Module : Mathématique de Base 4 **Classe :** $2^{\text{ème}}$ année **AU : 2018 / 2019**

TD : *Probabilité Discrète*

Exercice 1 :

Soient A, B et C trois évènements associés au même ensemble fondamental Ω

1. Montrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ &\quad -[P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] \end{aligned}$$

2. On pose $E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et $E_2 = A \cap (B \cup C)$

(a) Montrer que E_1 et E_2 sont incompatibles.

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2 &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (A \cap (B \cup C)) \\ &= (A \cap \overline{(B \cup C)}) \cap (A \cap (B \cup C)) \\ &= A \cap \emptyset = \emptyset \end{aligned}$$

(b) Déterminer l'ensemble $E_1 \cup E_2$.

$$\begin{aligned} E_1 \cup E_2 &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap (B \cup C)) \\ &= (A \cap \overline{(B \cup C)}) \cup (A \cap (B \cup C)) \\ &= A \cap (\overline{(B \cup C)}) \cap (B \cup C)) \\ &= A \cap \Omega = A \end{aligned}$$

3. On suppose que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$, $P(C) = 0.3$, $P(B \cap C) = 0.1$, $P(A \cap C) = 0.1$, $P(A \cap B) = 0.2$ et $P(A \cap B \cap C) = 0.05$, calculer $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) = P(A) \\
P(E_1) &= P(A) - P(E_2) \\
P(E_2) &= P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0.2 + 0.1 - 0.05 = 0.25 \\
P(E_1) &= 0.6 - 0.25 = 0.35
\end{aligned}$$

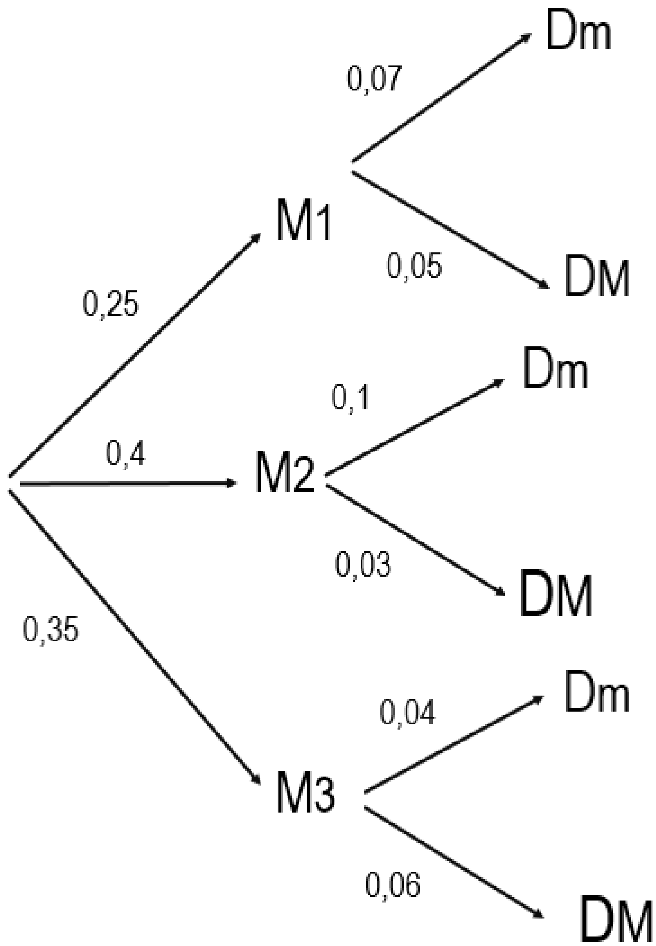
Exercice 2 :

Trois machines($M_1,\ M_2,\ M_3$) produisent respectivement 25%, 40% et 35% de la production totale d'une usine de pneus. Ces machines peuvent produire deux types de défauts au niveau des pneus : défaut mineur(D_m) et défaut majeur (D_M). Un processus de contrôle de qualité des pneus a montré que :

- La machine M_1 produit 7% de pneus portant un D_m et 5% de pneus portant un D_M.
- La machine M_2 produit 10% de pneus portant un D_m et 3% de pneus portant un D_M.
- La machine M_3 produit 4% de pneus portant un D_m et 6% de pneus portant un D_M.

