Sujet : Estimateur

Exercice

On considère une variable aléatoire réelle T dont une densité de probabilité f est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & pour \quad x \geq \theta \\ 0 \quad si \quad x < \theta \end{cases}$$

θ désignant un paramètre réel strictement positif inconnu.

Soit $T_1, T_2, \ldots, T_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi que T.

On considère les variables aléatoires réelles :

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \quad et \quad Y_n = \inf_{1 \leq i \leq n} T_i$$

1. a. Vérifier que f est une densité de probabilité
   b. Déterminer la fonction de répartition F de T.
   c. Calculer E(T) et V(T).
2. Montrer que $Z_n = X_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ.
3. Déterminer la fonction de répartition de Y_n puis une densité de Y_n.
4. Montrer que $W_n = Y_n - \dfrac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de θ.
5. Calculer la variance de chacun des estimateurs Z_n et W_n. En déduire que Z_n et W_n sont deux estimateurs convergeant de θ.
   Quel est le meilleur des deux ?
6. On veut construire un estimateur sans biais et convergeant pour le paramètre θ, comme combinaison linéaire de Z_n et W_n.
   De plus on désire que la variance de l'estimateur soit la plus petite possible.
   Vérifier que la solution est $H_n = aZ_n + bW_n$ avec : $a = \dfrac{1 - \rho_n\sqrt{n}}{n + 1 - 2\rho_n\sqrt{n}}$ et $b = \dfrac{n - \rho_n\sqrt{n}}{n + 1 - 2\rho_n\sqrt{n}}$
   où ρ_n désigne le coefficient de corrélation des variables aléatoires réelles $X_n \; et \; Y_n$.