Espaces préhilbertiens

Rappels

- produit scalaire, norme euclidienne associée
- Espace préhilbertien réel, espace euclidien
- Inégalités de Cauchy-Schwarz, de Minckowski
- Identités du parallélogramme, de polarisation
- Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales, orthonormales
- Théorème de Pythagore

▶ Vision matricielle du p.s. $x|y = X^T Y$ (abus d'objets)

▶ $\{0_E\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0_E\}$

Produit scalaire non dégénéré $\forall y \in E, [\forall x \in E, x|y = 0_{\mathbb{R}}] \Rightarrow [y = 0_E]$

▶ Montrer $a=b$: montrer $(a-b)|x = 0_{\mathbb{R}}$ $\forall x \in E$.

Sous-espace orthogonal $A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, x|a = 0\}$

- $A^\perp$ sev, $A^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$, $(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r))^\perp = \bigcap_{i=1}^{r} \{e_i\}^\perp$
- $[A \subset B] \Rightarrow [B^\perp \subset A^\perp]$, $A \subset (A^\perp)^\perp$
- Si F sev, $F \oplus F^\perp$ (non nécessairement supplémentaires)

F de dim finie : $F \oplus F^\perp = E$, $(F^\perp)^\perp = F$

↳ Montrons $E \subset F \oplus F^\perp$. Soit $x \in E$, $(e_1, \dots, e_r)$ BON de F.

Alors $x = \left(\sum_{i=1}^{r} \langle x|e_i \rangle e_i\right) + \left(x - \sum_{i=1}^{r} \langle x|e_i \rangle e_i\right) \in F \oplus F^\perp$

↳ Montrons $(F^\perp)^\perp \subset F$. Soit $x = x_F + x_{F^\perp} \in (F^\perp)^\perp$. Montrons $x \in F$.
Montrons $x_{F^\perp} = 0_E$.

$$0 = \underbrace{x}_{\in (F^\perp)^\perp} | x_{F^\perp} = (x_{F^\perp} + x_F) | x_{F^\perp} = (x_{F^\perp} | x_{F^\perp}) + \cancel{(x_F | x_{F^\perp})} = \|x_{F^\perp}\|^2.$$

Existence de BON en dimension finie

↳ Récurrence sur la dimension

▶ Procédé d'orthonormalisation de Gram

Projection et symétrie orthogonales

Lorsque F sev, $F \oplus F^\perp = E$:

- projection sur F, parallèlement à $F^\perp$
- symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$

▶ Vérifier F et $F^\perp$ supplémentaires

▶ Notamment utilisé lorsque F ou $F^\perp$ de dim finie. Utiliser :

- $Id = p_F + p_{F^\perp}$
- $Id = 2p - s$

Théorème de représentation

$\forall u \in E^*, \exists ! a \in E, \quad u = a|\cdot$

↳ $\phi : E \to E^*$, $a \mapsto a|\cdot$ isomorphisme (définie, linéaire, injectif, égalité des dim)

Théorème de la projection orthogonale

F sev admettant un supplémentaire orthogonal :

$\inf\limits_{a \in F} \|x - a\|$ est atteint en un unique point, et $d(x,F) = \|x - p(x)\| = \|p_\perp(x)\|$

↳ Soit $a \in F$. $\|x-a\|^2 = \|\underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(x) - a}_{\in F}\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - a\|^2$

Inégalité de Bessel

F de dim finie : $\|x\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} (x|e_i)^2$

↳ $\|x\|^2 = \|\underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(x)}_{\in F}\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$

Suite totale

Famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\overline{\mathrm{Vect}\,(e_n)_{n\in\mathbb{N}}} = E$

- $\sum\limits_{n \geqslant 0} (x|e_n)\, e_n$ converge, de somme x, pour tout $x \in E$

↳ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, $\sum\limits_{i=0}^{n} (x|e_i)\, e_i = p_{F_n}(x)$. Soit $\varepsilon > 0$

Montrons $p_{F_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Montrons $\|x - p_{F_n}(x)\| \leqslant \varepsilon$ apcr.

$\mathrm{Vect}\,(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans E donc il existe N, $x' \in F_N$ tq $\|x - x'\| \leqslant \varepsilon$.

