	EXAMEN
esprit Se former autrement	Semestre : 1 ☐ 2 ■ Session : Principale ■ Rattrapage ☐

Module…Mathématiques de base 4………………..……………………………………………
Enseignant(s) : Soumaya Ben Chaabane, Lotfi Ncib, Fares Ben Amara, Lobna Derbel, Taoufik Moulahi, Nejib Mahmoudi, Kais Amari…………………………………………………………
Classe(s) :……2A/ 2P………………………………………………………………………………

Documents autorisés : OUI ☐ NON ■ Nombre de pages : 2
Calculatrice autorisée : OUI ☐ NON ■ Internet autorisée : OUI ☐ NON ■

Date : 13/05/2017……… Heure ... 09h00....... Durée :..1h30.......

Exercice 1 (4 points) : On considère l'équation différentielle :

$$(\boldsymbol{E}) : \; y'' + 2y' + 4y = xe^{x}$$

1. Résoudre l'équation $(\boldsymbol{E})$.
2. Déterminer l'unique solution de $(\boldsymbol{E})$ vérifiant : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
3. Soit $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction deux dérivable sur $]0,+\infty[$ et qui vérifie :

$$(\boldsymbol{E_1}): t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\, ln(t)$$

4. On pose $g(t) = f(e^t)$, vérifier que g est une solution de $(\boldsymbol{E_1})$.

Exercice 2 (4 points) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Montrer que f est est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. Montrer que f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (6 points) : Pour $x \epsilon\ \mathbb{R}$ on note $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de F'.
4. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.

5. Montrer que $0 \leq F(x) \leq \int_0^1 e^{-tx}dt$, en déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

Exercice 4 (6 points) : Soit $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite numérique, l'objectif de l'exercice st de montrer que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge, i.e.

$$(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \text{ suite convergente} \Leftrightarrow \sum(u_{n+1} - u_n) \text{ série convergente.}$$

1. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k)$.
   a. Montrer que $S_n = u_{n+1} - u_0$.
   b. Supposons que $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite convergente, en deduire que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente (indication: calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$).
   c. Supposons maintenant que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente, en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

Application: Etudier la nature des séries suivantes:

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n\geq 1} \text{arctg}(\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)})$.

Indication $arctg\left(\frac{A-B}{1+A.B}\right) = arctg(A) - arctg(B)$