Teoria da Probabilidade, Resumo da A2

jãopredo e artu

21/05/2025

Contents

1. Variáveis Aleatórias Contínuas 2
   1.1. Definições 2
   1.2. Propriedades da CDF e PDF 2
   1.3. LOTUS (Law of The Unconscious Statistician) 3
   1.4. Variância e Esperança 3
   1.5. Propriedades da Esperança e Variância 3
2. Distribuições Contínuas 3
   2.1. Distribuição Uniforme 3
      2.1.1. Esperança 4
      2.1.2. Variância 4
   2.2. Distribuição Exponencial 4
      2.2.1. Esperança 5
      2.2.2. Variância 5
   2.3. Distribuição Gamma 6
   2.4. Distribuição Normal 6
   2.5. Taxa de Falhas 6
3. Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais 6
   3.1. Função de Densidade Conjunta 6
   3.2. Distribuições Marginais e Condicionais 6
   3.3. Covariância e Correlação 6
   3.4. Mudança de Variáveis Contínuas 6
4. Soluções de Exercícios de Testes Anteriores 6
   4.1. Teste 2022 6
   4.2. Teste 2021 6

1. Variáveis Aleatórias Contínuas

1.1. Definições

Definimos aqui o necessário sobre variáveis aleatórias contínuas para a compreensão dos conteúdos do teste:

Definição 1.1.1: (V.A Contínua)
Uma v.a $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita contínua se e somente se sua CDF F_X for derivável

Definição 1.1.2: (Função de Distribuição - CDF)
A função de distribuição de uma v.a contínua X é dada por:

$$F_X(\varphi) = P(X \leq \varphi) \tag{1}$$

Definição 1.1.3: (Função de Densidade - PDF)
Calculamos a densidade de probabilidade calculando a probabilidade de X estar num intervalo, e dividimos pelo tamanho do intervalo:

$$\frac{P(X \in I = [\psi, \psi + \varepsilon])}{\|I\| = \varepsilon} = \frac{P(\psi \leq X \leq \psi + \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{F_X(\psi + \varepsilon) - F_X(\psi)}{\varepsilon} \tag{2}$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, obtemos a *função de densidade de probabilidade* PDF no ponto ψ:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_X(\psi + \varepsilon) - F_X(\psi)}{\varepsilon} = F_X'(\psi) = f_X(\psi) \tag{3}$$

É importante notar que a PDF não é uma probabilidade, mas sim uma densidade de probabilidade. Veja:

$$P(X \in I) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \tag{4}$$

Usamos a PDF e o teorema fundamental do cálculo para calcular a probabilidade de X estar em um intervalo $I = [a, b]$:

$$P(X \in I) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(\varphi) d\varphi \tag{5}$$

Logo a **a integral definida** da PDF é de fato uma probabilidade.

1.2. Propriedades da CDF e PDF

Dada uma v.a contínua X com PDF f_X e CDF F_X, é intuitivo que com $\varphi \to \infty$, $P(X \leq \varphi) = F_X(\varphi) \to 1$, e analogamente com $\varphi \to -\infty$, $P(X \leq \varphi) = F_X(\varphi) \to 0$. Então enunciamos as seguintes propriedades:

Propriedade 1.2.1.:

$$\begin{gathered} \lim_{\varphi \to \infty} F_X(\varphi) = 1 \\ \lim_{\varphi \to -\infty} F_X(\varphi) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Logo, $F_X(\varphi)$ é uma função crescente, e $F_X(\varphi) \in [0, 1]$.

