Polynômes

Nombre de pages : 5

Algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coef. dans $\mathbb{K}$

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Il existe une algèbre commutative $\mathbb{K}[X]$ et une indéterminée $X \in \mathbb{K}[X]$ telles que :

- $\forall P \in \mathbb{K}[X], \exists n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{K}^{n+1}, \quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{K}^{n+1}, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0 \Rightarrow a = (0)_{i \in [\![0;n]\!]}$

▶ Deux polynômes sont égaux ssi ils ont m̂ coef.

▶ Algorithme d'Horner

▶ $P(x) = 0 \iff P$ annulateur de $x \iff x$ racine de P

▶ $z \in \mathbb{C}$ est algébrique s'il existe $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul annulateur de z, et transcendant sinon.

▶ P pair $\iff P(-X) = P \iff$ coef. d'indice impair nuls
P impair $\iff P(-X) = -P \iff$ coef. d'indice pair nuls

▶ Manipuler z algébrique grâce à son polynôme annulateur

▶ Fonction polynomiale : $\tilde{P} : \begin{array}{l} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto P(x) \end{array}$

$\mathbb{K}$ infini $\Rightarrow \varphi : \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ P \mapsto \tilde{P} \end{array}$ injective

↳ $\begin{cases} \mathbb{K} \text{ infini} \\ \tilde{P_1} = \tilde{P_2} \end{cases} \Rightarrow \tilde{P_1} - \tilde{P_2}$ nulle sur $n > \max(\deg P_1, \deg P_2)$ points distincts
$\Rightarrow P_1 = P_2$

▶ Toujours penser au polynôme nul

Degré et coefficient dominant

- Si $P = 0$, $\deg P := -\infty$
- Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{K}^{n+1}$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. (c'est le coefficient dominant). Alors $\deg P := n$.

▶ P unitaire $\Leftrightarrow$ $a_{\deg(P)} = 1$
Polynôme unitaire associé $P_U = \frac{1}{a_{\deg(P)}} P$

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, on définit l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X] = \{ P \in \mathbb{K}[X], \deg P \leq n \}$

▶ $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
égalité $\Leftrightarrow$ $\deg P \neq \deg Q$ ou $\lambda a_{\deg(P)} + \mu b_{\deg(P)} \neq 0$

▶ $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

▶ $\deg Q > 0 \Rightarrow \deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$

▶ Hypothèse $a_{\deg(P)} \neq 0$ cruciale pour les absurdes

Intégrité $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$

↳ Supposons $PQ = 0$, i.e. $\underbrace{\deg(PQ)}_{= -\infty} = \deg(P) + \deg(Q)$
Supposer de plus P et Q non nuls donne une contradiction immédiate.

Polynômes inversibles $\mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}$

↳ $PQ = 1 \Rightarrow \deg P + \deg Q = 0 \Rightarrow P, Q \in \mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}$

Polynôme dérivé

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k X^{k-1}$$

- $P^{(0)} := P$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P^{(n)} = [P^{(n-1)}]'$
- $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$, $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$

  $(PQ)' = P'Q + PQ'$, $(P \circ Q)' = Q'(P' \circ Q)$
- $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$
- $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $(X^n)^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- En particulier $P^{(k)}(0) = k!\, a_k$

Formule de Liebniz

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

↳ Récurrence.

Formule de Taylor

$$P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$$

↳ Récurrence.

Propriétés

Tout polynôme P admet au plus deg(P) racines

Par récurrence sur le degré de $P \neq 0$:

- H_0 vrai : $\deg(P) = 0 \Rightarrow P = \lambda \neq 0 \Rightarrow 0$ racines
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n et $\deg(P) = n+1$.
  - Ou bien P n'a pas de racine (Ok).
  - Ou bien P admet une racine α :

$$P = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k - \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} a_k \alpha^k}_{=0} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k (X^k - \alpha^k)$$

$$= (X-\alpha) \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} X^\ell \alpha^{k-\ell-1} \right)}_{:= Q} = (X-\alpha) Q$$

$\deg(Q) = \deg(P) - \deg(X-\alpha) = n$ donc Q admet au plus n racines, don P au plus $n+1$. (Ok)

▶ $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $> n$ racines $\Rightarrow P = 0$

▶ $P_1, P_2 \in \mathbb{K}_n[X]$ coïncident sur $n+1$ points $\Rightarrow P_1 = P_2$

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $x \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts, $y \in \mathbb{K}^{n+1}$.
Il existe un unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1; n+1]\!]$ $P(x_i) = y_i$
On l'appelle polynôme interpolateur de Lagrange associé aux familles x et y et :

$$P = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

↳ Existence : vérification   Unicité : cf ci-dessus.

