

Module: Mathématiques de base 4

Enseignant(s): UP-Maths

Classe(s): 2TIC,2EMA,2GC

Documents autorisés: OUI ☐ NON ☒

Nombre de pages: 2

Calculatrice autorisée: OUI ☒ NON ☐

Internet autorisée: OUI ☐ NON ☒

Date: 22/06/2018

Heure: 12H30

Durée : 1h30 mn

EXERCICE 1 (6 points):

Un joueur a cinq pièces dans sa poche, dont 2 équilibrées et 3 truquées. Pour les pièces truquées, la probabilité d'avoir << face >> est le double de celle d'obtenir <<pile>>.

- 1) (1point) Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
- 2) (0.5point) Montrer que la probabilité d'obtenir "pile" sachant que la pièce est truquée est égale $\frac{1}{3}$.
- 3) (0.5point) Montrer que la probabilité d'obtenir "pile" sachant que la pièce est équilibrée est égale $\frac{1}{2}$.
- 4) (1point) Quelle est la probabilité d'obtenir "pile"?
- 5) (1point) La pièce montre "pile". Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la pièce équilibrée?
- 6) (0.5point) Il prend au hasard une pièce dans sa poche et la lance trois fois.
On note X le nombre de pile obtenu sur les 3 lancers. Quelle loi suit la variable aléatoire X .
- 7) Le joueur gagne 3 euros par "pile" obtenu et perd 2 euros par "face" obtenu. On note B son bénéfice.
 - a) (0.75point) Exprimer B en fonction de X .
 - b) (0.75point) Déterminer si en moyenne le jeu lui est favorable.

EXERCICE 2 (6points):

La répartition des machines électriques selon la durée de vie (en année) est donnée par

Durée de vie (Y)	1	2	3	4	5	6
Effectif	30	20	50	40	20	40

- 1) (0.75point) Quelle est la population étudiée? Le caractère ainsi que sa nature?
- 2) (0.25point) Calculer la taille totale de la population.
- 3) (1.0point) Calculer les fréquences, notées f_i .
- 4) (0.5point) Tracer la courbe des fréquences en utilisant le diagramme en bâtons.
- 5) (0.5point) Calculer les fréquences cumulées croissantes, notées f_i^c .
- 6) (0.5point) Tracer la courbe cumulative (c'est-à-dire la courbe des fréquences cumulées).
- 7) (0.5point) Calculer la proportion des pièces ayant une durée de vie:
 - a) (0.5point) Au plus 3 années. Interpréter le résultat.
 - b) (0.5point) Au moins 4 années. Interpréter le résultat.
- 8) (0.5point) Déterminer la durée de vie médiane, notée Me .
- 9) (1.0point) Calculer la durée de vie moyenne, notée \bar{Y} . Interpréter le résultat.

EXERCICE 3 (3points):

On considère la série de terme général u_n , où

$$u_n = \frac{1}{n(n^2 - 1)}.$$

- 1) (1.0point) Déterminer les réels a, b, c tel que :

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

- 2) (1.0point) En déduire une expression explicite en fonction de n de cette somme

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2 - 1)}.$$

- 3) (1.0point) Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum u_n$, et la valeur de la somme

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k.$$

EXERCICE 4 (5points):

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt.$$

- 1) (1.0point) Montrer que F est bien définie sur \mathbb{R} .
- 2) (1.0point) calculer $F(1)$.
- 3) (1.0point) Rappeler le théorème de continuité d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.
- 4) (1.0point) Rappeler le théorème de dérivabilité d'une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.
- 5) (1.0point) Montrer que F est continue sur son domaine de définition.