

O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS NA ELIMINAÇÃO DE RUÍDOS E SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS

GLAUCO VITOR PEDROSA ¹ e CÉLIA A. ZORZO BARCELOS ²

RESUMO

Diversas áreas do conhecimento estão fazendo uso de imagens digitalizadas. Em geral os geradores de imagens possuem, em comum, limitações de origens técnicas ou ambientais, as quais apresentam interferências indesejadas denominadas "ruídos", o que exige um pré-processamento das imagens para que se consiga extrair das mesmas as informações desejadas. Por isso, a suavização de uma imagem é um passo anterior fundamental para se conseguir detectar corretamente as características de uma imagem, principalmente as bordas.

As equações diferenciais parciais estão sendo bastante utilizadas nos últimos anos. Elas estão trazendo melhorias significativas para a área de processamento de imagens, especificamente na eliminação de ruídos, segmentação e retoque digital de imagens digitais.

Neste trabalho apresentamos o estudo de alguns modelos de difusão para eliminação de ruídos em imagens digitais, usando equações diferenciais parciais, a fim de comparar seus resultados.

PALAVRAS-CHAVES: processamento de imagens, eliminação de ruídos, equações diferenciais parciais, detecção de bordas.

¹ Faculdade de Computação, Universidade Federal de Uberlândia, E-mail: glaucovitor@comp.ufu.br

² Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, E-mail: celiazb@ufu.br

ABSTRACT

Many areas of knowledge human are making use of digital images. In general, the image generators have in common, technical or ambiental limitations, that generate a unwanted interference called “noise”, which requires a image processing to eliminate this effects in order to identify correctly the characteristics of the image, especially the edges.

The partial differential equations are being used a lot in recent years. They are bringing significant improvements to the area of image processing, specifically in the noise elimination, segmentation and restoration of digital images.

This paper presents the study of some diffusion models using partial differential equations in order to compare their results in noise elimination of digital images.

KEYWORDS: image processing, noise elimination, partial differential equations, edge detection.

1. Introdução

A detecção de bordas é uma ferramenta essencial para a análise de imagens, contando com uma grande variedade de algoritmos. Ela delimita a fronteira entre um objeto e o fundo e entre contornos de objetos que se sobrepõem ou se tocam.

Porém, os geradores de imagens possuem, em comum, limitações de origens técnicas ou ambientais, as quais ocasionam interferências indesejadas denominadas “ruídos”. Por isso é necessário um pré-processamento das imagens digitais para que se consiga extrair das mesmas as informações desejadas.

Vários são os métodos de suavização, contudo efeitos indesejados como o deslocamento de bordas torna os métodos inviáveis quando se deseja eliminar informações irrelevantes e ao mesmo tempo manter inalteradas as bordas físicas. A busca por um método que ofereça bom desempenho, ou seja, suavize mais intensamente as regiões homogêneas da imagem, retirando as informações de menor contraste, geralmente relacionadas com ruído e elementos de textura e mantenha inalteradas em termos de completeza e localização, as bordas de contraste melhor definido, possibilitando detectar principalmente os contornos dos objetos.

Em processamento de imagens, métodos de eliminação de ruídos são denominados filtros. Os usos de equações diferenciais parciais (EDPs) têm se tornado uma alternativa em substituição aos filtros Gaussianos os quais, tendem a suavizar demais as imagens, e podem perder importantes características como bordas, quinas, junções, etc.

Processos de difusão anisotrópica, ou não linear, têm sido bastante usados recentemente para melhorar a tarefa de detecção de bordas e eliminar ruídos de imagens em várias áreas. Com imagens médicas, Chung & Sapiro usaram um modelo de difusão para detectar as bordas de lesões de pele em imagens digitais clínicas de pele. Demirkaya aplica as equações diferenciais parciais para atenuar problemas de ruído em imagens médicas de tomografia do tipo positron emission tomography (PET). Gibou et al. fazem uso das EDP em imagens clínicas obtidas pelos métodos de radioterapia conformal 3D e de terapia de radiação moduladas por intensidade.

Os resultados obtidos usando equações diferenciais parciais mostram uma significativa melhora na qualidade das imagens filtradas com perda mínima de resolução.

