# Assignment 3 - Numerical Linear Algebra

# Arthur Rabello Oliveira<sup>1</sup>

### 06/06/2025

#### **Abstract**

We design and test a function to\_hessemberg(A) that reduces an arbitrary square matrix to (upper) Hessenberg form with Householder reflectors, returns the reflector vectors, the compact Hessenberg matrix H, and the accumulated orthogonal factor Q, verifying numerically that  $A = QHQ^*$  and  $Q^*Q = I$  for symmetric and nonsymmetric inputs of orders 10 - 10000. Timings confirm the expected O(something) cost and reveal the  $2 \times \text{speed-up}$  attainable for symmetric matrices through trivial bandwidth savings. Leveraging this routine, we investigate the spectral structure of orthogonal matrices: we show that all eigenvalues lie on the unit circle, analyse the consequences for the power method and inverse iteration, and obtain a closed-form spectrum for generic  $2 \times 2$  orthogonals. Random  $4 \times 4$  orthogonal matrices generated via QR factorisation are then reduced to Hessenberg form; the eigenvalues of their trailing  $2 \times 2$  blocks are computed analytically and reused as fixed shifts in the QR iteration, where experiments demonstrate markedly faster convergence. Throughout, every algorithm is documented and supported by commented plots that corroborate the theoretical claims.

#### **Contents**

1.	Introduction	2
2.	Hessemberg Reduction (Problem 1)	3
	2.1. Calculating the Householder Reflectors (a)	3
	2.2. Evaluating the Function (b), (c), (d)	6
	2.2.1. Complexity (c)	14
	2.2.2. The Symmetric Case (d)	15
3.	Eigenvalues and Iterative Methods	15
	3.1. Power iteration	15
	3.2. Inverse Iteration	16
4.	Orthogonal Matrices (Problem 2) (a)	16
	4.1. Orthogonal Matrices and the Power Iteration	16
	4.2. Orthogonal Matrices and Inverse Iteration	17
	4.3. The <b>2</b> × <b>2</b> Case (b)	17
	4.4. Random Orthogonal Matrices (c)	17
	4.5. Shift With an Eigenvalue (d)	
Bi	bliographybliography	105

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Escola de Matemática Aplicada, Fundação Getúlio Vargas (FGV/EMAp), email: arthur.oliveira.1@fgv.edu.br

# 1. Introduction

One could calculate the eigenvalues of a square matrix using the following algorithm:

- 1. Compute the n-th degree polynomial  $\det(A \lambda I) = 0$ ,
- 2. Solve for  $\lambda$  (somehow).

On step 2, the eigenvalue problem would have been reduced to a polynomial root-finding problem, which is awful and extremely ill-conditioned. From the previous assignment we know that in the denominator of the relative condition number  $\kappa(x)$  there's a |x-n|. So  $\kappa(x)\to\infty$  when  $x\to 0$ . As an example, consider the polynomial

$$p(x) = (x-2)^9 = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5$$
$$-4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$$
 (1)

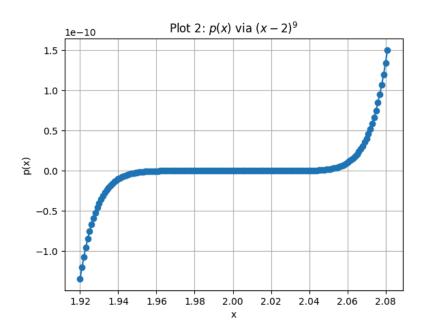


Figure 1: p(x) via the coefficients in eq. (1)

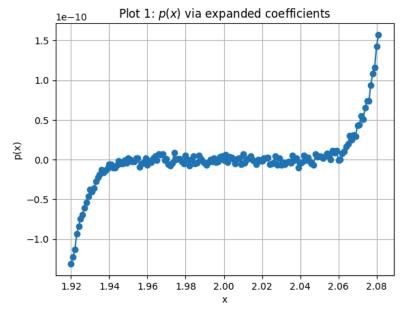


Figure 2: p(x) via  $(x-2)^9$ 

<u>Figure 2</u> shows a smooth curve, while <u>Figure 1</u> shows a weird oscillation around x = 0 (And pretty much everywhere else if the reader is sufficiently persistent).

This is due to the round-off errors when  $x\approx 0$  and the big coefficients of the polynomial. In general, polynomial are very sensitive to perturbations in the coefficients, which is why rootfinding is a bad idea to find eigenvalues.

Here we discuss aspects of some iterative eigenvalue algorithms, such as power iteration, inverse iteration, and QR iteration.

# 2. Hessemberg Reduction (Problem 1)

## 2.1. Calculating the Householder Reflectors (a)

The following packages will be used in the next functions:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.linalg import hessenberg, qr, eig
import time
from typing import List, Tuple
import pandas as pd
import math
from IPython.display import display, Markdown
from ast import literal_eval
import re
```

The following function calculates the Householder reflectors that reduce a matrix to Hessenberg form. It returns the reflector vectors, the compact Hessenberg matrix H, and the accumulated orthogonal factor Q.

```
Python
1
     def build_householder_unit_vector(
             target_vector: np.ndarray
2
     ) -> np.ndarray:
3
4
5
6
         Builds a Householder unit vector
7
8
         Args:
             1. target vector (np.ndarray): Column vector that we want to annihilate
9
             (size \geq 1).
10
11
         Returns:
12
             np.ndarray:
                 The normalised Householder vector (\|v\|_2 = 1) with a real first
13
                 component.
14
15
         Raises:
             1. ValueError: If 'target_vector' has zero length.
16
         0.00
17
```

```
18
19
         if target vector.size == 0:
20
             raise ValueError("The target vector is empty; no reflector needed.")
21
22
        vector_norm: float = np.linalg.norm(target_vector)
23
         if vector_norm == 0.0: #nothing to annihilate - return canonical basis
24
         vector
25
             householder_vector: np.ndarray = np.zeros_like(target_vector)
26
             householder_vector[0] = 1.0
27
             return householder vector
28
29
         sign_correction: float = (
30
             1.0 if target_vector[0].real >= 0.0 else -1.0
31
32
         copy of target vector: np.ndarray = target vector.copy()
33
         copy_of_target_vector[0] += sign_correction * vector_norm
34
         householder_vector: np.ndarray = (
35
             copy_of_target_vector / np.linalg.norm(copy_of_target_vector)
36
        )
37
         return householder vector
38
39
40
    def to hessenberg(
41
             original_matrix: np.ndarray,
42
    ) -> Tuple[List[np.ndarray], np.ndarray, np.ndarray]:
43
         .. .. ..
44
         Reduce 'original matrix' to upper Hessenberg form by Householder
45
         reflections.
46
47
        Args
             1. original_matrix (np.ndarray): Real or complex square matrix of order
48
             'matrix order'.
49
50
         Returns
             Tuple consisting of:
51
52
             1. householder reflectors list (List[np.ndarray])
54
             2. hessenberg_matrix (np.ndarray)
             accumulated orthogonal matrix (np.ndarray) s.t.
55
               original matrix = Q \cdot H \cdot Q^H
56
57
        Raises
58

    ValueError: If 'original_matrix' is not square.

59
60
```

```
61
62
        working matrix: np.ndarray = np.asarray(original matrix).copy()
63
64
        if working matrix.shape[0] != working matrix.shape[1]:
65
             raise ValueError("Input matrix must be square.")
66
67
        matrix_order: int = working_matrix.shape[0]
        accumulated orthogonal matrix: np.ndarray = np.eye(
68
69
            matrix order, dtype=working matrix.dtype
70
        )
71
        householder_reflectors_list: List[np.ndarray] = []
72
        for column index in range(matrix order - 2): #extract the part of column
73
         'column_index' that we want to zero out
74
            target_column_segment: np.ndarray = working_matrix[
75
                 column index + 1 :, column index
76
            ]
77
            householder vector: np.ndarray = build householder unit vector(
78
79
                 target_column_segment
            ) #build Householder vector for this segment
80
81
            householder reflectors list.append(householder vector)
82
83
            #expand it to the full matrix dimension
84
            expanded householder vector: np.ndarray = np.zeros(
85
                 matrix_order, dtype=working_matrix.dtype
86
            expanded_householder_vector[column_index + 1 :] = householder_vector
87
88
89
90
            working_matrix -= 2.0 * np.outer(
91
                 expanded_householder_vector,
                 expanded_householder_vector.conj().T @ working_matrix,
92
93
             ) #apply reflector from BOTH sides
            working matrix -= 2.0 * np.outer(
94
95
                 working_matrix @ expanded_householder_vector,
96
                 expanded_householder_vector.conj().T,
97
            )
98
99
            #accumulate 0
            accumulated_orthogonal_matrix -= 2.0 * np.outer(
100
101
                 accumulated orthogonal matrix @ expanded householder vector,
                 expanded_householder_vector.conj().T,
102
103
             )
104
105
        hessenberg_matrix: np.ndarray = working_matrix
```

```
106    return (
107         householder_reflectors_list,
108         hessenberg_matrix,
109         accumulated_orthogonal_matrix,
110     )
```

We will evaluate this function in Section 2.2.

# 2.2. Evaluating the Function (b), (c), (d)

We present another algorithm for evaluating the function to\_hessenberg(A) for random matrices of various sizes, inputed by the user, which also gets to choose if symmetric matrices will be generated or not.

```
1
    #RANDOM MATRIX GENERATOR
                                                                              Python
2
    def generate random matrix(n:int, distribution:str="normal",
                                 symmetric:bool=False, seed:int|None=None):
4
         rng = np.random.default rng(seed)
5
         if distribution == "normal":
             A = rng.standard normal((n, n))
6
7
         elif distribution == "uniform":
             A = rng.uniform(-1.0, 1.0, size=(n, n))
8
9
         else:
             raise ValueError("distribution must be 'normal' or 'uniform'")
10
11
         return (A + A.T) / 2.0 if symmetric else A
12
13
14
    #REFLECTOR CALCULATOR
15
    def _house_vec(x:np.ndarray) -> np.ndarray:
16
         11 11 11
17
18
         Builds a Householder reflector for a given column vector x.
19
         Args:
20
             x (np.ndarray): Column vector to be transformed.
21
22
             np.ndarray: Normalised Householder vector with a real first component.
23
         Raises:
24
             None
25
26
27
         sigma = np.linalg.norm(x)
28
         if sigma == 0.0:
             e1 = np.zeros_like(x)
29
30
             e1[0] = 1.0
31
             return el
32
         sign = 1.0 if x[0].real >= 0.0 else -1.0
33
         v = x.copy()
34
         v[0] += sign * sigma
```

