Equações Diferenciais Ordinárias, Resumo A2

jãopredo e artu

05/06/2025

Contents

1. Transformada de Laplace

1.1. Definição

Definição 1.1.1: (Transformada de Laplace)
Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua por partes e $f \in O(e^{st})$, definimos a Transformada de Laplace como

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{1}$$

1.2. Propriedades Com derivada

Propriedade 1.2.1.: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável, então:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \tag{2}$$

Analogamente:

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \tag{3}$$

E assim por diante.

Resolver EDO's com a transformada de Laplace se restringe a algebricamente buscar a inversa de $L\{f(t)\}$, justamente a função procurada.

1.3. Função degrau

A função degrau u_c é definida como:

$$u_{c(t)} = \begin{cases} 0 \text{ se } t < c \\ 1 \text{ se } t \geq c \end{cases} \tag{4}$$

1.4. Propriedades com Função degrau

Propriedade 1.4.1.: Se $F(s) = L\{f(t)\}$ existe, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então:

$$L\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-sc} \cdot L\{f(t)\} \tag{5}$$

Propriedade 1.4.2.: Se $F(s) = L\{f(t)\}$ existe, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então:

$$L\{e^{ct} f(t)\} = F(s-c) \tag{6}$$

Ou equivalentemente:

$$e^{ct} f(t) = L^{-1}\{F(s-c)\} \tag{7}$$

1.5. Função Impulso

A função impulso δ satifaz:

$$\begin{gathered} \delta(t) = 0, t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{gathered} \tag{8}$$

1.6. Propriedades com Função Impulso

A transformada de Laplace da função impulso é:

$$L\{\delta(t-c)\} = e^{-sc} \tag{9}$$

E também vale:

$$L\{\delta(t-c) f(t)\} = f(c) e^{-sc} \tag{10}$$

1.7. Convolução

Dadas $F(s) = L\{f(t)\}$ e $G(s) = L\{g(t)\}$, a transformada do produto pode ser calculada como:

$$H(s) = F(s)G(t) = L\{h(t)\} \tag{11}$$

Onde:

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{12}$$

A função h é chamada de convolução de f e g, denotada por $f * g$.

2. Sistemas de EDO's de Primeira Ordem

2.1. Sistemas Lineares

Sistemas da forma:

$$Ax = x', A \in \mathbb{R}^{n\times n}, x \in \mathbb{R}^n \tag{13}$$

Têm solução constante em $x' = 0$.

Fazendo uma analogia em $\mathbb{R}$, temos $x' = ax$ => x = $e^{at}x_0$. O mesmo vale para exponenciais de matrizes. Buscamos então soluções da eq. (13) da forma:

$$x(t) = ve^{\lambda t}, v \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Ou seja:

$$Ax = x' \Leftrightarrow Ave^{\lambda t} = \lambda ve^{\lambda t} \tag{15}$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$:

$$Av = \lambda v \tag{16}$$

É exatamente o problema de autovalores da matriz de coeficientes A. Então seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, e v_i, λ_i o i-ésimo autovetor e autovalor de A, respectivamente. Então a solução gera de eq. (13) é:

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} \tag{17}$$

Onde c_i é determinado pela condição inicial $x(0) = x_0$.

A Bebel não gosta de notação eq. (17), então vamos escrever a solução do jeito da patroa:

$$x(t) = X\Lambda X^{-1} \cdot x_0 \tag{18}$$

Onde $X\Lambda X^{-1}$ é a decomposição espectral de A e:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \tag{19}$$