Feuille de TD

2023–2024

Combinatoire, Probas conditionnelles, Indépendance d'événements

Exercice 1. On lance deux dés à 6 faces.
• Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Donner son cardinal.
On suppose que les dés sont équilibrés et lancés sans aucun biais.
• Quelle est la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui correspond à ce lancer ?
• Quelle est la probabilité que :

1. « au moins un des dés marque 6 » ?
2. « au moins un des dés donne un résultat pair » ?
3. « la somme des résultats des deux dés soit paire » ?

Exercice 2. Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire au hasard 3 boules successivement et sans remise.

Soient A l'événement "le tirage contient 3 boules blanches", B l'événement "le tirage contient au moins une boule noire" et C l'événement "la première boule tirée est noire".

1. Quel est l'univers Ω ? Combien y a-t-il de tirages possibles ? Quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ choisit-on sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?
   Indication : le plus simple est de numéroter les boules et de considérer que les boules 1 *à* 8 *sont blanches et les boules* 9 *et* 10 *sont noires.*
2. Calculer $\mathbb{P}(A)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(B)$.
4. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire sachant que le tirage complet contient au moins une boule noire ?

Exercice 3. Vous avez devant vous N coffres, avec $N \geq 2$. Il y a une probabilité $p \in]0;1[$ pour qu'un trésor soit dans un de ces coffres.

— Donner un espace de probabilité $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$ qui modélise cette expérience.
— On numérote les coffres de 1 à N et on suppose que vous avez ouvert les $N-1$ premiers coffres sans y trouver de trésor. Quelle est la probabilité qu'il y ait un trésor dans le coffre N ?

Exercice 4. Au poker, une main est constituée de 5 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Ce jeu comporte 4 couleurs (Coeur, Carreau, Pique, Trèfle) et 13 hauteurs (2,3,4,5,6,7,8,9,10,V,D,R,A).

— Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
— Combien y a-t-il de quintes flush ? (une quinte flush est une main constituée de 5 cartes consécutives de la même couleur, l'As peut être dans 2 quintes flush différentes : A-2-3-4-5 et 10-V-D-R-A)
— Combien y a-t-il de carrés ? (un carré est constitué de 4 cartes de même hauteur)
— Combien y a-t-il de fulls ? (un full est un brelan et une paire, une paire étant deux cartes de même hauteur et un brelan 3 cartes de même hauteur)
— Combien y a-t-il de doubles paires qui ne sont ni des carrés ni des fulls ?

Exercice 5. On considère trois cartes : une est noire des deux côtés, une est rouge des deux côtés et une est noire d'un côté et rouge de l'autre.

Vous tirez une carte au hasard et vous la posez sur la table sans regarder la face cachée. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que l'autre face soit rouge ?

On pourra exprimer la proba recherchée sous forme d'une proba conditionnelle faisant intervenir les événements

$$A = \{ \text{ la carte tirée est celle bicolore } \} \quad \text{et}$$
$$B = \{ \text{ la face visible de la carte tirée est noire } \}.$$

Exercice 6. Pendant un examen sous forme de QCM, des étudiants répondent à une question comportant m réponses possibles. On note p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Si l'étudiant connaît la bonne réponse, il répond correctement. Si l'étudiant ne connaît pas la bonne réponse, il choisit au hasard uniforme une réponse parmi les m.

Sachant qu'un étudiant a donné la bonne réponse à cette question, quelle est la probabilité qu'il connaissait la bonne réponse ?

On exprimera d'abord la probabilité que l'étudiant choisisse la bonne réponse en utilisant la formule des probabilités totales.

Exercice 7. Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4. Il est relu par une suite de relecteurs pour correction. À chaque relecture, la probabilité de correction de chaque erreur est $1/3$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante et les relectures sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur 1 ne soit pas corrigée au bout de n relectures ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé au bout de n relectures ?
3. Combien faut-il de relectures pour que la probabilité que le livre soit entièrement corrigé soit supérieur à 95% ?

Exercice 8.

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard. On note les événements

$$A : \text{"le numéro est pair"},$$
$$B : \text{"le numéro est un multiple de 3"}.$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Reprendre la question avec 13 boules.