```
35
         return v / np.linalg.norm(v)
36
    def hessenberg reduction(A in:np.ndarray, symmetric:bool=False,
37
    accumulate_q:bool=True):
38
         11 11 11
39
        Reduces a matrix to upper Hessenberg form using Householder reflections.
40
41
         Args:
42
             A_in (np.ndarray): Input matrix to be reduced.
             symmetric (bool): If True, treat the matrix as symmetric and reduce to
43
             tridiagonal form.
44
             accumulate_q (bool): If True, accumulate the orthogonal matrix Q.
45
         Returns:
             Tuple[np.ndarray, np.ndarray]: The reduced matrix in Hessenberg form
46
             and the orthogonal matrix Q.
         Raises:
47
48
             None
         11.11.11
49
50
51
        A = A in.copy()
52
         n = A.shape[0]
        Q = np.eye(n, dtype=A.dtype)
53
54
55
         if not symmetric:
                             #GENERAL caSe
             for k in range(n-2):
56
57
                 v = house vec(A[k+1:, k])
58
                 w = np.zeros(n, dtype=A.dtype)
59
                 w[k+1:] = v
60
                 A = 2.0 * np.outer(w, w.conj().T @ A)
61
                 A = 2.0 * np.outer(A @ w, w.conj().T)
62
                 if accumulate q:
                     Q -= 2.0 * np.outer(Q @ w, w.conj().T)
63
64
             return A, Q
65
         #SYMMETRIC TRIDIAGONAL CASE
66
67
         for k in range(n-2):
68
             x = A[k+1:, k]
69
             v = \underline{house\_vec(x)}
70
             beta = 2.0
71
             w = A[k+1:, k+1:] @ v #trailing submatrix rank-2 update (A \leftarrow A - v w
72
             - W V^{T}
             tau = beta * 0.5 * (v @ w)
73
             w -= tau * v
74
75
             A[k+1:, k+1:] -= beta * np.outer(v, w) + beta * np.outer(w, v)
76
```

```
new_val = -np.sign(x[0]) * np.linalg.norm(x) #store the single sub-
77
             diagonal element, zero the rest
78
             A[k+1, k] = new val
79
             A[k, k+1] = new_val
80
             A[k+2:, k] = 0.0
             A[k, k+2:] = 0.0
81
82
83
             if accumulate q: #accumulate Q if requested
                 Q[:, k+1:] -= beta * np.outer(Q[:, k+1:] @ v, v)
84
85
86
         A = np.triu(A) + np.triu(A, 1).T #force symmetry
87
         return A, Q
88
89
90
    #VERIFYING PART
91
    def verify factorisation once(n:int, dist:str, symmetric:bool, seed:int|None):
92
         11 11 11
93
        Verifies the factorisation of a random matrix of size n.
94
95
        Args:
             n (int): Size of the matrix.
96
97
             dist (str): Distribution type ('normal' or 'uniform').
98
             symmetric (bool): Whether the matrix is symmetric.
99
             seed (int | None): Random seed for reproducibility.
100
        Returns:
101
             None
102
        Raises:
103
             None
104
105
106
        A = generate_random_matrix(n, dist, symmetric, seed)
107
        T, Q = hessenberg_reduction(A, symmetric=symmetric)
108
         res fact = np.linalg.norm(A - Q @ T @ Q.T)
109
         res orth = np.linalg.norm(Q.T @ Q - np.eye(n))
110
         colour = "green" if res_fact < 1e-11 else "red"</pre>
         typ = "symmetric" if symmetric else "general"
111
112
         display(Markdown(
             f"**{n}×{n} {typ}** \n"
113
             f"<span style='color:\{colour\}'>||A - Q T Q^T|| = \{res_fact:.2e\}</span>
114
             f''||Q^TQ - I|| = \{res_orth:.2e\}''
115
116
        ))
117
118
    def benchmark_hessenberg(size_list, dist:str, mode:str, seed:int|None,
119
    reps small:int=5):
```

```
120
121
122
         Benchmark the Hessenberg reduction for various matrix sizes and types.
123
         Args:
124
            size list (list of int): List of matrix sizes to test.
125
            dist (str): Distribution type ('normal' or 'uniform').
126
            mode (str): Matrix type ('general', 'symmetric', or 'both').
127
            seed (int | None): Random seed for reproducibility.
128
            reps small (int): Number of repetitions for small matrices.
129
         Returns:
130
            pd.DataFrame: DataFrame containing the benchmark results.
131
         Raises:
132
            None
         0.00
133
134
135
         records = []
         for n in size_list:
136
             for sym in ([False, True] if mode=="both" else [mode=="symmetric"]):
137
138
                 A = generate random matrix(n, dist, sym, seed)
139
140
                 t0 = time.perf counter()
                 hessenberg_reduction(A, symmetric=sym, accumulate_q=False)
141
142
                 probe = time.perf counter() - t0
                 reps = reps small if probe*reps small >= 1.0 else math.ceil(1.0 /
143
                 probe)
144
145
                 times = []
146
                 for _ in range(reps):
                     start = time.perf counter()
147
148
                     hessenberg_reduction(A, symmetric=sym, accumulate_q=False)
149
                     times.append(time.perf_counter() - start)
150
151
                 records.append(dict(size=n,
152
                                     type="symmetric" if sym else "general",
153
                                     reps=reps,
154
                                     avg=np.mean(times)))
155
        df = pd.DataFrame(records)
156
        display(df.style.format({"avg":"{:.3e}"}).hide(axis="index"))
157
158
159
         plt.figure(figsize=(7, 5))
160
         mark = {"general": "o", "symmetric": "s"}
161
         for label, sub in df.groupby("type"):
162
            # simple scatter/line plot - no regression curves
163
164
            plt.plot(
```

```
165
                 sub["size"],
                                        # x-axis: matrix order
166
                 sub["avg"],
                                        # y-axis: average runtime
167
                 marker=mark[label],
168
                 ls="-",
169
                 label=label,
170
            )
171
172
         plt.xlabel("matrix size (linear)")
         plt.ylabel("runtime [s] (linear)")
                                                   # keep or change to log scale as
173
        you prefer
174
         plt.title("Hessenberg (general) vs Tridiagonal (symmetric)")
175
         plt.grid(True, which="both", ls=":")
176
         plt.legend()
177
         plt.tight layout()
178
         plt.show()
179
180
181
182 # === INTERACTIVE PART =
183
184
185 def parse_size_spec(spec: str):
186
187
        Accepts either '[64,128,256,512]' or '64:1024:64'
188
        Returns a sorted list of unique integers ≥ 2
        0.00
189
190
        spec = spec.strip()
191
         interval = re.fullmatch(r"\s^*(\d+)\s^*:\s^*(\d+)\s^*:\s^*(\d+)\s^*", spec)
         if interval:
192
                                               # range syntax
193
            lo, hi, step = map(int, interval.groups())
194
            if step <= 0 or lo < 2 or hi < lo:
195
                 raise ValueError
            return list(range(lo, hi + 1, step))
196
197
         # otherwise fall back to literal - must be a list
198
         sizes = literal_eval(spec)
         if (not isinstance(sizes, (list, tuple)) or
199
200
                 any((not isinstance(k, int)) or k < 2 for k in sizes)):
201
            raise ValueError
202
         return sorted(set(sizes))
203
204 try:
205
         raw = input(
206
             "\nMatrix sizes - list '[64,128,256]' or interval '64:1024:64' "
             "(default 64:1024:64): "
207
208
         )
209
         sizes = parse_size_spec(raw) if raw else list(range(64, 1025, 64))
```

```
210 except Exception:
211
        print("Bad specification → using default 64:1024:64.")
212
        sizes = list(range(64, 1025, 64))
213
    dist = input("Distribution ('normal'/'uniform') [normal]: ").strip().lower()
214
    or "normal"
mode_txt = input("Matrix type g=general, s=symmetric, b=both [g]:
    ").strip().lower() or "g"
    mode = "symmetric" if mode_txt == "s" else "both" if mode_txt == "b" else
216
    "general"
217 seed_txt = input("Random seed (None/int) [None]: ").strip()
218 seed_val = None if seed_txt.lower() in {"", "none"} else int(seed_txt)
219
220 # accuracy check
221 for n in sizes:
        for sym in ([False, True] if mode == "both" else [mode == "symmetric"]):
223
            verify_factorisation_once(n, dist, sym, seed_val)
224
225 benchmark_hessenberg(sizes, dist, mode, seed_val) # timings
```

The reader should be aware that my poor <u>Dell Inspiron 5590</u> has crashed precisely 5 times while i was writing this (i might have tried with matrices of order  $10^6 \times 10^6$ ). Unfortunately the runtime was around 4 minutes for a matrix  $A \approx 10^3 \times 10^3$ .

An expected output is:

```
1
     64×64 general
                                                                                          Python
2
     \|A - Q T Q^{T}\| = 8.03e-14
3
     \|Q^{T}Q - I\| = 7.67e-15
4
5
     64×64 symmetric
     \|A - Q T Q^{T}\| = 4.78e-14
6
7
     \|Q^{T}Q - I\| = 7.32e-15
8
9
     128×128 general
10
     \|A - Q T Q^{T}\| = 1.80e-13
11
     \|Q^{T}Q - I\| = 1.24e-14
12
     128×128 symmetric
     \|A - Q T Q^{T}\| = 1.13e-13
14
     \|Q^{T}Q - I\| = 1.25e-14
16
17
     192×192 general
     \|A - Q T Q^{T}\| = 3.09e-13
     \|Q^{T}Q - I\| = 1.76e-14
19
20
21
    192×192 symmetric
22
     \|A - Q T Q^{\mathsf{T}}\| = 1.91e-13
```

```
\|Q^{T}Q - I\| = 1.75e-14
24
25
     256×256 general
     \|A - Q T Q^{T}\| = 4.53e-13
26
27
     \|Q^{T}Q - I\| = 2.27e-14
29
     256×256 symmetric
     \|A - Q T Q^{T}\| = 2.97e-13
30
31
     \|Q^{T}Q - I\| = 2.38e-14
32
33
     320×320 general
     \|A - Q T Q^{T}\| = 6.07e-13
     \|Q^{T}Q - I\| = 2.72e-14
36
37
     320×320 symmetric
     \|A - Q T Q^{T}\| = 3.76e-13
     \|Q^{T}Q - I\| = 2.71e-14
39
40
41
     384×384 general
     \|A - Q T Q^{T}\| = 7.78e-13
42
     \|Q^{T}Q - I\| = 3.11e-14
43
44
45
    384×384 symmetric
46
     \|A - Q T Q^{T}\| = 4.71e-13
     \|Q^{T}Q - I\| = 3.16e-14
47
48
49
    448×448 general
     \|A - Q T Q^{T}\| = 9.35e-13
50
     \|Q^{T}Q - I\| = 3.50e-14
51
52
53
     448×448 symmetric
     \|A - Q T Q^{T}\| = 5.93e-13
54
55
     \|Q^{T}Q - I\| = 3.72e-14
56
57
     512×512 general
     ||A - Q T Q^{T}|| = 1.16e-12
58
59
    \|Q^{T}Q - I\| = 4.13e-14
60
61
    512×512 symmetric
     \|A - Q T Q^{T}\| = 7.14e-13
62
     \|Q^{T}Q - I\| = 4.13e-14
63
64
    576×576 general
     \|A - Q T Q^{T}\| = 1.38e-12
     ||Q^{T}Q - I|| = 4.54e-14
67
68
```