Neste trabalho vamos descrever alguns modelos de difusão e compará-los com o método anisotrópico apresentada por

Barcelos et. al., que utiliza uma EDP bem balanceada para eliminar ruídos preservando as bordas.

2. Modelos de difusão

Um dos primeiros trabalhos nessa área surgiu em 1980, apresentado por Marr & Hildreth. O processo de suavização utilizado por eles era feito através da convolução da imagem original com o Laplaciano da função Gaussiana. Em 1984, Koenderink relacionou as estruturas das imagens à equação do calor (1), definindo um processo para suavização de imagens que utiliza a evolução temporal, onde uma família de imagens é obtida a partir do cálculo da solução de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) para diferentes níveis de suavização.

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad (1)$$

A aplicação pura e simples da equação do calor deteriora todas as bordas, assim todas as informações da imagem são perdidas.

Sethian propôs uma equação (2) para análise de propagação de frentes. Esta equação ficou conhecida como equação do fluxo da curvatura média. A existência, unicidade e estabilidade é devida a L.c

Evans. Esta equação realiza uma difusão na direção ortogonal ao gradiente.

Os resultados obtidos da aplicação da equação da curvatura média possuem resultados satisfatórios nas primeiras iterações. Porém, ela ainda não é capaz de preservar a localização de bordas das imagens.

$$u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (2)$$

$$u(x,0) = I(x), \quad \text{em } \Omega$$

Uma importante contribuição foi feita por Perona & Malik, que introduziram um modelo cuja idéia central consistia em realizar uma suavização seletiva na imagem, ou seja, combinaram a idéia de difusão direcionada, introduzida no método da curvatura média, com um processo de detecção de bordas:

$$u_t = \operatorname{div} \left(g(|\nabla u|) \nabla u \right), \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (3)$$

$$u(x,0) = I(x), \quad \text{em } \Omega$$

onde g é uma função suave, não crescente e, tal que $g(0) = 1$, $g(s) \geq 0$, e $g(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$. A idéia é efetuar uma difusão fraca nos pontos u onde $|\nabla u|$ for grande, preservando a localização exata de um ponto de borda.

A equação de Perona e Malik passou a representar um modelo de difusão não linear, fornecendo um algoritmo com grande potencial para segmentação de imagens, remoção de ruídos, detecção de bordas e realce de imagem, tornando-se imprescindível para o surgimento de novos trabalhos nesta linha de pesquisa.

Mas, o modelo de Perona e Malik ainda apresentava inconsistências na sua formulação. Por exemplo, se a imagem é muito ruidosa, o gradiente ∇u será muito grande em quase todos os pontos e, como consequência a função g será quase nula nestes pontos.

Assim, todos os ruídos da imagem permanecem quando a mesma for processada pelo processo de suavização introduzido por esse modelo. Isso impulsionou trabalhos de pesquisas voltados ao aperfeiçoamento de novos modelos.

Uma grande contribuição foi dada por Alvarez, Lions & Morel, que substituíram o gradiente da função pelo produto de convolução em uma vizinhança dos pontos discretizados:

$$u_t = g(|\nabla G_\sigma * u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (4)$$

Outros trabalhos surgiram e, com o intuito de melhorar o desempenho dos

modelos, alguns termos foram acrescentados ou alterados.

3. Modelo do Fluxo Bem-Balanceada

Seguindo a teoria proposta por Perona e Malik, Barcelos et al. propôs um modelo de equação de difusão não linear bem-balanceada. A diferença está no acréscimo de um termo na equação que força a imagem u a permanecer perto da imagem original I :

$$u_t = g|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \sigma(1 - g)(u - I) \quad (5)$$

onde:

$$g = \frac{1}{1 + k|\nabla u|^2}, \quad |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2, \quad k \text{ e } \sigma \text{ são constantes e } u(t_0) = I.$$

Diversos trabalhos estão usando esse modelo para a remoção de ruídos em imagens digitais. Gavalin, por exemplo, utiliza esse modelo na detecção de feições cartográficas, e os resultados obtidos são bem satisfatórios.

4. Discretização das Equações Diferenciais Parciais

Geralmente, o primeiro passo de um método destinado a solução numérica de equações diferenciais é discretizar a região onde se deseja encontrar a solução. No

caso deste trabalho, tem-se imagens bidimensionais representadas pela função $u : \Omega \subset R^2 \rightarrow R$ onde se deseja encontrar a solução $u(x,y)$. Para isso é necessário discretizar o domínio da função intensidade de imagens $u(x,y)$.

