Réduction

E $\mathbb{K}$-ev de dim finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$

Éléments de réduction

- valeur et vecteur propre associés : $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda x$
- sous-espace associé à λ : $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(\lambda Id_E - u)$
- spectre : $Sp(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \ E_\lambda(u) \neq \{0\}\}$

▶ On étend ces définitions et les résultats suivants aux matrices carrés en confondant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = Mat(u, b_c)$

Une famille de r vecteurs propres associés à r valeurs propres distinctes est libre

↳ Récurrence sur r. Si H_r vraie, $(x_1, \dots x_{r+1})$ associés à $(\lambda_1, \dots \lambda_{r+1})$, avec $(\mu_1, \dots \mu_{r+1})$ tel que $\sum \mu_i x_i = 0$. (1)

Alors $0 = u(0) = u\left(\sum \mu_i x_i\right) = \sum \mu_i \lambda_i x_i$ (2).

Donc λ_{r+1} (1) - (2) : $0 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \underbrace{(\lambda_{r+1} - \lambda_i)}_{\neq 0} x_i$. Donc $\mu_i = 0 \ \forall i$

$$[\lambda \in Sp(u)] \iff [|\lambda Id_E - u| = 0]$$

↳ $[\lambda \in Sp(u)] \iff [E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(\lambda Id_E - u) \neq \{0\}]$
$\iff [\lambda Id_E - u \text{ non injectif}]$
$\iff [\lambda Id_E - u \text{ non bijective}]$
$\iff [|\lambda Id_E - u| = 0]$

Polynôme caractéristique $\chi_u(X) = |X Id_E - u|$

$$\chi_u(X) = X^n - Tr(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n Det(u)$$

↳ $\chi_u(X) \in \mathbb{K}_n[X]$ car det forme n-linéaire.
Polynômes symétriques élémentaires et évaluation en 0.

$$\chi_{\begin{pmatrix} A & B \\ & C \end{pmatrix}}(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$$

↳ $\chi_{\begin{pmatrix} A & B \\ & C \end{pmatrix}}(X) = \left| X I_n - \begin{pmatrix} A & B \\ & C \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} X I_r - A & B \\ & X I_{n-r} - C \end{vmatrix} = |X I_r - A| \, |X I_{n-r} - C| = \chi_A(X)\chi_C(X)$

▶ Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique de l'endomorphisme

▶ Preuves par récurrence sur la dimension.

Les valeurs propres étant les racines de $\chi_u(X)$, de degré n, $Sp(u)$ est fini, de cardinal inférieur à n. Il existe donc $r \leq n$, $(\lambda_1, \dots \lambda_r)$ deux à deux distincts, $(\alpha_1, \dots \alpha_r) \in \mathbb{N}^{*r}$ et Q ne s'annulant pas tels que $\chi_u(X) = Q \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$

λ désigne une éventuelle valeur propre, et α son ordre de multiplicité

Si χ_u scindé : $Tr(u) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i$, $Det(u) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{\alpha_i}$

▶ Permet de vérifier rapidement les calculs.

$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq \alpha$

↳ $\dim E_\lambda(u) \geq 1$ car $E_\lambda(u) \neq \{0\}$. Soit $p = \dim E_\lambda(u)$.
Montrons que $p \leq \alpha$. Montrons que $(X-\lambda)^p \mid \chi_u$.

Soit e_λ base de $E_\lambda(u)$, complétée en une base $e = e_\lambda \cup e'$ de E.

$A = Mat(u, e) = \begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ & C \end{pmatrix}$ donne bien $\chi_u = \chi_A = (X-\lambda)^p \chi_C$.

Polynômes de l'endo. u $\mathbb{K}[u]$ tq. $\phi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[u]$, $\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \longmapsto \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$

▶ ϕ morphisme d'algèbre de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ dans $(\mathbb{K}[u], +, \cdot, \circ)$.
La première étant commutative, la deuxième l'est.

