Teoria da Probabilidade, Resumo da A2

jãopredo e artu

23/05/2025

Contents

1. Variáveis Aleatórias Contínuas

1.1. Definições

Definimos aqui o necessário sobre variáveis aleatórias contínuas para a compreensão dos conteúdos do teste:

Definição 1.1.1: (V.A Contínua)
Uma v.a $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita contínua se e somente se sua CDF F_X for derivável

Definição 1.1.2: (Função de Distribuição - CDF)
A função de distribuição de uma v.a contínua X é dada por:

$$F_X(\varphi) = P(X \leq \varphi) \tag{1}$$

Definição 1.1.3: (Função de Densidade - PDF)
Calculamos a densidade de probabilidade calculando a probabilidade de X estar num intervalo, e dividimos pelo tamanho do intervalo:

$$\frac{P(X \in I = [\psi, \psi + \varepsilon])}{\|I\| = \varepsilon} = \frac{P(\psi \leq X \leq \psi + \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{F_X(\psi + \varepsilon) - F_X(\psi)}{\varepsilon} \tag{2}$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, obtemos a *função de densidade de probabilidade* PDF no ponto ψ:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_X(\psi + \varepsilon) - F_X(\psi)}{\varepsilon} = F'_X(\psi) = f_X(\psi) \tag{3}$$

É importante notar que a PDF não é uma probabilidade, mas sim uma densidade de probabilidade. Veja:

$$P(X \in I) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \tag{4}$$

Usamos a PDF e o teorema fundamental do cálculo para calcular a probabilidade de X estar em um intervalo $I = [a, b]$:

$$P(X \in I) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(\varphi) d\varphi \tag{5}$$

Logo a **a integral definida** da PDF é de fato uma probabilidade.

1.2. Propriedades da CDF e PDF

Dada uma v.a contínua X com PDF f_X e CDF F_X, é intuitivo que com $\varphi \to \infty$, $P(X \leq \varphi) = F_X(\varphi) \to 1$, e analogamente com $\varphi \to -\infty$, $P(X \leq \varphi) = F_X(\varphi) \to 0$. Então enunciamos as seguintes propriedades:

Propriedade 1.2.1.:

$$\begin{gathered} \lim_{\varphi \to \infty} F_X(\varphi) = 1 \\ \lim_{\varphi \to -\infty} F_X(\varphi) = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Logo, $F_X(\varphi)$ é uma função crescente, e $F_X(\varphi) \in [0, 1]$.

Propriedade 1.2.2.:

$$\begin{gathered} F_X(\varphi) = \int_{-\infty}^{\varphi} f_X(\psi) d\psi \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\psi) d\psi = 1 \end{gathered} \tag{7}$$

Propriedade 1.2.3.: Seja X uma v.a contínua com PDF f_X e CDF F_X, tome $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e $Y = g(X)$ com PDF e CDF f_Y, F_Y, respectivamente. Então:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\varphi)}{h'(\varphi)} \tag{8}$$

Com $\varphi = h^{-1}(y)$

Caso h seja decrescente:

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(\varphi)}{h'(\varphi)} \tag{9}$$

Caso seja injetiva (pode ser crescente e decrescente em lugares diferentes):

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\varphi)}{|h'(\varphi)|} \tag{10}$$

Caso seja uma função fudida quem nem injetiva é, mas pelo menos derivável, defina $\forall y \in \mathrm{Im}(h)$:

$$I_y = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = y\} \tag{11}$$

Contendo um número finito de elementos $x_1(y), ..., x_{k(y)}(y)$. Então a densidade de Y é dada por:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k(y)} \frac{f_X(x_i(y))}{|h'(x_i(y))|} \tag{12}$$

1.3. LOTUS (Law of The Unconscious Statistician)

Se X é uma v.a contínua com PDF $f_X(\varphi)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então a esperança de $Y = g(X)$ é dada por:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\varphi) f_X(\varphi) d\varphi \tag{13}$$

1.4. Variância e Esperança

Definição 1.4.1: (Esperança)
Dada uma v.a contínua X com PDF $f_X(\varphi)$, a esperança de X é dada por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi f_X(\varphi) d\varphi \tag{14}$$

Definição 1.4.2: (Variância, Desvio-Padrão)
A variância de uma v.a contínua X com PDF $f_X(\varphi)$ e esperança $\mu = E(X)$ é dada por:

$$V(X) = E[(X - E(X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi - \mu]^2 f_X(\varphi) d\varphi \tag{15}$$

O desvio padrão é:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{16}$$

1.5. Propriedades da Esperança e Variância

Dadas v.a's contínuas X, Y com PDF $f_X(\varphi), f_Y(\varphi)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

