Formulaire

0.1 Probabilités et combinatoire

Combinatoire.

- Nombre de listes à p éléments dans un ensemble à n éléments (tirage successif avec remise) : n^p ;
- Nombre d'arrangements à p éléments dans un ensemble à n éléments (tirage successif sans remise) : $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$;
- Nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments (tirage simultané) : $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Probabilités conditionnelles.

- Probabilité de A sachant B : $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$;
- Formule des probabilités totales : si $(B_i)_i$ est un système complet d'événements, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_i \mathbb{P}(A \mid B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$;

  En particulier : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{B}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$;
- Formule de Bayes : $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B \mid A)$.

0.2 Variables aléatoires discrètes

X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots$

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x)$;
- Espérance : $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k)$;
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \displaystyle\sum_k x_k^2\,\mathbb{P}(X = x_k) - \mathbb{E}[X]^2$;
- Fonction génératrice des moments : $G(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \displaystyle\sum_k e^{tx_k}\mathbb{P}(X = x_k)$;
- Fonction caractéristique : $\varphi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \displaystyle\sum_k e^{itx_k}\mathbb{P}(X = x_k)$.

Lois discrètes usuelles.

- Loi de Bernoulli $b(p)$: $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$, $\mathbb{P}(X=1) = p \Longrightarrow \mathbb{E}[X] = p$, $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$;
- Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: pour $0 \leq k \leq n$, $\mathbb{P}(X = k) = \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \Longrightarrow \mathbb{E}[X] = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$;
- Loi uniforme discrète : pour $1 \leq k \leq n$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$;
- Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \Longrightarrow \mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$;
- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \Longrightarrow \mathbb{E}[X] = \lambda = \mathrm{Var}(X)$;
- Loi hypergéométrique $\mathcal{HG}(N,n,p)$: pour $0 \leq k \leq n$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{pN}{k}\binom{(1-p)N}{n-k}}{\binom{N}{n}} \Longrightarrow \mathbb{E}[X] = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$.

0.3 Variables aléatoires à densité

— Densité : fonction f telle que $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$ pour tous $a < b$;

— Fonction de répartition : $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$ et donc $f = F'$;

— Espérance : $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$;

— Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt - \mathbb{E}[X]^2$;

— Fonction caractéristique : $\varphi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$.

Lois à densité usuelles.

— Loi uniforme sur $[a, b]$: $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x \geq b. \end{cases}$;

— Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$: $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$;

— Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Longrightarrow \mathbb{E}[X] = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

0.4 Vecteurs aléatoires

Couple de variables aléatoires.

— Fonction de répartition conjointe : $F_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$;

— Densité dans le cas continu : fonction $f_{(X,Y)}$ telle que $\mathbb{P}(a \leq X \leq b,\, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{(X,Y)}(t, s)\,ds\,dt$;

— Fonction de répartition dans le cas continu :

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(t, s)\,ds\,dt;$$

— Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x)\,F_Y(y)$;

— Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$;

— Lois marginales dans le cas discret :

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_l \mathbb{P}(X = x_k,\, Y = y_l),$$
$$\mathbb{P}(Y = y_l) = \sum_k \mathbb{P}(X = x_k,\, Y = y_l);$$

— Lois marginales dans le cas continu :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\,dy,$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\,dx.$$

Somme de variables aléatoires.

— $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$;

— Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$;

— Covariance : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$;

— Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, Réciproque FAUSSE en général ;

— $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$;

— Coefficient de corrélation linéaire : $\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$.

Vecteurs gaussiens.

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien : $X \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X],\, \Sigma_X\right)$.

— Espérance : $\mathbb{E}[X] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_d] \end{pmatrix}$;

— Matrice de covariance : $\Sigma_X = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{Cov}(X_1, X_d) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_d, X_1) & \dots & \dots & \mathrm{Var}(X_d) \end{pmatrix}$;

— Si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$ alors

$$AX + b \sim \mathcal{N}\left(A\mathbb{E}[X] + b,\ A\,\Sigma_X\,{}^tA\right);$$

— $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \iff \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

0.5 Estimation et intervalles de confiance

Notations utilisées ici.

— $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est toujours le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Sur `R` : `qnorm(1-alpha/2)`.

— $t_{1-\frac{\alpha}{2},n}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à n degrés de liberté. Sur `R` : `qt(1-alpha/2, n)` ;

— $z_{\alpha,n}$ est le quantile d'ordre α de la loi du χ^2 à n degrés de liberté. Sur `R` : `qchisq(alpha,n)`.

Estimateurs usuels.

— Espérance μ : $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et donc $\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$;

— Variance σ^2 :

— si μ est connue $\to V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2$ et donc $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2$;

— si μ est inconnue $\to \left\{\begin{array}{c} S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2 \quad \text{et donc } \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{\mu})^2 \\ \text{ou} \\ \widetilde{S_n}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X_n})^2 \quad \text{et donc } \widehat{\sigma}_c^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \widehat{\mu})^2 \end{array}\right.$;

— Proportion p : fréquence empirique F_n.