As imagens digitais são representadas por matrizes. Neste trabalho usamos imagens de dimensão 256x256. Os valores $u(x,y)$ representam a intensidade do tom de cinza da imagem u na posição (x,y) . Usando uma notação simplificada podemos escrever u_{ij} representando o valor de $u(x_i, y_i)$, $i, j = 1, 2, \dots, 256$.

A região Ω é discretizada de forma regular com pontos igualmente espaçado. Esse espaçamento tem como distância uma unidade de pixel.

Para obter as diferenças relativas às derivadas parciais, referente a função $u(x,y)$, um método bastante usado é a aproximação por diferenças finitas.

Usando o método das diferenças finitas centradas, podemos aproximar as expressões u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy} e u_{xy} por:

$$u_x = \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2}$$

$$u_y = \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+2j} - 2u_{ij} + u_{i-2j}}{4}$$

$$u_{yy} = \frac{u_{ij+2} - 2u_{ij} + u_{ij-2}}{4}$$

$$u_{xy} = \frac{u_{i+1j+1} - u_{i+1j-1} - u_{i-1j+1} + u_{i-1j-1}}{4}$$

A solução de uma equação diferencial parcial é obtida em cada tempo de escala $t_n = n\Delta t$, onde $n = 1, 2, \dots$. Denota-se $u(x_i, y_i, t_n)$ por u_{ij}^n .

Através da discretização de u_t por Euler obtemos:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \Delta t L(u_{ij}^n)$$

com

$$u_{ij}^0 = I(x_i, y_i) \text{ sendo } I \text{ a imagem original}$$

e

$$L(u) = g|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \sigma(1-g)(u-I)$$

O termo $L(u)$ também pode ser aproximado pelo método das diferenças finitas. Como exemplo, a discretização da equação da curvatura média (2) ficaria:

$$L(u) = \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{u_x^2 + u_y^2}$$

5. Detecção de bordas

Depois de suavizada, precisamos aplicar um operador para detectar as bordas da imagem.

Operador de Roberts

Para a detecção de bordas, o método mais simples que existe talvez seja o operador gradiente de Roberts o qual pode ser descrito utilizando duas máscaras, resultando em um valor de gradiente para a primeira diagonal $gr1$ e um valor para a segunda diagonal $gr2$:

1	0	0	-1
0	-1	1	0
$gr1$		$gr2$	

Figura 1: Máscaras para o cálculo do operador gradiente de Roberts.

O valor exato do gradiente bidimensional na posição (x,y) , correspondente ao ponto superior esquerdo da janela 2×2 , é calculado por:

$$g_r(x, y) = \sqrt{g_{r1}^2 + g_{r2}^2} \quad (6)$$

Devido ao custo computacional, as operações de elevar ao quadrado e raiz

quadrada são muitas vezes substituídas pela seguinte aproximação:

$$g_r(x, y) = \alpha(|g_{r1}(x, y)| + |g_{r2}(x, y)|)$$

onde α é uma constante.

Uma desvantagem do operador de Roberts é a sua anisotropia, ou seja, sua assimetria. Dependendo da direção, certas bordas são mais realçadas que outras, mesmo tendo igual magnitude.

Operador de Sobel

Um operador gradiente mais sofisticado (3×3) é o operador de Sobel, o qual pode ser descrito utilizando duas máscaras, mostradas na Figura 2, resultando em um valor de gradiente na horizontal, gox , e outro valor de gradiente na vertical, goy , para o ponto central da janela (3×3):

1	0	-1	1	2	1
2	0	-2	0	0	0
1	0	-1	-1	-2	-1
gox			goy		

Figura 2: Máscaras para o cálculo do gradiente de Sobel.

O valor absoluto do gradiente bidimensional no ponto $g_o(x, y)$ é calculado por:

$$g_o(x, y) = \alpha(|g_{ox}| + |g_{oy}|) \quad (7)$$

onde α é uma constante.

Técnicas de detecção de bordas através de derivadas de segunda ordem empregam alguma forma de diferenciação espacial de segunda ordem para “afinar” realçar as bordas. Uma borda é dita existente se uma mudança significativa ocorre na segunda derivada. O mais famoso método diferenciador de segunda ordem é o Laplaciano.