Exercice 9 ("Paradoxe" des anniversaires)**.**
Soit $N \geq 2$, on considère une pièce où se trouvent N personnes. On s'intéresse aux dates d'anniversaire de ces N personnes (au sens Jour-Mois), en supposant que personne n'est né un 29 février.

1. Soit Ω l'univers de l'expérience, que vaut $\text{card}(\Omega)$?
2. On suppose que ces personnes ont été choisies sans aucun biais pouvant influer sur les dates d'anniversaire. On suppose également que les dates d'anniversaire dans la population sont équiprobables. À quelle mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ces hypothèses correspondent-elles ?
3. Soit A l'événement "au moins deux personnes parmi les N ont la même date d'anniversaire". À quoi correspond l'événement $\overline{A}$?
4. Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$.
5. En déduire $\mathbb{P}(A)$.
6. À partir de combien de personnes dans une pièce la probabilité qu'au moins deux personnes soient nées le même jour est-elle supérieure à $\dfrac{1}{2}$?

Exercice 10. On dispose de 100 dés, dont 25 sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir un 6 en lançant un de ces dés pipés est de $\dfrac{1}{2}$. Les dés pipés sont indiscernables des autres.

1. On choisit un dé au hasard parmi les 100 et on le lance. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit un dé au hasard parmi les 100 et on le lance n fois de suite. On obtient à chaque fois 6. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit pipé ?

Exercice 11. On dispose de 3 urnes : l'urne 1 contient une boule noire, deux boules rouges et trois boules vertes, l'urne 2 contient deux boules noires, deux boules rouges et deux boules vertes, l'urne 3 contient quatre boules rouges et deux boules vertes.
On choisit au hasard uniforme une des trois urnes et on y tire une boule au hasard uniforme. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

Exercice 12. Une information est transmise entre membres d'une population. Pour simplifier, cette info est soit 0, soit 1. Avec une proba p, l'information reçue par une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une proba $1 - p$, cette personne transmet le contraire de ce qu'elle a reçu.
On note p_n la probabilité que l'information soit correcte après n transmissions.

1. Trouver une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et n.
3. Que vaut $\lim_{n\to\infty} p_n$? Interpréter.

Variables aléatoires discrètes

Exercice 13. On considère un dé équilibré. On le lance n fois, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus pendant ces n lancers.

1. Donner la loi suivie par X.
2. Est-ce avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un 6 en 4 lancers ?

On considère maintenant deux dés équilibrés. On les lance simultanément n fois, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de doubles 6 obtenus pendant ces n doubles lancers.

1. Donner la loi suivie par Y.

2. Est-ce avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un double 6 en 24 lancers de deux dés ?

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$ avec $\mathbb{E}[X] = 6$. Que vaut n ?

Exercice 15. On considère un dé à six faces truqué tel que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro sur cette face (les faces sont numérotées de 1 à 6). X donne le numéro de la face obtenue.

1. Donner la loi de X.
2. Soit $Y = \dfrac{1}{X}$. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 16. L'oral d'un examen comporte 20 sujets possibles. Le candidat tire trois sujets au hasard et parmi ces trois sujets, il choisit celui qu'il traite. Ce candidat a révisé seulement 12 sujets. On considère X la variable aléatoire donnant le nombre de sujets révisés parmi les trois sujets tirés.

1. Donner la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que le candidat tire au moins un sujet révisé ?

Exercice 17. Un joueur tire sur une cible de 10 cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1, 2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint la cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la couronne atteinte.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 18. Un avion peut emporter 60 passagers. La compagnie remarque que 10% des réservations ne se présentent pas à l'embarquement. Elle décide donc de proposer 62 réservations pour ce vol.
Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de passagers se présentant effectivement à l'embarquement parmi les 60 réservations.

1. Donner la loi de X.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait trop de passagers pour le vol ?

Exercice 19. Si dans une population, une personne sur cent est centenaire, quelle est la probabilité de trouver un centenaire parmi cent personnes choisies au hasard uniforme sans biais ? Et parmi 200 personnes ?
Retrouver ce résultat en approchant la loi binomiale par une loi de Poisson.