Polynôme annulateur de u $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u) = \tilde{0}$

- Il existe toujours un polynôme annulateur non nul

↳ $(u^0, \dots u^{\dim \mathcal{L}(E)})$ est liée par argument de dimension

- $[u(x) = \lambda x] \Rightarrow [P(u)(x) = P(\lambda) x]$
- $[P$ annulateur de $u] \Rightarrow [P(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in Sp(u)]$

Idéal annulateur, polynôme minimal $\mathrm{Ker}\, \phi$, Π_u unitaire générant $\mathrm{Ker}\, \phi$

↳ ϕ morphisme d'algèbre donc d'anneau, or $\mathbb{K}[X]$ anneau principal donc $\mathrm{Ker}\, \phi$ idéal principal, et $\mathrm{Ker}\, \phi \neq \{0\}$, d'où l'existence de Π_u

▶ $\Pi_u \mid \chi_u$ donne $\deg \Pi_u \leq n$ et permet de calculer Π_u.

- $(u^0, \dots u^{d-1}) = e$ où $d = \deg \Pi_u$ base de $\mathbb{K}[u]$

↳ <u>générateur</u> DE de $P \in \mathbb{K}[X]$: $P = Q \Pi_u + R$ donne $P(u) = R(u) \in \mathrm{Vect}\, e$

<u>libre</u> supposer une relation de liaison donne P annulateur de deg $< d$.

▶ Si v induit de u, $\Pi_v \mid \Pi_u$ car $\Pi_u(v) = \tilde{0}$

Matrice compagnon

$$C(a_0, \dots a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

- $\chi_{C(a_0, \dots a_{n-1})}(X) = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$

↳ Récurrence sur n et développement sur la première ligne.

▶ Tout polynôme non nul est polynôme caractéristique d'une matrice.

Lemme des noyaux

| $P = \prod_{i=1}^{d} P_i$ où $(P_i)_i$ premiers entre eux 2 à 2 : $\quad Ker[P(u)] = \bigoplus_{i=1}^{d} Ker[P_i(u)]$

↳ Récurrence sur d. Cas $d=2$ avec théorème de Bézout.

Mq $Ker[(AB)(u)] = Ker[A(u)] \oplus Ker[B(u)]$; avec $PA + QB = X^0$

$\underline{\oplus}$ Supposons $x \in Ker\ A(u) \cap Ker\ B(u)$. Alors $x = Id(x) = P(u)(\cancel{A(u)(x)}) + Q(u)(\cancel{B(u)(x)}) = 0$

$\underline{\supseteq}$ $x \in Ker\ A(u)$, $y \in Ker\ B(u)$, $(AB)(u)(x+y) = A(u)(B(u)(x) + \cancel{B(u)(y)}) = B(u)(\cancel{A(u)(x)}) = 0$

$\underline{\subseteq}$ Pour $x \in Ker(AB)(u)$, on a $x = \underbrace{(PA)(u)(x)}_{\in Ker\ B(u)} + \underbrace{(QB)(u)(x)}_{\in Ker\ A(u)}$

Théorème de Cayley-Hamilton $\quad \chi_u(u) = \tilde{0}$

↳ Soit $x \in E$. Montrons que $\chi_u(u)(x) = 0_E$. Le résultat étant évident pour $x = 0_E$, on suppose désormais $x \neq 0_E$. Alors $\{k \geq 1, (x, \dots u^{k-1}(x))\ libre\}$ est non vide et majorée par n donc admet un maximum m.

On complète $(x, \dots u^{m-1}(x))$ en une base b de E.
Soit $(\alpha_0, \dots \alpha_{m-1}) \in \mathbb{K}^m$ tel que $u^m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i u^i(x)$.

Alors $Mat(u, b) = \begin{array}{c} \\ m\{ \end{array} \begin{pmatrix} \overset{m}{A} & B \\ & C \end{pmatrix}$ avec $A = C(\alpha_0, \dots \alpha_{m-1})$

Alors $\chi_u(u)(x) = \chi_C(u)[\chi_A(u)(x)] = \chi_C(u)[\cancel{u^m(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i u^i(x)}] = 0_E$

Diagonalisabilité

| $[u$ diag$] \Longleftrightarrow [\exists$ base de E composée de vecteurs propres de $u]$

▶ La matrice de u dans cette base est alors diagonale.