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à sélectionner un pneu au hasard.

1. Déterminer l'arbre pondéré des évènements en indiquant les probabilités sur chaque branche.



2. Quelle est la probabilité que le pneu sélectionné ne présente aucun défaut ? Aucun défaut : $ND = \overline{(D_m \cup D_M)}$

$$
\begin{aligned}
P(ND) &= P(\overline{(D_m \cup D_M)}) = 1 - P(D_m \cup D_M) \\
P(D_m \cup D_M) &= P(D_m) + P(D_M) - P(D_m \cap D_M) \\
P(D_m \cap D_M) &= 0 \text{ les deux types de défauts ne se présentent pas en même temps} \\
P(D_m \cup D_M) &= P(D_m) + P(D_M) \\
P(D_m) &= P(D_m \cap M_1) + P(D_m \cap M_2) + P(D_m \cap M_3) \text{ probabilités totales} \\
&= P(M_1)P(D_m/M_1) + P(M_2)P(D_m/M_2) + P(M_3)P(D_m/M_3) \\
&= 0.25 * 0.07 + 0.4 * 0.1 + 0.35 * 0.04 = 0.0715
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(D_M) &= P(D_M \cap M_1) + P(D_M \cap M_2) + P(D_M \cap M_3) \text{ probabilités totales} \\
&= P(M_1)P(D_M/M_1) + P(M_2)P(D_M/M_2) + P(M_3)P(D_M/M_3) \\
&= 0.25 * 0.05 + 0.4 * 0.03 + 0.35 * 0.06 = 0.0455 \\
P(D_m \cup D_M) &= P(D_m) + P(D_M) = 0.0715 + 0.0455 = 0.117 \\
P(ND) &= 1 - P(D_m \cup D_M) = 1 - 0.117 = 0.883
\end{aligned}
$$

3. Sachant que le pneu ne présente aucun défaut qu'elle est la probabilité que celui-ci soit fabriqué par la machine M_3 ?

$$
P(M_3/ND) = \frac{P(M_3 \cap ND)}{P(ND)} = \frac{0.315}{0.883} = 0.35
$$

$$
\begin{aligned}
P(M_3 \cap ND) &= P(ND/M_3)P(M_3) = 0.9 * 0.35 = 0.315 \\
P(ND/M_3) &= P(\overline{(D_m \cup D_M)}/M_3) = 1 - P((D_m \cup D_M)/M_3) = 1 - 0.1 = 0.9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P((D_m \cup D_M)/M_3) &= \frac{P((D_m \cup D_M) \cap M_3)}{P(M_3)} \\
&= \frac{P((D_m \cap M_3) \cup (D_M \cap M_3))}{P(M_3)} \\
&= \frac{P(D_m \cap M_3) + P(D_M \cap M_3) - P((D_m \cap M_3) \cap (D_M \cap M_3))}{P(M_3)} \\
&= \frac{P(D_m \cap M_3) + P(D_M \cap M_3) - P(D_m \cap M_3 \cap D_M)}{P(M_3)} \\
&= \frac{P(D_m \cap M_3) + P(D_M \cap M_3)}{P(M_3)} \\
&= \frac{P(D_m/M_3)P(M_3) + P(D_M/M_3)P(M_3)}{P(M_3)} = P(D_m/M_3) + P(D_M/M_3) \\
&= 0.04 + 0.06 = 0.1
\end{aligned}
$$

Exercice 3 :

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$P(X=-3)=a, \qquad P(X=-2)=b, \qquad P(X=2)=\frac{5}{16}$$

1. Quelles propriétés doivent vérifier a et b ?

$$0<a<1, \quad 0<b<1, \quad a+b+\frac{5}{16}=1$$

2. Supposant que $\mathbb{E}(X)=-\frac{15}{16}$, déterminer a et b.

$$\mathbb{E}(X)=-3*P(X=-3)-2*P(X=-2)+2*P(X=2)=-3*a-2*b+2*\frac{5}{16}=-\frac{15}{16}$$

On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} a+b+\frac{5}{16} & = & 1 \\ -3*a-2*b+2*\frac{5}{16} & = & -\frac{15}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a & = & \frac{3}{16} \\ b & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(X+3)$ et $\mathbb{E}((X+3)^2)$ et déduire $V(X+3)$.

