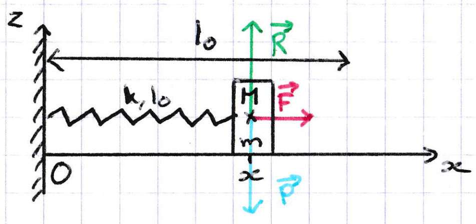
Oscillateur harmonique non amorti

Nombre de pages : 4

OH Cas d'étude

L'oscillateur harmonique (OH) idéal est incarné par le système masse-ressort suivant :



Système : point matériel M de masse m.

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Repère : cartésien

Hypothèses :
- absence de frottements
- masse du ressort négligeable
- loi de Hooke satisfaite :
  - ressort linéaire
  - déformation peu intense (Ø plastique)

Bilan des forces :
- poids : $\vec{P} = -mg\vec{z}$
- réaction du support : $\vec{R} = R\vec{z}$
- force de rappel élastique $\vec{F}$

Le ressort est caractérisé par les grandeurs physiques suivantes :
- la raideur k
- la longueur à vide l_0.

Force conservatrice force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi

Force de rappel élastique force s'opposant à la déformation exercée par le ressort

- tout point du ressort subit la même force de rappel élastique
- la force de rappel élastique est conservatrice

Loi de Hooke la force de rappel élastique est proportionnelle à la déformation

- une déformation trop importante entraîne une déformation plastique et invalide la loi de Hooke.

Oscillations harmoniques oscillations sinusoïdales autour d'une position d'équilibre

Isochronisme indépendance de la période et de l'amplitude

Équipartition de l'énergie répartition égale dans le temps des énergies cinétiques et potentielles ($\langle E_c(t) \rangle = \langle E_p(t) \rangle$)

Force de rappel élastique

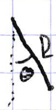
$$\vec{F} = \pm\, k\,(x - l_0)\,\vec{x}$$

Energie potentielle de rappel élastique

$$E = \frac{1}{2}\, k\,(x - l_0)^2$$

Pulsation

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (rad \cdot s^{-1})$$

- Cas du ressort : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Cas du pendule : $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ($\vec{g}\downarrow$  $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$)

Principe Fondamental de la Dynamique

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (\vec{p} = m\vec{v})$$

Position d'équilibre

Position d'équilibre $\Leftrightarrow$ $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$

- Le PFD appliqué à la position d'équilibre donne le Principe Fondamental de la Statique :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Théorème de l'Energie Mécanique

Dans un système pseudo-isolé sans frottements, l'énergie mécanique est constante

OH

Energies mécanique et cinétique

$$E_M = E_c + \sum E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Forme canonique de l'équation differentielle linéaire d'ordre 2 caractéristique de l'OH

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_{eq} \quad (x_{eq} \text{ position d'équilibre})$$

ou $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ avec x_{eq} pour origine

- La première équation comporte un second membre $(\omega^2 x_{eq})$ et est dite totale. La seconde n'en comporte pas et est dite homogène.

Solution de l'équation homogène

$$\begin{aligned} x_H(t) &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ &= C \sin(\omega t + \varphi) \\ &= D \cos(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

- A, B, C, D, φ et ψ sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales. Il faut alors choisir la forme la plus facile (varie).
- C : amplitude $\quad \omega t + \varphi$: phase $\quad \varphi$: phase à l'origine

Solution de l'équation totale

$$x_T(t) = x_p(t) + x_H(t)$$

- $x_p(t)$ fixe la solution. Dans les cas simples, $x_p(t) = x_{eq}$ mais dans d'autre cas, $x_p(t)$ peut varier avec t.

Étude du mouvement par projection du PFD

1. Modélisation de la situation (cf cas d'étude)

2. L'équation du mouvement est donnée par le principe fondamental de la dynamique projeté dans la direction du mouvement :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vdots$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_{eq}$$

3. Cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est caractéristique d'un oscillateur harmonique et admet pour solution générale :

$$x(t) = x_p(t) + x_H(t) \quad \ldots$$

4. Les conditions initiales nous permettent de fixer la solution. ...

Étude du mouvement par raisonnement énergétique

1. Modélisation de la situation (cf cas d'étude)

2. On effectue le bilan de forces en vue d'un raisonnement énergétique :
   - X force est normale au mvt, donc ne travaille pas et est conservatrice.
   - X force est conservatrice d'énergie potentielle ...

3. Le système est donc conservatif, donc d'après le TEM, on obtient l'intégrale première du mvt que l'on dérive par rapport au temps

$$E_c(t) + E_p(t) = E_M = cst \quad \ldots \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_{eq}$$

4. ③ et ④ de la méthode précédente.

OH

Description du mouvement

La masse oscille de façon sinusoïdale autour de sa position d'équilibre $x_{eq} = \dots$: on parle d'oscillations harmoniques.

L'amplitude et la période des oscillations sont respectivement … . La masse atteint donc ses abscisses extrémales $x_{min} = \dots$ et $x_{max} = \dots$ en $t_{min} = \dots$ [T] et $t_{max} = \dots$ [T].

On peut associer la position de la masse à l'abscisse d'un vecteur tournant d'origine $(x_{eq}; 0)$, d'amplitude C et d'angle $\omega t + \varphi$.

Compétences exigibles

- Modéliser une situation (schéma, vecteur tournant, …)
- Dériver l'intégrale première du mouvement
- Montrer qu'une expression est solution de l'EDL
- Appliquer les CI pour retrouver les constante décrivant le mouvement
- Montrer l'équipartition de l'énergie