Mécanique

cf cahier magique

Nombre de pages :

Cinétique étude des mvts indpment des causes

Repère spatial R_{ep} lié à un solide de référence S

$R_{ep}(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

origine ; base orthonormée directe liée à S

Repère temporel Echelle de temps orientée avec une origine et une horloge.

Référentiel R Repère spatio-temporel lié à un solide de référence S.

Vecteur position $\vec{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$

▶ x, y, z sont les équations horaires du mvt

Trajectoire $\{M \mid \exists t,\ \vec{OM} = x(t)\vec{e_1} + y(t)\vec{e_2} + z(t)\vec{e_3}\}$

Vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

▶ mvt uniforme $\Leftrightarrow$ $\|\vec v\|$ constant
mvt rectiligne uniforme $\Leftrightarrow$ $\vec v$ constant

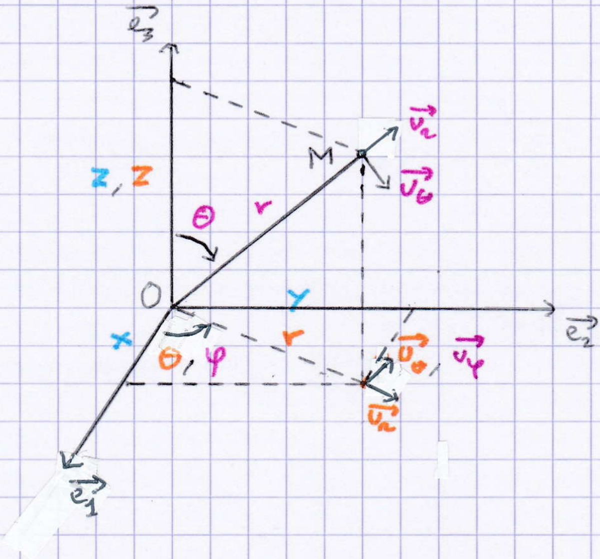
Vecteur accélération $\vec a = \frac{d\vec v}{dt}$

▶ $\vec a = \vec{a_T} + \vec{a_N}$ où :

- $\vec{a_T} = \vec a \cdot \frac{\vec v}{\|\vec v\|}$ composante tangentielle contrôlant $\|\vec v\|$
- $\vec{a_N} = \vec a - \vec{a_T} \perp \vec{a_T}$ composante normale contrôlant la directi

MÉCA

Systèmes de coordonnées



Coordonnées cartésiennes

$$\vec{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$$

▶ $\dfrac{d\vec{e_1}}{dt} = \vec{0}$ $\quad \dfrac{d\vec{e_2}}{dt} = \vec{0}$ $\quad \dfrac{d\vec{e_3}}{dt} = \vec{0}$

Coordonnées cylindriques

$$\vec{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{e_3}$$

▶ $\dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ $\quad \dfrac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u_r}$ $\quad \dfrac{d\vec{e_3}}{dt} = \vec{0}$

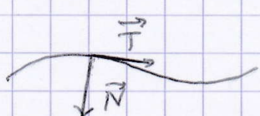
Coordonnées sphériques

$$\vec{OM} = r\vec{u_r}$$

▶ $\dfrac{d\vec{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \sin(\theta)\,\dot{\varphi}\,\vec{u_\varphi}$

Repère de Frenet $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$

tangent, normal, binormal



$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

Solide système matériel indéformable tel que ses points restent à distance constante les uns des autres

Translation Tous les points de S possèdent à un instant donné le même vecteur vitesse

Rotation autour d'un axe Δ fixe Tous les points de S ont un mvt circulaire autour de Δ

Vecteur vitesse $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_\Delta$ où ω vitesse angulaire

Mouvement quelconque

Tout mouvement peut être décomposé en :

- mouvement du barycentre G
- rotation autour d'un axe mobile passant par G

▶ Formule de Varignon : pour $M \in S$:

$$\vec{v}_{/R}(M) = \vec{v}_{/R}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$$

Référentiel barycentrique R^*

Référentiel lié à G et en translation par rapport à R.

Oscillations harmoniques oscillations sinusoïdales autour d'une position d'équilibre

Isochronisme indépendance entre période et amplitude

MÉCA Dynamique

Dynamique relie le mvt d'un point matériel à ses causes (forces)

Masse inertielle m_i : scalaire positif invariant par chgt de référentiel traduisant l'aptitude d'un corps à persister dans son état de mouvement

- Principe d'équivalence : $m_i = m_p =: m$

Barycentre G de $\{M_i$ de masse $m_i\}$ $m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$

Quantité de mouvement $\vec{p}$ $m\vec{v}_{/R}$

- $\overrightarrow{p_\Sigma} = \sum_i \overrightarrow{p_i} = \sum_i m_i \overrightarrow{v_{/R}} = m\overrightarrow{v_G}$

Les principes de Newton constituent les lois (postulées) fondamentales de la dynamique. Ce cadre n'est plus applicable à des tailles infinitésimales (mécanique quantique) ou des vitesses relativistes ($v \geq \frac{c}{10}$).

Principe d'inertie Il existe des référentiels dits galiléens dans lesquels tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme

- Référentiels héliocentriques, géocentrique, terrestre
- R en translation rectiligne uniforme / à $R_{galiléen}$ est galiléen
- Système isolé $\Leftrightarrow$ soumis à aucune force
  Système pseudo-isolé $\Leftrightarrow$ $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$.

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$

- 2nde loi de Newton
- Applicable à un point matériel M uniquement

Principe des actions réciproques $\vec{F}_{1\to 2} + \vec{F}_{2\to 1} = \vec{0}$

Théorème de la Quantité de Mouvement (TQM)

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

↳ $$\sum_{M_i \in S} \vec{F}_{\to M_i} = \sum_{M_i \in S} \vec{F}_{ext \to M_i} + \underbrace{\cancel{\sum_{M_i, M_j \in S} \vec{F}_{i \to j}}}_{\text{action réciproques}} = \sum_{M_i \in S} m_i \vec{a_i} = m\vec{a}$$

Invariance de la force

indépendance entre force et référentiel de considération.

MÉCA

TEC

Energie cinétique E_c $\frac{1}{2} m v^2$

Théorème de la Puissance Cinétique (TPC)

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F_{ext}}) = \sum \vec{F_{ext}} \cdot \vec{v}$$

- La puissance traduit la capacité d'une force pour modifier la norme de $\vec{v}$. La force est motrice si $P > 0$ et résistante sinon.

Travail d'une force $W(\vec{F})$ $= \int \delta W(\vec{F}) = \int \mathcal{P}(\vec{F})\, dt$

Force conservatrice force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi.

Energie potentielle E_p d'une force conservatrice

$$dE_p = -\delta W \quad , \quad \Delta E_p = -W_{A \to B} = E_p(A) - E_p(B)$$

Théorème de l'Energie Cinétique (TEC)

$$\Delta E_c = \sum_i W_{A \to B}(\vec{F_i})$$

$$dE_c = \sum_i \delta W(\vec{F_i}) = \sum_i \vec{F_i} \cdot \vec{dl}$$

- Si le système est déformable :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F_{ext}}) + \sum \mathcal{P}(\vec{F_{int}})$$

Énergie mécanique E_m $E_c + \sum E_p(\vec{F})$

Théorème de l'Énergie Mécanique (TEM)

$$\Delta E_m = \sum W_{A \to B}(\vec{F_{nc}})$$

Théorème de la Puissance Mécanique (TPM)

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F_{nc}})$$

Système conservatif $\delta W(\vec{F_{nc}}) = 0$

► E_m constante