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{E}(X+3) & = & \mathbb{E}(X)+3=-\frac{15}{16}+3=\frac{33}{16} \\ \mathbb{E}((X+3)^2) & = & \mathbb{E}(X^2+3X+9)=\mathbb{E}(X^2)+3\mathbb{E}(X)+9 \end{array}$$

Exercice 4 :

Imaginons le jeu suivant : on lance une pièce de monnaie à deux reprise et

- On gagne 25 dinars si on obtient deux fois pile
- On gagne 10 dinars si on obtient deux fois face
- On perd 50 dinars si on obtient une fois pile et une fois face.

On définit X comme étant le gain qu'on peut faire en essayant ce jeu.

$$\begin{array}{lcl} \Omega & = & \{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\} \\ X(\Omega) & = & \{-50,25,10\} \end{array}$$

1. Donner la fonction de probabilité de X.

$$\begin{aligned} P(X=-50) &= P((P,F);(F,P)) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ P(X=25) &= P((P,P)) = \frac{1}{4} \\ P(X=10) &= P((F,F)) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Calculer les probabilités suivantes : $P(X=-50)$, $\quad P(-50 < X \leq 25)$ et $P(-100 \leq X \leq 100)$

$$\begin{aligned} P(X=-50) &= P((P,F);(F,P)) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ P(-50 < X \leq 25) &= P(X \leq 25) - P(X \leq -50) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ P(-100 \leq X \leq 100) &= 1 \end{aligned}$$

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\quad V(X)$ et $\sigma(X)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= -50 * P(X=-50) + 25 * P(X=25) + 10 * P(X=10) \\ V(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \end{aligned}$$

Exercice 5 :

Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : $3, 4, 5, 6, 7, 8...$ personnes se présentent au guichet entre $10h$ et $11h$.

1. Définir une variable aléatoire X adaptée à ce problème.

$$X = \text{"nombre des personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h"}$$

2. Quelle est la loi de probabilité de X ?

   On partage l'heure en 60 min, on a répétition d'une épreuve de Bernoulli chaque minute ayant comme succès "une personne se présente au guichet" avec la probabilité $p = 0.1$, on peut donc approximer la variable X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.1 * 60 = 6$, on a donc

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{6^k}{k!}e^{-6}, \qquad \mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda = 6$$

3. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre $10h$ et $11h$?

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} P(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{6^k}{k!}e^{-6}$$

Exercice 6 :

Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 10 questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule correcte. Un élève répond au hasard à chaque question du QCM. On note le nombre de réponses correctes qu'il a données. Préciser la loi de probabilité suivie par X.

1. Préciser la loi de probabilité suivie par X.

   Le choix aléatoire d'une réponse à une question peut être modélisé par une épreuve de Bernoulli ayant pour succès l'événement « la réponse choisie est la réponse correcte » et pour échec l'événement « la réponse choisie est une réponse erronée ». A chaque question sont proposées 4 réponses, dont une seule correcte. Ainsi, $p = P(S) = \frac{1}{4}$.
   L'élève répond au hasard à chacune des 10 questions du QCM donc il y a répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Autrement dit, l'expérience décrite est un schéma de Bernoulli d'ordre $n = 10$.
   La variable aléatoire X prend pour valeur le nombre de réponses correctes, c'est-à-dire comptabilise le nombre de succès ; suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.
2. Quelle est la probabilité que l'élève réussit l'épreuve avec une note de 8 sur 10.

$$P(X = 8) = C_8^{10} p^8 (1-p)^2 = \frac{10!}{8! * 2!}(\frac{1}{4})^8(1 - \frac{1}{4})^2 = \frac{10 * 9}{2}\frac{1}{4^8}(\frac{3}{4})^2$$