants :

$$\Omega = \{(F,F,F);(F,F,P);(F,P,F);(P,F,F);(P,P,P);(P,P,F);(P,F,P);(F,P,P)\}$$

Supposons que pour cette expérience on s'intéresse au nombre des faces, quelles sont les valeurs possibles ? $0, 1, 2, 3$



- **Variable aléatoire :** est une fonction qui associe une valeur numérique à chaque résultat de Ω

$$\begin{array}{cccc} X & : & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

La variable aléatoire est dite **discrète** si l'ensemble des valeurs prises par X est un ensemble **fini** ou **dénombrable**.

4.1 Fonction de probabilité

Cas d'étude : On reste avec la même expérience aléatoire précédente, on définit la variable aléatoire X = nombre des faces à chaque résultat

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & \{0,1,2,3\} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) = x_i \end{array}$$

1. Compléter l'ensemble des valeurs possible de X.
2. Calculer les probabilités associées à chaque valeur prise par X.

$$\begin{array}{rcl} P(X=0) & = & P((P,P,P)) = \frac{1}{8} \\ P(X=1) & = & P((F,P,P),(P,F,P),(P,P,F)) = \frac{3}{8} \\ P(X=2) & = & P((F,F,P),(F,P,F),(P,F,F)) = \frac{3}{8} \\ P(X=3) & = & P((F,F,F)) = \frac{1}{8} \end{array}$$

3. Compléter le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

⧫ **Fonction de probabilité** d'une variable aléatoire X est une fonction qui associe à chaque valeur possible de X la probabilité qui lui correspond.

$$\begin{array}{rcl} f_X : \{x_1, x_1, \cdots, x_n\} & \to & [0,1] \\ x_i & \mapsto & f_X(x_i) = P(X = x_i) \end{array}$$

$*$ **Propriétés de la fonction de probabilité**

- $0 \leq f_X(x_i) \leq 1, \quad \forall x_i$
- $\sum_{x_i} f_X(x_i) = 1$

4.2 Fonction de répartition

Cas d'étude : On reste avec la même expérience aléatoire précédente, compléter le tableau

x_i	0	1	2	3
$P(X \leq x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8} = 1$

♦ **Fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est une fonction qui est définie par

$$\begin{array}{rcll} F_X & : & \{x_1, x_1, \cdots, x_n\} & \to [0,1] \\ & & x_i & \mapsto F_X(x_i) = P(X \leq x_i) \end{array}$$

$*$ **Propriétés de la fonction de répartition**

- $0 \leq F_X(x_i) \leq 1, \quad \forall x_i$
- F_X est une fonction croissante
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$

4.3 Mesures caractéristiques d'une variable aléatoire discrète

♦ **Espérance mathématique** d'une variable aléatoire X

$$\mathbb{E}(X) \quad = \quad \sum_i x_i P(X = x_i) \quad = \quad \sum_i x_i f_X(x_i)$$

- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X), \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

♦ **Variance** d'une variable aléatoire X

$$V(X) \quad = \quad \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \quad = \quad \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

- $V(aX) = a^2 V(X), \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $V(aX + b) = a^2 V(X), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

♦ **Ecart-type** d'une variable aléatoire X

$$\sigma(X) \quad = \quad \sqrt{V(X)}$$

Exercice : On choisit au hasard deux chiffres différents et on considère la variable aléatoire $X =$ plus petit des deux chiffres

1. Déterminer la fonction de probabilité de X

   les valeurs possibles de X sont $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ les combinaisons possibles $C_2^{10} = \dfrac{10!}{2! * 8!} = 45$

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{9}{45} & P(X=1) &= \frac{8}{45} & P(X=6) &= \frac{3}{45}\\
P(X=2) &= \frac{7}{45} & P(X=3) &= \frac{6}{45} & P(X=7) &= \frac{2}{45}\\
P(X=4) &= \frac{5}{45} & P(X=5) &= \frac{4}{45} & P(X=8) &= \frac{1}{45}
\end{aligned}$$

2. Déterminer fonction de répartition de X

$$\begin{aligned}
P(X\leq 0) &= \frac{9}{45} & P(X\leq 1) &= \frac{17}{45} & P(X\leq 6) &= \frac{42}{45}\\
P(X\leq 2) &= \frac{24}{45} & P(X\leq 3) &= \frac{30}{45} & P(X\leq 7) &= \frac{44}{45}\\
P(X\leq 4) &= \frac{35}{45} & P(X\leq 5) &= \frac{39}{45} & P(X\leq 8) &= \frac{45}{45}
\end{aligned}$$

3. Calculer $P(3 \leq X \leq 6)$, $P(X > 7)$

$$\begin{aligned}
P(3\leq X\leq 6) &= F_X(6) - F_X(3) = \frac{42}{45} - \frac{30}{45}\\
P(X>7) &= 1 - P(X\leq 7) = 1 - \frac{44}{45}
\end{aligned}$$

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.