```
576×576 symmetric
70
     \|A - Q T Q^{T}\| = 8.39e-13
71
     ||Q^{T}Q - I|| = 4.56e-14
72
73
     640×640 general
     \|A - Q T Q^{\mathsf{T}}\| = 1.58e-12
75
     \|Q^{T}Q - I\| = 4.93e-14
76
77
     640×640 symmetric
78
     \|A - Q T Q^{T}\| = 9.77e-13
79
     \|Q^{T}Q - I\| = 5.07e-14
80
81
     704×704 general
82
     \|A - Q T Q^{T}\| = 1.81e-12
83
     ||Q^{T}Q - I|| = 5.41e-14
84
85
     704×704 symmetric
     \|A - Q T Q^{T}\| = 1.08e-12
87
     \|Q^{T}Q - I\| = 5.35e-14
88
89
     768×768 general
     \|A - Q T Q^{T}\| = 2.05e-12
90
     \|Q^{T}Q - I\| = 5.92e-14
91
92
93
     768×768 symmetric
     ||A - Q T Q^{T}|| = 1.25e-12
95
     \|Q^{T}Q - I\| = 5.98e-14
96
    832×832 general
     \|A - Q T Q^{T}\| = 2.29e-12
99
     \|Q^{T}Q - I\| = 6.32e-14
100
101 <mark>832×832</mark> symmetric
102 \|A - Q T Q^{T}\| = 1.38e-12
103 \|Q^TQ - I\| = 6.28e-14
104
105  896×896 general
106 \|A - Q T Q^{T}\| = 2.53e-12
107 \|Q^TQ - I\| = 6.71e-14
108
110 \|A - Q T Q^{T}\| = 1.50e-12
111 \|Q^{T}Q - I\| = 6.65e-14
112
113 960×960 general
114 \|A - Q T Q^{T}\| = 2.78e-12
```

```
115 \|Q^TQ - I\| = 7.14e-14

116

117 960 \times 960 symmetric

118 \|A - Q T Q^T\| = 1.68e-12

119 \|Q^TQ - I\| = 7.19e-14

120

121 1024 \times 1024 general

122 \|A - Q T Q^T\| = 3.09e-12

123 \|Q^TQ - I\| = 7.71e-14

124

125 1024 \times 1024 symmetric

126 \|A - Q T Q^T\| = 1.84e-12

127 \|Q^TQ - I\| = 7.53e-14
```

As n grows, we observe that the residuals also grow, but still in machine precision. The difference between the symmetric and nonsymmetric cases are more pronounced in larger matrices.

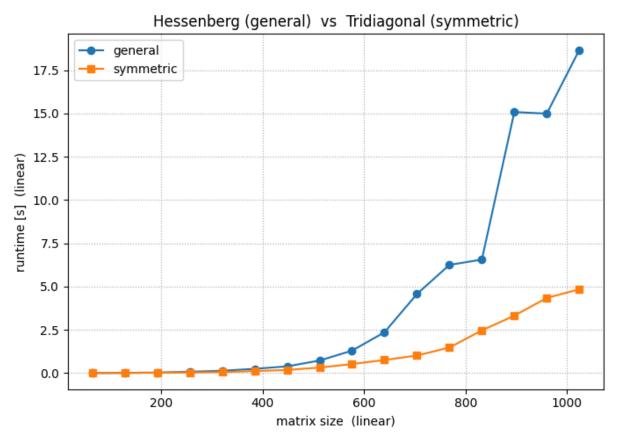


Figure 3: Runtime of the Hessenberg reduction for ordinary and symmetric matrices

#### **2.2.1. Complexity (c)**

Figure 3 shows the expected  $O(n^3)$  complexity for the general case and usually half of it for the symmetric case. The latter is better discussed in Section 2.2.2.

The weird behavior of the general case after  $n \approx 760$  is due purely to hardware restrictions, not mathematical ones. NumPy delegates the heavy multiply-add to OpenBLAS / MKL. Those libraries switch to different blocking sizes and sometimes to multi-threaded kernels at dimension

"milestones" (often multiples of 64 or 128). The change in algorithmic constant shows up as local bumps or dips. Residual noise comes from thread scheduling and page-fault variability in long runs.

To understand why the complexity is  $O(n^3)$  in the general case, we can look at the algorithm. The outer loop runs n-2 times, and inside it, we have two matrix-vector products and two outer products, which are all  $O(n^2)$ . Thus, the total complexity is  $O(n^3)$ .

#### 2.2.2. The Symmetric Case (d)

On the symmetric case we know that reflectors will be applied in only one side of the matrix, since  $v^T A = A v^T$ . That is precisely what the function generate\_random\_matrix does. Which cuts complexity from the expected  $O(n^3)$  seen in the previous section to a  $O(n^2)^2$ . [1]

# 3. Eigenvalues and Iterative Methods

#### 3.1. Power iteration

The power iteration consists on computing large powers of the sequence:

$$\frac{x}{\|x\|}, \frac{Ax}{\|Ax\|}, \frac{A^2x}{\|A^2x\|}, \dots, A \in \mathbb{C}^{m \times m}$$
 (2)

To see why this sequence converges (under good assumptions), let A be diagonalizable. And write:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i v_i \tag{3}$$

In a basis of eigenvectors  $v_i$  with respective eigenvalues  $\lambda_i$ . Then for  $x \in \mathbb{C}^m$  we have:

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i v_i \tag{4}$$

Or even better:

$$A^n x = \sum_{i=1}^m \lambda_i^n \varphi_i v_i \tag{5}$$

Let  $v_j$  be the eigenvector associated to the biggest eigenvalue  $\lambda_j$ , then we have:

$$A^n x = \frac{1}{\lambda_j^n} \cdot \sum_{i=1}^m \lambda_i^n \varphi_i v_i = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_j^n} \varphi_1 v_1 + \ldots + \varphi_j v_j + \ldots + \frac{\lambda_m^n}{\lambda_j^n} \varphi_m v_m \tag{6}$$

When  $n \to \infty$  all of the smaller  $\frac{\lambda_k}{\lambda_i}$  will approach 0, so we have:

$$\lim_{n \to \infty} A^n x = \varphi_j v_j \tag{7}$$

So the denominator on the original expression becomes

$$\|A^nx\| = \left\|\varphi_jv_j\right\| = \left|\varphi_j\right| \left\|v_j\right\| \tag{8}$$

And the limit is:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A^n x}{\|A^n x\|} = \frac{\varphi_j v_j}{\|\varphi_i\| \|v_i\|} \tag{9}$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>See page 194 of <u>Trefethen & Bau's Numerical Linear Algebra book</u>

Since  $\frac{\varphi_j}{|\varphi_j|}=\pm 1$ , the sequence converges to the eigenvector  $v_j$  associated to the eigenvalue  $\lambda_j$ .

#### 3.2. Inverse Iteration

We know that if  $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $\det(A) \neq 0$  has  $\Lambda \subset \mathbb{R} \coloneqq \left\{\lambda_j\right\}$  as eigenvalues, then the eigenvalues of  $A^{-1}$  are  $\lambda_j^{-1}$ . Similarly the eigenvalues of  $A + \varphi I$  are  $\lambda_j + \varphi$ . So the eigenvalues of  $(A - \mu I)^{-1}$ ,  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$  are:

$$\hat{\lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j - \mu} \tag{10}$$

Where  $\lambda_j$  are the eigenvalues of A. So if  $\mu$  is close to an eigenvalue, then  $\hat{\lambda}$  will be large. Power iteration seems interesting here, so the sequence:

$$\frac{x}{\|x\|}, \frac{(A-\mu I)^{-1}x}{\|(A-\mu I)^{-1}x\|}, \frac{(A-\mu I)^{-2}x}{\|(A-\mu I)^{-2}x\|}, \dots$$
(11)

Converges to the eigenvector associated to the eigenvalue  $\hat{\lambda}$ .

# 4. Orthogonal Matrices (Problem 2) (a)

Here we will discuss how orthogonal matrices behave when we apply the iterations discussed in Section 3.1, and Section 3.2.

So let  $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$  be an orthogonal matrix. We are interested in its eigenvalues  $\lambda$ . We know that:

$$Qx = \lambda x \Leftrightarrow x^T Q x = \lambda x^T x$$
  
$$\Leftrightarrow Q\langle x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$
(12)

Since Q preserves inner product, we have:

$$Q\langle x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$$
  
$$\Leftrightarrow |\lambda| = 1$$
(13)

So  $\lambda$  lies in the unit circle, i.e  $\lambda=e^{i\varphi}, \varphi\in\mathbb{R}$ . We now discuss how this affects efficiency of some iterative methods

### 4.1. Orthogonal Matrices and the Power Iteration

The power method is better discussed in <u>Section 3.1</u>. Here we will write straight forward the result:

$$Q^n x = \frac{1}{\lambda_j^n} \cdot \sum_{i=1}^m \lambda_i^n \varphi_i v_i \tag{14}$$

Where  $\lambda_i$  are the eigenvalues of  $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $\varphi_i$  are the coefficients of the expansion of x in the basis of eigenvectors  $v_i$ . Since we have that  $|\lambda_i| = 1$ , we have:

The fact that  $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow |\lambda_i^n| = 1$  is sufficiently enough for one to be convinced that power iteration does not converge.

Let  $\lambda_k = e^{i\psi_k}$ , where  $\psi_k \in \mathbb{R}$ . Then expanding eq. (14):

$$Q^n x = \frac{1}{e^{i\psi_{\tau} \cdot n}} \cdot \sum_{\tau=1}^m e^{i\psi_{\tau} n} \varphi_{\tau} v_{\tau}$$
 (15)

When  $n \to \infty$  if  $\lambda_j = 1$  then we have:

$$Q^n x = \varphi_j v_j + \sum_{\tau \neq j} e^{i\psi_\tau n} \varphi_\tau v_\tau \tag{16}$$

Since no eigenvalue dominates other eigenvalues in the orthogonal case, usually power iteration fails.

### 4.2. Orthogonal Matrices and Inverse Iteration

Let  $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$  be an orthogonal matrix. Using results from Section 3.2, we are interested in applying invers iteration to Q.

We know that the eigenvalues of Q are on the unit circle, so if  $\mu$  is close to an eigenvalue  $\lambda_j$ ,  $\hat{\lambda}_j$  will be huge (dominant), which makes power iteration converge to the eigenvector associated to  $\hat{\lambda}_j$ , which is the eigenvector associated to  $\lambda_j$ . The fact that the eigenvalues are on the unit circle also contributes to the convergence of the method.

So we concude that inverse iteration works well for orthogonal matrices, if  $\mu$  is close to an eigenvalue of Q.

### 4.3. The $2 \times 2$ Case (b)

We will calculate the eigenvalues of:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{17}$$

With  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . The characteristic polynomial gives us:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda(-a - d) + (ad - bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = (a + d) \pm \frac{\sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$
(18)

So the eigenvalues are:

$$\begin{split} \lambda_1 &= \frac{a + d + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \end{split} \tag{19}$$

# 4.4. Random Orthogonal Matrices (c)

This code generates orthogonal matrices of order  $4 \times 4$  generated by the QR factorization of random matrices, and reduces the to Hessenberg form. The eigenvalues of the bottom-right  $2 \times 2$  block are analytically calculated using Section 4.3.

