

Lista 9 - Soluções

Arthur Rabello Oliveira

03/06/2025

1. Questão 1

Enunciado: Dê a equação da parábola de vértice $V = (2, 1)$ e diretriz $4x + 3y = 1$

Solução: Seja $P \subset \mathbb{R}^2$ a parábola em questão e $r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 3y = 1\}$ a reta diretriz. Sabemos que o foco da parábola satisfaz:

$$F = V + p \cdot \vec{v}, \vec{v} = \frac{n}{\|n\|} \quad (1)$$

Onde n é o vetor normal da reta e p é a distância do vértice à diretriz (parâmetro da parábola), então:

$$p = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

$$\vec{v} = \frac{4, 3}{5} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \quad (2)$$

Então o foco fica:

$$F = (2, 1) + 2 \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{11}{5}\right) \quad (3)$$

Como $\forall \hat{p} \in P, d(\hat{p}, F) = d(\hat{p}, r)$, temos:

$$d(\hat{p}, F) = \sqrt{\left(x - \frac{18}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{5}\right)^2} = d(\hat{p}, r) = \frac{|4x + 3y - 1|}{5} \quad (4)$$

Ou equivalentemente:

$$25 \cdot \left[\left(x - \frac{18}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{5}\right)^2 \right] = (4x + 3y - 1)^2 \quad (5)$$

É a equação da parábola, convidamos o leitor a completar quadrados e simplificar a equação. \square