Traitement du signal

A. Généralités

On étudie $e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)}_{c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}$ avec $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

▶ Théorie de Fourier : tout signal est somme de composantes sinusoïdales harmoniques.

Théorème de Parseval $\langle e^2 \rangle = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2}$, $e_{eff} = \sqrt{\langle e^2 \rangle}$

Signal créneau

Signal triangle

▶ Signal créneau (resp. triangle) bien décrit par 50 (resp. 3) harmoniques

▶ Un circuit non linéaire génère des harmoniques supplémentaires (linéarisation toujours possible).

Modulation en amplitude (AM) / en fréquence (FM)

▶ FM à préférer : détérioration rapide de l'amplitude

Dualité temps-fréquence $\tau \, \Delta\omega = cste$

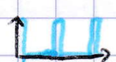
▶ La constante importe peu : prendre 1.

B. Traitement numérique

Convertisseur Analogique-Numérique (CAN) $\xrightarrow{e}$ échantilloneur $\xrightarrow{e_{ch}}$ encodeur $\xrightarrow{s}$

Convertisseur Numérique-Analogique (CNA) $\xrightarrow{s}$ décodeur $\xrightarrow{e_{ch}}$ filtre $\xrightarrow{e}$

Echantillonage $e_{ch}(t) = e(t = nT_e)$ pour $n \in \mathbb{N}$

▶ S'obtient par multiplication par un créneau  (rapport cyclique faible)

Critère de Shannon $f_e = \frac{1}{T_e} \geqslant 2 f_{max}$

C. Filtrage

Fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$

▶ $\underline{H}$ produit de $\underline{H_i}$ d'ordre I ou II : étude des filtres associés.

▶ Utiliser $\underline{H}$ pour obtenir une EDL : RSF ⇝ $\mathbb{C}$ ⇝ $\underline{H}$ ⇝ EDL

Pulsations :
- propre du filtre ω_0
- d'excitation ω
- d'excitation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$
- de coupure ω_{c_i}

Gain en décibel $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| = \sum_i G_{dB_i}$

Déphasage $\varphi = \arg \underline{H} = \sum_i \varphi_i$

Diagrammes de Bode :
- en amplitude G_{dB} f° de $\log x$
- en phase φ f° de $\log x$

▶ $\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im} \underline{H}}{\operatorname{Re} \underline{H}}$ détermine φ à π près : utiliser les équivalents HF/BF pour lever l'indétermination.

Bande passante à 3 dB $[\omega_{c_1} ; \omega_{c_2}] = \{\omega,\ G_{dB}(\omega) \geqslant G_{dB_{max}} - 3\}$
$= \{\omega,\ |\underline{H}|(\omega) \geqslant \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}}\}$

Facteur de qualité Q

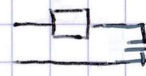
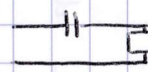
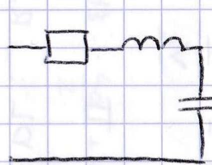
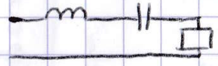
▶ 1. Tracer le circuit, définir les notations
2. Établir les équivalents HF/BF, en déduire la nature du filtre
3. Justifier le passage à la notation complexe :
   circuit linéaire ⇝ régime sinusoïdal forcé ⇝ notation complexe
4. Établir la fonction de transfert normalisé réduite
5. Étudier les comportements asymptotiques
6. Étudier :
   - $x = 1$, intersection d'asymptotes
   - résonnance si besoin
   - bande passante
7. Tracer les diagrammes de Bode

Passe haut/bas d'ordre II

- $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\varnothing$ résonnance, $[\omega_c \to \omega_0] \iff [Q \to \frac{1}{\sqrt{2}}]$
- **Filtre de Butterworth** $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_c = \omega_0$, bande la ⊕ large sans résonnance
- $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: résonnance en ω_m, $[\omega_m \to \omega_0] \iff [Q \to +\infty]$

Passe/coupe bande $\omega_{c_1} \omega_{c_2} = \omega_0^2$, $\omega_{c_2} - \omega_{c_1} = \frac{\omega_0}{Q}$

Filtres d'ordre I et II

Ordre	Nature		$\underline{H} / H_0$	Bande passante	$\lvert\underline{H}\rvert_{max} / \lvert H_0 \rvert$	Circuit
I	passe-bas		$\dfrac{1}{1 + jx}$	$[0; \omega_0]$	$1 \quad (\omega \to 0)$	
I	passe-haut		$\dfrac{jx}{1 + jx}$	$[\omega_0; +\infty[$	$1 \quad (\omega \to +\infty)$	
II	passe-bas	$Q \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{1 + j\dfrac{x}{Q} + (jx)^2}$	$[0; \omega_c]$, $\omega_c \leqslant \omega_0$	$1 \quad (\omega \to 0)$	
		$Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$			$\dfrac{Q}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}} \quad (\omega = \omega_m \leqslant \omega_0)$	
II	passe-haut	$Q \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{(jx)^2}{1 + j\dfrac{x}{Q} + (jx)^2}$	$[\omega_c; +\infty[$, $\omega_c \geqslant \omega_0$	$1 \quad (\omega \to \infty)$	
		$Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$			$\dfrac{Q}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}} \quad (\omega = \omega_m \geqslant \omega_0)$	
II	passe-bande		$\dfrac{j\dfrac{x}{Q}}{1 + j\dfrac{x}{Q} + (jx)^2}$	$[\omega_{c_1}; \omega_{c_2}]$	$1 \quad (\omega = \omega_0)$	
II	coupe-bande		$\dfrac{1 + (jx)^2}{1 + j\dfrac{x}{Q} + (jx)^2}$	$\mathbb{R} \setminus [\omega_{c_1}; \omega_{c_2}]$	$1 \quad (\omega \to 0, +\infty)$