Dérivation

Soit $f : I \to F$ où I intervalle de $\mathbb{R}$ et F espace vectoriel normé de dimension finie.

$[f \text{ d. en } a] \Leftrightarrow [\text{admet un } DL_1 \text{ en } a]$

Fonctions $\mathcal{C}^k$

$$[f, g \ \mathcal{C}^k] \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \lambda f + \mu g \ \mathcal{C}^k \\ \bullet\ fg \ \mathcal{C}^k \\ \bullet\ f \circ g \ \mathcal{C}^k \quad (\text{si } g : I \to \mathbb{R}) \\ \bullet\ \frac{1}{g} \ \mathcal{C}^k \quad (\text{si } g \text{ ne s'annule pas}) \\ \bullet\ f^{-1} \ \mathcal{C}^k \quad (\text{si } f : I \to \mathbb{R},\ f' \text{ ne s'annule pas}) \end{cases}$$

Condition suffisante de dérivabilité en a

$$\begin{cases} \bullet\ f \ \overset{c}{\mathcal{C}^k} \ \begin{matrix} \text{sur } I \\ \text{sur } I \setminus \{a\} \end{matrix} \\ \bullet\ \forall i \in [\![1, k]\!],\ \lim_a f^{(i)} \text{ existe} \end{cases} \Rightarrow [f \ \mathcal{C}^k \text{ sur } I]$$

Inégalité des accroissements finis (IAF)

$$[|f'| \leq k] \Rightarrow [\forall (a,b) \in I^2,\ |f(a) - f(b)| \leq k|a-b|]$$

Formules de Taylor

$f \ \mathcal{C}^n$, $(a,b) \in I^2$, $x \in I$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

- reste intégral : $f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$
- Lagrange : $[|f^{(n)}| \leq K] \Rightarrow \left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq K \frac{|b-a|^n}{n!}$
- Young : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$

▶ $[f \ \mathcal{C}^n] \Rightarrow [f \text{ admet un } DL_n]$ (Young)

▶ Intégration des DL possible : ne pas oublier $F(a)$

On suppose $F = \mathbb{R}$, $[a;b] \subset I$

Théorème de Rolle

$$\left\{\begin{array}{l} \cdot\ f \ \underset{}{c}\ [a;b] \\ \quad\ \underline{d}\ ]a;b[\\ \cdot\ f(a) = f(b) \end{array}\right. \Longrightarrow \exists c \in]a;b[,\ f'(c) = 0$$

↳ $m = \min\limits_{[a;b]} f$, $M = \max\limits_{[a;b]} f$ existent par théorème des bornes atteintes. Si $m = M$, f constante donc tout c convient. Sinon il existe α, β tq $m = f(\alpha)$, $M = f(\beta)$. Comme $m \neq M$ et $f(a) = f(b)$, α ou β est dans $]a;b[$, donc est un extremum local intérieur à $[a;b]$, donc la dérivée y est nulle.

Théorème des accroissements finis (TAF)

$$\left[f \ \underset{}{c}\ [a;b],\ \underline{d}\ ]a;b[\right] \Longrightarrow \left[\exists c \in]a;b[,\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right]$$

↳ Théorème de Rolle appliqué à $g : x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Lien monotonie - dérivation

f c I, $\underline{d}$ $\mathring{I}$:

- $[f \text{ cst}] \Longleftrightarrow [f' \text{ nulle sur } \mathring{I}]$
- $[f \nearrow] \Longleftrightarrow [f' \geq 0 \text{ sur } \mathring{I}]$
- $[f \nearrow\!\!\!\nearrow] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f' \geq 0 \text{ sur } \mathring{I} \\ \text{nb discret d'annulations} \end{array}\right]$

↳ Pas trop compliqué. À savoir faire