Lista 3 - Geometria Analítica e Matrizes - (Solucionário)

Arthur Rabello & Gabriel Carneiro

21/04/2025

Questão 1 (Introdutórios)

Use o Teorema de Rouché-Frobenius para determinar se os seguintes sistemas lineares são Possíveis e Determinados, Possíveis e Indeterminados ou Impossíveis:

a)

$$x + 2y + z = 2$$
$$-x + 3y + z = 0$$
$$-x + y + z = 1$$

b)

$$x + y + z = -1$$
$$-2x - y + z = 0$$
$$-2x + 7y + z = -4$$

Solution:

a)

A matriz aumentada do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que o sistema é possível e determinado, pois $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|b) = 3$.

b)

Analogamente ao item anterior, a matriz é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

E após escalonamento (faça as contas), concluímos que o sistema é possível e determinado.

Questão 2 (Introdutórios)

Use o Teorema de Rouché-Frobenius para determinar quando os seguintes sistemas lineares são Possíveis e Determinados, Possíveis e Indeterminados ou Impossíveis, segundo os valores de k:

a)

$$x - y + 2z = 3$$
$$kx + 5y - 4z = 1$$
$$-3x + 2y - z = 1$$

b)

$$-2x + y + kz = 4$$
$$x + z = 2$$
$$x + y + z = 2$$

Solution:

a)

A matriz do sistema é (não-aumentada):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 5 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que o determinante da matriz é $21 + 3k$, logo, o sistema é possível e determinado se $k \neq -7$. Para $k = -7$, o sistema é impossível, pois $\operatorname{rank}(A) = 2, \operatorname{rank}(A|b) = 3$ (faça as contas).

b)

A matriz do sistema é (não-aumentada):

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que o determinante da matriz é $k + 2$, logo, o sistema é possível e determinado se $k \neq -2$. Para $k = -2$, o sistema é impossível, pois $\operatorname{rank}(A) = 2, \operatorname{rank}(A|b) = 2$ (faça as contas).

Questão 3 (Introdutórios)

Mostre que as matrizes coluna a seguir são linearmente dependentes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solution:

Os vetores A, B, C são linearmente dependentes se $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus 0$ s.t:

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0$$

Ou, equivalentemente, se a matriz formada pelos vetores A, B, C não tem posto completo, ou seja, se $\text{rank}(A, B, C) < 3$.

A matriz formada pelos vetores A, B, C é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que o posto da matriz é $2 < 3$, logo os vetores são *LD*.

Questão 4 (Introdutórios)

Verificar que os seguintes sistemas de equações são, respectivamente, Determinado, Indeterminado e Impossível:

a)

$$\begin{gathered} 8x + y + 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{gathered}$$

b)

$$\begin{gathered} 6x - y + 3z = 6 \\ -6x + 8y = -10 \\ 2x - 5y - z = 4 \end{gathered}$$

c)

$$\begin{gathered} x + y + z = 1 \\ 3x - 4y = 5 \\ 7x - y - 3z = 8 \end{gathered}$$

Solution:

a)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & 9 \\ 5 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que o sistema é possível e determinado, pois $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = 3$.

b)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 6 \\ -6 & 8 & 0 & -10 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que o sistema é possível e indeterminado, pois $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b) = 2$.

c)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que o sistema é impossível, pois $\operatorname{rank}(A) = 2, \operatorname{rank}(A|b) = 3$.

Questão 1 (Aprofundamento)

Discutir o seguinte sistema de acordo com os valores de k:

$$kx - y = 1$$
$$x - ky = 2k - 1$$

Solution:

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$$

Cujo determinante é $1 - k^2$, com $k \neq \pm 1$, $\operatorname{rank}(A) = 2$, logo o sistema é possível e determinado. Se $k = 1$, ambas as equações se reduzem a $x - y = 1$, o que tem infinitas soluções. Se $k = -1$, o sistema se reduz a $x + y = 1$ e $x + y = 2$, o que é impossível.

Questão 2 (Aprofundamento)

Considere o sistema de equações lineares:

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$x + ay + 3z = 2$$
$$2x + (2 + a)y + 6z = 3$$

a)

Encontrar um valor de a para que o sistema seja Impossível.

b)

Verificar se existe algum valor de a para o qual o sistema seja Possível Determinado.

c)

Resolver o sistema para $a = 0$.

Solution:

a)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2+a & 6 \end{pmatrix}$$

Para $a = 2$, as linhas 1 e 2 se tornam iguais, logo o determinante zera e o sistema se torna impossível.

b)

Usando a mesma matriz (descrita no item anterior), note que o rank da matriz nunca é completo, logo o sistema nunca é possível e determinado (faça as contas).

c)

O sistema de equações é:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 0y + 3z &= 2 \\ 2x + 2y + 6z &= 3 \end{aligned}$$

Esse sistema possui infinitas soluções (verifique!).