- $\sum\limits_{n \geqslant 0} (x|e_n)^2$ converge, de somme $\|x\|^2$, pour tout $x \in E$

↳ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=0}^{n} (x|e_i)^2 = \|p_{F_n}(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$

Donc la série converge par théorème fondamental.

De plus, $\|p_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - d(x, F_n)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|^2$.

Matrice orthogonale M tq $M^T M = I_n$

- $[M^T M = I_n] \iff [(C_1, \dots C_n)$ orthonormale$]$
$\iff [M M^T = I_n] \iff [(L_1, \dots L_n)$ orthonormale$]$

↳ Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[M^T M]_{i,j} = C_i | C_j$, $[M M^T]_{i,j} = L_i | L_j$

- $\det M \in \{-1 ; +1\}$, M inversible et $M^{-1} = M^T$

- e BON, $[\varepsilon$ BON$] \iff [\mathrm{Mat}(e, \varepsilon)$ orthogonale$]$

On suppose E euclidien, de dimension n.

Automorphisme orthogonal u tq $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$

(I) $[$ u automorphisme orthogonal $]$
(II) $\iff [\forall (x,y) \in E^2,$ $u(x) | u(y) = x | y$ $]$
(III) $\iff [\mathrm{Mat}(u,$ e BON$)$ orthogonale $]$
(IV) $\iff [$ $u(e$ BON$)$ BON $]$

↳ (I) ⇒ (II) $u(x) | u(y) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\|u(x)+u(y)\|^2}_{\|x+y\|^2} - \underbrace{\|u(x)\|^2}_{\|x\|^2} - \underbrace{\|u(y)\|^2}_{\|y\|^2} \right) = x | y$ $\forall x,y$

(II) ⇒ (I) $\|u(x)\| = \sqrt{u(x)|u(x)} = \sqrt{x|x} = \|x\|$ $\forall x$

(II) ⇒ (IV) $A = \mathrm{Mat}(u, e\,\mathrm{BON})$, $[A^T A]_{ij} = u(e_i) | u(e_j) = e_i | e_j = \delta_{ij}$ $\forall i,j$

(III) ⇒ (II) $u(x) | u(y) = (AX)^T (AY) = X^T \cancel{A^T A} Y = X^T Y = x | y$ $\forall x,y$

(II) ⇒ (IV) e BON. $u(e_i) | u(e_j) = e_i | e_j = \delta_{ij}$ $\forall i,j$

(IV) ⇒ (III) e BON tq $u(e)$ BON. $A = \mathrm{Mat}(u, e) = \mathrm{Mat}(u(e), e)$ orthogonale.

- F sev : $[F$ stable par $u] \Rightarrow [F^\perp$ stable par $u]$

↳ Soient $x \in F^\perp$, $y \in F$. Montrons $u(x) | y = 0$. u étant bijectif et F stable par u, il existe $z \in F$ tq $y = u(z)$. $u(x) | y = u(x) | u(z) = x | z = 0$.

- $Sp(u) \subset \{-1 ; 1\}$

Isomorphismes entre visions matricielle et algébrique

Ensembles	Nom	Éléments
$O_n(\mathbb{R}) \sim O(E)$	groupe orthogonal	matrice / automorphisme orthogonal isométrie vectorielle
$O_n^+(\mathbb{R}) \sim O^+(E)$ $SO_n(\mathbb{R}) \sim SO(E)$	groupe spécial orthogonal	isométrie directe ($\det = 1$) [matrice de] rotation
$O_n^-(\mathbb{R})$, $O^-(E)$	(pas des groupes)	isométrie indirecte ($\det = -1$)

On suppose $E = F \oplus G$, s et p symétrie $\perp$ (à F) et projecteur (sur F) associés

[s symétrie orthogonale] $\Longleftrightarrow$ [s automorphisme orthogonal]

↳ $\Rightarrow$ Sq $G = F^\perp$. Soit $x = x_F + x_G$, $y = y_F + y_G$. Montrons $x|y = s(x)|s(y)$.

$$x|y = x_F|y_F + x_G|y_G + \cancel{x_F|y_G} + \cancel{x_G|y_F}$$
$$s(x)|s(y) = (x_F - x_G)|(y_F - y_G) = x_F|y_F + \cancel{(-1)^2}\, x_G|y_G = x|y.$$

$\Leftarrow$ Sq s auto. $\perp$. Montrons $G = F^\perp$. Montrons $G \subset F^\perp$ par dimension.