Exercice 20. A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont chacun une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si strictement plus de la moitié de ses moteurs fonctionne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 21. Trois joueurs lancent chacun leur tour un dé à 6 faces équilibré jusqu'à obtenir un 6 (s'il n'y a pas eu de 6 au bout d'un tour, ils recommencent dans le même ordre). Le joueur qui sort le premier 6 a gagné. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers avant la victoire d'un des joueurs.

1. Donner la loi suivie par X.
2. Calculer la probabilité de victoire de chacun des trois joueurs.

Exercice 22. On modélise le nombre de personnes se présentant à un guichet pendant une heure par une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre 3. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 personnes se présentent au guichet pendant l'heure ?

Exercice 23. Une région comporte 10 hôpitaux. Chaque hôpital peut réaliser 10 interventions chirurgicales d'urgence par jour, et on admet que le nombre de personnes se présentant à un hôpital donné un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre 8, et que ce nombre est indépendant d'un hôpital à l'autre.

1. (a) On regarde un hôpital. Quelle est la probabilité qu'un jour donné celui-ci soit saturé ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 10 hôpitaux soit saturé un jour donné ?

2. On suppose maintenant que quand un hôpital est saturé, il peut opérer un transfert de malades vers un autre hôpital. Quelle est la probabilité que le système hospitalier de la région soit saturé ?
On pourra utiliser le résultat suivant : si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre λ, alors $X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

Variables aléatoires continues

Exercice 24. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[1, 2]$. On définit $Y = X^2$, déterminer la fonction de répartition, la densité, l'espérance et la variance de Y.

Exercice 25. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ avec $a < b$. On note $m = \mathbb{E}X$ et $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}$. Déterminer $\mathbb{P}\,(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$.

Exercice 26. Une ligne de bus passe à 7h, 7h15 et 7h30 à un arrêt. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 30]$. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ? Qu'il l'attende plus de dix minutes ?

Exercice 27. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Donner l'espérance de X.
4. (a) Soit $Y = 2X + 1$. Déterminer la fonction de répartition F_Y et la densité f_Y.
   (b) Soit $Z = X^2$. Déterminer la fonction de répartition F_Z et la densité f_Z.

Exercice 28. Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies de la façon suivante : X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne. X_2 (resp. X_3), est le temps, en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première (resp. la deuxième) panne et la panne suivante. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre λ.

1. On a mesuré que la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives est de 2 heures. Que vaut λ ?
2. Soit A l'événement "chacune des 3 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures". Calculer $\mathbb{P}(A)$.
3. Soit Y la variable aléatoire égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine sans interruption, c'est-à-dire que $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{P}\,(Y \leq t)$.
   (b) Déterminer la densité de Y.
   (c) Calculer l'espérance de Y en heures et minutes.
   On pourra commencer par montrer que pour tout $a < 0$,
$$\int_0^{+\infty} te^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}.$$

Exercice 29. Dans une certaine population humaine, la taille (en cm) suit une loi normale d'espérance 175 et d'écart-type 5. *On utilisera une table de la loi normale standard pour obtenir les valeurs demandées.*

1. Donner la probabilité que la taille d'un individu dépasse 1m85.
2. Sachant que la taille d'un individu est supérieure à 1m80, quelle est la probabilité qu'elle dépasse 1m92 ?
3. Donner la probabilité que la taille d'un individu dépasse 1m65.

Exercice 30. On a observé que la longueur d'un pied adulte, en cm, suivait une loi normale $\mathcal{N}(26, 36)$. Une entreprise décide de fabriquer des chaussettes, en proposant trois tailles. *On utilisera `R` pour obtenir les valeurs demandées.*

1. Déterminer un intervalle centré en 26 (d'extrémités simples) qui concentre au moins 95% des tailles.
2. Découper cet intervalle en trois sous-intervalles de même longueur qui correspondront aux trois tailles de chaussettes. Déterminer la proportion de la production à allouer à chaque taille.

Exercice 31. 1. On lance un dé n fois et on considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de 6 obtenus. Évaluer à partir de quelle valeur de n on aura 9 chances sur 10 d'avoir $\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}$.