Calculo do Laplaciano

O operador Laplaciano de uma imagem $u(x, y)$ contínua é definido como:

$$G(x, y) = -\nabla^2 u(x, y) \quad (8)$$

onde o Laplaciano é:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (9)$$

O Laplaciano $G(x, y)$ é zero se $u(x, y)$ é constante ou varia lineamente em amplitude. Se a taxa de variação (derivada) de $u(x, y)$ é maior que numa função linear, $G(x, y)$ exhibe uma mudança de sinal no ponto de inflexão de $u(x, y)$. Quando a derivada da função $G(x, y)$ passa por zero significa dizer que há presença de borda.

No domínio discreto a mais simples aproximação para o Laplaciano contínuo é calcular as diferenças das inclinações (derivadas) em cada posição varrendo toda

a imagem de acordo com a expressão abaixo:

$$G(i, j) = [u(i, j) - u(i, j-1)] - [u(i, j+1) - u(i, j)] + [u(i+1, j) + u(i, j)] - [u(i-1, j) - u(i, j)] \quad (10)$$

Este Laplaciano pode ser gerado pela convolução:

$$G(i, j) = u(i, j) * H(i, j)$$

com uma máscara H:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde as duas matrizes acima correspondem às segundas derivadas ao longo de todas as linhas e colunas, respectivamente, assim como no Laplaciano contínuo expresso na Equação 9. O Laplaciano discreto mostrado anteriormente na Equação 10 é usualmente normalizado para unificar as medidas de ganho dos pesos dos pixels positivos e negativos máscara H. A máscara normalizada e definida como:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Resultados e Análise

A figura 3 mostra o resultado da aplicação da equação do calor à imagem 3-a. Foram usados os parâmetros: $\nabla t = 0.2$, $k = 0.005$. Nota-se se que a equação não consegue preservar as bordas da imagem. Quanto mais iterações, mais borrada a imagem fica.

Na figura 4 mostramos a aplicação a cada 10 iterações da equação da curvatura média. Foram usados os parâmetros: $\nabla t = 0.4$, $k = 0.005$. Nota-se que os resultados são melhores que a da equação do calor, pois conseguiu preservar um pouco das bordas na suavização, porém o resultado ainda não é bom, pois no final de 50 iterações não conseguimos detectar as reais bordas da imagem.

Na figura 5-b aplicamos um ruído à imagem 5-a e a partir dela aplicamos uma suavização com a equação da curvatura e com a equação do fluxo bem-balanceada para comparar seus resultados. A imagem 5-f mostra o detector de bordas aplicado à imagem com ruídos 5-b. Note que é impossível distinguir as bordas da imagem. A figura 5-g mostra o detector de bordas aplicado à imagem 5-c que passou por uma suavização usando a equação da curvatura. Os resultados já são melhores comparados com a imagem 5-f. A figura 5-h mostra o detector de bordas aplicado à imagem 5-d, que foi suavizada usando a

equação do fluxo bem-balanceada. O resultado é superior que o resultado da figura 5-g, pois conseguimos detectar mais detalhes que a aplicação da equação da curvatura.

A figura 6 mostra a aplicação dos detectores de bordas: Sobel, Roberts e Laplaciano. Podemos notar que o operador de Roberts conseguiu detectar mais informações que o operador de Sobel, mas usando o Laplaciano conseguimos ver mais detalhes que a detecção feita pelos operadores Sobel e Roberts.



Figura 3 – (a) Imagem; (b) a (f) Suavização via equação do calor.

