Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Matemática - FAMAT
Disciplina: Cálculo Numérico (FAMAT31502) - 08/2021
Tópico: Métodos Iterativos para Resolução de Sistemas Lineares
Professor: Rafael Figueiredo

Projeto:

Neste projeto queremos calcular via métodos iterativos a solução do sistema linear decorrente do problema a seguir:

Suponha que uma membrana com dimensões 80 cm $\times$ 80 cm tenha cada um de seus lados mantidos a uma temperatura constante. Usando a teoria de equações diferenciais parciais, pode-se formular uma equação que determina o valor da temperatura no interior dessa membrana. Essa equação diferencial pode ser simplificada colocando-se uma malha com 9 pontos sobre esta membrana e calculando-se a temperatura nos pontos da malha, como mostra a Figura 1, onde $u_1, u_2, \cdots, u_9$ são os valores da temperatura em cada ponto da malha.

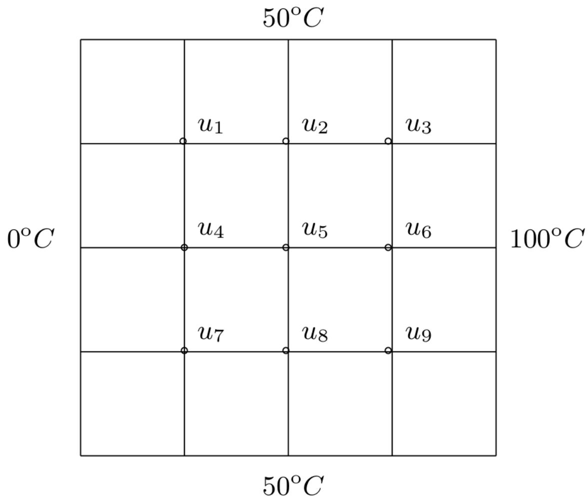

Figura 1: Domínio computacional.

O sistema de equações lineares resultante é dado por:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -50 \\ -150 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ -50 \\ -50 \\ -150 \end{bmatrix}.$$

Considerando uma precisão $\varepsilon = 10^{-8}$, faça uma comparação entre os métodos iterativos para encontrar a solução do sistema linear anterior

a) Método de Jacobi (MJ):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

b) Método de Gauss-Seidel (MGS):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

c) Método da Sobre-Relaxação Sucessiva (Successive Over-Relaxation - SOR):

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

onde o termo $\omega \in \mathbb{R}^*$ é um parâmetro de relaxação que pode acelerar a convergência.

Aplique o método SOR para $\omega = 0.5, 0.9, 1.2$ e 1.5.

Obs.: Quando $\omega = 1$ o método SOR se reduz ao MGS.

Mostre a comparação da rapidez da convergência de cada método em um pequeno relatório de não mais que quatro páginas. O relatório **não** deve conter os códigos nem as saídas diretas das execuções dos programas.

Os Critérios de avaliação serão os seguintes:

1. Descrição do problema de forma clara e sucinta;
2. Identificação dos métodos numéricos envolvidos na resolução (o que pode incluir alguma explicação se o método não foi explicado nas aula);
3. Apresente a solução do sistema linear calculada com precisão de $\varepsilon = 10^{-8}$;
4. Análise dos resultados numéricos obtidos
   - Utilize como critério de parada o **erro absoluto**;
   - Represente graficamente o **erro absoluto** considerando a norma $\|\cdot\|_\infty$ associado a cada um dos métodos em função do número de iterações;
   - Apresente em uma tabela a comparação do número de iterações que cada método gastou;
   - Qual método você escolheria para resolver o sistema? Justifique sua resposta.

Os trabalhos devem ser enviados exclusivamente pelo Moodle até a data limite. O arquivo do relatório deve estar em formato .pdf e não deve ultrapassar o tamanho de 5MB. O arquivo deve ser nomeado como relatorioX.pdf, onde X deve ser o nome do aluno.

Para mais detalhes sobre os métodos vide livro do Burden 2015, Análise Numérica, ou bibliografia auxiliar descrita no plano de ensino.

Estudo sobre a convergência

Os métodos mencionados anteriormente possuem boas propriedades de convergência de acordo com as propriedades da matriz dos coeficientes $\mathbf{A}$ relacionada ao problema. Vamos enunciar alguns resultados.

Teorema: Se $a_{ii} \neq 0$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, então $\rho(B_{SOR}) \geq |\omega - 1|$. Isso implica que o método SOR pode convergir somente se $0 < \omega < 2$.

Teorema: Se $\mathbf{A}$ for uma matriz definida positiva e $0 < \omega < 2$, então o método SOR converge para qualquer escolha do vetor chute inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.