Lista 7 - Soluções

Arthur Rabello Oliveira

23/05/2025

1. Exercícios Introdutórios

1. (a) Temos $\langle v, w \rangle = a + 3$, logo $v \perp w \Leftrightarrow a = -3$

2. (a) 2 vetores em $\mathbb{R}^3$ geram, no máximo um plano. ($\mathbb{R}^2$ tem dimensão 2, e $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3)

(b) $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ se e somente se V for LI e gerador. Sabemos que 3 vetores LI em $\mathbb{R}^3$ geram $\mathbb{R}^3$. Como v_1, v_2 são LI. A condição é que v_3 não seja combinação linear de v_1, v_2.

(c) $v_3 = (1, 0, 0)$ não é combinação de nenhum dos anteriores. Logo $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ forma base de $\mathbb{R}^3$

3. (a) Forme a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

E note que:

$$\begin{gathered} \det(A) = 4 \cdot 2 \cdot 0 + 2(-1)(-3) + \\ (-2) \cdot 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

Então $N(A)$ é não-trivial. Logo suas colunas v_i não formam base de $\mathbb{R}^3$.

(b) As 2 primeiras componentes de v_1 são precisamente e respectivamente o dobro das 2 primeiras componentes de v_2 Mas $v_1 \neq 2v_2 \Rightarrow$ são LI

2. Exercício de Aprofundamento

1. (a) Dado que a fórmula de projeção é:

$$\text{proj}_a b = a \cdot \frac{a^T b}{a^T a} = a \cdot \frac{\langle a, b \rangle}{\langle a, a \rangle} \tag{3}$$

Fazemos:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (1,1,1) \\ w_2 = v_2 - \text{proj}_{w_1} v_2 &= (0,1,1) - (1,1,1) \cdot \frac{\langle (1,1,1), (0,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1), (1,1,1) \rangle} \\ &= (0,1,1) - (1,1,1) \cdot \frac{2}{3} \\ &= (0,1,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = w_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Agora para w_3:

$$
\begin{aligned}
w_3 &= v_3 - \operatorname{proj}_{w_1} v_3 - \operatorname{proj}_{w_2} v_3 \\
&= (1,2,3) - (1,1,1) \cdot \frac{\langle (1,1,1),(1,2,3) \rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1) \rangle} - \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\langle \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),(1,2,3) \rangle}{\langle \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \rangle} \\
&= (1,2,3) - (1,1,1) \cdot \frac{6}{3} - \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{2} = (1,2,3) - (2,2,2) - \left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = w_3.
\end{aligned} \tag{5}
$$

(b) Temos:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{3}{\sqrt{3}}\right) \\
u_2 &= \frac{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \\
u_3 &= \frac{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

(c) $w_1, ..., w_3$ são claramente normais. Nos falta mostrar que são LI e ortogonais. Note que:

$$
\begin{aligned}
\langle w_1, w_2 \rangle &= \langle u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}, w_1 \rangle = \langle u_2, w_1 \rangle - \langle \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}, w_1 \rangle \\
&= \langle u_2, w_1 \rangle - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w \rangle} \cdot \langle w_1, w_1 \rangle = \langle u_2, w_1 \rangle - \langle u_2, w_1 \rangle = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

Analogamente w_2, w_3 são ortogonais. Assim o conjunto $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ é ortonormal. Vamos mostrar que é L.I

Como $w_1 \perp w_2$, são LI. Basta mostrar que $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{R}$, $w_3 \perp (\varphi w_1 + \psi w_2)$. Prossigamos:

$$
\begin{aligned}
\langle w_3, \varphi w_1 + \psi w_2 \rangle &= \langle w_3, \varphi w_1 \rangle + \langle w_3, \psi w_2 \rangle \\
&= \varphi \langle w_3, w_1 \rangle + \psi \langle w_3, w_2 \rangle = 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

O que completa a prova.

3. Exercícios Avançados

1. Para achar uma base ortonormal do plano $x + y + z = 0$, tome um vetor qualquer do plano, seja ele $v = (1, 2, -3)$, que normalizado fica v = $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$. Note que no plano, $z = -(x + y)$. Então a *forma* de um vetor w no plano é $w = (x, y, -(x + y))$. Queremos $v \perp w$, então:

$$
\begin{aligned}
\langle v, w \rangle = \frac{x}{\sqrt{14}} + \frac{2y}{\sqrt{14}} + \frac{3(x+y)}{\sqrt{14}} &= \frac{4x+5y}{\sqrt{14}} = 0 \\
\Leftrightarrow 4x + 5y = 0 \Rightarrow y &= -\frac{4}{5}x
\end{aligned} \tag{9}
$$

Se tomarmos $x = 1$, por exemplo, temos $y = -\frac{4}{5}$, logo $w = \left(1, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. O vetor normalizado e v formam uma base ortonormal do plano por construção.

2. Podemos escrever:

$$
w = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i w + i \tag{10}
$$

E note que pela bilinearidade do produto interno:

$$
\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \langle v, w_i \rangle = 0 \tag{11}
$$

O que conclui a prova ablublublé