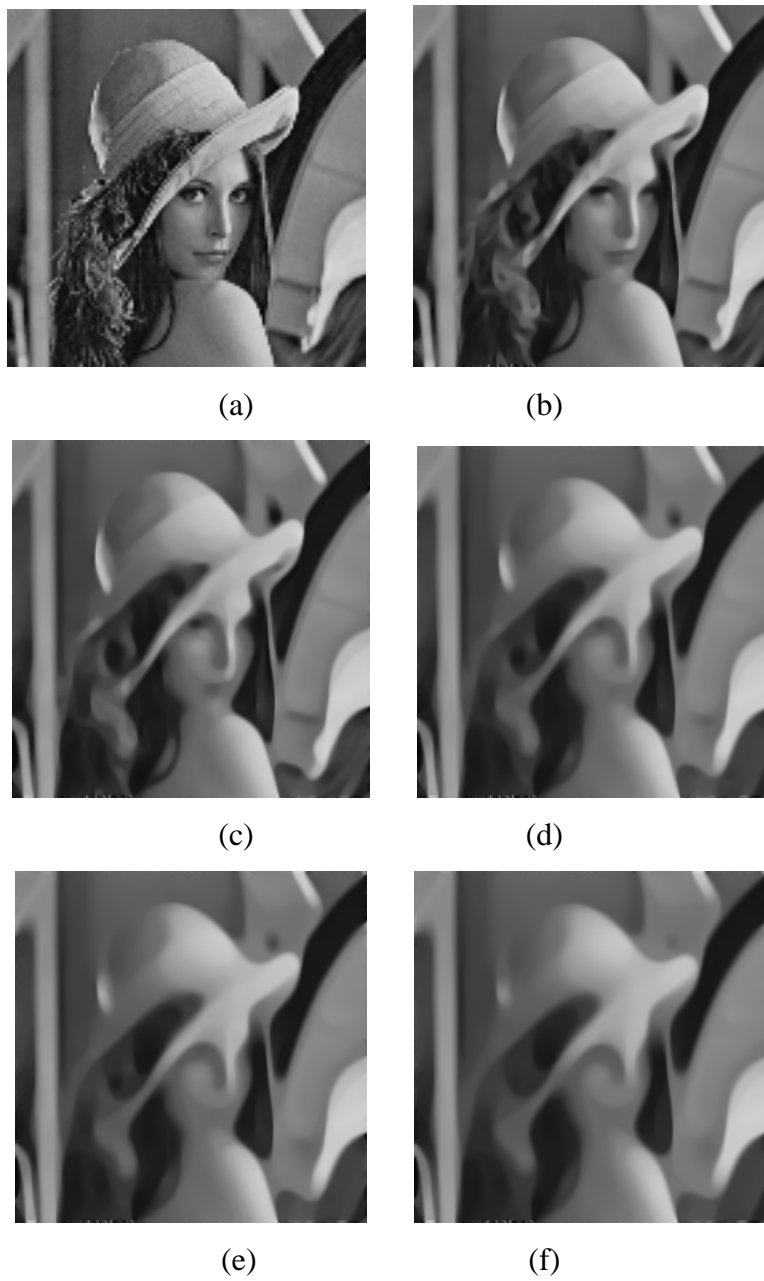


Figura 4 – (a) Imagem; (b) a (f) Suavização via equação da curvatura.