```
1  def generate_orthogonal_matrix_qr(n=4, seed=None):
2
3    """
4    Generates a random orthogonal matrix using QR decomposition.
5    Args:
6     n (int): Size of the matrix (n x n).
7     seed (int | None): Random seed for reproducibility.
8    Returns:
```

```
9
            np.ndarray: An n x n orthogonal matrix.
10
        Raises:
11
           None
        11 11 11
12
13
14
        if seed is not None:
15
            np.random.seed(seed)
16
        A = np.random.randn(n, n)
17
        Q, _= np.linalg.qr(A)
        return Q
18
19
20 def analytical_eigenvalues_2x2(a, b, c, d):
21
22
23
        Calculates the eigenvalues of a 2x2 matrix analytically.
24
            a (float): Element at position (0,0).
25
            b (float): Element at position (0,1).
26
27
            c (float): Element at position (1,0).
28
            d (float): Element at position (1,1).
29
            Tuple[float, float]: The two eigenvalues of the matrix.
30
31
        Raises:
32
33
34
        trace = a + d
35
        det = a * d - b * c
        discriminant = trace**2 - 4 * det
36
37
        #complex if discriminant negative
38
        discriminant root = np.sqrt(discriminant) if discriminant >= 0 else
39
        np.sqrt(complex(discriminant))
40
41
        lambda1 = (trace + discriminant root) / 2
42
        lambda2 = (trace - discriminant_root) / 2
43
44
        return lambda1, lambda2
45
   def analyze_orthogonal_and_hessenberg(n=4, n_matrices=30):
46
47
        0.00
48
49
        Analyzes orthogonal matrices and their Hessenberg forms.
50
            n (int): Size of the matrices (n \times n).
51
            n matrices (int): Number of orthogonal matrices to generate and analyze.
52
53
        Returns:
```

```
54
            None
55
        Raises:
56
            None
57
58
        for i in range(n matrices):
59
60
            print(f"\n--- Orthogonal Matrix Q number {i+1} ---")
            Q = generate orthogonal matrix qr(n=n)
61
62
            print("Matrix Q:")
63
            print(np.array_str(Q, precision=4, suppress_small=True))
64
65
            householder_list, H, Q_accum = to_hessenberg(Q)
66
67
            print("\nHessenberg Form H (of Q):")
            print(np.array str(H, precision=4, suppress small=True))
68
69
            block = Q[2:4, 2:4]
70
71
            a, b, c, d = block[0,0], block[0,1], block[1,0], block[1,1]
72
            analytical eigenvalues = analytical eigenvalues 2x2(a, b, c, d)
73
74
            print("\nBlock Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):")
75
76
            print(np.array_str(block, precision=4, suppress_small=True))
77
78
            print("\nEigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):")
79
            for idx, val in enumerate(analytical eigenvalues):
80
                print(f" \lambda_{\text{idx+1}} = \{\text{val}\}\ (\text{size} = \{\text{abs(val)}:.4f\})")
81
82
            print("-" * 40)
83
84 analyze orthogonal and hessenberg()
```

We ran this code for 30 matrices, the output was:

```
--- Orthogonal Matrix Q number 1 ---
1
2
    Matrix Q:
    [[-0.5629  0.6801  0.4635  -0.0764]
4
     [-0.6703 -0.6884 0.2231 0.1645]
5
     [-0.1497 0.2337 -0.3793 0.8827]
     [ 0.4598 -0.0949 0.7691 0.4336]]
6
7
    Hessenberg Form H (of 0):
9
    [[-0.5629 -0.6779 -0.4534 -0.1342]
     [ 0.8265 -0.4617 -0.3088 -0.0914]
10
     [ 0.
              -0.5721 0.7865 0.2329]
11
12
     [-0.
               0.
                       0.2839 -0.9588]]
13
```

```
Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
15
    [[-0.3793 0.8827]
16
    [ 0.7691  0.4336]]
17
18 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
19
   \lambda_1 = 0.9458819605346136 (size = 0.9459)
20
     \lambda_2 = -0.8915812804514585 (size = 0.8916)
21
22
23
   --- Orthogonal Matrix Q number 2 ---
    Matrix Q:
25
   [[-0.4016 0.3605 0.8354 0.1045]
    [-0.2846 -0.3518 0.1255 -0.8829]
   [-0.3325 -0.8166 0.136
27
                              0.45191
28
    [ 0.8045 -0.282  0.5176 -0.0734]]
29
30
    Hessenberg Form H (of Q):
31
    [[-0.4016 -0.3235 -0.1952 0.8343]
    [ 0.9158 -0.1418 -0.0856  0.3658]
32
33
   [ 0. -0.9355 0.0805 -0.3439]
             0. -0.9737 -0.2278]]
34
    [ 0.
35
    Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
37
   [[ 0.136  0.4519]
38
   [ 0.5176 -0.0734]]
39
40
   Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
41
      \lambda_1 = 0.5261528266779573 (size = 0.5262)
42
    \lambda 2 = -0.4635182526918817 \text{ (size = 0.4635)}
43
44
   --- Orthogonal Matrix Q number 3 ---
45
46
    Matrix Q:
47
    [[-0.0452 -0.9852 -0.1571 0.0523]
    [ 0.4259  0.0412 -0.0809  0.9002]
48
49
   [ 0.1843  0.1346 -0.9569 -0.1793]
    [-0.8846 0.0982 -0.2303 0.3934]]
50
51
    Hessenberg Form H (of Q):
   [[-0.0452  0.4954  -0.8604  -0.1112]
53
   [-0.999 -0.0224 0.0389 0.005 ]
54
   [ 0. 0.8684 0.4918 0.0636]
55
               0. 0.1282 -0.9917]]
56
    [-0.
57
   Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
58
59 [[-0.9569 -0.1793]
```

```
60
   [-0.2303 0.3934]]
61
   Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
62
    \lambda_1 = 0.42331102317930497 (size = 0.4233)
63
   \lambda 2 = -0.9868680130188092 \text{ (size = 0.9869)}
64
65
66
67
    --- Orthogonal Matrix Q number 4 ---
68
   Matrix Q:
69
   [[-0.2568 0.8228 -0.2287 0.4525]
   [-0.2848 -0.018  0.9011  0.3265]
70
71
   [-0.6054 -0.5408 -0.3667 0.4544]
72
    [ 0.6975 -0.1738 -0.0346  0.6943]]
73
   Hessenberg Form H (of Q):
74
   [[-0.2568 0.2274 0.1895 0.92 ]
   [ 0.9665  0.0604  0.0503  0.2444]
76
   [-0. -0.9719 0.0475 0.2305]
77
78
   [ 0. 0. -0.9794 0.2017]]
79
   Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
81
    [[-0.3667 0.4544]
82
   [-0.0346 0.6943]]
83
84 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
85 \lambda 1 = 0.67929095950588 (size = 0.6793)
86
     \lambda_2 = -0.3516952691053273 (size = 0.3517)
87
89
   --- Orthogonal Matrix Q number 5 ---
90
    Matrix Q:
   [[-0.5025 -0.7649 -0.0345 0.4015]
91
   [ 0.3718  0.0654  0.6626  0.6469]
92
   [ 0.6819 -0.6372  0.0297 -0.358 ]
   [ 0.3798  0.0679 -0.7476  0.5406]]
94
95
   Hessenberg Form H (of Q):
96
97 [[-0.5025 0.1798 -0.7903 0.3011]
   [-0.8646 -0.1045 0.4593 -0.175 ]
99
   [-0. -0.9781 -0.1943 0.074 ]
100 [-0. 0. 0.356 0.9345]]
101
102 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
103 [[ 0.0297 -0.358 ]
104 [-0.7476 0.5406]]
105
```

```
106 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
107
      \lambda 1 = 0.8621172090206812 \text{ (size = 0.8621)}
108
      \lambda 2 = -0.2918043055687003 \text{ (size = 0.2918)}
109 -----
110
111 --- Orthogonal Matrix Q number 6 ---
112 Matrix Q:
113 [[-0.9092 0.1745 0.2312 -0.2992]
114 [ 0.1618 -0.3496 -0.2497 -0.8884]
115 [-0.1454 0.4629 -0.8736 0.0369]
116 [-0.3551 -0.7956 -0.3479 0.3462]]
117
118 Hessenberg Form H (of Q):
119 [[-0.9092 -0.2422 -0.3011 -0.1552]
120 [-0.4164 0.5288 0.6573 0.3389]
121 [ 0. 0.8134 -0.517 -0.2665]
122 [-0. 0. 0.4582 -0.8888]]
123
124 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
125 [[-0.8736 0.0369]
126 [-0.3479 0.3462]]
127
128 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
129
    \lambda 1 = 0.3356278613353456  (size = 0.3356)
130 \lambda_2 = -0.8630034423078552 (size = 0.8630)
131 -----
132
133 --- Orthogonal Matrix Q number 7 ---
134 Matrix 0:
135 [[-0.4296  0.6844 -0.4085  0.4245]
136 [ 0.2184 -0.4244 -0.028  0.8783]
137 [ 0.17 -0.3028 -0.9122 -0.2177]
138 [ 0.8596  0.5097 -0.0167  0.032 ]]
139
140 Hessenberg Form H (of Q):
141 [[-0.4296 -0.4928 0.7535 0.0703]
142 [-0.903 0.2344 -0.3584 -0.0334]
143 [-0. -0.838 -0.5433 -0.0507]
144 [ 0. 0. 0.0928 -0.9957]]
145
146 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
147 [[-0.9122 -0.2177]
148 [-0.0167 0.032]]
149
150 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
151 \lambda_1 = 0.0358294023777706 (size = 0.0358)
```

```
152
    \lambda_2 = -0.9159948591320213 (size = 0.9160)
153 -----
154
155 --- Orthogonal Matrix Q number 8 ---
156 Matrix Q:
157 [[-0.3402 -0.0284 -0.009 0.9399]
158 [-0.7148 -0.6207 0.1662 -0.2759]
159 [-0.5681 0.5973 -0.5323 -0.1927]
161
162 Hessenberg Form H (of Q):
163 [[-0.3402 0.2518 0.8476 0.3201]
164 [ 0.9403 0.0911 0.3067 0.1158]
165 [ 0. 0.9635 -0.2505 -0.0946]
166 [-0.
           -0. 0.3533 -0.9355]]
167
168 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
169 [[-0.5323 -0.1927]
170 [-0.83 0.0581]]
171
172 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
\lambda_1 = 0.25997158900622225 (size = 0.2600)
\lambda 2 = -0.7341829044352151 \text{ (size = 0.7342)}
175 -----
176
177 --- Orthogonal Matrix Q number 9 ---
178 Matrix Q:
179 [[-0.2692 0.5878 -0.5428 0.5361]
180 [-0.8282 0.0254 0.5486 0.1116]
181 [-0.292 0.3638 -0.2875 -0.8365]
182 [-0.3954 -0.7222 -0.5673 0.0189]]
183
184 Hessenberg Form H (of Q):
185 [[-0.2692 -0.561 -0.1619 0.7659]
186 [ 0.9631 -0.1568 -0.0453  0.2141]
187 [-0. -0.8128 0.1205 -0.5699]
188 [ 0. -0. -0.9784 -0.2069]]
189
190 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
191 [[-0.2875 -0.8365]
192 [-0.5673 0.0189]]
193
194 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
195
    \lambda_1 = 0.5713848430035342 (size = 0.5714)
196 \lambda_2 = -0.8399942790872519 (size = 0.8400)
197 -----
```