$\forall x \in G, f \in F$, $x|f = s(x)|s(f) = -x|f$ donc $x \in F^\perp$.

[p projecteur orthogonal] $\Longleftrightarrow$ [$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$]

↳ $\Rightarrow$ Soit $x = x_F + x_G$. $\|x\|^2 = \|x_F + x_G\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \|p(x)\|^2$

$\Leftarrow$ Montrons $G = F^\perp$. Soit $g \in G$, $f \in F$. Montrons $g|f = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\|f\|^2 = \|p(f+\lambda g)\|^2 \leq \|f + \lambda g\|^2 = \|f\|^2 + 2\lambda(g|f) + \lambda^2\|g\|^2$$

Donc par étude du signe du trinôme : $4(g|f)^2 \leq 0$.

Symétries orthogonales particulières

- Réflexion : sym. $\perp$ par rapport à un hyperplan
- Demi-tour d'axe $\mathbb{R}n$: $x \longmapsto 2(n|x)n - x$
- Retournement : sym. $\perp$ par rapport à F de dim $n-2$

- Il existe une unique réflexion échangeant a et b non nuls tq $\|a\| = \|b\|$
- Tout automorphisme $\perp$ est composé d'au plus n réflexions

Isométrie application de E dans E conservant les distances

- Les isométries de E euclidien sont les composées de translation et auto $\perp$.

Orientation de E choix d'une BON b_0. [b BON directe] $\Leftrightarrow$ [$|P_{b_0}^{b}| = 1$]

▶ Orientation d'un hyperplan H : choix de $n \in H^\perp$ unitaire (2 possibilités) puis [e BON directe de H] $\Longleftrightarrow$ [$e \cup (b)$ BON directe de E]

Produit mixte $[x_1, \dots x_n] = \det_b(x_1, \dots x_n)$ où b BON directe qcq

Produit vectoriel $(n=3)$ $u \wedge v =$ (unique $a \in E$ tq $[u, v, \cdot] = a|\cdot$)

▶ On en déduit les propriétés usuelles du produit vectoriel

Endomorphismes autoadjoints / symétriques $\mathcal{S}(E)$

$\mathcal{S}(E) = \{ u \in \mathcal{L}(E),\ \forall (x,y) \in E^2,\ u(x)|y = x|u(y) \}$

- $[u$ autoadjoint $] \iff [A = \mathrm{Mat}(u, e$ BON$)$ symétrique $]$

↳ $\Rightarrow$ $\forall x, y$, $x|u(y) = X^T A Y = u(x)|y = X^T A^T Y$ i.e. $X^T (A - A^T) Y = 0$

Donc $\forall Y$, $(A - A^T) Y = 0$. Donc $A = A^T$.

$\Leftarrow$ $\forall x, y$, $x|u(y) = X^T A Y = X^T A^T Y = (AX)^T Y = u(x)|y$

- Les valeurs propres de u sont réelles

↳ Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$. Montrons $\overline{\lambda} = \lambda$. Soit $X \neq 0$ tq $AX = \lambda X$ (1).
$\overline{(1)}^T X$ puis conclusion avec $A = A^T = \overline{A}$, $AX = \lambda X$, $\overline{X}^T X = \|X\|^2 \neq 0$.

- Les sous-espaces propres de u sont $\perp$ 2 à 2
- u diagonalisable dans une BON

↳ Récurrence sur la dimension, stabilité de $F^\perp$ si stabilité de F par

Théorème spectral

$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\exists D$ diagonale, P ortho, $A = PDP^T$

↳ Dans ($E = \mathbb{R}^n$, ps usuel), u canoniquement associé à A est autoadjoint.

▶ "Une matrice réelle, symétrique est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale"

Matrice / endo. symétrique définie positive

$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x|u(y)$ symétrique, bilinéaire. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, où e BON.

$\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = X^T A X$ où $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T$.

$[A$ symétrique définie positive $]$
$\iff [Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*]$
$\iff [\forall X,\ X^T A X \geq 0$, égalité $\iff X = 0]$
$\iff [\varphi$ produit scalaire $]$

▶ $[A$ symétrique positive $]$
$\iff [Sp(A) \subset \mathbb{R}_+]$
$\iff [\forall X,\ X^T A X \geq 0]$

▶ Permet de fabriquer des produits scalaires.