Resumo da A2 de Cálculo Vetorial

Arthur Rabello Oliveira

23/06/2025

Contents

1. Revisão da A1

1.1. Integrais de Linha

1.1.1. Integrais de Linha Escalares

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar e $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva, a integral de f sobre γ é:

$$\int_\gamma f dS = \int_a^b f(\gamma(\varphi)) \cdot \|\gamma'(\varphi)\| d\varphi \tag{1}$$

1.1.2. Integrais de Linha Vetoriais

Se for $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial:

$$\int_\gamma F dS = \int_a^b F(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi) d\varphi \tag{2}$$

1.1.3. Integral de Linha de um Campo Conservativo

Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for conservativo, com $f :: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nabla f = F$ e $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, temos:

$$\int_c F dS = f(c(b)) - f(c(a)) \tag{3}$$

E são equivalentes:

1. F é conservativo
2. $\int_c F dS = 0$ para todo caminho fechado c
3. $\oint_c F = 0$

2. Integrais de Superfície

2.1. Integrais de Superfície Escalares

Lembrando que uma *superfície* é uma função:

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

Onde D é fechado e limitado.

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é função escalar e S uma superfície, a integral de f sobre S é:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \cdot \|\varphi_u \times \varphi_v\| du dv \tag{5}$$

2.2. Integrais de Superfície Vetoriais

Se for $F : \mathbb{R}^{\to}\mathbb{R}^n$ um campo vetorial, o **fluxo** de F sobre a superfície S é:

$$\iint_S F dS = \iint_S F \cdot \hat{n} dS = \iint_D F(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) du dv \tag{6}$$

O vetor $\hat{n}$ é o vetor unitário normal à superfície S. Note que $\iint_S F \cdot \hat{n} dS$ é uma integral escalar.

3. Operadores Diferenciais

3.1. Gradiente

O gradiente ∇ de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{7}$$

3.2. Rotacional

Dada $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F = (F_1, F_2, F_3)$ um campo vetorial, o rotacional de F é:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(F) &= \nabla \times F \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Se for $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F = (F_1, F_2)$, o rotacional fica:

$$\mathrm{rot}(F) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \tag{9}$$

3.3. Laplaciano

Dada $f : \mathbb{R}^{\to}\mathbb{R}$, o laplaciano é:

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \tag{10}$$

Se $\Delta f = 0$, f é dita *harmônica*.

4. Propriedades dos Operadores Diferenciais

1. div, rot, ∇ são lineares
2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(F)) = 0$ para todo campo vetorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
3. $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$
5. $\mathrm{div}(f \cdot F) = \nabla f \cdot F + \mathrm{div}(F) \cdot f$
6. $\mathrm{div}(F \times G) = G\ \mathrm{rot}(F) - F\ \mathrm{rot}(G)$
7. $\mathrm{rot}(f \cdot F) = f\ \mathrm{rot}(F) + \nabla f \times F$
8. $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$
9. $\Delta(f \cdot g) = f\Delta g + 2\nabla f\nabla g + g\nabla f$

5. Teorema de Green

Seja D fechada limitada de $\mathbb{R}^2$, com ∂D orientada positivamente, C^1 por partes de forma que ∂D seja percorrida *uma* vez. Se $F = (F_1, F_2)$ é um campo vetorial definido num aberto que contém D, então:

$$\int_{\partial D} F \cdot dS = \iint_D \mathrm{rot}(F) \cdot dS = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \tag{11}$$

6. Teorema de Stokes

Analogamente ao Teorema de Green, temos:

$$\int_{\delta S} F \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(F) \cdot dS \tag{12}$$

Mas aqui $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

7. Teorema da Divergência

Seja V uma região fechada e limitada de $\mathbb{R}^3$, de forma que ∂D seja uma superfície com vetores normais exteriores, então:

$$\iint_{\partial V} F \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(F) dV \tag{13}$$

8. Fatos úteis

1. O campo $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x, y, z)$ é tal que $\iint_S F dS = 4\pi$, para toda superfície S fechada que delimite um sólido e contenha a origem.
2. Coordenadas esféricas:

$$\begin{gathered} x = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z = \rho \cos(\theta) \\ \texttt{Jac} = \rho^2 \sin(\theta) \end{gathered} \tag{14}$$

3. Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{gathered} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \\ z = z \\ \texttt{Jac} = r \end{gathered} \tag{15}$$

4. O campo $F(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1} \cdot (-y, x)$ é tal que $\int_c F$ é a variação de ângulo da curva c
5.