2. On lance un dé 3600 fois. Évaluer la probabilité que la fréquence d'apparition du 1 soit entre 580 et 620,
   - avec la fonction `pbinom` de `R` ;
   - en approchant la loi binomiale par une loi normale, sans correction de continuité ;
   - en approchant la loi binomiale par une loi normale, avec correction de continuité.

Couples de variables aléatoires, Vecteurs aléatoires

Exercice 32. On tire simultanément deux boules dans une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 4. On note U le plus petit numéro tiré et V le plus grand numéro.

1. Donner la loi conjointe de (U, V). *On pourra présenter la loi sous forme d'un tableau de contingence.*
2. En déduire la loi de U et la loi de V.

Exercice 33. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte choisie et Y le numéro de la boule choisie.

1. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![1, k]\!]$, calculer $\mathbb{P}\left(Y = i,\, X = k\right)$. *On pourra utiliser une probabilité conditionnelle.*
2. En déduire la loi conjointe de (X, Y).
3. En déduire la loi de Y (on exprimera $\mathbb{P}(Y = i)$ sous forme d'une somme).
4. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 34. Une personne fait du tir à l'arc sur une cible de rayon 1 et de centre O. On suppose que tous ses tirs finissent sur la cible mais que le point d'impact M de coordonnées cartésiennes (X, Y) est uniformément distribué sur la cible. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Quelle est la densité conjointe de (X, Y) ?
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 35. Un étudiant s'ennuie durant son cours de probabilités et passe son temps à regarder par la fenêtre les feuilles tomber d'un arbre. On admet que le nombre de feuilles tombées à la fin du cours est donné par une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
À chaque fois qu'une feuille tombe par terre, l'étudiant lance une pièce qui donne Pile avec proba p et Face avec proba $1 - p$. On note F le nombre de Face obtenus et P le nombre de Pile obtenus pendant le cours.

1. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, ainsi que $\mathbb{E}X$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. (a) On fixe $k \in \mathbb{N}$. Expliquer pourquoi la loi de P sachant $X = k$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire $\mathbb{P}\left(P = a \mid X = k\right)$.
   (b) Pour $(k, a) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}\left(P = a,\, X = k\right)$.
   (c) En déduire la loi de P, ainsi que $\mathbb{E}P$.
   (d) Donner également la loi de F.
3. Que vaut $P + F$ en fonction de X ? Montrer que P et F sont indépendantes.

Exercice 36. Soient $U_1 \sim \mathcal{N}(1, 1)$, $U_2 \sim \mathcal{N}(2, 1)$ et $U_3 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ trois variables aléatoires indépendantes.

1. Justifier que $X = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien. Calculer son espérance et sa matrice de covariance.
2. Soit $Y = \begin{pmatrix} U_1 - 2U_2 \\ U_1 + U_2 + U_3 \\ U_2 - U_3 \end{pmatrix}$. Justifier que Y est un vecteur gaussien et donner sa loi.
3. Montrer que $U_1 + U_2 + U_3$ et $U_2 - U_3$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

Exercice 37. Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, avec $\rho \in]-1, 1[$.

1. Soient $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose $Y = \begin{pmatrix} U^T X \\ V^T X \end{pmatrix}$. Montrer que Y est un vecteur gaussien et donner sa loi.
2. Les variables aléatoires $U^T X$ et $V^T X$ sont-elles indépendantes ?
3. Plus généralement, soient $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.
   (a) Quelle est la loi de $U^T X$?
   (b) Justifier que $Z = \begin{pmatrix} U^T X \\ V^T X \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien.
   (c) Quelle est la covariance de $U^T X$ et $V^T X$?
   (d) À quelle condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d et ρ les variables $U^T X$ et $V^T X$ sont-elles indépendantes ?

Statistiques descriptives

Exercice 38. On observe 100 fois le nombre d'arrivées de clients (noté X) à un bureau de poste pendant un intervalle de temps de 10 minutes. On obtient les valeurs (triées) suivantes :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6

1. De quel type est la variable X ?
2. Dresser le tableau statistique de la variable X (effectifs cumulés, fréquences, fréquences cumulées).
3. Déterminer la moyenne, le mode et la médiane, ainsi que les quartiles Q_1 et Q_3.
4. Déterminer la variance, l'écart-type, l'étendue et l'intervalle interquartile.
5. Tracer le diagramme en bâtons (normal et cumulatif) et le box-plot de cette variable.