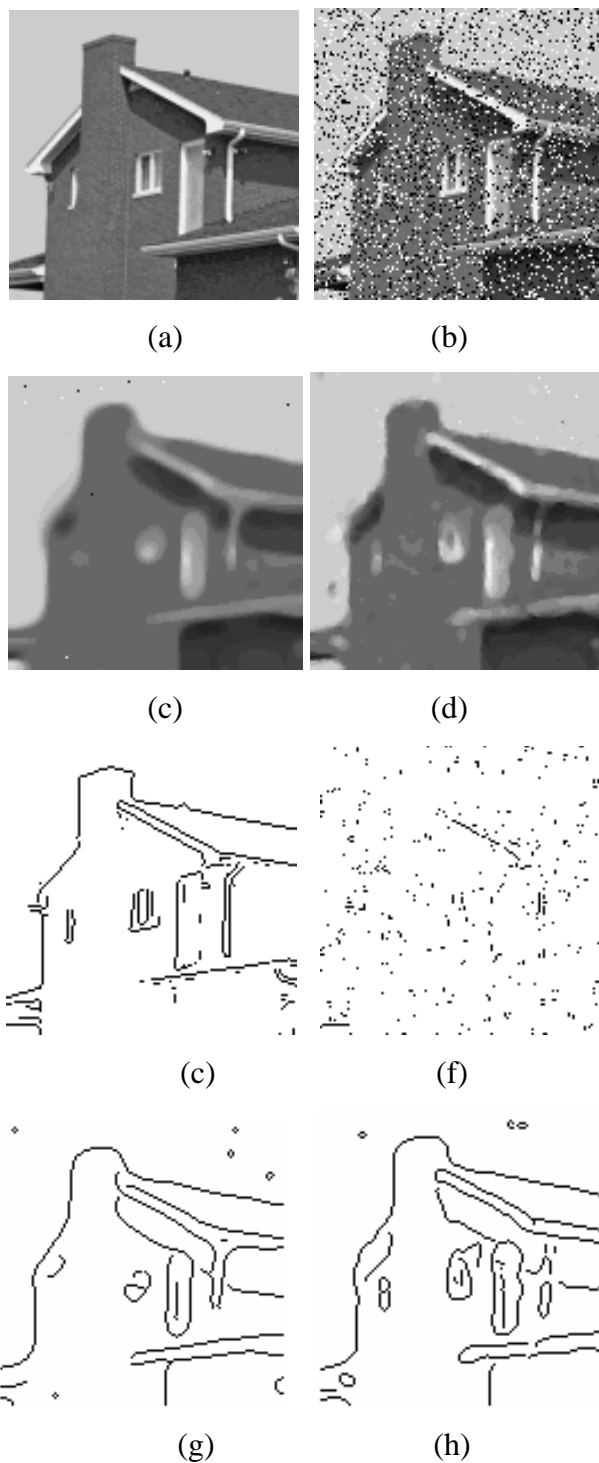


Figura 5 – (a) Imagem original; (b) Ruído aplicado à imagem original; (c) Suavização via equação da curvatura média; (d) Suavização via equação do fluxo bem-balanceada; (d)-(h) bordas das figuras dadas em (a)-(d), respectivamente.

