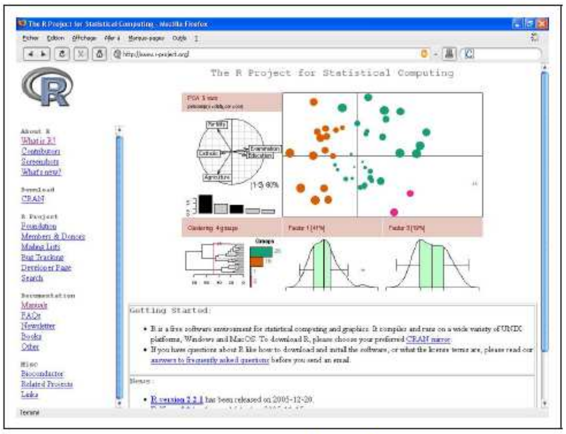
ISEN ALL IS DIGITAL! OUEST — yncréa	**Probabilités** **A3**

L'objectif de ce document est de présenter une très courte introduction au logiciel R (via l'interface RStudio), de sorte que des étudiants découvrant R puissent en quelques heures se familiariser avec ce logiciel et être opérationnels par la suite pour réaliser des exercices de travaux pratiques accompagnant un cours de Probabilités.

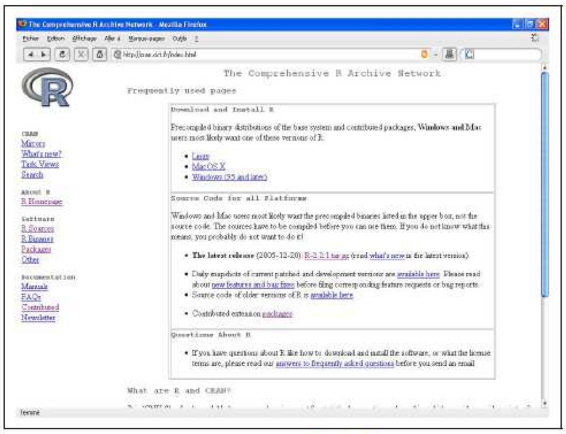
1. Introduction

Le logiciel R est un logiciel de Statistique libre ayant un certain nombre d'atouts :
— il permet l'utilisation des méthodes statistiques classiques à l'aide de fonctions prédéfinies,
— il permet de créer ses propres programmes dans un langage de programmation assez simple d'utilisation
— il permet d'utiliser des techniques statistiques innovantes et récentes à l'aide de package développés par les chercheurs et mis à disposition sur le site du CRAN.
Le logiciel R fonctionne initialement en ligne de commande, mais des interfaces permettent désormais une utilisation plus conviviale. Nous proposons ici de travailler avec l'interface RStudio, téléchargeable sur :