Propriedade 1.2.2.:

$$\begin{gathered} F_X(\varphi) = \int_{-\infty}^{\varphi} f_X(\psi) d\psi \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\psi) d\psi = 1 \end{gathered} \tag{7}$$

Propriedade 1.2.3.: Seja X uma v.a contínua com PDF f_X e CDF F_X, tome $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e $Y = g(X)$ com PDF e CDF f_Y, F_Y, respectivamente. Então:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\varphi)}{h'(\varphi)} \tag{8}$$

Com $\varphi = h^{-1}(y)$

1.3. LOTUS (Law of The Unconscious Statistician)

Se X é uma v.a contínua com PDF $f_X(\varphi)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então a esperança de $Y = g(X)$ é dada por:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\varphi) f_X(\varphi) d\varphi \tag{9}$$

1.4. Variância e Esperança

Definição 1.4.1: (Esperança)
Dada uma v.a contínua X com PDF $f_X(\varphi)$, a esperança de X é dada por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi f_X(\varphi) d\varphi \tag{10}$$

Definição 1.4.2: (Variância, Desvio-Padrão)
A variância de uma v.a contínua X com PDF $f_X(\varphi)$ e esperança $\mu = E(X)$ é dada por:

$$V(X) = E[(X - E(X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi - \mu]^2 f_X(\varphi) d\varphi \tag{11}$$

O desvio padrão é:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{12}$$

1.5. Propriedades da Esperança e Variância

Dadas v.a's contínuas X, Y com PDF $f_X(\varphi), f_Y(\varphi)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

Propriedade 1.5.1.:

$$\begin{gathered} E(aX + b) = aE(X) + b \\ E(X + Y) = E(X) + E(Y) \\ V(aX + b) = a^2 V(X) \end{gathered} \tag{13}$$

E caso X, Y sejam independentes:

$$\begin{gathered} E(XY) = E(X)E(Y) \\ V(X + Y) = V(X) + V(Y) \end{gathered} \tag{14}$$

Propriedade 1.5.2.: Podemos calcular a variância de X usando a esperança:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{15}$$

2. Distribuições Contínuas

2.1. Distribuição Uniforme

Uma v.a contínua X tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua PDF for da forma:

$$f_X(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \varphi < a \\ \frac{1}{b-a}, \text{ se } a \leq \varphi \leq b \end{cases} \tag{16}$$

Desta forma sua CDF é:

$$F_X(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \varphi < a \\ \frac{\varphi-a}{b-a}, \text{ se } a \leq \varphi \leq b \\ 1, \text{ se } \varphi > b \end{cases} \tag{17}$$

O seguinte teorema é extremamente importante:

Teorema 2.1.1: (Universalidade da Uniforme)
Se X é uma v.a contínua com PDF f_X e CDF F_X, então $Y = F_X(X)$ é uma uniforme em $[0,1]$, ou seja: $Y \sim U[0,1]$

Demonstração:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y \tag{18}$$

Logo Y é uma uniforme em $[0,1]$. □

2.1.1. Esperança

Com $X \sim U[a,b]$, temos

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi f_X(\varphi) d\varphi = \int_a^b \varphi \left(\frac{1}{b-a}\right) d\varphi = \frac{a+b}{2} \tag{19}$$

2.1.2. Variância

Com $X \sim U[a,b]$, temos:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 f_X(\varphi) d\varphi = \int_a^b \varphi^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) d\varphi = \left(\frac{1}{b-a}\right) \int_a^b \varphi^2 d\varphi \\ &= \left(\frac{1}{b-a}\right) \left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_a^b = \left(\frac{1}{b-a}\right) \left[\frac{b^3 - a^3}{3}\right] = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned} \tag{20}$$

E a variância fica:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{21}$$

2.2. Distribuição Exponencial

Uma v.a contínua X tem distribuição exponencial se sua PDF for da forma:

$$f_X(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \varphi < 0 \\ \lambda e^{-\lambda\varphi}, \text{ se } \varphi \geq 0 \end{cases} \tag{22}$$

$\lambda > 0$ é o parâmetro da distribuição. A CDF é dada por:

$$F_X(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \varphi < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\varphi}, \text{ se } \varphi \geq 0 \end{cases} \tag{23}$$

