Suites de fonctions

I intervalle non trivial, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$, $(f_n : I \to \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset I$

Convergence simple sur A (cvs) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[A]{S} f$

| $\forall x \in A$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $f(x)$ finie

▶ "$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers f (sa limite simple)"

Convergence uniforme sur A (cvu) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[A]{U} f$

| apcr n_0, $f_n - f$ bornée et $\|f_n - f\|_\infty^A \xrightarrow[n\to\infty]{n\geq n_0} 0$

▶ La convergence uniforme entraîne la convergence simple, vers la même limite

▶ 1. Calcul de la limite simple sur A
2. Calcul d'un éventuel n_0
3. Calcul du domaine A' de convergence uniforme
4. Si $A' \neq A$: étude de la cvu sur une famille de segments contenant tous les segments de A.

▶ Prouver la non cvu : exhiber $x \in I^{\mathbb{N}}$ tel que $|(f_n - f)(x_n)| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

▶ Extension aux evn de dim finie : étudier les applications composantes

Propriétés $(f_n : A \subset E \to F)_{n\in\mathbb{N}}$

Signe	• cvs • $f_n \geq 0$	$f \geq 0$	
Croissance	• $E = F = \mathbb{R}$ • cvs • $f_n \nearrow$	$f \nearrow$	
Limite	• $a \in \bar{A}$ • cvu sur $V(a)$ • $f_n \xrightarrow[a]{} L_n$	• $L_n \xrightarrow[+\infty]{} L$ • $f \xrightarrow[a]{} L$	Interversion limite-limite : $\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$
Continuité	• $a \in A$ • cvu sur $V(a)$ • f_n $\underline{c}$ en a	f $\underline{c}$ en a	
Intégrabilité	• $E = \mathbb{R}$, $A = [a,b]$ • cvu • f_n $\underline{c}$	• $\int_a^b f_n \xrightarrow[+\infty]{} L$ • $\int_a^b f = L$	Interversion intégrale-limite : $\int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

Primitive	• $E = \mathbb{R}$ • cvu sur tout $[\alpha;\beta]$ • $f_n \leq$	• $(F_n)_n \xrightarrow[A]{s} F$ • $(F_n)_n \xrightarrow[{[\alpha;\beta]}]{u} F$	
Dérivabilité	• $E = \mathbb{R}$ • cvs • f_n $\mathcal{C}^1$ • cvu de (f_n') sur $\forall [\alpha;\beta]$	• f $\mathcal{C}^1$ • $f' = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n')$ • cvu sur $\forall [\alpha;\beta]$	Interversion dérivé-limite: $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n')$
	• $E = \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ • $\forall i < p$, cvs de $f_n^{(i)}$ • f_n $\mathcal{C}^p$ • cvu de $(f_n^{(p)})$ sur $\forall [\alpha;\beta]$	• f $\mathcal{C}^p$ • $\forall i \leq p$, $f^{(i)} = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n^{(i)})$ • $\forall i < p$, cvu de $f_n^{(i)}$ sur $\forall [\alpha;\beta]$	

Fonction en escalier $f \in \mathcal{E}([a;b], F)$

| $\exists (\sigma_0, \dots \sigma_n)$ partage de $[a;b]$, $\forall i \in [\![0,n[\![$, $f_{|]\sigma_i;\sigma_{i+1}[}$ constante

Fonction affine par morceaux $f \in \mathcal{A}([a;b], F)$

| $\exists (\sigma_0, \dots \sigma_n)$ partage de $[a;b]$, $\forall i \in [\![0,n[\![$, $f_{|]\sigma_i;\sigma_{i+1}[}$ affine

Fonction continue par morceaux $f \in \mathcal{C}^0_m([a;b], F)$

| $\exists (\sigma_0, \dots \sigma_n)$ partage de $[a;b]$, $\forall i \in [\![0,n[\![$, $f_{|]\sigma_i;\sigma_{i+1}[}$ $\leq$, prolongeable.

Approximation uniforme de f par des elements de G

| $\iff \begin{bmatrix} \exists g \in G^{\mathbb{N}}, & g \xrightarrow[I]{u} f \\ \forall \varepsilon > 0, \exists g_\varepsilon \in G, & \|f - g_\varepsilon\|_\infty^I \leq \varepsilon \end{bmatrix}$

Approximations uniformes connues

- $f \in \mathcal{C}^0_m([a;b], \mathbb{R})$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon, h_\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\begin{cases} g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon \\ h_\varepsilon - g_\varepsilon \leq \varepsilon \end{cases}$
- $f \in \mathcal{C}^0_m([a;b], F)$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\|f - g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$
- $f \in \mathcal{C}^0([a;b], F)$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon \in \mathcal{A}$, $\begin{cases} g_\varepsilon \leq \\ \|f - g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon \end{cases}$

Théorèmes de Weierstrass :

- $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{C})$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon$ polynomiale, $\|f - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon$
- $f \in \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{C})$ périodique : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists g_\varepsilon$ polynome trigo, $\|f - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon$

▶ Utiliser l'uniforme continuité donnée par le théorème de Heine

▶ Polynôme trigo $\begin{cases} \text{de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{C} \\ \text{de période } T > 0 \end{cases}$, $x \longmapsto \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k e^{2i\pi \frac{x}{T} k}$

↳ famille presque nulle

Séries de fonctions

I intervalle non trivial, $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R};\mathbb{C}\}$; $(f_n : I\to\mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$, $n\in\mathbb{N}$, $F_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$

Convergence simple sur A (cvs) $\sum_{n\geq 0} f_n \xrightarrow[A]{s} F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

$[(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[A]{s} F]$

$\iff [\forall x\in A,\ \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge, vers $F(x)]$

▶ En cas de cvs, on définit le reste d'ordre n : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$

▶ $[\text{cvs}] \Rightarrow [(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[A]{s} \tilde{0}]$

Convergence uniforme sur A (cvu) $\sum_{n\geq 0} f_n \xrightarrow[A]{u} F$

$[(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[A]{u} F]$

$\iff$ [cvs ET R_n bornée apcr et $\|R_n\|_\infty^A \xrightarrow[\substack{n\geq n_0 \\ n\to+\infty}]{} 0$]

▶ Majoration de R_n par une primitive où t remplace n.

▶ Montrer la non cvu :
- $\exists x\in A^{\mathbb{N}}$, $\|R_n(x_n)\| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\xrightarrow[A]{u} \tilde{0}$

Convergence normale sur A (cvn) $\sum_{n\geq 0} f_n \xrightarrow[A]{n} F$

$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty^A$ convergente

▶ cvn $\Rightarrow$ cvu $\Rightarrow$ cvs

▶ cvn sur tout segment $\Rightarrow$ cvs sur A

▶ On étend aux evn avec la caractérisation par les applications composantes (en dimension finie)

▶ Soit $(u_n : I\to F)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[I]{s} f$. Alors $f = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(u_k - u_{k-1})}_{f_k} + \underbrace{u_0}_{f_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

On peut étudier f avec l'étude de $\sum_{n\geq 0} f_n$.

▶ On prouve les mêmes propriétés que sur les suites avec :
- Dans les hypothèses, celles de convergence se font sur $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Dans les conclusions, on remplace f par F, L_n par $\sum_{n=0}^{+\infty} L_n$, ...