Exercice 39. Une société immobilière dispose de 600 appartements dont les surfaces sont résumées dans le tableau suivant :

Surface en m^2	$[25; 50[$	$[50; 60[$	$[60; 80[$	$[80; 100[$	$[100; 120[$	$[120; 145[$
Fréquence	0.02	0.15	0.13	0.22	0.28	0.20

1. Compléter le tableau statistique (effectifs, fréquences cumulées,...).
2. Calculer le mode, la moyenne, la médiane, les premier et troisième quartiles.
3. Calculer la variance, l'écart-type, l'écart interquartile et l'étendue.
4. Tracer le box-plot de cette variable.
5. Tracer l'histogramme de cette variable.

Estimations - Intervalles de confiance

Exercice 40. Dans une population de truites de rivière, la proportion de femelles est normalement de 0.5. Certaines pollutions par des produits pharmaceutiques augmentent cette proportion.
Sur un prélèvement de 100 truites, on trouve 64 femelles. Est-ce dû aux fluctuations d'échantillonnage ou à une pollution de la rivière ?

Exercice 41. On lance une pièce n fois.

1. Ici $n = 30$.
   (a) En supposant la pièce équilibrée, donner un intervalle de fluctuation de niveau supérieur à 95% pour la proportion de Pile obtenus.
   (b) En pratique, on a obtenu 20 Pile sur ces 30 lancers. Peut-on affirmer avec un degré de confiance de 95% que la pièce est truquée ?
2. Maintenant, $n = 60$. On a obtenu 40 Pile sur ces 60 lancers. Peut-on affirmer avec un degré de confiance de 95% que la pièce est truquée ?

Exercice 42. Un fabricant de CD vierges décide de mener une étude de qualité de ses produits, visant à déterminer la proportion de CD défectueux à la sortie de la chaîne de fabrication. Il propose pour cela de tester, au hasard, un millier de CD issus de son usine et de mesurer la proportion de CD défectueux. Il obtient 8 CD défectueux.
Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour la proportion de CD défectueux en sortie d'usine en utilisant les différentes formules du cours.
Proposer également un intervalle de confiance de niveau 99%.

Exercice 43. La distribution du poids dans une certaine population suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 3\,\text{kg}$. Sur un échantillon de 25 personnes dans cette population, le poids moyen est de 67.8 kg.
Donner des intervalles de confiance de niveaux 95% et 99% pour μ.

Exercice 44. On considère un échantillon de 50 chocolats, pris au hasard en sortie d'une chaîne de production. Le poids total de l'échantillon est 240 g et l'écart-type mesuré est 0.5 g. Le fabricant annonce un poids de 5 g par chocolat. Est-ce compatible avec l'échantillon obtenu ?

Exercice 45. Avant mise sur le marché, un nouveau médicament est testé, afin d'évaluer son impact sur le taux d'hémoglobine dans le sang. On suppose que la répartition du taux d'hémoglobine suit une loi normale dans la population.
Un échantillon de 30 personnes saines est choisi au hasard et se voit administrer le médicament. On mesure ensuite un taux de 15.7 g/dL avec un écart-type de 2.6 g/dL.

1. Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour le taux moyen dans la population, à partir des données de l'échantillon.
2. Il se trouve que le taux moyen réel dans la population est de 15 g/dL. Avec un degré de confiance de 95%, pouvez-vous affirmer que le médicament a un impact sur ce taux ?

Exercice 46. Au second tour d'une élection, deux personnes A et B sont opposées. Lors d'un sondage sur 800 personnes, 420 se sont prononcées en faveur de A et donc 380 en faveur de B.

1. Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour la proportion réelle de la population qui compte voter pour A. Peut-on écarter une victoire de B à ce niveau de confiance ?
2. Quel degré de confiance maximal doit-on accepter pour que l'intervalle de confiance soit entièrement au-dessus de 50% ?
3. En exigeant un niveau de confiance de 95%, combien de personnes aurait-il fallu interroger pour que la même proportion empirique donne un intervalle de confiance entièrement au-dessus de 50% ?