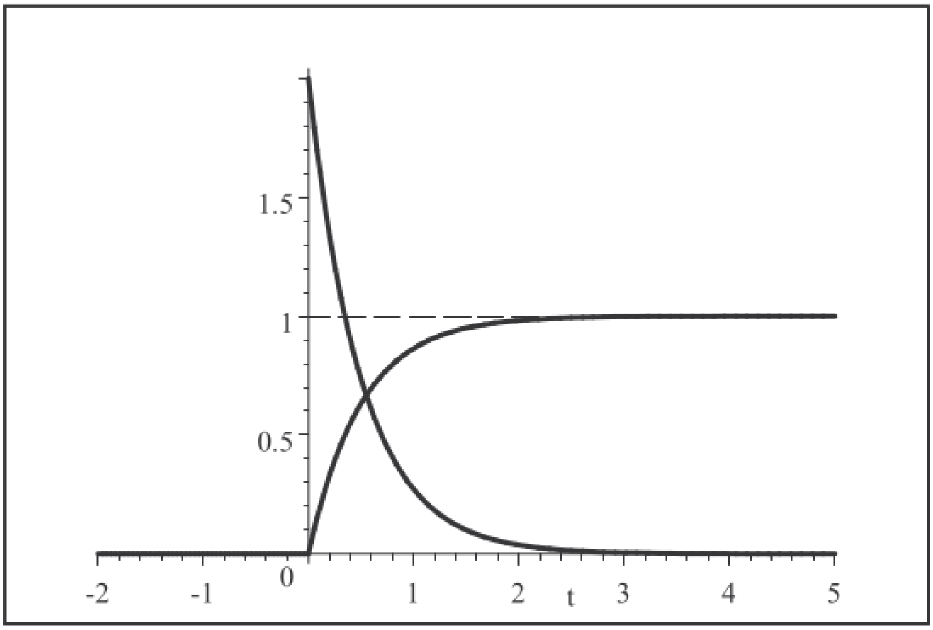

Figure 1: PDF e CDF Da Exponencial com $\lambda = 2$

Isto também é útil:

Proposição 2.2.1.: Se $X \sim \text{Expo}(\lambda)$, $Y = aX$, então $Y \sim \text{Expo}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

Demonstração: Pela Propriedade 1.2.3., temos:

$$\begin{gathered} f_Y(y) = \frac{f_X(\varphi)}{h'(\varphi)} \\ h'(\varphi) = a \\ \varphi = h^{-1}(y) = \frac{y}{a} \end{gathered} \tag{24}$$

Então:

$$\begin{gathered} f_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda\left(\frac{y}{a}\right)}}{a} = \left(\frac{\lambda}{a}\right) e^{-\lambda\left(\frac{y}{a}\right)} \\ F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda\left(\frac{y}{a}\right)} \end{gathered} \tag{25}$$

O que conclui a prova. □

Corolário 2.1.1.1: Se $X \sim \text{Expo}(\lambda)$, então $\lambda X \sim \text{Expo}(1)$

2.2.1. Esperança

Com $X \sim \text{Expo}(\lambda)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi f_X(\varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} \varphi \lambda e^{-\lambda \varphi} d\varphi = \frac{1}{\lambda} \tag{26}$$

2.2.2. Variância

Com $X \sim \text{Expo}(\lambda)$, temos:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 f_X(\varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} \varphi^2 \lambda e^{-\lambda \varphi} d\varphi = \frac{2}{\lambda^2} \tag{27}$$

E a variância fica:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \tag{28}$$

2.3. Distribuição Gamma

2.4. Distribuição Normal

2.5. Taxa de Falhas

3. Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

3.1. Função de Densidade Conjunta

3.2. Distribuições Marginais e Condicionais

3.3. Covariância e Correlação

3.4. Mudança de Variáveis Contínuas

4. Soluções de Exercícios de Testes Anteriores

4.1. Teste 2022

4.2. Teste 2021