```
198
199 --- Orthogonal Matrix Q number 10 ---
200 Matrix Q:
201 [[-0.4241 0.1349 -0.1773 0.8778]
202 [-0.332 -0.8664 -0.3594 -0.0999]
203 [ 0.8422 -0.2846 -0.2058 0.409 ]
204 [-0.0237 -0.3876 0.8928 0.2284]]
205
206 Hessenberg Form H (of Q):
207 [[-0.4241 -0.2373 0.8677 0.1046]
208 [ 0.9056 -0.1111  0.4063  0.049 ]
209 [-0. 0.9651 0.2602 0.0313]
210 [ 0.
              0. 0.1196 -0.9928]]
211
212 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
213 [[-0.2058 0.409]
214 [ 0.8928  0.2284]]
215
216 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
\lambda_1 = 0.6533894082311485  (size = 0.6534)
218
    \lambda 2 = -0.6307995911677337  (size = 0.6308)
219 -----
220
221 --- Orthogonal Matrix Q number 11 ---
222 Matrix Q:
223 [[-0.1675 -0.9786 -0.0461 -0.1099]
224 [ 0.7871 -0.1742 0.5819 0.1072]
225 [ 0.3816 -0.1052 -0.6644 0.6339]
226 [-0.4547 -0.0293 0.4667 0.758 ]]
227
228 Hessenberg Form H (of Q):
229 [[-0.1675 0.7485 -0.1241 -0.6295]
230 [-0.9859 -0.1271 0.0211 0.1069]
231 [ 0. -0.6508 -0.1468 -0.7449]
232 [ 0. -0. -0.9811 0.1934]]
233
234 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
235 [[-0.6644 0.6339]
236 [ 0.4667 0.758 ]]
237
238 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
239 \lambda_1 = 0.9421402114923986 (size = 0.9421)
240
    \lambda_2 = -0.8485799008471894 (size = 0.8486)
241 -----
242
243 --- Orthogonal Matrix Q number 12 ---
```

```
244 Matrix Q:
245 [[-0.3541 0.5585 -0.0616 0.7476]
246 [-0.5108 -0.6958 -0.4435 0.2414]
247 [ 0.1705  0.3507 -0.885 -0.2542]
248 [ 0.7646 -0.2844 -0.1274 0.5641]]
249
250 Hessenberg Form H (of Q):
251 [[-0.3541 0.295 0.7613 0.4561]
252 [ 0.9352  0.1117  0.2883  0.1727]
253 [-0. 0.949 -0.2706 -0.1621]
254 [-0. -0. 0.5139 -0.8579]]
255
256 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
257 [[-0.885 -0.2542]
258 [-0.1274 0.5641]]
259
260 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
261 \lambda 1 = 0.5861402323977607 (size = 0.5861)
262 \lambda 2 = -0.9070552039589896 (size = 0.9071)
263 -----
264
265 --- Orthogonal Matrix Q number 13 ---
266 Matrix Q:
267 [[-0.7015 0.4915 0.3042 -0.417]
268 [ 0.4623 -0.1626  0.1522 -0.8583]
269 [ 0.2479  0.6778  -0.6824  -0.1159]
270 [-0.4825 -0.5221 -0.647 -0.2757]]
271
272 Hessenberg Form H (of Q):
273 [[-0.7015 -0.7069 -0.0829 -0.0373]
274 [-0.7127 0.6958 0.0816 0.0367]
275 [ 0. 0.1276 -0.9045 -0.4069]
276 [ 0. -0. 0.4103 -0.912 ]]
277
278 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
279 [[-0.6824 -0.1159]
280 [-0.647 -0.2757]]
281
282 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
283 \lambda_1 = -0.1379150700589457 (size = 0.1379)
\lambda_2 = -0.820164584090632 (size = 0.8202)
285 -----
286
287 --- Orthogonal Matrix Q number 14 ---
288 Matrix Q:
289 [[-0.2164 -0.5735 0.7758 -0.1498]
```

```
290
    [-0.3581 -0.6722 -0.6278 -0.1609]
291 [-0.1535 0.3054 0.0015 -0.9398]
    [-0.8952 0.3551 0.0633 0.2617]]
292
293
294 Hessenberg Form H (of Q):
295 [[-0.2164 0.2256 -0.3541 0.8814]
296 [ 0.9763  0.05  -0.0785  0.1954]
297 [-0. -0.9729 -0.0862 0.2144]
298 [-0. 0. -0.9279 -0.3728]]
299
300 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
301 [[ 0.0015 -0.9398]
302 [ 0.0633  0.2617]]
303
304 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
      \lambda 1 = (0.1316169167334142+0.20628124638940884j) (size = 0.2447)
306
    \lambda_2 = (0.1316169167334142 - 0.20628124638940884j) (size = 0.2447)
307 -----
308
309 --- Orthogonal Matrix Q number 15 ---
310 Matrix Q:
311 [[-0.467  0.1387  0.7316  0.4769]
312 [ 0.0375 -0.9757  0.0774  0.2017]
313 [-0.7384 -0.0272 -0.627 0.2467]
314 [ 0.485  0.1677 -0.2562  0.8191]]
315
316 Hessenberg Form H (of Q):
317 [[-0.467  0.3435 -0.8022 -0.1428]
318 [-0.8843 -0.1814 0.4236 0.0754]
319 [-0. 0.9215 0.3824 0.068 ]
320 [-0. -0. 0.1752 -0.9845]]
321
322 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
323 [[-0.627
              0.24671
324 [-0.2562 0.8191]]
325
326 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
\lambda_1 = 0.7740235941481243 (size = 0.7740)
    \lambda 2 = -0.5818796203145907 \text{ (size = 0.5819)}
329 -----
330
331 --- Orthogonal Matrix Q number 16 ---
332 Matrix Q:
333 [[-0.3849 0.0435 -0.7406 0.549]
334 [ 0.2525 -0.952 -0.07  0.158 ]
335 [ 0.7807  0.2969  0.0191  0.5495]
```

```
336 [-0.4225 -0.06 0.668 0.6096]]
337
338 Hessenberg Form H (of Q):
339 [[-0.3849 0.866 0.1952 0.2527]
340 [-0.923 -0.3611 -0.0814 -0.1054]
341 [ 0. 0.346 -0.5736 -0.7425]
342 [ 0. 0. -0.7914 0.6114]]
343
344 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
345 [[0.0191 0.5495]
346 [0.668 0.6096]]
347
348 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
\lambda 1 = 0.9883202000131572  (size = 0.9883)
    \lambda 2 = -0.3596282457787697  (size = 0.3596)
350
351 -----
352
353 --- Orthogonal Matrix Q number 17 ---
354 Matrix 0:
355 [[-0.1066 0.7212 0.0749 -0.6804]
356 [-0.6764 -0.5121 0.3485 -0.3985]
357 [-0.5738 0.1159 -0.8012 0.1245]
358 [-0.4493 0.4519 0.4807 0.6024]]
359
360 Hessenberg Form H (of Q):
361 [[-0.1066 -0.2265 -0.8608 -0.4431]
362 [ 0.9943 -0.0243 -0.0923 -0.0475]
363 [ 0. -0.9737 0.2025 0.1043]
364 [ 0. 0. 0.4577 -0.8891]]
365
366 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
367 [[-0.8012 0.1245]
368 [ 0.4807 0.6024]]
369
370 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
371 \lambda 1 = 0.6437814804055579 (size = 0.6438)
372
     \lambda_2 = -0.842579679233141 (size = 0.8426)
373 -----
374
375 --- Orthogonal Matrix Q number 18 ---
376 Matrix Q:
377 [[-0.8255 0.1636 0.5347 0.0763]
378 [-0.5177 -0.2699 -0.6467 -0.4908]
379 [ 0.0194  0.9433  -0.2236  -0.2446]
380 [-0.2238 0.103 -0.4958 0.8327]]
381
```

```
382 Hessenberg Form H (of Q):
383 [[-0.8255 -0.1619 -0.4367 -0.3188]
384 [ 0.5644 -0.2368 -0.6388 -0.4663]
385 [ 0. 0.958 -0.2317 -0.1691]
386 [-0. 0. -0.5896 0.8077]]
387
388 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
389 [[-0.2236 -0.2446]
390
    [-0.4958 0.8327]]
391
392 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
393 \lambda_1 = 0.9372008193289816 (size = 0.9372)
394 \lambda_2 = -0.32809878403400955 (size = 0.3281)
395 -----
396
397 --- Orthogonal Matrix Q number 19 ---
398 Matrix Q:
399 [[-0.7885 0.0127 0.4922 -0.3686]
400 [ 0.5982 -0.2155  0.6311 -0.4444]
401 [ 0.0328  0.1282 -0.5621 -0.8164]
402 [-0.1391 -0.968 -0.2085 -0.0141]]
403
404 Hessenberg Form H (of Q):
405 [[-0.7885 -0.122 -0.4769 0.3687]
406 [-0.615 0.1564 0.6114 -0.4727]
407 [ 0.
              0.9801 -0.1569 0.1213]
408
    [ 0. 0. -0.6116 -0.7911]]
409
410 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
411 [[-0.5621 -0.8164]
412 [-0.2085 -0.0141]]
413
414 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
    \lambda 1 = 0.2071704757269035 (size = 0.2072)
415
416 \lambda_2 = -0.7833862909149965 (size = 0.7834)
417 -----
418
419 --- Orthogonal Matrix Q number 20 ---
420 Matrix Q:
421 [[-0.3031 0.0429 0.9481 0.0861]
422 [ 0.1571 -0.9342 0.1195 -0.2972]
423 [-0.8533 -0.0239 -0.2292 -0.4678]
424 [-0.3942 -0.3534 -0.1853 0.8279]]
425
426 Hessenberg Form H (of Q):
427 [[-0.3031 0.8775 -0.2647 0.261]
```

