Calcul différentiel

E $\mathbb{R}$ev de dim p, $(e_1, \dots e_p)$ base de E, $\|\cdot\|_E$ norme sur E
F $\mathbb{R}$ev de dim n, $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ base de F, $\|\cdot\|_F$ norme sur F
U ouvert non vide de E, $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \varepsilon_i : U \subset E \longrightarrow F$.

j-ème application partielle de f en u $\quad f_{u,j} : x \mapsto f\left(\sum_{i \neq j} u_i e_i + x e_j\right)$ sur $\mathcal{V}(u_j)$

Dérivée en u
- **selon h** si existe, $(D_h f)(u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(u+th) - f(u)}{t}$
- $Df(u) : h \in E \longmapsto (D_h f)(u)$

Différentiabilité en u (diff en u)

Existence de :
- $\varepsilon : \mathcal{V}(O_E) \longrightarrow F$ de limite nulle en O_E
- $df(u) \in \mathcal{L}(E, F)$ (différentielle de u)

$\forall h \in \mathcal{V}(O_E), \quad f(u+h) = f(u) + df(u) \cdot h + \|h\|_E \, \varepsilon(h)$

- $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$
- $d(v \circ f) = v \circ df$ quand v linéaire
- $d(B(f,g))(u) \cdot h = B(df(u) \cdot h, g(u)) + B(f(u), dg(u) \cdot h)$ quand B bilinéaire

j-ème dérivée partielle en u si existe, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(u) = (D_{e_j} f)(u) = f_{u,j}'(u_j)$

$[f \text{ diff en } u] \iff \left[\forall j, \exists \text{ de } \frac{\partial f}{\partial x_j}(u)\right], \quad df(u) \cdot h = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u) \, h_j$

Matrice jacobienne de f en u $\quad \mathrm{Mat}(df(u), e, \varepsilon) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u)\right)_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$

Jacobien de f en u $\quad J_f(u) = \det\left(\mathrm{Mat}(df(u), e, \varepsilon)\right)$

$\mathcal{C}^1$/continûment différentiable $\quad f$ diff sur U, df $\mathcal{C}$ sur U

$[f \; \mathcal{C}^1(U,F)] \iff \left[\forall j, \frac{\partial f}{\partial x_j} \; \exists \text{ et } \mathcal{C} \text{ sur } U\right] \iff [\forall i, f_i \; \mathcal{C}^1(U,F)]$

$[\mathcal{C}^1(U,F)] \Rightarrow [\text{diff sur } U] \Rightarrow \left[\begin{matrix} \mathcal{C} \text{ sur } U \\ (D_h f)(u) \; \exists \quad \forall u, h \end{matrix}\right]$

▶ On peut définir par récurrence les dérivées d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, où l'ordre des dérivations ne compte pas (théorème de Schwarz), et $\mathcal{C}^k(U,F)$.

- $[f, g \; \mathcal{C}^k] \Rightarrow [\lambda f + \mu g, \; fg, \; f \circ g \; \mathcal{C}^k]$

Différentielle d'une composée

V ouvert $\subset G \xrightarrow{g} U \subset E \xrightarrow{f} F$ où $f, g = \sum_{j=1}^{q} g_j e_j$ diff, $q = \dim G$

- $d(f \circ g)(v) = df(g(v)) \circ dg(v)$
- $\dfrac{\partial (f \circ g)}{\partial v_k} = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial g_j}{\partial v_k} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \circ g \right)$
- $MJ_{f \circ g}(v) = MJ_f(g(v)) \times MJ_g(v)$

Règle de la chaîne (cas $q = 1$)

$\varphi = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j e_j : I \subset \mathbb{R} \to U$ $\underline{d}$: $(f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

$$= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j'(t) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \varphi \right)(t)$$

▶ Changement en coordonnées polaires :

$g : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$g^{-1}(x,y) = \begin{cases} (-x, \pi) & \text{si } x < 0, y = 0 \\ \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonctions numériques différentiables (E euclidien, $F = \mathbb{R}$)

- **Gradient de f en u** $(\vec{\text{grad}}\, f)(u)$ tq $df(u) = (\vec{\text{grad}}\, f)(u) \cdot$

↳ Existence et unicité données par le théorème de représentation

- $(\vec{\text{grad}}\, f)(u) = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(u) e_j$ si $(e_1, \dots, e_p)$ orthonormale

- **Point critique** point d'annulations simultanées des $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$
- [Extremum local] $\Rightarrow$ [Point critique] $\Rightarrow$ [$(\vec{\text{grad}}\, f)(u_0) = 0$]

▶ Recherche d'extremum local
1. Calcul des dérivées partielles
2. Recherche des points critiques (condition nécessaire)
3. Étude du signe de $f(u) - f(u_0)$ au voisinage de tout point critique u_0.

Géométrie

Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$

(I, γ) où I intervalle, γ $\mathcal{C}^k(I, E)$

- Soit un arc de classe $\mathcal{C}^1$ au moins. Le paramètre t_0 (resp. l'arc) est dit régulier si $\gamma'(t_0) \neq 0$ (resp. $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t$).

Vecteur tangent $v \in E$ à X en $x \in X$

Existence de $r > 0$ et $\gamma :]-r; r[\to X$ $\mathcal{C}^1$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$

Plan tangent à une surface

$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diff, $X = \{(x, y, f(x,y)), (x,y) \in U\}$ surface d'éq. $z = f(x,y)$, $M_0 \in X$

Plan tangent en M_0 à X : $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(X - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(Y - y_0) = Z - z_0$

Ligne de niveau a de f

$C_a = \{x \in U, \ f(x) = a\}$

- Si $U \subset E$ euclidien, les vecteurs tangents à C_a en x sont orthogonaux à $(\vec{\text{grad}} f(x))$

$U \subset E$, connexe par arc, $f : U \to E$ $\mathcal{C}^1$ avec $df(u) = \tilde{0}$ $\forall u \in U$
Alors f constante sur U

↳ Soit $a, b \in U$. Mq $f(a) = f(b)$. U connexe par arcs donc il existe $\gamma : [0,1] \to U$ $\mathcal{C}$ tq $\gamma(0) = a$, $\gamma(b) = 1$. Soit $g = f \circ \gamma$.

Soit $A = \{t \in [0,1]$ tq $g_{|[0,t]} = \widetilde{g(0)}\}$, $t_0 = \sup A$. Mq $t_0 = 1$

(ε) $\begin{cases} \exists r > 0 \text{ tq } V = B_0(a, r) \subset U, \text{ et } \gamma^{-1}(V) \text{ ouvert de } [0,1] \text{ comme image réciproque continue d'un ouvert sur } \gamma^{-1}(V), \\ g'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0_F \text{ donc } g \ \gamma \text{ est constante} \\ \text{Donc il existe } \alpha > 0 \text{ tq } \alpha \in A. \end{cases}$

(ε) donne $t_0 > 0$. Par l'absurde on suppose $t_0 < 1$. (ε) appliqué en $\gamma(t_0)$ donne la contradiction.