1. Loi (faible) des grands nombres et théorème d'approximation de la loi de Poisson

Objectif prise en main de R avec une illustration de la loi des grands nombres et de l'approximation de la loi de Poisson par la loi binomiale.

Partie 0 : Manipulation des vecteurs / Répertoire courant

Exercice 1 Entrer les lignes de codes suivantes:

```
Test = 1000
is.vector(Test)
Test = "Test"
Test[2] = 10
Test
Test[5] = 3
Test
length(Test)
ls() # Affiche les objets R utilisés
rm(list=ls()) # Supprime tous les objets R utilisés
ls()
```

Exercice 2 Changer le répertoire courant.
(*Fonction :setwd*)

Partie 1 : Simulation de variables aléatoires indépendantes à partir de la loi uniforme

Exercice 3 Créer 3 fonctions Bern(n,p),Bino(n,N,p), Geom(n,p) et Poiss(n,lambda) permettant de simuler "n" réalisations des lois Bernouilli(p),Binomiale(N,p),Geométrique(p) et Poisson(lambda) respectivement. Tester les fonctions
(*Fonctions : runif, rbinom,rgeom,rpois*)

Exercice 4 Regrouper les simulations dans une matrice et enregistrer la matrice en ".Rdata" et en ".csv"
(*Fonctions : matrix, save,write.csv*)

Partie 2 : Illustration de la loi des grands nombres

Exercice 5 Pour chaque distribution : Illustrer la loi des grands nombres en affichant sur un même graphique la répartition empirique d'un n-échantillon , $\mathbb{P}_n$, et la vraie loi de probabilité. Afficher les 4 graphiques dans une même fenêtre
.
(*Fonctions : dunif,dnorm,dbinom,dgeom,dpois, tabulate,plot,par,points,legend*)

Exercice 6 Enregistrer l'image obtenue dans le répertoire désiré.
(*Fonctions : setwd,dev.copy,dev.off*)

Partie 3 : Approximation de Poisson par la loi binomiale

Exercice 7 Pour un λ donné. Ecrire une fonction $p(N)$ qui prend en paramètre N et qui retourne λ/N.

Exercice 8 Dans une même fenêtre afficher, pour quatres valeurs de N différentes, un graphique comprenant :

- la répartition d'un n-échantillon, $\mathbb{P}_n$, de la $Binom(N, p(N))$,
- la vraie loi de probabilité de la $Binom(N, p(N))$,
- la vraie loi de probabilité de la $Poisson(\lambda)$,

Exercice 9 Enregistrer l'image obtenue.

Partie 4 : Illustration de l'Inégalité de Markov pour la loi de Poisson ($X \sim \mathcal{P}(\lambda)$)

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Exercice 10 Pour un a donné : tracer sur le même graphique :

- $\mathbb{P}_n(X \geq a)$
- $\mathbb{P}(X \geq a)$
- $\mathbb{E}(X)/a = \lambda/a$

(*Fonctions : ecdf, ppois,matplot,plot*)

2. Lotka Volterra Discret

Modèle :

$$\begin{cases} X_{n+1} & = X_n + X_n(a - bY_n) \cdot \Delta_t \\ Y_{n+1} & = Y_n - Y_n(c - dY_n) \cdot \Delta_t \end{cases}$$

Exercice 11 Ecrire une fonction $Recursion(X_0, Y_0, a, b, c, d, Dt)$ qui retourne (X_1, Y_1). Remplir un vecteur X et un vecteur Y de tailles n d'une trajectoire j'usqu'au temps n de la suite. (Partant de valeurs initiales X_0 Y_0.)

Exercice 12 Afficher la trajectoire.

Exercice 13 Ecrire une fonction H (intégrale première du modèle continu) prenant en argument une matrice XY de 2 colonnes (une pour les X une pour les Y) et retournant un vecteur $H(P)$ tel que

$$H(P)[i] = dXY[i,1] + bXY[i,2] - c\log XY[i,1] - a\log XY[i,2]$$

Exercice 14 Afficher la fonction H
(*Fonctions : image,contour,surface3d(librairie rgl)*)

Exercice 15 Faire une animation représentant la trajectoire (X_n, Y_n) et les lignes de niveaux de la fonction H.
(*Librairie : animation*)