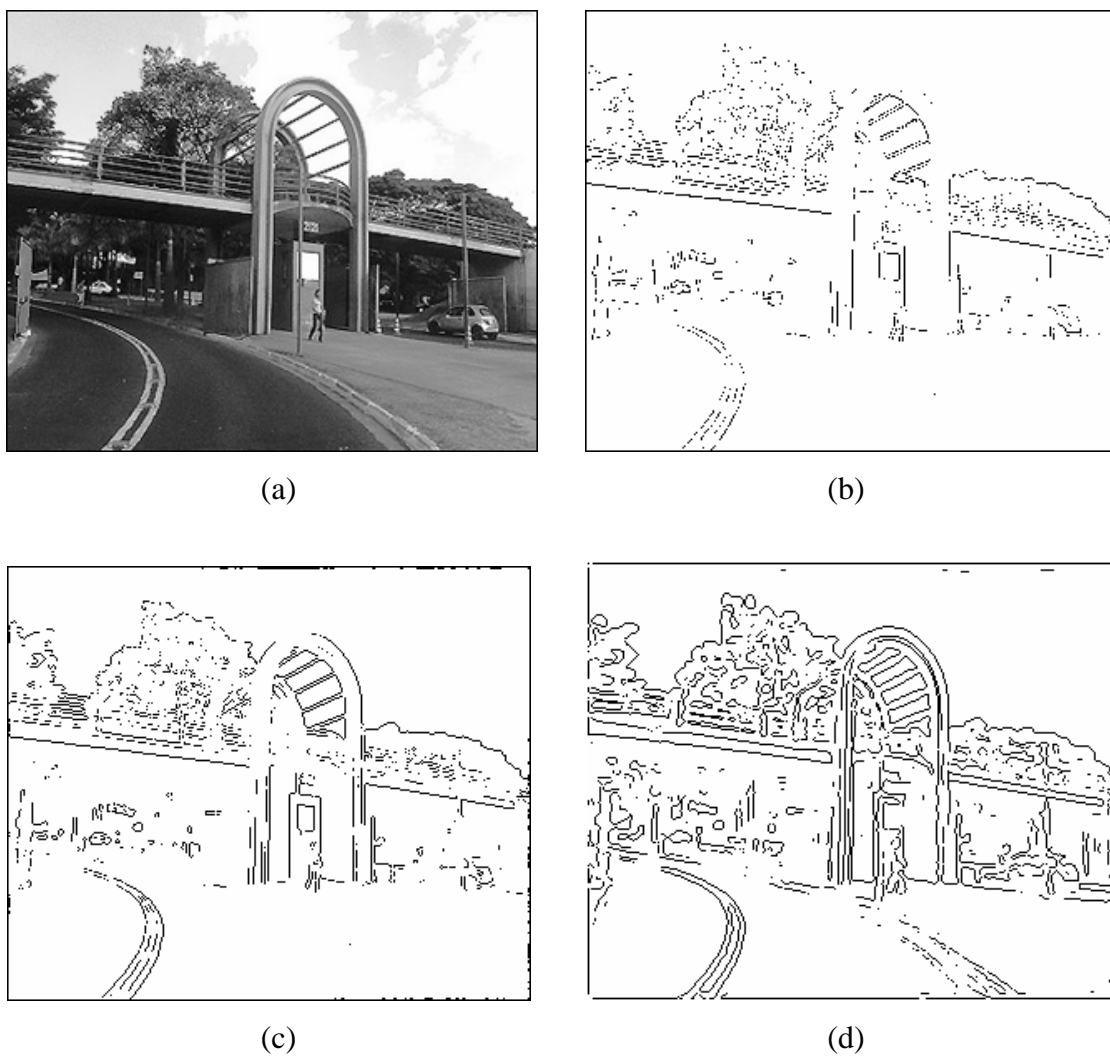


Figura 6 – Detecção de bordas.

(a) Imagem original; (b) Operador de Sobel; (c) Operador de Roberts; (d) Laplaciano.

7. Conclusão

Um detector ideal de bordas que permita apenas a detecção de bordas físicas, sem fragmentação e deslocamento da sequência de pontos que representa o contorno do objeto não existe, tornando-se necessário fazer uso de estratégias que permitam obter resultados mais próximos possíveis do ideal. Uma forma de alcançar esse objetivo é utilizar a suavização anisotrópica via EDP com posterior detecção de bordas.

Este trabalho mostrou alguns modelos de difusão para suavização de imagens através do uso de equações diferenciais parciais.

Diante dos resultados analisados, o uso de EDPs estão trazendo melhorias significativas para a área de processamento de imagens, principalmente quando aplicadas à eliminação de ruídos em imagens digitais.

Apresentamos o modelo de equação de difusão não linear proposto por Barcelos et. al., que consiste em aplicar seletivamente a equação, permitindo suavizar adequadamente uma imagem sem perder as bordas e outros detalhes contidos na imagem.

8. Referências

- [1] C.A. Z. Barcelos, M. Boaventura, and E. C. S. Júnior. *A well-balanced flow equation for noise removal and edge detection*. IEEE Transaction on Image Processing, Vol.12, N.7, 2003.
- [2] Demirkaya, O. *Anisotropic diffusion filtering of PET attenuation data to improve emission images*. Physics in Medicine and Biology, v. 47, p. 271-278, 2002.
- [3] D. H. Chung and G. Sapiro. *Segmenting skin lesions with partial differential equations based image processing algorithm*. IEEE Transactions on Medical Imaging, v. 19, n. 7, p. 763-767, 2000.
- [4] D. Marr and E. Hildreth, *Theory of Edge Detection*, 1980, Proc. Roy. Soc, London Ser. B, 207, pp. 187-217.
- [5] Galvanin, E. A dos S., Silva, E. A. *Detecção de feições cartográficas em imagens digitais através da aplicação de um modelo de difusão anisotrópica baseado em equações diferenciais parciais*. São Paulo, UNESP, Geociências, v. 22, n. 2, p. 185-193, 2003

- [6] Gibou, F. et al. *Partial differential equations-based segmentation for radiotherapy treatment planning*. Mathematical Biosciences and Engineering, v. 2, n. 2, p. 209-226, 2005.
- [7] J.A. Sethian. *Level Set Methods*, Cambridge University Press, 1996.
- [8] J. Malik and P. Perona. *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion*. IEEE TPAMI, 12, No. 7 (1990), 629-639.
- [9] Koenderink, J. J., 1984. *The Structure of Images*, Biol. Cybernet, 50, pp. 363-370.
- [10] L. Alvarez, P.L. Lions and J.M. Morel, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), 845-866.
- [11] L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature*. I. J. Differ. Geom., 33 (1991).
- [12] M.C. Cunha. *Métodos Numéricos*. UNICAMP, Campinas, 2000.
- [13] R.C. Gonzalez, R.E.Woods – *Processamento de Imagens Digitais*, Ed.Edgar Blucher Ltda, 2000.