Intervalles de confiance.

— Pour une espérance μ : on suppose que la loi de X est normale <u>ou</u> que $n \geq 30$.

1. Si σ est connue,

$$\left[\widehat{\mu} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, \widehat{\mu} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

2. Si σ est inconnue,

$$\left[\widehat{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\,;\, \widehat{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right] = \left[\widehat{\mu} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\widehat{\sigma}_c}{\sqrt{n-1}}\,;\, \widehat{\mu} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\widehat{\sigma}_c}{\sqrt{n-1}}\right].$$

— Pour une variance σ^2 : on suppose que la loi de X est normale.

1. Si μ est connue :

$$\left[\frac{nv_n}{z_{1-\frac{\alpha}{2},n}}\,;\, \frac{nv_n}{z_{\frac{\alpha}{2},n}}\right].$$

2. Si μ est inconnue :

$$\left[\frac{n\widehat{\sigma}^2}{z_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\,;\,\frac{n\widehat{\sigma}^2}{z_{\frac{\alpha}{2},n-1}}\right] = \left[\frac{(n-1)\widehat{\sigma}_c^2}{z_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\,;\,\frac{(n-1)\widehat{\sigma}_c^2}{z_{\frac{\alpha}{2},n-1}}\right].$$

— Pour une proportion p :
 — Agresti-Coull (score de Wilson) :

$$\left[\frac{\widehat{p}+\frac{q^2}{2n}-q\sqrt{\frac{q^2}{4n^2}+\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}}{1+\frac{q^2}{n}}\,;\,\frac{\widehat{p}+\frac{q^2}{2n}+q\sqrt{\frac{q^2}{4n^2}+\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}}{1+\frac{q^2}{n}}\right], \quad \text{avec } q = q_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

 — Wald :

$$\left[\widehat{p}-q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\,;\,\widehat{p}+q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right].$$

0.6 Tests d'hypothèse

Notations utilisées ici.

— $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est toujours le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Sur `R` : `qnorm(1-alpha/2)`.
— $t_{1-\frac{\alpha}{2},n}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à n degrés de liberté. Sur `R` : `qt(1-alpha/2, n)` ;
— $z_{\alpha,n}$ est le quantile d'ordre α de la loi du χ^2 à n degrés de liberté. Sur `R` : `qchisq(alpha,n)` ;
— $\varphi_{\alpha,n,m}$ est le quantile d'ordre α de la loi de Fisher-Snedecor à n et m degrés de liberté. Sur `R` : `qf(alpha, n, m)`.

Comparaison à une valeur théorique

— Espérance μ : on suppose que la variable suit une loi normale ou que $n \geq 30$.
$H_0 : \mu = \mu_0$.

1. Si σ est connue,

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \longrightarrow \text{ si } \sqrt{n}\frac{\widehat{\mu}-\mu_0}{\sigma} \notin \left[-q_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 : \mu < \mu_0 \longrightarrow \text{ si } \sqrt{n}\frac{\widehat{\mu}-\mu_0}{\sigma} < -q_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 : \mu > \mu_0 \longrightarrow \text{ si } \sqrt{n}\frac{\widehat{\mu}-\mu_0}{\sigma} > q_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0.$$

2. Si σ est inconnue,

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \longrightarrow \text{ si } \sqrt{n}\frac{\widehat{\mu}-\mu_0}{\widehat{\sigma}} \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\,t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 : \mu < \mu_0 \longrightarrow \text{ si } \sqrt{n}\frac{\widehat{\mu}-\mu_0}{\widehat{\sigma}} < -t_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 : \mu > \mu_0 \longrightarrow \text{ si } \sqrt{n}\frac{\widehat{\mu}-\mu_0}{\widehat{\sigma}} > t_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0.$$

— Variance σ^2 : on suppose que la variable suit une loi normale.
$H_0 : \sigma = \sigma_0$.

1. Si μ est connue,

$$H_1 : \sigma \neq \sigma_0 \longrightarrow \text{ si } \frac{nv_n}{\sigma_0^2} \notin \left[z_{\frac{\alpha}{2},n}\,;\,z_{1-\frac{\alpha}{2},n}\right] \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 : \sigma < \sigma_0 \longrightarrow \text{ si } \frac{nv_n}{\sigma_0^2} < z_{\alpha,n} \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 : \sigma > \sigma_0 \longrightarrow \text{ si } \frac{nv_n}{\sigma_0^2} > z_{1-\alpha,n} \text{ on rejette } H_0.$$