Questão 3 (Aprofundamento)

(Exercício Opcional) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ \beta \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a)

Determinar o valor de α para que o sistema $AX = C_1$ seja Impossível.

b)

Determinar os valores de β para os quais o sistema $AX = C_2$ é Determinado e resolver para um desses valores.

c)

Para $\alpha = 3$ e $\beta = -13$, estudar o sistema $AX = C_1 + C_2$).

Solution:

a)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -9 & \alpha \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que o determinante da matriz é $2 + \alpha$, então quando $\alpha = -2$, o sistema é impossível.

b)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & -11 \\ 2 & 3 & -9 & \beta \end{pmatrix}$$

Escalonando a matriz, concluímos que o sistema é possível com $\beta = -13$.

c)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & -11 \\ 2 & 3 & -9 & -13 \end{pmatrix}$$

Após escalonamento, concluímos que o sistema é impossível (verifique!).

Questão 4 (Aprofundamento)

Discutir e resolver os seguintes sistemas:

a)

$$ax + y + z = 1$$
$$x + ay + z = b$$
$$x + y + az = 1$$

b)

$$x + 2z = 3$$
$$3x + y + z = -1$$
$$2y - z = -2$$
$$x - y + az = -5$$

Solution:

a)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Note que se $a = 1$, todas as linhas são iguais e o sistema é válido somente se $b = 1$, tendo infinitas soluções. Se $a \neq 1$, o determinante é $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = (a - 1)^3$.

Se $a = -2$ e $b = -2$, existem infinitas soluções. (verifique!)

b)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que se $a = -2$, temos uma solução única, caso contrário o sistema é impossível. (verifique!)

Questão 5 (Opcional) (Aprofundamento)

Três tipos de suplementos alimentares estão sendo desenvolvidos. Para cada grama de ração, tem-se que:

- O suplemento 1 tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C;
- O suplemento 2 tem 2, 3, e 5 unidades das vitaminas A, B, e C, respectivamente;
- O suplemento 3 tem 3 unidades das vitaminas A e C, e não contém vitamina B.

São necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B, e 20 de vitamina C, encontre todas as possíveis quantidades dos suplementos 1, 2, e 3, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.

a)

Qual o sistema homogêneo associado?

b)

O sistema homogêneo associado aceita solução não nula?

c)

Qual a relação entre a resposta dos itens anteriores?

d)

Se o suplemento 1 custa 6 reais por grama e os outros dois custam 1, existe uma solução custando exatamente 10 reais?

Solution:

a)

Seja x a quantidade de suplemento 1, y a quantidade de suplemento 2 e z a quantidade de suplemento 3. O sistema original é:

$$x + 2y + 3z = 11$$
$$3x + 3y + 0z = 9$$
$$4x + 5y + 3z = 20$$

E o sistema homogêneo associado é:

$$x + 2y + 3z = 0$$
$$3x + 3y + 0z = 0$$
$$4x + 5y + 3z = 0$$

b)

A matriz do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Após escalonamento (faça as contas), concluímos que o posto da matriz é 2, logo o sistema admite soluções não nulas.

c)

A existência de soluções não nulas para o sistema homogêneo indica que o sistema original não possui solução única. De fato, se o sistema homogêneo tem soluções não nulas, então o sistema original ou não tem solução ou tem infinitas soluções.

d)

A restrição adicional é $6x + y + z = 10$, vamos resolver agora o sistema completo:

$$x + 2y + 3z = 11 \text{ (vitamina A)}$$
$$3x + 3y + 0z = 9 \text{ (vitamina B)}$$
$$4x + 5y + 3z = 20 \text{ (vitamina C)}$$
$$6x + y + z = 10 \text{ (custo)}$$

Após umas maracutaias selvagens, obtemos:

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 2$$

É a solução custando exatamente 10 unidades de real.

Questão 1 (Avançados/Teóricos)

Demonstre que qualquer subconjunto não vazio de um conjunto de matrizes linearmente independentes $\{A_1, ..., A_n\}$ é também linearmente independente.

Solution:

Se $A = \{A_1, ..., A_n\}$ é *LI*, então:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0$$

Suponha agora que exista $K \subset A = \left\{A_{k_1}, ..A_{k_m}\right\}$ *LD*, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_{k_i} = 0 \text{ com um } \lambda_\varphi \neq 0$$

Então daí concluímos que:

$$A_{k_\varphi} = \frac{-\sum_{i \neq \varphi} \lambda_i A_{k_i}}{\lambda_\varphi}$$

Isso em A é um absurdo, pois o conjunto deixaria de ser *LI*. Logo não existe tal K.

Questão 2 (Avançados/Teóricos)

Ache matrizes A e B para as quais $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$, porém $\operatorname{rank}(A^2) \neq \operatorname{rank}\ (B^2)$.

Solution:

Tome $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Note que $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 1$, porém $\operatorname{rank}(A^2) = 0$ e $\operatorname{rank}(B^2) = 1$.