http://www.rstudio.com/



www.r-project.org

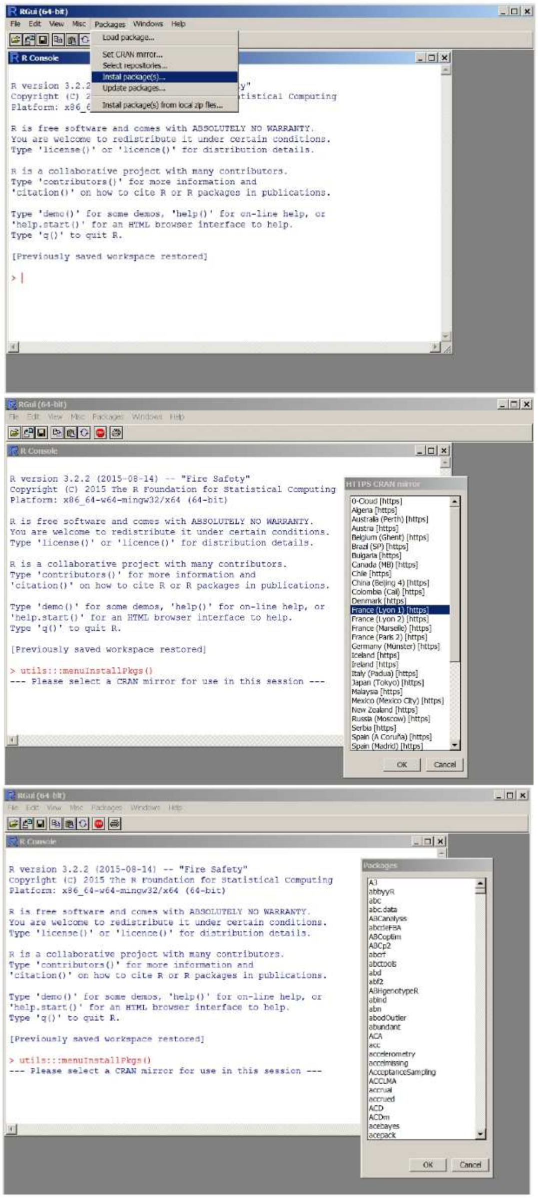


cran.r-project.org

2. Premières Applications

2.1. Installation de packages

Un package est une compilation d'outils qui ne se trouve pas dans l'installation de base du logiciel R. Pour en disposer, il faut le télécharger. Ceci peut s'effectuer soit « automatiquement », c'est-à-dire directement depuis l'interface R, soit « manuellement », c'est-à-dire depuis le site internet de R.

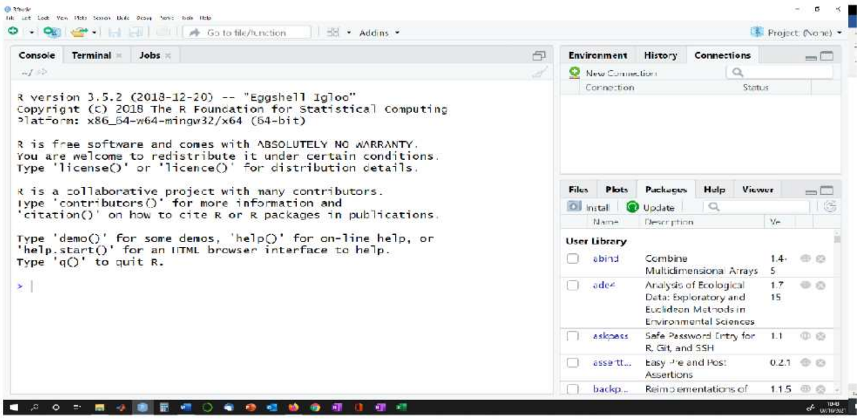


Pour être activé, un package doit être chargé dans l'environnement de travail de R.
Il suffit de taper la ligne de commande :
>library("nom_du_package")

2.2. Manuels d'aide

Dans la page d'accueil de R, au lieu cliquer sur *Doxnload, CRAN,* cliquez sur *Documentation Manuals,* ce qui vous donne accès à la documentation officielle de R, ainsi qu'au lien *contributed documentation.* Avec ce lien, vous trouverez la documentation de collaborateurs, dont certaines en français.

2.3. Description de R-Studio



Le panneau principal de R-Studio est la console.

2.4. Premiers pas avec R

2.4.1. R est une calculatrice

On peut utiliser R pour faire des opérations algébriques élémentaires, comme on le fait avec la calculette. Exemples

On peut travailler directement avec des variables (scalaires) que l'on met en mémoire dès le début. Exemples

2.4.2. Vecteurs - R : un langage vectoriel

Un vecteur dans R est une collection de données et non un vecteur au sens mathématique du terme.

Exemples

```
vec1 = c(2.8, 2.4, 2.1, 3.6, 2.8)

vec1
```

```
vec2 = c("rouge", "vert", "vert", "vert", "jaune")

vec2
```

```
vec3 = c(TRUE, TRUE, FALSE, FALSE, FALSE)

vec3
```

Exemples : Création par répétition

```
rep(4, 3)
```

```
vec4 = rep(vec1, 2)

vec4
```

```
vec5 = rep(vec1, c(2, 1, 3, 3, 2))

vec5
```

2.4.3. Matrices

Exemple

```
mat1 = matrix(vec4, ncol = 5)

mat1
```

```
mat4 = diag(c(2, 1, 5))

mat4
```

2.4.4. Importation de fichiers

L'un des intérêts de R, c'est de pouvoir importer des fichiers créés à l'aide d'autres logiciels, sous certaines conditions. Ces fichiers doivent avoir une nature compatible avec R, le plus simple étant celle de type « texte ».
Nous reviendrons en détails sur cette partie dans un TP ;

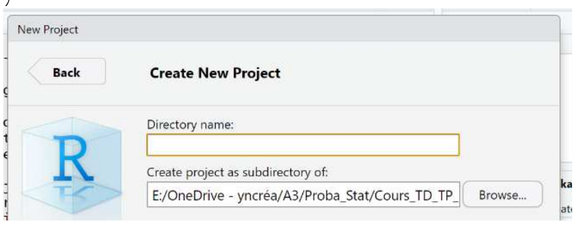
2.5. Commandes help et help.search

Dans la fenêtre "R Console", pour avoir les détails d'un l'objet R ainsi que plusieurs exemples d'utilisation, utiliser la commande help sous la forme help("objet") (help("matrix"), help("sin"),help("solve"). . .).

