

Module: Mathématiques de base 4

Enseignant(s): UP-Maths

Classe(s): 2TIC,2EMA,2GC

Documents autorisés: OUI ☐ NON ☒

Nombre de pages: 2

Calculatrice autorisée: OUI ☒ NON ☐

Internet autorisée: OUI ☐ NON ☒

Date: 22/06/2018

Heure: 12H30

Durée : 1h30 mn

## EXERCICE 1:

Un joueur a cinq pièces dans sa poche, dont 2 équilibrées et 3 truquées. Pour les pièces truquées, la probabilité d'avoir << face >> est le double de celle d'obtenir <<pile>>.

- 1) Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
- 2) Montrer que la probabilité d'obtenir "pile" sachant que la pièce est truquée est égale  $\frac{1}{3}$ .
- 3) Montrer que la probabilité d'obtenir "pile" sachant que la pièce est équilibrée est égale  $\frac{1}{2}$ .
- 4) Quelle est la probabilité d'obtenir "pile"?
- 5) La pièce montre "pile". Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la pièce équilibrée?
- 6) Il prend au hasard une pièce dans sa poche et la lance trois fois.  
On note  $X$  le nombre de pile obtenu sur les 3 lancers. Quelle loi suit la variable aléatoire  $X$ .
- 7) Le joueur gagne 3 euros par "pile" obtenu et perd 2 euros par "face" obtenu. On note  $B$  son bénéfice.
  - a) Exprimer  $B$  en fonction de  $X$ .
  - b) Déterminer si en moyenne le jeu lui est favorable.

## EXERCICE 2:

La répartition des machines électriques selon la durée de vie (en année) est donnée par

Durée de vie (Y)	1	2	3	4	5	6
Effectif	30	20	50	40	20	40

- 1) Quelle est la population étudiée? Le caractère ainsi que sa nature?
- 2) Calculer la taille totale de la population.
- 3) Calculer les fréquences, notées  $f_i$ .
- 4) Tracer la courbe des fréquences en utilisant le diagramme en bâtons.
- 5) Calculer les fréquences cumulées croissantes, notées  $f_i^c$ .
- 6) Tracer la courbe cumulative (c'est-à-dire la courbe des fréquences cumulées).
- 7) Calculer la proportion des pièces ayant une durée de vie:
  - a) Au plus 3 années. Interpréter le résultat.
  - b) Au moins 4 années. Interpréter le résultat.
- 8) Déterminer la durée de vie médiane, notée  $Me$ .
- 9) Calculer la durée de vie moyenne, notée  $\bar{Y}$ . Interpréter le résultat.

## EXERCICE 3:

On considère la série de terme général  $u_n$ , où

$$u_n = \frac{1}{n(n^2 - 1)}.$$

1) Déterminer les réels  $a, b, c$  tel que :

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

2) En déduire une expression explicite en fonction de  $n$  de cette somme

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2 - 1)}.$$

3) Déduire de ce qui précède la convergence de la série  $\sum u_n$ , et la valeur de la somme

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k.$$

## EXERCICE 4:

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on définit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt.$$

1) Montrer que  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

2) calculer  $F(1)$ .

3) Rappeler le théorème de continuité d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.

4) Rappeler le théorème de dérivabilité d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.

5) Montrer que  $F$  est continue sur son domaine de définition.