2. Si μ est inconnue,

$$H_1 \,:\, \sigma \neq \sigma_0 \longrightarrow \text{ si } \frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)\widehat{\sigma}_c^2}{\sigma_0^2} \notin \left[z_{\frac{\alpha}{2},n-1}\,;\, z_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, \sigma < \sigma_0 \longrightarrow \text{ si } \frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)\widehat{\sigma}_c^2}{\sigma_0^2} < z_{\alpha,n-1} \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, \sigma > \sigma_0 \longrightarrow \text{ si } \frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)\widehat{\sigma}_c^2}{\sigma_0^2} > z_{1-\alpha,n-1} \text{ on rejette } H_0.$$

— Proportion p : on suppose que $n \geq 30$.
  $H_0 : p = p_0$.

$$H_1 \,:\, p \neq p_0 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \notin \left[-q_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, p < p_0 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < -q_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, p > p_0 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > q_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0.$$

Comparaison d'échantillons.

— Comparaison de variances : on suppose que la variables suit une loi normale dans les deux populations.
  $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$.

$$H_1 \,:\, \sigma_1 \neq \sigma_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{\sigma}_{1,c}^2}{\widehat{\sigma}_{1,c}^2} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}\widehat{\sigma}_1^2}{\frac{n_2}{n_2-1}\widehat{\sigma}_2^2} \notin \left[\varphi_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}\,;\, \varphi_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}\right] \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, \sigma_1 < \sigma_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{\sigma}_{1,c}^2}{\widehat{\sigma}_{1,c}^2} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}\widehat{\sigma}_1^2}{\frac{n_2}{n_2-1}\widehat{\sigma}_2^2} < \varphi_{\alpha,n_1-1,n_2-1} \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, \sigma_1 > \sigma_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{\sigma}_{1,c}^2}{\widehat{\sigma}_{1,c}^2} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}\widehat{\sigma}_1^2}{\frac{n_2}{n_2-1}\widehat{\sigma}_2^2} > \varphi_{1-\alpha,n_1-1,n_2-1} \text{ on rejette } H_0.$$

— Comparaison de moyennes : on suppose que la loi est normale <u>ou</u> que $n_1 \geq 30$ et $n_2 \geq 30$.
  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$;

1. Si σ_1 et σ_2 sont connues,

$$H_1 \,:\, \mu_1 \neq \mu_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{\mu}_1-\widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \notin \left[-q_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, \mu_1 < \mu_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{\mu}_1-\widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < -q_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, \mu_1 > \mu_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{\mu}_1-\widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > q_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0.$$

2. Si σ_1 et σ_2 sont inconnues,
   — si $\widehat{\sigma}_1 \simeq \widehat{\sigma}_2$,

$$H_1 \,:\, \mu_1 \neq \mu_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{(\widehat{\mu}_1-\widehat{\mu}_2)\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{(n_1\widehat{\sigma}_1^2+n_2\widehat{\sigma}_2^2)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}\,;\, t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2}\right] \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, \mu_1 < \mu_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{(\widehat{\mu}_1-\widehat{\mu}_2)\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{(n_1\widehat{\sigma}_1^2+n_2\widehat{\sigma}_2^2)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} < -t_{1-\alpha,n_1+n_2-2} \text{ on rejette } H_0;$$
$$H_1 \,:\, \mu_1 > \mu_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{(\widehat{\mu}_1-\widehat{\mu}_2)\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{(n_1\widehat{\sigma}_1^2+n_2\widehat{\sigma}_2^2)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} > t_{1-\alpha,n_1+n_2-2} \text{ on rejette } H_0.$$

— sinon, soit $\nu = \dfrac{\left(\dfrac{\widehat{\sigma}_1^2}{n_1} + \dfrac{\widehat{\sigma}_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{\widehat{\sigma}_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{\widehat{\sigma}_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$,

$$H_1 \,:\, \mu_1 \neq \mu_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{n_2}}} \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}\,;\, t_{1-\frac{\alpha}{2},\nu}\right] \text{ on rejette } H_0;$$

$$H_1 \,:\, \mu_1 < \mu_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{n_2}}} < -t_{1-\alpha,\nu} \text{ on rejette } H_0;$$

$$H_1 \,:\, \mu_1 > \mu_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\widehat{\sigma}_2^2}{n_2}}} > t_{1-\alpha,\nu} \text{ on rejette } H_0.$$

— Comparaison de proportions : on suppose $n_1 \geq 30$ et $n_2 \geq 30$.
$H_0 : p_1 = p_2$.

$$H_1 \,:\, p_1 \neq p_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1} + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}}} \notin \left[-q_{1-\frac{\alpha}{2}}\,;\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \text{ on rejette } H_0;$$

$$H_1 \,:\, p_1 < p_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1} + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}}} < -q_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0;$$

$$H_1 \,:\, p_1 > p_2 \longrightarrow \text{ si } \frac{\widehat{p_1} - \widehat{p_2}}{\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{n_1} + \frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n_2}}} > q_{1-\alpha} \text{ on rejette } H_0.$$