Trigonalisabilité

| $[u$ trig.$] \Longleftrightarrow [\exists$ base de E dans laquelle u triangulaire$]$

CNS de diagonalisabilité

(I) $[u$ diagonalisable$]$
(II) $\iff [\dim E = \sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i}(u)]$ (CNS avec définition)
(III) $\iff [\chi_u$ scindé et $\dim E_{\lambda_i}(u) = \alpha_i, \forall i]$ (CNS avec pol. caractéristique)
(IV) $\iff [\exists$ polynôme annulateur scindé simple$]$ (CNS avec pol. annulateur)
(V) $\iff [\Pi_u$ scindé simple$]$ (CNS avec pol. minimal)

↳ $\underline{(I) \Rightarrow (II)}$ Supposons (I). Alors E somme directe de sev sur lesquels $\exists$ homothétie, i.e de sous-espaces propres, d'où l'égalité des dim.

$\underline{(II) \Rightarrow (I)}$ Supposons (II). Soient (e_i) bases des E_{λ_i}, $e = \bigcup_{i=1}^{r} e_i$ est composée de vecteurs propres et est de cardinal n, et est libre.

$\underline{(II) \Rightarrow (III)}$ $n = \sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \leqslant \deg \chi_u = n$ donc égalité $\forall i$.

$\underline{(III) \Rightarrow (II)}$ $\dim E = n = \deg \chi_u = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i}(u)$

$\underline{(I) \Rightarrow (IV)}$ $\exists e$ base de vecteurs propres, et $Q = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)$ scindé simple annule u par action sur la base e.

$\underline{(IV) \Rightarrow (I)}$ Supposons $P = \prod_{i=1}^{k} \underbrace{(X-x_i)}_{P_i}$ avec $(x_i) \neq$ 2 à 2 annulant u.
Donc (P_i) premiers entre eux 2 à 2. Alors :

$E = \mathrm{Ker}(\tilde{0}) = \mathrm{Ker}\,[P(u)] = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,(u - x_i \mathrm{Id})$. $\rightsquigarrow$ extraction de base.

$\underline{(IV) \Leftrightarrow (V)}$ Si $P \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ scindé simple, Π_u aussi car $\Pi_u | P$. $\Leftarrow$ évident.

CNS de trigonalisabilité $[u$ trigonalisable$] \iff [\chi_u$ scindé$]$

↳ $\underline{\Rightarrow}$ Dans la base où u trig : $\chi_u(X) = \begin{vmatrix} X-\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & X-\lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)$

$\underline{\Leftarrow}$ Récurrence sur la dimension. Tout $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ triangulaire donc H_1.
Supposons H_n vraie et $\dim E = n+1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé. Donc il existe $x \neq 0_E$, λ tel que $u(x) = \lambda x$.
Soit F supplémentaire de $\mathbb{K}x$ dans E, b_F base de F :

$\mathrm{Mat}(u, (x) \cup b_F) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ & A \end{pmatrix} \underset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & \\ & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & L' \\ & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & P^{-1} \end{pmatrix}$ trigonalisable.

$\chi_u = (X-\lambda)\chi_A$ donc χ_A scindé, donc $A = PTP^{-1}$. On pose $L' = LP$.

$[u$ nilpotente$] \iff [u$ trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}]$

↳ $\underline{\Leftarrow}$ $\exists e$ tq $\mathrm{Mat}(u, e) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$ puis "$\mathrm{Vect}(u^k(e_1), \dots u^k(e_i)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_{i-k})\ \forall k < i$"

$\underline{\Rightarrow}$ Récurrence sur la dimension. $u^{p-1} \neq \tilde{0}$ donc il existe $x \neq 0_E$, $u^{p-1}(x) \neq 0_E$.
$L = (x, \dots u^{p-1}(x))$ libre. (absurde puis composition par u^i)
$\mathrm{Mat}(u, (u^{p-1}(x), \dots x) \cup b') = \begin{pmatrix} 0 \ddots 0 & B \\ & C \end{pmatrix}$ et C nilpotente : on applique l'hypothèse

▶ On a également obtenu $p \leqslant n$ par liberté de L