Si le nom d'un objet R vous échappe, il existe un moteur de recherche qui permet de le retrouver.
Pour cela, dans la fenêtre "R Console", utiliser la commande help.search sous la forme help.search("objet") (help.search("diagonale"), help.search("transpose"). . .). Vous aurez alors une liste d'objet R.

2.6. Enregistrer son travail

Il vous suffit de cliquer sur Save pour qu'un fichier de sauvegarde de votre session de travail RData soit créee. Ce fichier sera enregistré dans votre dossier de travail. Il n'aura alors aucun nom, seulement l'extension.



Partie 1 – Introduction à R

Exercice 1

On définit trois vecteurs x, y et z par les commandes R suivantes :

x = c(1, 3, 5, 7, 9)
y = c(2, 3, 5, 7, 11, 13)

z = c(9, 3, 2, 5, 9, 2, 3, 9, 1)

Reproduire et comprendre les résultats des commandes suivantes :

x + 2	y[3]	rev(z)
y * 3	y[-3]	order(z)
length(x)	y[x]	unique(z)
x + y	(y > 7)	duplicated(z)
sum(x > 5)	y[y > 7]	table(z)
sum(x[x > 5])	sort(z)	rep(z, 3)
sum(x > 5 | x < 3)	sort(z, dec = TRUE)	

Exercice 2

Créer deux vecteurs de dimensions quelconques. Créer un vecteur en insérant le second vecteur entre les 2-ème et 3-ème éléments du premier vecteur.

Exercice 3

1. Créer les vecteurs suivants :
   (a) y0 constitué de la suite des entiers de 0 à 10 par pas de 2,
   (b) y1 constitué de tous les entiers pairs entre 1 et 18,
   (c) y2 constitué de 20 fois de suite la valeur 4,
   (d) y3 constitué de 20 nombres entre 0 et 10.
2. Extraire de y3 :
   (a) le troisième élément,
   (b) tous les éléments sauf le troisième.
3. Comparer les commandes suivantes :
   matrix(y3, nrow = 2)
   matrix(y3, byrow = TRUE)
4. Construire une matrice A comportant quatre lignes et trois colonnes remplies par lignes successives avec les éléments du vecteur 1:12.
5. Construire une matrice B comportant quatre lignes et trois colonnes remplies par colonnes successives avec les éléments du vecteur 1:12.
6. Extraire l'élément situé en deuxième ligne et troisième colonne de A.
7. Extraire la première colonne de A, puis la deuxième ligne de A.
8. Construire une matrice C constituée des lignes 1 et 4 de A.

Exercice 4

Construire une matrice comportant 9 lignes et 9 colonnes avec des 0 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs (on pourra utiliser la commande diag).

Exercice 5

1. Créer un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_{11})$ contenant les réels compris entre 0 et 1 par pas de 0.1.
2. Afficher la longueur de x.
3. En utilisant les opérations vectorielles, créer un vecteur $y = 4x(1 - x)$.
4. Tracer la courbe rejoignant les points $(x_1, y_1), \ldots, (x_{11}, y_{11})$ avec la commande plot.
5. Calculer le maximum des $y_1, \ldots, y_{11}$.
6. En quel point le maximum est-il atteint ?
7. Tracer la courbe de la fonction $f(x) = 4x^2(1 - x), x \in [-2, 1]$, en rouge.

Exercice 6

Utiliser R pour donner les valeurs numériques attendues :

1. Combien y-a-t-il de carrés (4 cartes de même valeur) dans un jeu de 32 cartes ?
2. Combien d'anagrammes peut-on faire avec le mot "dinosaure" ?

3. Combien de chances a-t-on de gagner le super jackpot à l'euromillion ? (donc d'avoir 5 bons numéros parmi 49, et 2 bons numéros étoilés parmi 10).
4. Chaque pièce d'un nouveau jeu de domino est de la forme : a b avec $(a, b) \in \{0, \ldots, 9\}^2$ en sachant qu'un domino reste le même si on le tourne à 180 degrés (par exemple, 8 = 8 est un, et un seul domino). Déterminer le nombre de pièces différentes que contient un jeu complet de dominos.