Exercice 47. On observe la teneur en sucre du sirop dans les pêches en conserve dans 10 prélèvements. Les valeurs obtenues donnent un écart-type corrigé de 4.8 milligrammes. On suppose que la teneur en sucre, en milligrammes, d'un tel sirop peut être modélisée par une variable aléatoire X, suivant une loi normale d'écart-type σ inconnu. Déterminez un intervalle de confiance pour σ au niveau de 95%.

Tests d'hypothèse

Exercice 48. Sur un échantillon de 200 individus d'une commune, 45 % sont favorables à l'implantation d'un centre commercial et 55 % y sont défavorables. À l'aide d'un test paramétrique au niveau $\alpha = 0.05$, déterminer si on peut considérer qu'une majorité de la population de la commune est défavorable au projet.

Exercice 49. La taille moyenne des hommes aux Pays-Bas est de 1.76 mètres. Sur un échantillon de n personnes, on trouve $\widehat{\mu}_n = 1.78\text{m}$. On veut savoir si sur cet échantillon la taille est "significativement" plus grande que la moyenne. On sait que la taille suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dans la population. Ici on suppose que σ est connu et que $\sigma = \frac{1}{8}$.

1. Pour répondre à la question, quelles sont les hypothèses à tester ?
2. On suppose que $n = 30$, que conclut-on ? Même question pour $n = 100$ et $n = 150$.

Exercice 50. Pour tester un nouveau vaccin au cours d'une épidémie, deux groupes de 40 sujets chacun sont formés par tirage au sort dans la population. Le groupe 1 reçoit le vaccin, le groupe 2 un placebo.
Au cours du mois suivant, 9 sujets du groupe 1 et 15 sujets du groupe 2 sont contaminés. Peut-on considérer que le vaccin est efficace ?

Exercice 51. Avec les données de l'exercice 5 du TP4,

1. tester l'hypothèse "$\mu = 5$" contre "$\mu < 5$" ;
2. tester l'hypothèse "$\sigma = 1$" contre "$\sigma > 1$".

Exercice 52. On fait passer un test psychométrique à deux groupes de volontaires, appelés Groupe A et Groupe B, représentant respectivement les populations A et B. Les résultats sont les suivants :

Résultats	$[55,57[$	$[57,59[$	$[59,61[$	$[61,63[$	$[63,65[$
Effectifs Groupe A	9	10	7	7	12
Effectifs Groupe B	20	9	10	4	8

1. En supposant la normalité des variables aléatoires qui représentent le score des deux populations, comparer les écart-types des scores des populations A et B au niveau $\alpha = 5\,\%$.
2. Peut-on considérer que le score moyen de la population B est inférieur au score moyen de la population B ?

Exercice 53. On dispose de deux échantillons (un de mâles et un de femelles) de souris des cactus adultes, dont on a mesuré le poids en g :

Femelles :	31	25	29	30	31	28	31	29	29	33	30	28
Mâles :	28	29	30	29	27	26	27	28	25	28	–	–

1. Peut-on déceler, avec un risque d'erreur de $5\,\%$ une différence significative de la variance du poids entre les individue mâles et femelles ?
2. Peut-on déceler une différence dans le poids moyen ?

Exercice 54. Dans un centre de renseignements téléphoniques, on étudie sur un échantillon de 100 contacts, le temps d'attente en secondes avant que la communication soit amorcée :

Temps d'attente	$[2,6[$	$[6,10[$	$[10,12[$	$[12,14[$	$[14,18[$	$[18,26[$	$[26,34[$
Effectifs	8	14	9	11	30	16	12

On souhaite savoir si la répartition suit une loi normale.

1. Calculer la moyenne empirique $\widehat{\mu}$ et l'écart-type empirique $\widehat{\sigma}$.
2. On teste l'hypothèse nulle $H_0 : T \sim \mathcal{N}\left(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2\right)$ où T est la variable aléatoire donnant le temps d'attente. Calculer les effectifs théoriques sous H_0.
3. Avec un test du χ^2, donner une réponse à la question au niveau $\alpha = 5\,\%$.