Formulaire

Circulation de $\vec{A}$ sur le contour $\mathcal{C}$ $\qquad \mathcal{C}(\vec{A}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$

Flux de $\vec{A}$ à travers S $\qquad \phi(\vec{A}) = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$

▶ $\mathcal{C}$ et S doivent être orientés

Produit scalaire $\qquad \vec{A} \cdot \vec{B} \underset{\text{cart.}}{=} A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

▶ $[\vec{A} \cdot \vec{B} = 0] \Leftrightarrow [\vec{A}$ ou $\vec{B}$ nul ou $\vec{A} \perp \vec{B}]$, $\quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

Produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \underset{\text{cart.}}{=} \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

▶ $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \perp \vec{A}, \vec{B}$, $\quad \vec{A} \wedge \vec{B} = - \vec{B} \wedge \vec{A}$

Opérateur Nabla $\qquad \vec{\nabla} \underset{\text{cart.}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Gradient $\qquad \vec{\text{grad}}\, X = \vec{\nabla} X \underset{\text{cart.}}{=} \left(\frac{\partial X}{\partial x} ; \frac{\partial X}{\partial y} ; \frac{\partial X}{\partial z} \right)$

▶ $\perp$ aux équipotentielles, dans le sens des potentiels croissants

Divergence $\qquad \text{div}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \underset{\text{cart.}}{=} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotationnel

$$\vec{\text{rot}}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \underset{\text{cart.}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \\ \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \end{pmatrix}$$

Laplacien scalaire

$$\Delta X = \text{div}(\vec{\text{grad}}\, X) = \vec{\nabla}^2 X$$

$$\underset{\text{cart.}}{=} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}$$

Laplacien vectoriel

$$\Delta \vec{A} \underset{\text{cart.}}{=} \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

Relations entre opérateurs

- $\mathrm{div}(X\vec{A}) = X\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,X \cdot \vec{A}$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(X\vec{A}) = X\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,X \wedge \vec{A}$

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,X) = \vec{0}$

  $\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{0}\right] \Rightarrow \left[\exists X,\ \vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,X\right]$, X déf. à une cste près
- $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \vec{0}$

  $\left[\mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{0}\right] \Rightarrow \left[\exists \vec{B},\ \vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right]$, $\vec{B}$ déf. à un grad près

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

- $\mathrm{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B} + \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A}$
- $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} + \vec{A}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$

Théorème de Stockes $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \cdot d\vec{S}$

Théorème de Green-Ostrogradsky $\displaystyle\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,d\tau$

Théorème de Kelvin $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} X\,d\vec{\ell} = -\iint_S \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,X \cdot d\vec{S}$

Formule du gradient $\displaystyle\oiint_S X\,d\vec{S} = \iiint_V \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,X\,d\tau$

Formule du rotationnel $\displaystyle\oiint_S \vec{A} \wedge d\vec{S} = -\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\,d\tau$

▶ Dans les théorèmes et formules précédents :
- $d\vec{S}$ est orienté à l'extérieur de V
- les orientations de $\mathcal{C}$ et S sont liées par la règle du tire-bouchon