Année universitaire: 2015 - 2016

Examen mathématiques de base 4

Exercice1

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = xy(x+y-1)$$

1) Déterminer les $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.(1 pt)

2) Déterminer les points critiques de f.(2 pts:0,5 pour chaque point critique)

3) Indiquer la nature de ces points.(2 pts:0,5 pour la nature de chaque point critique)

Exercice2

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2}dt.$$

1) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.(1 pt)

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression intégrale de la dérivée de F.(1pt)

3) En intégrant par partie, montrer que $F'(x) = -2xF(x)$.(1 pt)

4) En résolvant l'equation différentielle $F'(x) + 2xF(x) = 0$, déterminer $F(x)$ sachant que $F(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.(2 pts: 1 pt pour la résolution et 1 pt pour la détermination de la constante k)

Exercice3

Soit :

$$(E) : y'' + y = xe^{-x}$$

On désigne par (E_0) l'équation homogène associée à (E). On demande:

1) Ecrire l'équation (E_0), puis son équation caractéristique.(1 pt)

2) Donner les racines complexes de l'équation caractéristique puis la solution général y_0 de

l'équation (E).(1 pt)

3) Déterminer une solution particulière $y_p = (ax+b)e^{-x}$ de l'équation (E).(1 pt)

4) Donner la solution y de (E) qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.(1 pt)

Exercice4

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\sqrt{x}+1)}.$$

1) Calculer $f'(x)$ et montrer que f est décroissante pour tout $x \geq 1$.(1 pt)

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.(1 pt)

3) En déduire la nature de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(n)$.(1 pt)

4) Calculer $\lim\limits_{n\to\to+\infty} n^{1/2}|f(n)|$, en déduire la nature de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|f(n)|$.(2 pt)

5) En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f(n)$ est semi convergente.(1 pt)