```
428 [-0.953 -0.2791 0.0842 -0.083]
429 [ 0. 0.3901 0.6557 -0.6464]
    [ 0. -0. -0.702 -0.7121]]
430
431
432 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
433 [[-0.2292 -0.4678]
434 [-0.1853 0.8279]]
435
436 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
437 \lambda 1 = 0.9043475415351031 (size = 0.9043)
438
    \lambda 2 = -0.30565758703551016  (size = 0.3057)
439 -----
440
441 --- Orthogonal Matrix Q number 21 ---
442 Matrix Q:
443 [[-0.8149 0.3649 -0.4406 -0.0928]
444 [ 0.0977 -0.6065 -0.7405 0.2726]
445 [ 0.0387  0.372  0.0415  0.9265]
446 [-0.57 -0.6005 0.5058 0.2423]]
447
448 Hessenberg Form H (of Q):
449 [[-0.8149 -0.1234 0.2317 0.5167]
450 [-0.5796 0.1735 -0.3257 -0.7266]
451 [ 0. -0.9771 -0.0871 -0.1943]
452 [-0. 0. 0.9125 -0.4091]]
453
454 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
455 [[0.0415 0.9265]
456 [0.5058 0.24231]
457
458 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
459 \lambda_1 = 0.8337542266557703 (size = 0.8338)
460
    \lambda_2 = -0.5499977130761522 (size = 0.5500)
461 -----
462
463 --- Orthogonal Matrix Q number 22 ---
464 Matrix 0:
465 [[-0.3663 0.4189 -0.6842 -0.4714]
466 [ 0.2919 -0.672 -0.6656 0.142 ]
467 [ 0.5024 0.6076 -0.2758 0.5498]
468 [-0.7268 -0.061 -0.1131 0.6748]]
469
470 Hessenberg Form H (of Q):
471 [[-0.3663 -0.1301 0.2621 0.8833]
472 [-0.9305 0.0512 -0.1032 -0.3477]
473 [-0. -0.9902 -0.0398 -0.134 ]
```

```
474 [ 0. -0. 0.9587 -0.2845]]
475
476 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
477 [[-0.2758 0.5498]
478 [-0.1131 0.6748]]
479
480 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
481
      \lambda 1 = 0.6040601009013424 \text{ (size = 0.6041)}
482
    \lambda 2 = -0.20508048336653284  (size = 0.2051)
483 -----
484
485 --- Orthogonal Matrix Q number 23 ---
486 Matrix 0:
487 [[-0.4467 -0.7825 -0.2287 0.3687]
488 [ 0.4222 0.182 -0.0157 0.8879]
489 [ 0.6922 -0.3543 -0.5694 -0.2666]
490 [-0.3783 0.4786 -0.7895 0.0678]]
491
492 Hessenberg Form H (of Q):
493 [[-0.4467 0.702 -0.0795 -0.5489]
494 [-0.8947 -0.3505 0.0397 0.274 ]
           -0.62 -0.1125 -0.7765]
495 [ 0.
    [ 0. 0. -0.9897 0.1433]]
496
497
498 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
499 [[-0.5694 -0.2666]
500 [-0.7895 0.0678]]
501
502 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
\lambda_1 = 0.3077269347022792 (size = 0.3077)
\lambda 2 = -0.8093108181365211  (size = 0.8093)
505 -----
506
507 --- Orthogonal Matrix Q number 24 ---
508 Matrix 0:
509 [[-0.0413 -0.9591 0.2707 0.0721]
510 [ 0.08 -0.274 -0.9584 0.0005]
511 [-0.6777 -0.0389 -0.0459 -0.7328]
512 [-0.7298 0.0604 -0.0778 0.6766]]
513
514 Hessenberg Form H (of Q):
515 [[-0.0413  0.3131  0.5108 -0.7996]
516 [-0.9991 -0.0129 -0.0211 0.0331]
517 [-0. 0.9496 -0.1687 0.2641]
518 [ 0. 0. 0.8427 0.5384]]
519
```

```
520 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
521 [[-0.0459 -0.7328]
522 [-0.0778 0.6766]]
523
524 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
525 \lambda_1 = 0.7483535886136121 (size = 0.7484)
526
    \lambda_2 = -0.1176716985715956 (size = 0.1177)
527 -----
528
529 --- Orthogonal Matrix Q number 25 ---
530 Matrix Q:
531 [[-0.7483  0.5153 -0.0763  0.4107]
532 [-0.4762 -0.7375 -0.4779 -0.0313]
533 [-0.1713 0.3719 -0.3481 -0.8433]
534 [ 0.4288  0.2287 -0.8029  0.3451]]
535
536 Hessenberg Form H (of Q):
537 [[-0.7483 -0.0847 0.4863 0.4431]
538 [ 0.6633 -0.0956  0.5486  0.4998]
539 [ 0. 0.9918 0.0944 0.086 ]
              0. 0.6735 -0.7392]]
540 [ 0.
541
542 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
543 [[-0.3481 -0.8433]
544 [-0.8029 0.3451]]
545
546 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
547
      \lambda_1 = 0.8914410770554546 (size = 0.8914)
548
    \lambda 2 = -0.8943450015206609 \text{ (size = 0.8943)}
549 -----
550
551 --- Orthogonal Matrix Q number 26 ---
552 Matrix Q:
553 [[-0.9036 0.127 -0.0161 0.4088]
554 [-0.2097 -0.5366 -0.7493 -0.3265]
555 [ 0.3449  0.3256  -0.6074  0.6373]
556 [ 0.1433 -0.7681 0.2634 0.5658]]
557
558 Hessenberg Form H (of Q):
559 [[-0.9036 0.0616 0.2624 0.3329]
560 [ 0.4284 0.13
                   0.5536 0.7022]
561 [ 0. 0.9896 -0.0891 -0.113 ]
562 [-0. -0. 0.7853 -0.6191]]
563
564 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
565 [[-0.6074 0.6373]
```

```
566 [ 0.2634 0.5658]]
567
568 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
    \lambda 1 = 0.6947481590186378 (size = 0.6947)
570
    \lambda 2 = -0.7362843808778513 (size = 0.7363)
571 -----
572
573 --- Orthogonal Matrix Q number 27 ---
574 Matrix 0:
575 [[-0.3783 0.2175 0.7347 -0.5194]
576 [-0.486 -0.5305 -0.4607 -0.5198]
577 [-0.7609 0.4199 -0.1943 0.455]
578 [-0.2046 -0.7036 0.4585 0.5029]]
579
580 Hessenberg Form H (of Q):
581 [[-0.3783 -0.6032 -0.0497 -0.7004]
582 [ 0.9257 -0.2465 -0.0203 -0.2862]
583 [ 0. 0.7585 -0.0461 -0.65 ]
584 [ 0. -0. -0.9975 0.0708]]
585
586 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
587 [[-0.1943 0.455]
588 [ 0.4585 0.5029]]
589
590 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
591 \lambda 1 = 0.7288996874702811 (size = 0.7289)
592
     \lambda_2 = -0.42026844598624513 (size = 0.4203)
593 -----
594
595 --- Orthogonal Matrix Q number 28 ---
596 Matrix 0:
597 [[-0.6177 -0.2663 -0.3252 0.6646]
598 [ 0.7345 -0.3401  0.0741  0.5826]
599 [ 0.0015 -0.8476 -0.2571 -0.4641]
600 [ 0.2811 0.308 -0.907 -0.0592]]
601
602 Hessenberg Form H (of Q):
603 [[-0.6177 0.0118 0.5166 0.5928]
604 [-0.7864 -0.0093 -0.4058 -0.4656]
605 [ 0. -0.9999 0.0099 0.0113]
606 [ 0.
            -0. 0.7539 -0.657 ]]
607
608 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
609 [[-0.2571 -0.4641]
610 [-0.907 -0.0592]]
611
```

```
612 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
      \lambda 1 = 0.4981407629675436  (size = 0.4981)
613
614
      \lambda 2 = -0.8144343078024388 (size = 0.8144)
615 -----
616
617 --- Orthogonal Matrix Q number 29 ---
618 Matrix Q:
619 [[-0.889 -0.0288 0.3962 -0.2278]
620 [ 0.1961 -0.4549 -0.0899 -0.864 ]
621 [-0.4017 -0.36 -0.8217 0.1838]
622 [ 0.0995 -0.814  0.3997  0.4095]]
623
624 Hessenberg Form H (of Q):
625 [[-0.889  0.4094  0.14  -0.1501]
626 [-0.458 -0.7947 -0.2718 0.2914]
627 [ 0. -0.4483 0.6097 -0.6537]
628 [ 0. -0. -0.7313 -0.6821]]
629
630 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
631 [[-0.8217 0.1838]
632 [ 0.3997  0.4095]]
633
634 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
635
    \lambda 1 = 0.46657705244665193  (size = 0.4666)
636 \lambda_2 = -0.8787442629640516 (size = 0.8787)
637 -----
638
639 --- Orthogonal Matrix Q number 30 ---
640 Matrix Q:
641 [[-0.2493  0.2801 -0.5896 -0.7154]
642 [-0.5128 -0.2897 0.6545 -0.4742]
643 [-0.2303 -0.8469 -0.4616 0.1292]
644 [-0.7886 0.3471 -0.1044 0.4967]]
645
646 Hessenberg Form H (of Q):
647 [[-0.2493 0.5744 -0.1969 -0.7544]
648 [ 0.9684 0.1479 -0.0507 -0.1942]
649 [ 0. -0.8051 -0.1498 -0.5739]
650
    [ 0. -0. 0.9676 -0.2526]]
651
652 Block Q[3:4,3:4] (indices 2 and 3, 2x2):
653 [[-0.4616 0.1292]
654 [-0.1044 0.4967]]
655
656 Eigenvalues of the 2x2 block (analytically calculated):
657 \lambda_1 = 0.4824356418279282 (size = 0.4824)
```

```
658 \lambda_2 = -0.4473584670796439 (size = 0.4474)
659 -----
```

So we observe that in the  $2 \times 2$  blocks analyzed:

- 1. Orthogonality is not always preserved
- 2. The eigenvalues are usually real, with alternating sign and size around 1.

### 4.5. Shift With an Eigenvalue (d)

Now we use an eigenvalue of the  $2 \times 2$  block as a shift:

```
def pretty(arr: np.ndarray, prec: int = 3) -> str:
                                                                               Python
2
         11 11 11
3
        Compact string for a 1-D NumPy array.
4
5
6
        Args:
7
             arr (np.ndarray): Input array to be formatted.
8
             prec (int): Precision for the string representation.
9
        Returns:
10
             str: Formatted string representation of the array.
11
        Raises:
12
             None
         0.00
13
14
15
         return np.array_str(arr, precision=prec, suppress_small=True)
16
17
    def qr_iteration_with_fixed_shift(
18
        H: np.ndarray,
19
        mu: complex,
20
        *
21
        max_iter: int = 100,
22
         tol: float = 1e-10,
23
        debug: bool = False,
24
    ):
        H H H
25
         Fixed-shift QR iteration that optionally shows the sub-diagonal before the
26
         first step and after the final step.
27
28
        Args:
             H (np.ndarray): initial matrix in Hessenberg form.
29
30
             mu (complex): fixed shift to be used.
             max iter (int): maximum number of iterations.
32
             tol (float): tolerance for convergence.
33
             debug (bool): if True, print detailed information about each iteration.
34
35
        Returns:
```