Exercice 7

On souhaite calculer avec R les 100 premiers termes de suite de Fibbonacci : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Créer un script dans le menu "fichier -créer un script", le nommer "fib.R".
2. Sur la première ligne: mettre en commentaire (la ligne commence par]) le nom du programme, par exemple] suite de Fibonnacci.
3. Créer un vecteur u de taille 100 ne contenant que des 1.
4. En utilisant la boucle for, assigner à un+2 la valeur $u_{n+1} + u_n$.
5. En utilisant la commande plot représenter la suite (un) sur un graphique

Partie 2 – Probabilités élémentaires

Exercice 8

1. Ecrire dans la fenêtre R la commande library(prob). Expliquer.
2. On lance une pièce de monnaie. On s'intéresse au côté affiché.
   a. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
   b. Commenter la commande suivante : tosscoin(1)
   (H signifie Head (Face) et T signifie Tail (Pile)).
   c. Décrire l'enjeu de la commande suivante : tosscoin(3).
3. On lance un dé cubique honnête dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse au numéro affiché.
   a. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
   b. Commenter la commande suivante : rolldie(1)
   c. Décrire l'enjeu de la commande suivante : rolldie(2)
4. On lance un dé pyramidal honnête dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On s'intéresse au numéro affiché.
   a. Donner un univers associé à cette expérience aléatoire.
   b. Commenter la commande suivante : rolldie(1, nsides = 4)
   c. Décrire l'enjeu de la commande suivante : rolldie(2, nsides = 4)
5. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
S = cards() ; S
A = subset(S, suit == "Diamond") ; A
B = subset(S, rank %in% 8:10) ; B
union(A, B)
intersect(A, B)
setdiff(A, B)
setdiff(B, A)
```

Exercice 9

Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2 et 3.

1. Soit E_1 l'expérience aléatoire :
   "on tire au hasard 2 boules avec remise en prenant en compte l'ordre des tirages".
   a. Proposer un univers pour l'expérience E_1
   b. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
M = urnsamples(1:3, size = 2, replace = TRUE, ordered = TRUE) ; M
```

```
N = probspace(M) ; N
```

2. Soit E_2 l'expérience aléatoire : "on tire au hasard 2 boules simultanément".
   a. Proposer un univers pour l'expérience E_2
   b. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
M = urnsamples(1:3, size = 2, replace = FALSE, ordered = FALSE) ; M
N = probspace(M) ; N
```

Exercice 10

1. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
S = rolldie(2, makespace = TRUE) ; S
A = subset(S, X1 == X2) ; A
B = subset(S, X1 + X2 >= 8) ; B
Prob(A)
Prob(B)
Prob(A, given = B)
Prob(B, given = A)
```

2. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
S = cards(makespace = TRUE) ; S
A = subset(S, suit == "Diamond") ; A
B = subset(S, rank %in% c("Q","K")) ; B
Prob(A)
Prob(B)
Prob(A, given = B)
Prob(B, given = A)
```

3. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
L = rep(c("rouge", "vert"), times = c(6, 2)) ; L
M = urnsamples(L, size = 3, replace = FALSE, ordered = TRUE)
N = probspace(M)
Prob(N, isrep(N, "rouge", nrep = 3))
Prob(N, isrep(N, "rouge", nrep = 2))
Prob(N, isin(N, c("rouge", "vert", "rouge"), ordered = TRUE))
Prob(N, isin(N, c("rouge", "vert", "rouge")))
```

Exercice 11

On lance une pièce de monnaie équilibrée 8 fois.
Écrire des commandes R permettant de calculer :