Propriedade 1.5.1.:

$$
\begin{aligned}
E(aX+b) &= aE(X)+b \\
E(X+Y) &= E(X)+E(Y) \\
V(aX+b) &= a^2V(X)
\end{aligned} \tag{17}
$$

E caso X, Y sejam independentes:

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= E(X)E(Y) \\
V(X+Y) &= V(X)+V(Y)
\end{aligned} \tag{18}
$$

Propriedade 1.5.2.: Podemos calcular a variância de X usando a esperança:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{19}$$

2. Distribuições Contínuas

2.1. Distribuição Uniforme

Uma v.a contínua X tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua PDF for da forma:

$$f_X(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \varphi < a \\ \frac{1}{b-a}, \text{ se } a \leq \varphi \leq b \end{cases} \tag{20}$$

Desta forma sua CDF é:

$$F_X(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \varphi < a \\ \frac{\varphi-a}{b-a}, \text{ se } a \leq \varphi \leq b \\ 1, \text{ se } \varphi > b \end{cases} \tag{21}$$

O seguinte teorema é extremamente importante:

Teorema 2.1.1: (Universalidade da Uniforme)
Se X é uma v.a contínua com PDF f_X e CDF F_X, então $Y = F_X(X)$ é uma uniforme em $[0, 1]$, ou seja: $Y \sim U[0, 1]$

Demonstração:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y \tag{22}$$

Logo Y é uma uniforme em $[0, 1]$. □

2.1.1. Esperança

Com $X \sim U[a, b]$, temos

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi f_X(\varphi) d\varphi = \int_a^b \varphi \left(\frac{1}{b-a}\right) d\varphi = \frac{a+b}{2} \tag{23}$$

2.1.2. Variância

Com $X \sim U[a, b]$, temos:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 f_X(\varphi) d\varphi = \int_a^b \varphi^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) d\varphi = \left(\frac{1}{b-a}\right) \int_a^b \varphi^2 d\varphi \\
&= \left(\frac{1}{b-a}\right) \left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_a^b = \left(\frac{1}{b-a}\right) \left[\frac{b^3-a^3}{3}\right] = \frac{b^2+ab+a^2}{3}
\end{aligned} \tag{24}
$$

E a variância fica:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{25}$$

2.2. Distribuição Exponencial

Uma v.a contínua X tem distribuição exponencial se sua PDF for da forma:

$$f_X(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \varphi < 0 \\ \lambda e^{-\lambda\varphi}, \text{ se } \varphi \geq 0 \end{cases} \tag{26}$$

$\lambda > 0$ é o parâmetro da distribuição. A CDF é dada por:

$$F_X(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \varphi < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\varphi}, \text{ se } \varphi \geq 0 \end{cases} \tag{27}$$

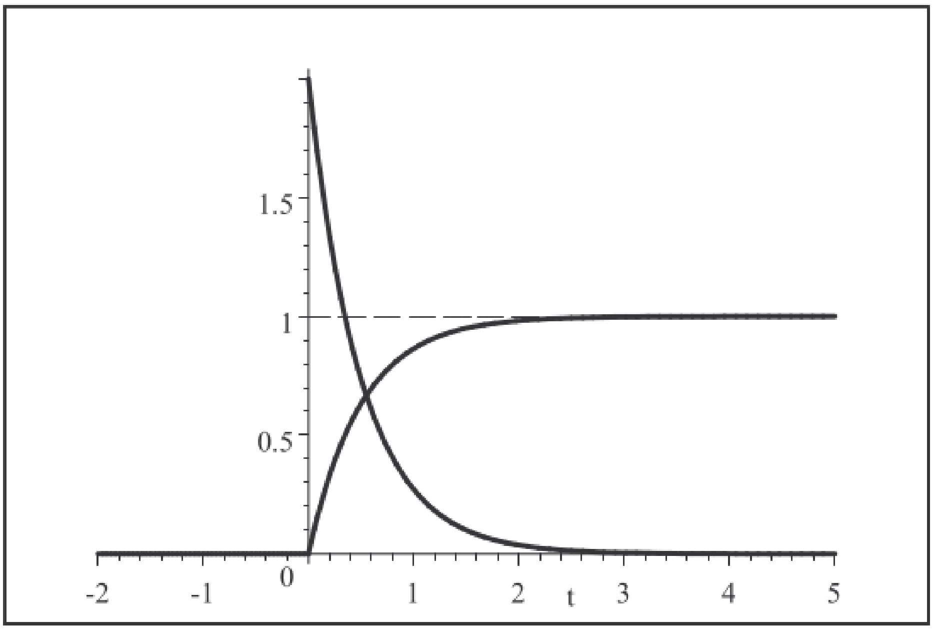

Figure 1: PDF e CDF Da Exponencial com $\lambda = 2$

Isto também é útil:

Proposição 2.2.1.: Se $X \sim \text{Expo}(\lambda)$, $Y = aX$, então $Y \sim \text{Expo}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

Demonstração: Pela Propriedade 1.2.3., temos:

$$\begin{gathered} f_Y(y) = \frac{f_X(\varphi)}{h'(\varphi)} \\ h'(\varphi) = a \\ \varphi = h^{-1}(y) = \frac{y}{a} \end{gathered} \tag{28}$$

Então:

$$\begin{gathered} f_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda\left(\frac{y}{a}\right)}}{a} = \left(\frac{\lambda}{a}\right) e^{-\lambda\left(\frac{y}{a}\right)} \\ F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda\left(\frac{y}{a}\right)} \end{gathered} \tag{29}$$

O que conclui a prova. □

Corolário 2.1.1.1: Se $X \sim \text{Expo}(\lambda)$, então $\lambda X \sim \text{Expo}(1)$

2.2.1. Esperança

Com $X \sim \text{Expo}(\lambda)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi f_X(\varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} \varphi \lambda e^{-\lambda\varphi} d\varphi = \frac{1}{\lambda} \quad (30)$$

2.2.2. Variância

Com $X \sim \text{Expo}(\lambda)$, temos:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 f_X(\varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} \varphi^2 \lambda e^{-\lambda\varphi} d\varphi = \frac{2}{\lambda^2} \quad (31)$$

E a variância fica:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (32)$$

2.3. Distribuição Gamma

2.3.1. A função Gamma

A função Γ é definida como:

$$\Gamma(\varphi) = \int_0^{\infty} t^{\varphi-1} e^{-t} dt \quad (33)$$

As propriedades abaixo serão muito úteis:

Propriedade 2.3.1.1.:

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)! \quad (34)$$

Propriedade 2.3.1.2.:

$$\Gamma(\varphi + 1) = \varphi\Gamma(\varphi), \forall\varphi > 0. \quad (35)$$

Alguns valores úteis de Γ são:

$$\begin{gathered} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(2) = 1 \\ \Gamma(3) = 2 \\ \Gamma(4) = 6 \\ \Gamma(5) = 24 \\ \vdots \end{gathered} \quad (36)$$

2.3.2. A distribuição Gamma

Uma variável aleatória X tem distribuição gamma com parâmetros $\alpha, \lambda > 0$ se sua PDF é dada por:

$$f_X(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ se } \varphi < 0 \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \varphi^{\alpha-1} e^{-\lambda\varphi}, \text{ se } \varphi \geq 0 \end{cases} \quad (37)$$

2.3.2.1. Esperança

A esperança de $Z \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ é:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi f_Z(\varphi) d\varphi = \int_0^{\infty} \varphi \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \varphi^{\alpha-1} e^{-\lambda\varphi} d\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (\lambda\varphi)^\alpha e^{-\lambda\varphi} d\varphi \tag{38}$$

Fazendo $x = \lambda\varphi$, temos:

$$E(Z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-x} \frac{dx}{\lambda} = \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+1) = \frac{\alpha}{\lambda} \tag{39}$$

2.3.2.2. Variância

Dada $Z \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (\lambda x)^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx = \left(\frac{1}{\lambda^2}\Gamma(\alpha)\right) \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} dx \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\Gamma(\alpha)\right)\Gamma(\alpha+2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \end{aligned} \tag{40}$$

E a variância fica:

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} \tag{41}$$

Isso também pode ser útil:

Proposição 2.3.2.2.1.: Se $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Z = \lambda X$, então $Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$

Demonstração: Pela Propriedade 1.2.3., temos:

$$\begin{gathered} f_Z(z) = \frac{f_X(\varphi)}{h'(\varphi)} \\ h'(\varphi) = \lambda \\ \varphi = h^{-1}(z) = \frac{z}{\lambda} \end{gathered} \tag{42}$$

Então:

$$f_Z(z) = \frac{\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda\left(\frac{z}{\lambda}\right)}}{\lambda} = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right) z^{\alpha-1} e^{-z} \tag{43}$$

Assim $Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$. □

2.4. Distribuição Normal

X v.a contínua tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 se sua PDF é dada por:

$$f_X(\varphi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varphi-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{44}$$

Note que $f(\mu + a) = f(\mu - a)$, então a PDF é simétrica em torno de μ (a média).

A PROPOSIÇÃO ABAIXO É MUITO IMPORTANTE PARA RESOLVER PROBLEMS COM A NORMAL:

Proposição 2.4.1.: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Demonstração: Pela Propriedade 1.2.3., temos:

$$\begin{gathered} f_Z(z) = \frac{f_X(\varphi)}{h'(\varphi)} \\ h'(\varphi) = \frac{1}{\sigma} \\ \varphi = h^{-1}(z) = \mu + \sigma z \end{gathered} \tag{45}$$

Então:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)\frac{e^{-\frac{(\mu+\sigma z-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sigma}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Logo $Z \sim N(0, 1)$. □

A Proposição 2.4.1. é muito útil para resolver problemas com uma tabela de valores da FDA de $N(0, 1)$.