```
36
             Hk (np.ndarray): matrix after iterations.
37
             converged (bool): whether it converged to almost upper triangular form.
38
             iterations (int): number of iterations performed.
39
         Raises:
40
             None
         11 11 11
41
42
43
         Hk = H.astype(np.complex128, copy=True)
44
         n = Hk.shape[0]
45
46
         if debug:
             init\_sub = np.diag(Hk, k=-1)
47
48
             print(" before: subdiag=" + pretty(init sub) +
49
                   f", \|\cdot\|_2 = \{\text{np.linalg.norm(init\_sub):.3e}\}")
50
51
         for k in range(max iter):
52
             Q, R = np.linalg.qr(Hk - mu * np.eye(n))
             Hk = R @ Q + mu * np.eye(n)
53
54
55
             sub = np.diag(Hk, k=-1)
56
             if debug:
57
                 print(
                      f" iter {k:02d}: subdiag=" + pretty(sub) +
58
                     f", \|\cdot\|_2 = \{\text{np.linalg.norm(sub)}:.3e\}"
59
60
                 )
61
62
             if np.all(np.abs(sub) < tol):</pre>
63
                  break #tests convergence
64
65
         if debug: #final sub-diagonal
66
             final sub = np.diag(Hk, k=-1)
67
             print(" after : subdiag=" + pretty(final_sub) +
68
                   f", ||·||2={np.linalg.norm(final_sub):.3e}")
69
         converged = np.all(np.abs(np.diag(Hk, k=-1)) < tol)</pre>
70
71
         return Hk, converged, min(k + 1, max iter)
72
73
74
     def run_qr_iteration_with_shifts_and_debug(
75
         *,
         n: int = 4,
76
77
         n matrices: int = 30,
78
         max_iter: int = 50,
79
         debug: bool = False,
80
    ):
         11 11 11
81
```

```
Runs the QR iteration with fixed shifts on randomly generated orthogonal
82
        matrices,
         printing a summary for each matrix. Detailed logging appears only when
83
        debug = True.
84
85
         Args:
86
            n (int): Size of the matrices (n \times n).
            n_matrices (int): Number of orthogonal matrices to generate and
87
            analyze.
88
            max iter (int): Maximum number of iterations for the QR iteration.
89
            debug (bool): If True, print detailed information about each iteration.
90
91
         Returns:
92
            None
93
        Raises:
94
            None
         11.11.11
95
96
         for idx in range(1, n_matrices + 1):
            print(f"\n Matrix {idx:02d}/{n matrices} (size {n}x{n})")
98
99
100
            Q = generate_orthogonal_matrix_qr(n)
101
            , H, = to hessenberg(Q)
102
103
            a, b, c, d = H[-2:, -2:].ravel()
104
            ev1, ev2 = analytical eigenvalues 2x2(a, b, c, d)
105
            mu = ev1 if abs(ev1 - H[-1, -1]) < abs(ev2 - H[-1, -1]) else ev2
106
            print(f" | fixed shift \mu = \{mu:.6g\} (|\mu| = \{abs(mu):.4f\})")
107
108
            Hk, ok, iters = qr iteration with fixed shift(
109
                 H, mu, max iter=max iter, tol=1e-10, debug=debug
110
            )
111
112
            print(f" | iterations = {iters}/{max iter}")
113
            print(" | sub-diag magnitudes after last step:")
114
            print(" | ", pretty(np.abs(np.diag(Hk, k=-1))))
            print(f" converged? = {'yes' if ok else 'no'}")
115
116
117
118
    run qr iteration with shifts and debug(n=4, n matrices=30, max iter=100,
    debug=True)
```

An expected output is:

```
3
        before: subdiag=[ 0.959+0.j -0.993+0.j -0.393+0.j], \|\cdot\|_2=1.436e+00
4
        iter 00: subdiag=[0.731+0.j 0.334+0.j 0.235+0.j], \|\cdot\|_2=8.375e-01
5
        iter 01: subdiag=[ 0.723+0.j-0.045+0.j-0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.601e-01
6
        iter 02: subdiag=[0.723+0.j 0.006+0.j 0.231+0.j],
                                                                 \|\cdot\|_{2}=7.586e-01
7
        iter 03: subdiag=[ 0.723+0.j -0.001+0.j -0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
8
        iter 04: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
9
        iter 05: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 06: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
10
        iter 07: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
11
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
12
        iter 08: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
13
        iter 09: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
14
        iter 10: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
15
        iter 11: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 12: subdiag=[0.723+0.j 0.
16
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 13: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
17
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
18
        iter 14: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
19
        iter 15: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 16: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
20
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
21
        iter 17: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
22
        iter 18: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
23
        iter 19: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
24
        iter 20: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
25
        iter 21: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
26
        iter 22: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
27
        iter 23: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
28
        iter 24: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.10.231+0.1, \|\cdot\|_{2}=7.586e-01
29
        iter 25: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
30
        iter 26: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
31
        iter 27: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 28: subdiag=[0.723+0.j 0.
32
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
33
        iter 29: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
34
        iter 30: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
35
        iter 31: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 32: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
36
37
        iter 33: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
38
        iter 34: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
39
        iter 35: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 36: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
40
41
        iter 37: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 38: subdiag=[0.723+0.j 0.
42
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
43
        iter 39: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 40: subdiag=[0.723+0.j 0.
44
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
45
        iter 41: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
46
        iter 42: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.10.231+0.1, \|\cdot\|_{2}=7.586e-01
47
        iter 43: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
48
        iter 44: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
```

```
49
        iter 45: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
50
        iter 46: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
51
        iter 47: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231 +0.j], ||\cdot||_2 = 7.586e -01
        iter 48: subdiag=[0.723+0.j 0.
52
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
53
        iter 49: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                                +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
54
        iter 50: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
55
        iter 51: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 52: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
56
        iter 53: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
57
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 54: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
58
        iter 55: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
59
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
60
        iter 56: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
        iter 57: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
61
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 58: subdiag=[0.723+0.j 0.
62
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 59: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
63
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 60: subdiag=[0.723+0.j 0.
64
                                             +0.10.231+0.1, \|\cdot\|_{2}=7.586e-01
65
        iter 61: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 62: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
66
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
67
        iter 63: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
        iter 64: subdiag=[0.723+0.j 0.
68
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
        iter 65: subdiag=[0.723+0.j-0.
69
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
70
        iter 66: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
71
        iter 67: subdiag=[0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
72
        iter 68: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
73
        iter 69: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
74
        iter 70: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.10.231+0.1, \|\cdot\|_{2}=7.586e-01
75
        iter 71: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
76
        iter 72: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
77
        iter 73: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
78
        iter 74: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
79
        iter 75: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                                +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
80
        iter 76: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
81
        iter 77: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
82
        iter 78: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
83
        iter 79: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
84
        iter 80: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 81: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
85
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 82: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
86
87
        iter 83: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 84: subdiag=[0.723+0.j 0.
88
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 85: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
89
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 86: subdiag=[0.723+0.j 0.
90
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
91
        iter 87: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
92
        iter 88: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.10.231+0.1, \|\cdot\|_{2}=7.586e-01
93
        iter 89: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                               +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
94
        iter 90: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
```

```
95
        iter 91: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                                 +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
96
        iter 92: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                               +0.j \ 0.231+0.j], \|\cdot\|_2=7.586e-01
97
        iter 93: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                                 +0.j -0.231 +0.j], ||\cdot||_2 = 7.586e -01
        iter 94: subdiag=[0.723+0.j 0.
98
                                               +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
99
        iter 95: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                                 +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
100
        iter 96: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                               +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
101
        iter 97: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                                 +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
102
        iter 98: subdiag=[0.723+0.j 0.
                                               +0.j \ 0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
        iter 99: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
103
                                                 +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
104
        after: subdiag=[ 0.723+0.j -0.
                                                +0.j -0.231+0.j], ||\cdot||_2=7.586e-01
105
          iterations
                          = 100/100
106
          sub-diag magnitudes after last step:
107
          [0.723 0.
                         0.231]
108
      └ converged?
                          = no
109
110
      ─ Matrix 02/30 (size 4x4)
111
          fixed shift \mu = 0.985706 (|\mu|=0.9857)
        before: subdiag=[ 0.942+0.j -0.63 +0.j -0.464+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.224e + 00
112
113
        iter 00: subdiag=[ 0.982+0.j -0.877+0.j -0.004+0.j], ||\cdot||_2=1.316e+00
114
        iter 01: subdiag=[ 0.993+0.j -0.997+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.407e+00
                                                              +0.j],
115
        iter 02: subdiag=[0.85 +0.j -0.977+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.295e+00
116
        iter 03: subdiag=[ 0.581+0.j -0.942+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.107e+00
117
        iter 04: subdiag=[ 0.346+0.j -0.925+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.879e - 01
118
        iter 05: subdiag=[ 0.195+0.j -0.92 +0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.402e - 01
119
        iter 06: subdiag=[ 0.108+0.j -0.918+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.244e - 01
120
        iter 07: subdiag=[ 0.059+0.j -0.918+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.194e - 01
121
        iter 08: subdiag=[ 0.033+0.j -0.917+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 9.179e - 01
                                                              +0.j],
122
        iter 09: subdiag=[ 0.018+0.j -0.917+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.175e - 01
123
        iter 10: subdiag=[ 0.01 +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
        iter 11: subdiag=[ 0.005+0.j -0.917+0.j -0.
124
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
125
        iter 12: subdiag=[ 0.003+0.j -0.917+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
126
        iter 13: subdiag=[ 0.002+0.j -0.917+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
127
        iter 14: subdiag=[ 0.001+0.j -0.917+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
128
        iter 15: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
129
        iter 16: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
130
        iter 17: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
131
        iter 18: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
        iter 19: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
132
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
133
        iter 20: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
        iter 21: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
134
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
135
        iter 22: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                              +0.j],
        iter 23: subdiag=[ 0.
136
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
137
        iter 24: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
138
        iter 25: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
139
        iter 26: subdiag=[ 0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
140
        iter 27: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
```

```
141
         iter 28: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
142
         iter 29: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
         iter 30: subdiag=[ 0.
143
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
         iter 31: subdiag=[ 0.
144
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
145
         iter 32: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
146
         iter 33: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
147
         iter 34: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 35: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
148
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
         iter 36: subdiag=[ 0.
149
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
150
         iter 37: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
151
         iter 38: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
152
         iter 39: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
153
         iter 40: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 41: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
154
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
         iter 42: subdiag=[ 0.
155
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
156
         iter 43: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
157
         iter 44: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
         iter 45: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
158
                                                                 +0.j],
159
         iter 46: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
         iter 47: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
160
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 48: subdiag=[ 0.
161
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
162
         iter 49: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
         iter 50: subdiag=[ 0.
163
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
164
         iter 51: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
165
         iter 52: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
166
         iter 53: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
167
         iter 54: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
168
         iter 55: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
169
         iter 56: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 57: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
170
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
171
         iter 58: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
                                                                 +0.j],
172
         iter 59: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
173
         iter 60: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
174
         iter 61: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 62: subdiag=[ 0.
175
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
176
         iter 63: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 64: subdiag=[ 0.
177
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
         iter 65: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
178
                                                                 +0.j],
179
         iter 66: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
180
         iter 67: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
181
         iter 68: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 69: subdiag=[ 0.
182
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
183
         iter 70: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
184
         iter 71: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
185
         iter 72: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
186
         iter 73: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
```