1. La probabilité d'obtenir exactement 3 fois Pile.
2. La probabilité d'obtenir au moins une fois Face.

Exercice 12

Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
probspace(tosscoin(1), probs = c(0.7, 0.3))
probspace(rolldie(1, nsides = 4), probs = c(0.2, 0.2, 0.5, 0.1))
```

Partie 3 - Variables aléatoires discrètes

Exercice 13

On considère la commande `exp(-3) * 3^4 / factorial(4)`.

1. Préciser à quelle loi de probabilité elle correspond et ce qu'elle renvoie.
2. Donner la commande prédéfinie de R équivalente.

Exercice 14

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et p ∈]0, 1[. La commande **dgeom(k, p)** donne la probabilité qu'une var X suivant la loi géométrique modifiée en 0 G∗(p) soit égale à k, i.e.

$$P(X = k) = (1 - p)^k p,\ k \in \mathbb{N}^*.$$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction dgeom.
2. On se fixe p = 0.35. Calculer P(X ≤ 3), P(X ≥ 4) et P(X 6 = 5).
3. Est-ce que les commandes suivantes sont équivalentes ?
   a. **pgeom(k, p)** et **1 - (1 - p)^(k + 1),**
   b. **dgeom(k, p)** et **pgeom(k, p) - pgeom(k - 1, p).**

Exercice 15

Soit X une var suivant la loi binomiale B(10, 0.8), i.e. $P(X=k)=\binom{10}{k}0.8^k(1-0.8)^{10-k}, k\in [\![0,10]\!]$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction **dbinom**.
2. Montrer que P({X est paire}) > P({X est impaire}).
3. Déterminer le plus petit entier k tel que P(X ≤ k) ≥ 0.87.
4. Vérifier numériquement que E(X) = 8 (= np) et V(X) = 1.6 (= np(1 − p)).

Exercice 16

Est-ce que les commandes **sum(dpois(1:12, 9))** et **ppois(12, 9)** donnent le même résultat ? Expliquer.

Exercice 17

Soit X une var suivant la loi de Poisson P(5), i.e. $P(X=k)=e^{-5}\frac{5^k}{k!}, k\in \mathbb{N}$

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction **dpois**.
2. Est-ce que P(X ≤ 8) ≥ 0.95 ?
3. Quelle est la valeur la plus probable pour X ? (cette valeur est appelée le mode).

Exercice 18

Soit X une var dont la loi est donnée par $P(X=10^{i-1})=\frac{i}{28}, k\in [\![1,7]\!]$

1. Préciser X(Ω).
2. Calculer E(X), V(X) et σ(X) avec le logiciel R (on trouve σ(X) = 421225).

Exercice 19

En utilisant des fonctions déjà implémentées dans R, tracer le graphe de la fonction de répartition d'une var X suivant

- la loi de Bernoulli B(0.4),
- la loi binomiale B(10, 0.5),
- la loi hypergéométrique H(15, 11, 6),
- la loi de Poisson P(2),

(utiliser plot avec l'option type = "s").

Exercice 20

Soit X une var suivant la loi binomiale B(15, 0.3).

1. Calculer les probabilités P(X = k), k ∈ {0, . . . , 15}, avec la commande **dbinom**.
2. Représenter le graphe de la loi de X à l'aide d'un diagramme à bâtons.
3. Quelle est le mode de X ?
4. Calculer P(3 ≤ X ≤ 9), P(X ≤ 10) et P(X ≥ 4) en utilisant la fonction **pbinom**. Retrouver ces résultats avec la fonction **dbinom.**
5. Calculer et représenter la fonction de répartition de X (utiliser la fonction **pbinom**).

Exercice 21
Soit X une var suivant la loi de Poisson P(5). Reprendre les questions de l'exercice précédent.

Exercice 22
Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
x = 0:30
y1 = dpois(x, 2)
y2 = dpois(x, 5)
y3 = dpois(x, 10)
y4 = dpois(x, 15)
par(mfrow = c(2, 2))
plot(x, y1, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
plot(x, y2, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
plot(x, y3, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
plot(x, y4, type = "h", lwd = 4, lend = 1)
```

Exercice 23
Certaines lois de var peuvent être approchées par d'autres lois plus simples à calculer.
Notamment, la loi hypergéométrique H(l, m, n) peut être approchée par la loi binomiale B(n, p) avec $p = l/(l + m)$ et $n \leq 0.1(l + m)$, i.e.

$$H(l, m, n) \approx B(n, p),\ p = l/(l + m),\ n \leq 0.1(l + m).$$

L'objectif de cet exercice est de visualiser cette approximation avec le logiciel R.

1. Calculer les probabilités $P(X = k)$ avec $k \in \{0, \ldots, 20\}$ lorsque X est une var
   - suivant la loi hypergéométrique H(1000, 500, 20),
   - suivant la loi binomiale B(20, 1000/1500).

