

1 Intervalle de confiance sur des données résumées

Pour étudier le degré de pollution d'une rivière, on mesure la teneur en milligrammes d'un certain polluant par litre d'eau. On effectue 39 mesures pour lesquelles les valeurs observées de polluant ont une moyenne de 6.2 mg/l et un écart-type corrigé de 1.2 mg/l.

1. Donner un intervalle de confiance au seuil de 5% pour la teneur moyenne en polluant de la rivière.
2. A partir de ces résultats, peut-on considérer que la rivière respecte la législation en vigueur qui fixe un seuil maximal de polluant égal à 6 mg/l ?

2 Intervalle de confiance sur des données brutes

On cherche à évaluer la taille moyenne d'une bactérie. Pour cela, on analyse au microscope un échantillon de 33 bactéries et on mesure les tailles suivantes :

| | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|
| 10 | 11.5 | 12 | 8 | 8.4 | 9.2 | 7.8 | 8.2 | 9.1 | 9.5 | 10 |
| 11.2 | 10.5 | 10.6 | 10.9 | 8.9 | 9.6 | 9.6 | 8.9 | 9.8 | 9.7 | 10.3 |
| 11.2 | 10.2 | 10.3 | 10.4 | 10.4 | 10.2 | 10.1 | 9.9 | 10.8 | 10.6 | 10.6 |

Donner un intervalle de confiance au risque $\alpha = 5\%$ de la taille des bactéries. Cet intervalle est-il exact ?

3 Intervalle de confiance sur une grandeur moyenne

Un fabricant de piles électriques affirme que la durée de vie moyenne du matériel qu'il produit est de 170 h. Un organisme de défense de consommateurs prélève au hasard un échantillon de 101 piles et observe une durée de vie moyenne de 158 h avec un écart-type corrigé de 30 h.

1. Déterminer un intervalle de confiance de niveau 99% pour la durée de vie moyenne des piles.
2. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

4 Estimateurs sans biais

Lors des rencontres de la dernière coupe du monde de football, on a mesuré X le nombre (en millier) de SMS reçus chaque jour lors du jeu organisé par le chaîne télévisée retransmettant le match. Pendant les 10 premiers jours de compétition on a obtenu :

| | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------|
| $x_1 = 200$ | $x_2 = 240$ | $x_3 = 190$ | $x_4 = 150$ | $x_5 = 220$ |
| $x_6 = 180$ | $x_7 = 170$ | $x_8 = 230$ | $x_9 = 210$ | $x_{10} = 210$ |

Donner une estimation sans biais de la moyenne μ et de l'écart-type σ du nombre de personnes jouant chaque jour ainsi que des intervalles de confiance au risque de 5%. On donne $k_{2.5\%}^{(9)} = 2.7$.

5 Intervalle de confiance asymptotique

On a mesuré le poids de raisin produit par pied sur 10 pieds pris au hasard dans une vigne. On a obtenu les résultats suivants exprimés en kilogrammes :

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2.4 | 3.4 | 3.6 | 4.1 | 4.3 | 4.7 | 5.4 | 5.9 | 6.5 | 6.9 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

On considère que le poids de raisin produit par chaque pied suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 .

1. Calculer une estimation sans biais pour la moyenne μ et fournir un intervalle de confiance au seuil de 5% pour μ .
2. Calculer une estimation sans biais pour la variance σ^2 et fournir un intervalle de confiance au seuil de 5% pour σ^2 . On donne $k_{2.5\%}^{(9)} = 2.7$.
3. On suppose désormais que l'écart-type par pied est connu et vaut 1.4. Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour μ .
4. En supposant toujours que l'écart-type est connu et fixé à 1.4, quel nombre minimal de pieds devrait-on observer pour estimer μ au niveau de confiance 99% avec une précision de plus ou moins 500 g ?

6 Proportion de gauchers

En France, la proportion de gauchers s'élève à 13% dans la population (données obtenues lors du dernier recensement). On considère F la variable aléatoire : "fréquence empirique de gauchers dans une classe de 50 élèves". On observe dans l'échantillon une proportion de gauchers de 16%

1. Quelle est la loi de F ? Montrer qu'elle peut être approchée par une loi normale dont on donnera les paramètres.
2. Donner les intervalles de confiance sur la proportion de gauchers au seuil de 5% à l'aide de l'échantillon en utilisant la méthode de Wald avec et sans correction de continuité puis avec la méthode du score de Wilson avec et sans correction de continuité.
3. Est-ce que l'échantillon est compatible avec la valeur de 13%?

7 Plan d'expérience

La cote de popularité du chef de l'état est mesuré à partir de sondages réalisés sur des échantillons représentatifs de la population. La cote est ainsi définie par la proportion d'opinions favorables dans la population ou dans l'échantillon. Dans cet exercice, on utilisera exclusivement la méthode de Wald sans correction de continuité pour le calcul des intervalles de confiance sur les proportions.

1. Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour que la marge d'erreur soit limitée à 2% au risque de 5%?
2. Quelle sera la marge d'erreur maximale au niveau de confiance de 95% si l'échantillon est de taille 1500?
3. La taille de l'échantillon est de 1000 personnes. Au mois de janvier la cote mesurée était de 38% et en février elle est mesurée à 36%. Le journaliste commente alors : "Le chef de l'état a perdu 2 points de popularité". Etablir les intervalles de confiance sur ces deux intervalles et commenter la remarque du journaliste.