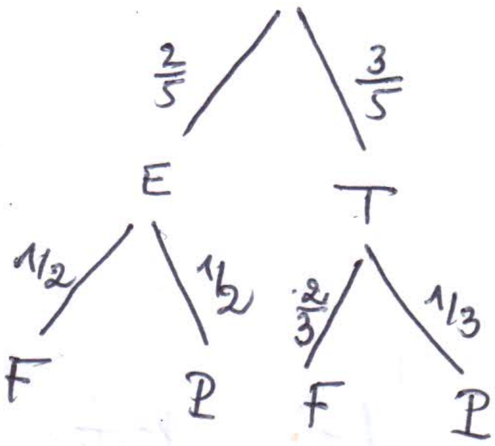
Correction MB_4

Exercice : 1 (6pts)

1)



E : "La pièce est equilibrées"
T : " " " truquées"
F : "obtenir face"
P : " " pile"

(1)

2) $p(P \setminus T) = \frac{1}{3}$ (0,5)

3) $p(P \setminus E) = 1/2$ (0,5)

4) $p(P) = p(P \cap E) + p(P \cap T)$ (1)

$= p(P \setminus E) \cdot p(E) + p(P \setminus T)\, p(T)$

$= 1/2 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

5) $p(E \setminus P) = \frac{1}{2}$ (Formule Bayes). (1)

6)

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3$	$C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{3}{5}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3$

$X \sim B(3, \frac{2}{5})$ (0,5)

7) a). $B(\Omega) = \{-6, -1, 4, 9\}$, $p(B=-6) = p(X=0)$
$p(B=-1) = p(X=1)$
~~b~~ $p(B=9) = p(X=3)$, $p(B=4) = p(X=2)$ (0,75)

$$E(B) = -6p(B=-6) - p(B=-1) + 4p(B=4) + 9p(B=9)$$
$$= 0.$$ (0,75)

Exercice N°2 (6pts)

1) Population : L'ensemble des machines électrique
Caractère : durée de vie (0,75)
nature : Quantitative discret.

2) Total = 200 (0,25)

3)

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	30	20	50.	40	20	40.
f_i	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$5/20$	$4/20$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$

(1pt)

4) Diagramme en bâtons des fréquences. (0,5)

5)

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	30	20	50	40	20	40.
F.C.C	$3/20$	$5/20$	$\frac{10}{20}$.	$\frac{14}{20}$	$\frac{16}{20}$	1

(0,5)

6) Diagramme en bâtons des F.C.C. (0,5)

7) a). 50% des pièces. ont une durée de vie au plus 3 ans. (0,5)

b) 50% " " " " " " au moins 4 ans (0,5)

8) $M_e = \dfrac{100^{\text{ième}} \text{ valeur} + 101^{\text{ième}} \text{ valeur}}{2}$

$= \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5$ 0,5

9) $\overline{Y} = 3{,}6.$ 1

Au moyenne : la durée de vie est 3,6 ans.

Exercice 3 3pts

1) $\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1}$ 1

2) $S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)(k+1)} = -\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k-1} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k+1}$ 1

$S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2(n+1)}.$

3) $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = S = 1/4.$ 1

Exercice N°4 5pts

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $t \longmapsto \dfrac{\operatorname{arctg} xt}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$

et $\left|\dfrac{\operatorname{arctg} xt}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$ avec φ continue positive sur $[0,+\infty[$

est $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \pi/2$ Cv. 01

Ainsi F est bien définie sur $\mathbb{R}$

2) $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg t}{1+t^2}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\arctg t}{1+t^2}\,dt$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctg^2 t \right]_0^x$

$= \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \arctg^2 x = \frac{\pi^2}{8}$. 01

3) Théorème de continuité. 01

4) Théorème de dérivabilité 01

5) Posons $u(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,+\infty[$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ 01
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,+\infty[$, $|u(x,t)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$

avec φ continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge.

<u>Conclusion</u> : F est continue sur $\mathbb{R}$.