   Donner un exemple de schéma d'urnes dans lesquels ces 2 lois interviennent.
2. Séparer l'écran graphique en 2 avec la commande par(mfrow = c(2, 1)) : dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la loi H(1000, 500, 20) et dans la fenêtre 2, celui de la loi B(20, 1000/1500).
3. Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
approx.fun = function(k, Ne, Nm, n, p) {
barplot(rbind(dhyper(k, Ne, Nm, n), dbinom(k, n, p)),
col = c(1,2), legend = c("Hypergéométrique", "Binomiale"),
beside = T, names = k, xlab = "k", ylab = "Proba P(X=k)")
abline(h = 0)
}
par(mfrow = c(3 ,1))
approx.fun(0:20, 1000, 500, 20, 2 / 3)
approx.fun(0:10, 20, 30, 10, 2 / 5)
approx.fun(0:10, 10, 15, 10, 2 / 5)
```

Exercice 24
La loi binomiale B(n, p) peut être approchée par la loi de Poisson P(np) si $n \geq 31$et $np \leq 10$, i.e.

$B(n, p) \approx P(np),\ n \geq 31,\ np \leq 10.$

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette approximation avec le logiciel R.

1. Représenter les graphes des lois suivantes à l'aide de diagrammes à bâtons :

$$B(10, 0.5),\ B(20, 0.25),\ B(50, 0.1),\ B(100, 0.05),\ P(5).$$

2. Pour chaque n ∈ {5, 10, 20, 50, 100}, évaluer le maximum de l'erreur commise lorsque que l'on approche la loi binomiale par la loi de Poisson, i.e. calculer
$$E_n = \max_{k \in [\![0,n]\!]} \left| P(X=k) - P(Y=k) \right|$$

où X est une var suivant la loi binomiale B(n, 5/n) et Y est une var suivant la loi de Poisson

P(5). Commenter les résultats obtenus.

3. Application 1. Suite à une campagne de vaccination contre le paludisme, on estime à 2% la proportion de personnes qui seraient pourtant atteintes de la maladie.
   Soit X la var égale au nombre de personnes malades dans un petit village de 100 habitants.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Calculer la probabilité de constater au moins une personne malade.
   c. Calculer la probabilité de constater au plus 10 personnes malades.
   d. Refaire (b) et (c) en utilisant une approximation de la loi de X par une loi de Poisson.
   e. Quelle est la qualité de l'approximation ?
4. Application 2. Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres. Dans un lot, 3% des tiges ne sont pas conformes pour la longueur. On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à des tirages avec remise. Soit la var X qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Calculer la probabilité qu'au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
   c. Refaire (b) en utilisant une approximation de la loi de X.
   d. Quelle est la qualité de l'approximation ?

Simulations de var discrètes

Exercice 25
La fonction préimplémentée sample prélève successivement un nombre donné d'éléments d'un ensemble de cardinal fini, avec ou sans remise. Plus précisément :
sample(x, size, replace = FALSE, prob = NULL)
où:

- x: Décrit l'ensemble dans lequel on va échantillonner. Il s'agit soit d'un vecteur, soit d'un entier k. Dans ce dernier cas, l'ensemble considéré sera tous les entiers allant de 1 à k.
- size: Un entier positif ou nul donnant le nombre d'élément à tirer. Par défaut, il s'agit du cardinal de l'ensemble décrit par x.
- replace (ou rep): Un booléen : TRUE (ou T) signifie avec remise, et FALSE (ou F), sans remise.
- prob: Un vecteur de poids de probabilités d'obtenir les éléments de l'ensemble à partir duquel on échantillonne.

Considérons dans un premier temps un dé équilibré. On effectue 500 lancers, puis on regarde l'effectif des résultats :

```
resdé = sample(6, 500, replace = T)
table(resdé)
```

On réitère l'expérience, mais cette fois avec un dé pipé (une chance sur deux de tomber sur la valeur 1) :

```
resdépipé = sample(6, 500, replace = T, prob = c(0.5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1))
table(resdépipé)
```

Pour comparer les deux résultats, on peut réaliser le graphique suivant :