Arithmétique

Exhibition des différences avec l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Relation de divisibilité $A \mid B \iff \exists P,\ B = PA$

- $(X-\alpha) \mid P \iff P(\alpha) = 0 \iff \alpha$ racine de P
- $[A \mid B \wedge B \mid A] \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ A = \lambda B$
  $\iff A$ et B associés
- $[B \neq 0 \wedge A \mid B] \implies \deg A \leq \deg B$
  Si de plus $\deg A = \deg B$, A et B associés
- Pour connaître le reste dans la DE de A par B, évaluer en les racines de B, après dérivation si les racines sont multiples.

PGCD $\exists!\ P$ <u>unitaire ou nul</u> tel que ...

- $A \wedge 0 = A_u$ $\qquad (PA) \wedge (PB) = P_u (A \wedge B)$
  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^{*2},\quad A \wedge B = (\lambda A) \wedge (\mu B) = A_u \wedge B_u$

PPCM $\exists!\ P$ <u>unitaire ou nul</u> tel que ...

- $A \vee 1 = A_u$ $\qquad (PA) \vee (PB) = P_u (A \vee B)$
  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^{*2},\quad A \vee B = (\lambda A) \vee (\mu B) = A_u \vee B_u$
- $(A \vee B)(A \wedge B) = (AB)_u$

Polynômes irréductibles (≈ nombre premier)

Polynômes P non constants dont les diviseurs sont associés à 1 ou P, i.e de degré 0 ou $\deg(P)$

Ordre $\max\{w \in \mathbb{N},\ (X-\alpha)^w \mid P\}$ où $P \neq 0$
$= \mathrm{Val}_{X-\alpha}(P)$

▶ $P = (X-\alpha)^w Q$ donne l'hypothèse $Q(\alpha) \neq 0$

▶ α racine d'ordre $w \iff \begin{cases} \forall i \in [\![0, w[\![,\ P^{(i)}(\alpha) = 0 \\ P^{(w)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

↳ $P \neq 0$, α racine d'ordre $w \geqslant 1$, $P = (X-\alpha)^w Q$

- $P' = w(X-\alpha)^{w-1}Q + (X-\alpha)^w Q' = (X-\alpha)^{w-1}(wQ + (X-\alpha)Q')$

Or $wQ + (X-\alpha)Q'$ non nul en α : l'ordre est décrémenté

Donc α d'ordre $w-1$ relativement à P'

$\Rightarrow$ ci-dessus ⊕ récurrence.

$\Leftarrow$ Soient P, α, w vérifiant les hypothèses.

$\deg(P) \geqslant w$ car $P^{(w)} \neq 0$.

$$P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = (X-\alpha)^w \Bigg[\underbrace{\frac{P^{(w)}(\alpha)}{w!} + \sum_{k=w+1}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-w}}_{\text{non nul en } \alpha}\Bigg]$$

Théorème | Fondamental de l'algèbre | de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

↳ Admis

▶ Polynômes unitaires irréductibles :

- de $\mathbb{C}$: $\{X-\alpha \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$
- de $\mathbb{R}$: $\{X-\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{X^2+bX+c \mid b^2-4c < 0\}$

▶ $\lambda \prod_k (X-\alpha_k)^{w_k}$ scindé, scindé simple si $w_k = 1\ \forall k$.

Corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

$\mathbb{K}$ un corps, $\left\{ \frac{A}{B} \mid A \in \mathbb{K}[X],\ B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \right\}$

- $\mathbb{K}[X]$ sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$
- Représentant irréductible $\Leftrightarrow$ $A \wedge B = 1$
- $\deg\left(\frac{A}{B}\right) := \deg(A) - \deg(B)$
- Soit $A \wedge B = 1$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $F = \frac{A}{B}$:
  - α racine de F $\Leftrightarrow$ α racine de A
  - α pôle de F $\Leftrightarrow$ α racine de B

Décomposition en éléments simples (DES)

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $\frac{A}{B}$ sa forme unitaire irréductible

- B scindé ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) tel que $B = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k}$

  $\hookrightarrow$ $F = \underset{(\in \mathbb{K}[X])}{E} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,\ell}}{(X-\alpha_k)^\ell}$ (existence et unicité)

- B non scindé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) tel que $B = \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k} \prod_{\ell=1}^{s} (X^2 + b_\ell X + c_\ell)^{\omega'_\ell}$

  $\hookrightarrow$ $F = \underset{(\in \mathbb{K}[X])}{E} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,\ell}}{(X-\alpha_k)^\ell} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{\ell=1}^{\omega'_k} \frac{b_{k,\ell} X + c_{k,\ell}}{(X^2 + b_k X + c_k)^\ell}$ ($\exists !$)

- Techniques :
  - Multiplication - évaluation, évaluations
  - Parité ou symétries
  - Méthode des résidus ($\times x$ puis $\to \infty$)
  - Conjugué si F réelle ($F = \overline{F}$)
  - Dérivation / Intégration, DL
  - DE successives