

Mínimos Quadrados e o Encapsulamento de Imagens via SVD

Arthur Rabello Oliveira¹

Deduzimos o número de condicionamento nos problemas de regressão linear e polinomial, investigando o comportamento das matrizes associadas e suas implicações na estabilidade algorítmica. Concluimos que, enquanto a regressão linear possui condicionamento convergente (para pontos igualmente espaçados na reta $(t_i, b_i) = (\frac{i}{m}, b_i)$, onde m e b_i são arbitrários), a regressão polinomial é extremamente sensível à perturbações à medida que o grau n aumenta.

Documentamos casos em que o número de condicionamento ultrapassa 10^{16} para $n \geq 8$, evidenciando severa instabilidade. Como aplicação interessante, usamos a decomposição SVD para compressão de imagens digitais, demonstrando uma abordagem de redução de custo que preserva características visuais importantes.

Neste processo, cada imagem é representada como uma matriz de pixels que pode ser decomposta via SVD na forma $A = U\Sigma V^T$, onde os valores singulares em Σ são ordenados de forma decrescente por importância. Aplicando técnicas de regressão linear para determinar o número ótimo de valores singulares a reter, estabelecemos uma relação entre taxa de compressão e qualidade da imagem reconstruída.

Para quantificar a eficiência da compressão, implementamos métricas de erro como MSE (Mean Squared Error) e PSNR (Peak Signal-to-Noise Ratio) e analisamos o comportamento dessas métricas em função do número de componentes principais utilizados. Nossa análise mostra que as primeiras componentes principais capturam a maior parte da informação relevante da imagem, permitindo reconstruções satisfatórias com menos de 20% dos valores singulares originais.

Além da redução significativa no armazenamento, demonstramos que o bom condicionamento da regressão linear permite prever com confiabilidade o limiar ótimo de compressão para diferentes classes de imagens, combinando efetivamente as duas partes do trabalho. Os resultados reforçam a importância do estudo do condicionamento numérico tanto para fins teóricos quanto para aplicações práticas em processamento de dados e imagens.

¹Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getúlio Vargas (FGV/EMAp), email: arthur.oliveira.1@fgv.edu.br