```
titre1 = "Fréquences obtenues pour 500 lancers de dé équilibré"
titre2 = "Fréquences obtenues pour 500 lancers de dé pipé"
par(mfrow = c(1, 2))
barplot(table(resdé) / 500, main = titre1)
barplot(table(resdépipé) / 500, main = titre2)
```

Exercice 26

Écrire une commande R qui renvoie le résultat

1. du lancer d'un dé.
2. du lancer de 2 dés.
3. de la somme des résultats du lancer de 2 dés.
4. du tirage du loto (5 numéros parmi 49).

Exercice 27

Soit X une var dont la loi est donnée par : $P(X = 0) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.5$, $P(X = 5) = 0.3$. Simuler 1000 réalisations de X et préciser les effectifs associés aux valeurs de X.

Exercice 28

Une urne contient $p + q$ boules, dont p rouges et q noires. Créer une fonction Urne à 3 arguments (k, p, q) qui modélise le résultat de k tirages sans remise d'une boule de l'urne. Par exemple, la commande `Urne(6, 8, 5)` renvoie : `[1] "Rouge" "Noire" "Noire" "Rouge" "Noire" "Rouge"`.

Exercice 29

Lorsqu'on effectue n tirages indépendants d'une même expérience aléatoire, on appelle fréquence du résultat k le rapport entre le nombre de fois où k est tiré, et n.
Par exemple, si on jette 7 fois un dé cubique équilibré, avec pour résultats : 1; 1; 5; 2; 6; 5; 3, alors la fréquence de 5 est 2/7, celle de 4 est 0.
Écrire une fonction **Freq** à un paramètre n qui renvoie la fréquence de 5 lors de n tirages indépendants d'un dé cubique équilibré. Comparer les fréquences pour $n \in \{10, 100, 1000\}$, avec la probabilité (théorique) d'obtenir un 5 lorsqu'on lance un dé

Exercice 30

Une urne contient 15 boules, dont 5 blanches et 10 noires. On considère les deux expériences suivantes :

- E1 : On tire successivement 10 boules dans l'urne, avec remise,
- E2 : On tire successivement 10 boules dans l'urne, sans remise.

1. Simuler une réalisation de chacune des deux expériences avec la fonction **sample**. On représentera une boule blanche par le chiffre 1 et une boule noire par le chiffre 0.
2. On s'intéresse à la var X égale au nombre de boules blanches tirées lors l'expérience E1, et à la var Y, l'analogue mais avec l'expérience E2.
   a. Simuler 500 réalisations de chacune de ces var en utilisant la fonction sample.
   b. Comparer, suivant le type d'épreuve, le diagramme en barre des fréquences observées avec la distribution des lois binomiales et hypergéométriques correspondantes.

Exercice 31
On considère la marche aléatoire suivante : un mobile est positionné à l'origine d'un axe. À chaque étape, il se déplace d'une distance de longueur 1 vers la droite ou la gauche avec la probabilité 0.5 pour chaque direction. Il effectue n étapes au total. Soit Xi la position du mobile à l'étape i (on pose X0=0).
Simuler une réalisation du vecteur de var (X_0, X_1, . . . , X_n) (on pourra utiliser la fonction **cumsum** qui donne la somme cumulée d'un vecteur. Par exemple, la commande **cumsum(c(2, 2, 2, 3))** renvoie : [1] 2 4 6 9)

Exercice 32
On lance 5 dés cubiques équilibrés, puis on relance ceux qui n'ont pas fait 6, et ainsi de suite jusqu'à ce que les 5 dés affichent 6.
Simuler une réalisation de cette expérience aléatoire en affichant les chiffres obtenus après chaque lancer et le nombre de lancers total *(on pourra utiliser une boucle while et la commande sum(x != 6) qui calcule le nombre de composantes d'un vecteur x différentes de 6).*

Partie 4 - Variables aléatoires continues

Exercice 33
On s'intéresse à la durée de vie de composants. Soit X la var égale à la durée de vie en années d'une de ces composants. On suppose que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

1. Donner la fonction de densité de X, puis sa fonction de répartition.
2. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à **dexp** (*on pourra utiliser une structure de contrôle if . . . else pour que celle-ci soit égale à 0 quand $x < 0$*).
3. Vérifier numériquement à l'aide de la fonction **integrate** que $\int_0^{100} f(x)dx \simeq 1$
4. Séparer l'écran graphique en 2 :
   a. dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la densité f
   b. dans la fenêtre 2, celui de la fonction de répartition de X.
5. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant dépasse 10,2 ans.

Exercice 34
Soit X une var suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$, i.e. de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$.

1. Écrire une nouvelle fonction R équivalente à la fonction dnorm.
2. Vérifier numériquement que : $\int_{-100}^{100} f(x)dx \approx 1$.
3. Séparer l'écran graphique en 2 : dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la densité f et, dans la fenêtre 2, celui de la fonction de répartition de X.
4. Calculer $\mathbb{P}(X \le 2,2)$, $\mathbb{P}(X \ge 1,7)$ $\mathbb{P}(0,2 \le X \le 1,4)$ $\mathbb{P}(|X| \le 1,96)$
5. Application

On suppose que le poids d'un foie gras est une var X suivant la loi normale $\mathcal{N}(550; 100^2)$, l'unité étant le gramme. Quelle est la probabilité qu'un foie gras pèse

a. moins de 650 grammes ?
b. plus de 746 grammes ?
c. entre 550 grammes et 600 grammes ?

Exercice 35

Reproduire et analyser les commandes suivantes :

```
curve(dweibull(x, 2, 2), -5, 5, col = "red")
curve(dt(x, 3), -5, 5, col = "blue", add = T)
curve(df(x, 2, 4), -5, 5, col = "orange", add = T)
curve(dcauchy(x, 2, 3), -5, 5, col = "magenta", add = T)
```

Exercice 36

Rappel de cours :

La loi binomiale B(n; p) peut être approchée par la loi normale N(np; $np(1 - p)$) si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, i.e. B(n; p) ≈ N(np; $np(1 - p)$) si $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette approximation avec le logiciel R.

1. Commenter le résultat des commandes suivantes :