2.4.1. Esperança

Com $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos:

$$
E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi f_X(\varphi) d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(\varphi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\varphi = \mu \tag{47}
$$

2.4.2. Variância

Com $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos:

$$
E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 f_X(\varphi) d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(\varphi-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\varphi = \mu^2 + \sigma^2 \tag{48}
$$

Logo a variância fica:

$$
V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2 \tag{49}
$$

2.5. Taxa de Falhas

Definição 2.5.1: Seja T o tempo de vida de um equipamento, ou seja o instante da sua primeira falha, cuja FDS é $F(t)$. A **confiabilidade** do equipamento é dada por:

$$
R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) \tag{50}
$$

Definição 2.5.2: A **taxa média de falhas** de um equipamento num intevalo $[t, t + \Delta t]$, é a probabilidade de ele falhar nos próximos Δt, dado que ainda não falhou:

$$
\begin{aligned}
\text{TMF} &= \frac{P(T \le t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta}t = \frac{P(T \le t + \Delta t)}{\Delta t \cdot P(T > t)} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t[1 - F(t)]} \\
&= \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{R(t) \cdot \Delta t}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Quando $\Delta t \to 0$, obtemos a **taxa de falhas**:

$$
\text{TF} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{R(t) \cdot \Delta t} = \frac{-R'(t)}{R(t)} \tag{52}
$$

3. Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

3.1. Função de Densidade Conjunta

Definição 3.1.1: (Função de Densidade Conjunta)

Uma função de densidade conjunta $f(x, y)$ das variáveis X e Y é uma função com a seguinte propriedade:

$$P((X, Y) \in R) = \iint_R f(x, y) dA \tag{53}$$

Onde $R \subset \mathbb{R}^2$. Por conseguinte, f deve satisfazer:

$$\begin{gathered} f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1 \end{gathered} \tag{54}$$

3.1.1. Esperança, Variância e Desvio-Padrão

Definição 3.1.1.1: (Esperança)
Dadas X, Y com densidade conjunta $f(x, y)$, a esperança de X é:

$$E(X) = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y) dA \tag{55}$$

Definição 3.1.1.2: (Variância, Desvio-Padrão)
A variância de X é análoga ao caso anterior:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{56}$$

O desvio padrão é:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{57}$$

3.1.2. LOTUS 2

Dadas X, Y com densidade conjunta $f(x, y)$, o valor esperado de uma função qualquer $g(X, Y)$ é:

$$E(g(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y) dA \tag{58}$$

Quando a densidade conjunta é constante em $S \subset \mathbb{R}^2$ e 0 fora de S, dizemos que $f(x, y)$ é uma função de densidade uniforme em S:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ se } (x, y) \notin S \\ \frac{1}{\text{Área}(S)}, \text{ se } (x, y) \in S \end{cases} \tag{59}$$

3.2. Distribuições Marginais e Condicionais

Lembrando o caso discreto, dadas X, Y v.a's discretas com densidade conjunta $p(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$, temos os conceitos e covariância e correlação:

$$\begin{gathered} \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \\ \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \end{gathered} \tag{60}$$

Também temos as distribuições marginais e condicionais (Pelo teorema de Bayes e a Lei da Probabilidade Total):

$$p_X(x) = P(X = x) = \sum_y p(x, y)$$
$$p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x p(x, y) \quad (61)$$
$$p_{X|Y}(x|y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

Com $f(x, y)$ sendo uma densidade conjunta, a diferença agora é a transição de $\sum \to \int$:

Definição 3.2.1: (Distribuição Marginal)
A distribuição marginal de X é dada por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (62)$$

Definição 3.2.2: (Distribuição Condicional)
A distribuição condicional de X dado Y é dada por:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (63)$$

3.3. Covariância e Correlação

A Covariância e correlação são **análogas** ao caso discreto:

Definição 3.3.1: (Covariância)
A covariância de X e Y é dada por:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (64)$$

Definição 3.3.2: (Correlação)
A correlação de X e Y é dada por:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \quad (65)$$

3.4. Esperança Condicional

Isso é bem útil:

Definição 3.4.1: A esperança condicional de X na certeza de $Y = y$ é:

$$E(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx \quad (66)$$

(As vezes denotado por $E[X|y]$).

3.5. Independência

As v.a's contínuas X e Y são ditas **independentes** se e somente se a densidade conjunta $f(x, y)$ for o produto das marginais:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (67)$$