Espaces

Nombre de pages : 5

Produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle \in \mathcal{F}(E \times E, \mathbb{R})$ (ps)

E $\mathbb{R}$-ev.
- bilinéaire — cf n-linéarité
- symétrique — $\forall x, y$, $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$
- positive — $\forall x$ $\langle x | x \rangle \geq 0$
- définie — $\forall x$ $\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

▶ Produits scalaires usuels :
- sur $\mathbb{K}^n$: $\langle (x_1, \dots x_n) | (y_1, \dots y_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i$
- sur $\mathbb{R}[X]$ $\langle P | Q \rangle = \int_0^1 PQ = \int_0^1 P(t) Q(t)\, dt$

Espace pré-hilbertien réel
$\mathbb{R}$-ev muni d'un ps

Espace euclidien
espace pré-hilbertien réel de dim finie

Norme $\| \cdot \|$
$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$

▶ $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$

▶ À manipuler au carré

▶ $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$

↳ $$\|x+y\|^2 = \langle x+y | x+y \rangle \underset{\text{bilinéaire}}{=} \langle x | x \rangle + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle + \langle y | y \rangle \underset{\text{symétrie}}{=} \|x\|^2 + 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$$

▶ $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (id. du //gramme

▶ $$\langle x | y \rangle = 1/2 \left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \right) = 1/2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) = 1/4 \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$$ (id. de polarisation)

Inégalités

Inégalité de Cauchy-Schwarz (I.C.S.)

$|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$, $\langle x|y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$

↳ $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\lambda \mapsto \|x+\lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$

- Ou bien $y=0$, auquel cas OK.
- Ou bien p polynomiale de degré 2, or $p \geqslant 0$ donc discriminant $4(\langle x|y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2) \leqslant 0$.

▶ Cas d'égalité $\Leftrightarrow$ x et y colinéaires

↳ Cas d'égalité $\Leftrightarrow$ p s'annule $\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ x+\lambda y=0$

Inégalités triangulaires (I.T.)

$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, égalité $\Leftrightarrow$ x,y positivement liés

↳ $(\|x\|+\|y\|)^2 - \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle - \|y\|^2$
$= 2(\|x\|\,\|y\| - \langle x|y\rangle) \geqslant 0$

$|\|x\|-\|y\|| \leqslant \|x-y\|$, $\|x+y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$

↳ $\|x\| = \|x+y-y\| \leqslant \|x+y\| + \|y\|$
puis inversion des rôles

Orthogonalité

- $x, y \in E$ orthogonaux $\iff \langle x|y\rangle = 0$
- $A, B \subset E$ orthogonaux $\iff \forall (a,b) \in A \times B,\ \langle a|b\rangle = 0$
- Famille $(x_1, \dots x_n)$ orthogonale $\iff \forall i,j \quad i \neq j \Rightarrow \langle x_i|x_j\rangle = 0$
- Famille $(x_1, \dots x_n)$ orthonormée $\iff \forall i,j \quad \langle x_i|x_j\rangle = \delta_{ij}$

▶ Toute famille orthogonale sans vecteur nulle est libre.

↳ Soit $\lambda \in \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]}$ tq $\sum_i \lambda_i x_i = 0$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$0 = \langle x_i | 0\rangle = \langle x_i | \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x_i | x_k\rangle = \lambda_i \underbrace{\|x_i\|^2}_{\neq 0}.$$

▶ Pythagore : $(x_1, \dots x_n)$ orthogonale $\Rightarrow \|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2$

↳ $\|\sum_{k=1}^n x_i\|^2 = \langle \sum_{k=1}^n x_i | \sum_{k=1}^n x_i\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i|x_j\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i|x_i\rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$

Orthogonal de A

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x|a\rangle = 0\}$$

▶ $A^\perp$ sev de E, $A^\perp = (\mathrm{Vect}\ A)^\perp$

▶ $B \subset A \Rightarrow A^\perp \subset B^\perp$

Supplémentaire orthogonal du sev F

$F^\perp$

▶ $F \oplus F^\perp = E$, $(F^\perp)^\perp = F$

↳ Application de $F \oplus F^\perp = E$ à $F^\perp$ puis unicité du supplémentaire orthogonal

Projecteurs, symétries orthogonales

Coordonnées dans $(e_1, \dots)$ BOG

$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x | e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k$

▶ $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \left[\mathcal{M}_{(e_1,\dots)}(x)^T \mathcal{M}_{(e_1,\dots)}(y) \right]_{1,1}$

Soit F sev de E un espace euclidien

Projecteur orthogonal sur F

projecteur sur F // à $F^\perp$

▶ $\|p(x)\| \leq \|x\|$

↳ $\|x\|^2 = \|\underbrace{(p(x))}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in F^\perp}\|^2 \underset{\text{Pytha.}}{=} \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$

▶ $(e_1, \dots e_m)$ BON de F $\Rightarrow$ $p(x) = \sum_{k=1}^{m} \langle e_k | x \rangle e_k$

Distance de $x \in E$ à $A \neq \emptyset$

$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$

▶ $d(x, A) = \|p_{A^\perp}(x)\| = \|x - p_A(x)\|$

↳ $\forall a \in A,\ \|x - a\|^2 = \|\underbrace{(x - p_A(x))}_{\in A^\perp} + \underbrace{(p_A(x) - a)}_{\in A}\|^2$

$= \|x - p_A(x)\|^2 + \|p_A(x) - a\|^2$

Minimum atteint pour $a = p_A(x)$

Symétrie orthogonale / à F

symétrie / à F // à $F^\perp$

▶ $\|s(x)\| = \|x\|$

▶ $(e_1, \dots e_m)$ BON de $F^\perp$ $\Rightarrow$ $s(x) = x - 2 \sum_{i=1}^{m} \langle x | e_i \rangle e_i$

▶ réflexion : symétrie orthogonale / à H hyperplan.