```
plot(0:100, dbinom(0:100, 100, 0.5), type = "h", xlim = c(20, 80))
curve(dnorm(x, 100 * 0.5, sqrt(100 * 0.5 * (1 - 0.5))), col = "red", add = T)
```

2. Pour chaque $n \in \{5;10;20;50;100\}$, évaluer le maximum de l'erreur commise lorsque que l'on approche la loi binomiale par la loi Normale (avec correction de continuité), i.e.
   Calculer $E_n = \max_{k \in [\![0,n]\!]} \left| P(X=k) - P(k-0,5 \leq Y \leq k+0,5) \right|$ où X est une var suivant la loi binomiale B$\left(n;\frac{5}{n}\right)$ et Y est une var suivant la loi normale N$\left(5;5\left(1-\frac{5}{n}\right)\right)$.
   Commenter les résultats obtenus.
3. Application. Un commerçant a observé qu'un client sur 20 achète sur son site internet. En un mois, 800 clients différents se connectent au site. Soient X la VAR égale au nombre de clients qui achètent sur le site durant ce mois.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Par quelle loi qui peut-on approcher la loi de X ?
   c. Donner une approximation de $\mathbb{P}(35 \leq X \leq 45)$ (avec correction de continuité), puis comparer avec la vraie valeur.

Partie 5 – Bilan Probabilités

Exercice 37

Représenter le graphe de (la "densité" associée à) la loi de Poisson P(1).

Exercice 38

Soit X une var suivant la loi B(5, 0.6).

1. Calculer P(X ≤ 4).
2. Représenter le graphe de la fonction de répartition de X.
3. Déterminer le réel x∗ = inf{k ∈ {0, . . . , 5}; P(X ≤ k) ≥ 0.25}.

4. Simuler 20 réalisations de X.

Exercice 39
Représenter le graphe de la densité de la loi du chi-deux $\chi 2(3)$ sur [0, 10].

Exercice 40
Séparer l'écran graphique en 3 (1 ligne, 3 colonnes).

- Dans la première fenêtre représenter le graphe de la densité de la loi normale N (4, 1), puis ajouter, dans la même fenêtre, avec une autre couleur, le graphe de la densité de la loi normale N (5, 1).
- Dans la deuxième fenêtre représenter le graphe de la densité de la loi normale N (4, 1), puis ajouter, dans la même fenêtre, avec une autre couleur, le graphe de la densité de la loi normale N (4, 4).
- Dans la troisième fenêtre représenter le graphe de la densité de la loi normale N (4, 1), puis ajouter, dans la même fenêtre, avec une autre couleur, le graphe de la densité de la loi normale N (5, 4).

Exercice 41
Soit Z une var suivant la loi normale N (0, 1). Calculer les probabilités :

$P(Z < -0.5)$, $P(Z > 1.5)$, $P(Z > -1)$,
$P(|Z| \leq 1.96)$, $P(|Z| \leq 2.58)$, $P(|Z| \geq 3)$.

Exercice 42
Soit X une var suivant la loi normale N (15, 9).
1. Calculer les probabilités : $P(16 \leq X \leq 20)$, $P(X > 18)$, $P(X < 6)$, $P(|X - 15| > 5.88)$.
2. Représenter le graphe de la fonction de répartition de X sur [6, 24].

Exercice 43
Représenter sur un même graphique, la fonction de répartition associée à la loi binomiale B(50, 0.4) (avec la commande stepfun) et celle associée à la loi normale N (20, 12) (avec la commande curve).

Exercice 44
Séparer l'écran graphique en 6 (2 lignes, 3 colonnes).
- Dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la densité de la loi du chi-deux $\chi 2(1)$ sur [0.01, 10],
- Dans la fenêtre 2, représenter le graphe de la densité de la loi du chi-deux $\chi 2(2)$ sur [0.01, 10],
- Dans la fenêtre 3, représenter le graphe de la densité de la loi du chi-deux $\chi 2(3)$ sur [0.01, 10],
- Dans la fenêtre 4, représenter le graphe de la densité de la loi du chi-deux $\chi 2(5)$ sur [0.01, 10],
- Dans la fenêtre 5, représenter le graphe de la densité de la loi du chi-deux $\chi 2(10)$ sur [0.01, 20],
- Dans la fenêtre 6, représenter le graphe de la densité de la loi du chi-deux $\chi 2(20)$ sur [0.01, 60].

Exercice 45
Séparer l'écran graphique en 4 (2 lignes, 2 colonnes).
- Dans la fenêtre 1, représenter le graphe de la densité de la loi exponentielle E(1) sur [0, 3],
- Dans la fenêtre 2, représenter le graphe de la densité de la loi exponentielle E(2) sur [0, 3],
- Dans la fenêtre 3, représenter le graphe de la densité de la loi exponentielle E(0.5) sur [0, 20],
- Dans la fenêtre 4, représenter le graphe de la densité de la loi exponentielle E(0.1) sur [0, 60].