$\forall x \neq y,\ \|x\| = \|y\| \Rightarrow \exists! s$ réflexion, $s(x) = y$, $s(y) = x$.

celle / à $\{x - y\}^\perp$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base de E. Construisons une base orthogonale $(p_1, \dots p_n)$ une base orthogonale de E.

1. On pose $p_1 = e_1$.
2. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, on pose $p_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1} | p_i \rangle p_i$
3. Normalisation : $\left(\frac{p_1}{\|p_1\|}, \dots \frac{p_n}{\|p_n\|} \right)$ est base orthonormée de E.

Théorème de représentation de Riesz

$\forall \varphi \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, $\exists! a \in E$, $\varphi = \langle a | \cdot \rangle$

↳ $\psi : E \to E^*$
$a \mapsto \left(\varphi_a : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \langle x | a \rangle \end{array} \right)$ est :
- bien définie
- linéaire
- injective :

$a \in \ker \psi \Rightarrow \forall x, \langle x | a \rangle = 0 \Rightarrow a \in E^\perp = \{0\} \Rightarrow a = 0$.
De plus $\dim(E) = \dim(E^*)$, donc ψ est bijective

Hyperplan

$\mathcal{B}$ BON de E, H hyperplan, $a \in E \setminus \{0\}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

$H = \ker \langle a | \cdot \rangle \iff a \in H^\perp \iff H$ d'équation $\sum a_k x_k = 0$

Automorphismes orthogonaux

Automorphisme orthogonal $u \in \mathcal{L}(E)$

$u \in \mathcal{O}(E) \iff \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$
$\iff \forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$
$\iff \forall B$ BON, $(u(e_1), \dots)$ BON

▶ $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est le groupe orthogonal

Matrice orthogonale $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$O \in \mathcal{O}_n(E) \iff O^T O = I_n \iff O O^T = I_n$
$\iff (L_1, \dots L_n)$ BON $\iff (C_1, \dots C_n)$ BON

▶ $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$

▶ B BON. B' BON $\iff P(B, B') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

▶ B BON. $u \in \mathcal{O}(E) \iff \mathcal{M}_B(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

▶ $\det u = \pm 1$. u direct $\iff \det u = 1 \iff u \in S\mathcal{O}(E)$
$\det O = \pm 1$. O directe $\iff \det O = 1 \iff O \in SO_n(E)$
$S\mathcal{O}(E)$ et $SO_n(E)$ sont sous-groupes

Produit mixte

$[x_1, \dots x_n] = \det_{B \text{ directe}}(x_1, \dots x_n)$

▶ On parle également d'isométries vectorielles pour désigner les automorphismes orthogonaux

Plan euclidien espace euclidien de dimension 2

- On travaille généralement avec $\mathbb{R}^2$ muni du ps usuel

Matrice de rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- $R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_1} R_{\theta_2}$, $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$
- $R_\theta = I_2 \iff \theta \equiv 0 \ [2\pi]$
- Rotation d'angle θ : $r_\theta = \text{can } R_\theta$
- $\{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} = SO_2(\mathbb{R})$
  $\{r_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} = SO(\mathbb{R})$

Angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$

unique (modulo 2π) θ tel que $r_\theta\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

- $\langle u | v \rangle = \|u\| \|v\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$
  $[u, v] = \|u\| \|v\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$

Matrice de réflexion d'angle θ $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$

- Réflexion d'angle θ. $s_\theta = \text{can} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$
- $s_\theta(\vec{u_{\theta'}}) = \overrightarrow{u_{\theta'-2\theta}}$, $s_{\theta_1} \circ s_{\theta_2} = r_{2(\theta_1 - \theta_2)}$
- Les matrices orthogonales indirectes sont les matrices de réflexion.
  Les automorphismes orthogonaux indirects sont les réflexions

Sous-espaces affines

E $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$. On note les points $A, B, \dots$ et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \dots$
On définit $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Relation de Chasles

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Translation de vecteur $\vec{u}$

$$t_{\vec{u}} : E \to E, \quad x \mapsto x + \vec{u}$$

- $t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$

Sous-espace affine $\mathcal{F}$

$\exists F$ sev de E, $A \in E$, $\mathcal{F} = A + F = \{A + \vec{u}, \vec{u} \in F\}$

- C'est un "translaté" de sev.
- F est unique mais A est quelconque dans $\mathcal{F}$.
  $\mathcal{F}$ sev $\iff 0 \in \mathcal{F}$
- On définit $\dim(\mathcal{F}) = \dim(F)$
  - $\dim(\mathcal{F}) = 1 \iff$ droite affine
  - $\dim(\mathcal{F}) = 2 \iff$ plan affine
  - $\dim(\mathcal{F}) = n-1 \iff$ hyperplan affine

Direction de $\mathcal{F}$

$F = \{\overrightarrow{AB}, (A, B) \in \mathcal{F}^2\} = \vec{\mathcal{F}}$

- Correspond à une "extraction" du sev.
- $\mathcal{F}_1$ parallèle à $\mathcal{F}_2 \iff \vec{\mathcal{F}_1} \subset \vec{\mathcal{F}_2}$, $\mathcal{F}_1 /\!/ \mathcal{F}_2 \iff \vec{\mathcal{F}_1} = \vec{\mathcal{F}_2}$
  $\mathcal{F}_1 /\!/ \mathcal{F}_2 \iff \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$ ou $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$
- Soit $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$, soit $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ espace affine de direction $\vec{\mathcal{F}_1} \cap \vec{\mathcal{F}_2}$