```
187
         iter 74: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=9.173e-01
188
         iter 75: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                +0.j],
189
         iter 76: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
190
         iter 77: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
191
         iter 78: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_{2}=9.173e-01
                                                                +0.j],
192
         iter 79: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                +0.j],
193
         iter 80: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                +0.j],
194
         iter 81: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
         iter 82: subdiag=[ 0.
195
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
196
         iter 83: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
197
         iter 84: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
198
         iter 85: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
199
         iter 86: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                +0.j],
         iter 87: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
200
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
201
         iter 88: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                +0.j],
202
         iter 89: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
203
         iter 90: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
         iter 91: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
204
                                                                +0.j],
205
         iter 92: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
         iter 93: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
206
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                +0.j],
207
         iter 94: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=9.173e-01
208
         iter 95: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
209
         iter 96: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
210
         iter 97: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                               +0.il,
211
         iter 98: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
212
         iter 99: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.917+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.173e - 01
213
         after : subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.917+0.j -0.
                                                              +0.j], ||\cdot||_2=9.173e-01
214
         iterations
                          = 100/100
215
          sub-diag magnitudes after last step:
216
          [0.
                  0.917 0.
                               ]
217
       └ converged?
218
219
       ─ Matrix 03/30 (size 4x4)
220
       | fixed shift \mu = 0.999872 (|\mu| = 0.9999)
221
         before: subdiag=[ 0.889+0.j -0.786+0.j
                                                        0.008+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.186e+00
222
         iter 00: subdiag=[ 0.692+0.j -0.475+0.j
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 8.397e - 01
         iter 01: subdiag=[ 0.182+0.j -0.444+0.j
223
                                                          0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.803e - 01
                                                                +0.j],
         iter 02: subdiag=[ 0.042+0.j -0.443+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.448e - 01
224
                                                          0.
                                                                +0.j],
225
         iter 03: subdiag=[ 0.009+0.j -0.443+0.j
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.428e - 01
         iter 04: subdiag=[ 0.002+0.j -0.443+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
226
                                                          0.
                                                                +0.j],
227
         iter 05: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.443+0.j
                                                          0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                +0.j],
         iter 06: subdiag=[ 0.
228
                                     +0.j -0.443+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
229
         iter 07: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.443+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
230
         iter 08: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.443+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_{2}=4.427e-01
231
         iter 09: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.443+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
232
         iter 10: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.443+0.j
                                                         0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
```

```
233
         iter 11: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
234
         iter 12: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
235
         iter 13: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
         iter 14: subdiag=[ 0.
236
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
237
         iter 15: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                                            \|\cdot\|_{2}=4.427e-01
                                                            0.
                                                                  +0.j],
238
         iter 16: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
239
         iter 17: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
240
         iter 18: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
         iter 19: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
241
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
         iter 20: subdiag=[ 0.
242
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
         iter 21: subdiag=[ 0.
243
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
244
         iter 22: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
245
         iter 23: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 24: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
246
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
         iter 25: subdiag=[ 0.
247
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
248
         iter 26: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
249
         iter 27: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
         iter 28: subdiag=[ 0.
                                       +0.i -0.443+0.i
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
250
                                                                  +0.j],
251
         iter 29: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
                                       +0.j -0.443+0.j
         iter 30: subdiag=[ 0.
252
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 31: subdiag=[ 0.
253
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
254
         iter 32: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
255
         iter 33: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
256
         iter 34: subdiag=[ 0.
                                       +0.i -0.443+0.i
                                                            0.
                                                                  +0.il,
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                       +0.j -0.443+0.j
257
         iter 35: subdiag=[ 0.
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
258
         iter 36: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
259
         iter 37: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
260
         iter 38: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
261
         iter 39: subdiag=[ 0.
                                       +0.i -0.443+0.i
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
262
         iter 40: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
263
         iter 41: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
264
         iter 42: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
265
         iter 43: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                            0.
                                                                  +0.j],
266
         iter 44: subdiag=[ 0.
                                       +0.i -0.443+0.i
                                                            0.
                                                                  +0.il,
                                                                            \|\cdot\|_{2}=4.427e-01
267
         iter 45: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
268
         iter 46: subdiag=[ 0.
                                       +0.i -0.443+0.i
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 47: subdiag=[ 0.
269
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
270
         iter 48: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
271
         iter 49: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
272
         iter 50: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 51: subdiag=[ 0.
273
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
274
         iter 52: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
275
         iter 53: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
276
         iter 54: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                       +0.j -0.443+0.j
277
         iter 55: subdiag=[ 0.
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
278
         iter 56: subdiag=[ 0.
                                       +0.j -0.443+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                  +0.j],
```

```
279
         iter 57: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
280
         iter 58: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                           0.
         iter 59: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
281
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
282
         iter 60: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
283
         iter 61: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                           \|\cdot\|_{2}=4.427e-01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
284
         iter 62: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                 +0.j],
285
         iter 63: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
286
         iter 64: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_{2}=4.427e-01
         iter 65: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
287
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
288
         iter 66: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
289
         iter 67: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
290
         iter 68: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
291
         iter 69: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
         iter 70: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
292
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
         iter 71: subdiag=[ 0.
293
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                 +0.j],
294
         iter 72: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
295
         iter 73: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
296
         iter 74: subdiag=[ 0.
                                      +0.i -0.443+0.i
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
297
         iter 75: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
         iter 76: subdiag=[ 0.
298
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 77: subdiag=[ 0.
299
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
300
         iter 78: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
301
         iter 79: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
302
         iter 80: subdiag=[ 0.
                                      +0.i -0.443+0.i
                                                           0.
                                                                 +0.il,
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
303
         iter 81: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
304
         iter 82: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
305
         iter 83: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                 +0.j],
306
         iter 84: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
307
         iter 85: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
308
         iter 86: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
309
         iter 87: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
310
         iter 88: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                 +0.j],
311
         iter 89: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
312
         iter 90: subdiag=[ 0.
                                      +0.i -0.443+0.i
                                                                 +0.il,
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
         iter 91: subdiag=[0.
                                     +0.j 0.443+0.j 0.
313
                                                              +0.j], ||\cdot||_2=4.427e-01
314
         iter 92: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                                 +0.j],
315
         iter 93: subdiag=[0.
                                     +0.j 0.443+0.j 0.
                                                              +0.j], ||\cdot||_2=4.427e-01
         iter 94: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
316
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
317
         iter 95: subdiag=[0.
                                     +0.j 0.443+0.j 0.
                                                              +0.j], ||\cdot||_2=4.427e-01
318
         iter 96: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
319
         iter 97: subdiag=[0.
                                     +0.j 0.443+0.j 0.
                                                              +0.j], ||\cdot||_2=4.427e-01
         iter 98: subdiag=[ 0.
320
                                      +0.j -0.443+0.j
                                                                 +0.j], ||\cdot||_2=4.427e-01
321
         iter 99: subdiag=[0.
                                     +0.j 0.443+0.j 0.
                                                             +0.j], ||\cdot||_2=4.427e-01
322
         after: subdiag=[0.
                                    +0.j 0.443+0.j 0.
                                                            +0.i], ||\cdot||_2=4.427e-01
323
                           = 100/100
          iterations
324
          sub-diag magnitudes after last step:
```

```
325
         [0.
                 0.443 0.
326
      └ converged?
                         = no
327
      ─ Matrix 04/30 (size 4x4)
328
329
         fixed shift \mu = -0.623567 (|\mu| = 0.6236)
330
        before: subdiag=[-0.823+0.j 0.998+0.j -0.726+0.j],
                                                                    \|\cdot\|_2=1.483e+00
331
        iter 00: subdiag=[-1.
                                   +0.j -0.866+0.j 0.426+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.390e+00
        iter 01: subdiag=[-0.973+0.j 0.433+0.j -0.346+0.j],
332
                                                                     \|\cdot\|_2=1.120e+00
        iter 02: subdiag=[-0.964+0.j -0.161+0.j 0.334+0.j],
333
                                                                     \|\cdot\|_2=1.033e+00
        iter 03: subdiag=[-0.963+0.j 0.057+0.j -0.333+0.j],
334
                                                                     \|\cdot\|_2=1.020e+00
335
        iter 04: subdiag=[-0.962+0.j -0.02 +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 05: subdiag=[-0.962+0.j 0.007+0.j -0.332+0.j],
336
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
337
        iter 06: subdiag=[-0.962+0.j -0.002+0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
338
        iter 07: subdiag=[-0.962+0.j]
                                         0.001+0.j-0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
339
        iter 08: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                               +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
340
        iter 09: subdiag=[-0.962+0.j
                                               +0.i -0.332+0.i],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
341
        iter 10: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                               +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 11: subdiag=[-0.962+0.j
342
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 12: subdiag=[-0.962+0.j -0.
343
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
344
        iter 13: subdiag=[-0.962+0.j
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
                                                                     \|\cdot\|_2 = 1.018e + 00
345
        iter 14: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
346
        iter 15: subdiag=[-0.962+0.j
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 16: subdiag=[-0.962+0.j -0.
347
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
348
        iter 17: subdiag=[-0.962+0.j
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
349
        iter 18: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
350
        iter 19: subdiag=[-0.962+0.j]
                                               +0.i -0.332+0.i],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
351
        iter 20: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                               +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
352
        iter 21: subdiag=[-0.962+0.j
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 22: subdiag=[-0.962+0.j -0.
353
                                               +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
354
        iter 23: subdiag=[-0.962+0.j
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 24: subdiag=[-0.962+0.j -0.
355
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
356
        iter 25: subdiag=[-0.962+0.j
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
357
        iter 26: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 27: subdiag=[-0.962+0.i]
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
358
        iter 28: subdiag=[-0.962+0.j -0.
359
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
360
        iter 29: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
361
        iter 30: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 31: subdiag=[-0.962+0.j
362
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
363
        iter 32: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 33: subdiag=[-0.962+0.j
364
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 34: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
365
                                                +0.j 0.332+0.j],
366
        iter 35: subdiag=[-0.962+0.j
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
367
        iter 36: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
368
        iter 37: subdiag=[-0.962+0.j]
                                               +0.i -0.332+0.i],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 38: subdiag=[-0.962+0.j -0.
369
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
370
        iter 39: subdiag=[-0.962+0.j 0.
                                               +0.j -0.332+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.018e+00
```

```
371
        iter 40: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
372
        iter 41: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 42: subdiag=[-0.962+0.j -0.
373
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
374
        iter 43: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 44: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
375
                                                +0.j 0.332+0.j],
376
        iter 45: subdiag=[-0.962+0.j]
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
377
        iter 46: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 47: subdiag=[-0.962+0.j
378
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 48: subdiag=[-0.962+0.j -0.
379
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 49: subdiag=[-0.962+0.j
380
                                                +0.i -0.332+0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
381
        iter 50: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
382
        iter 51: subdiag=[-0.962+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.018e + 00
                                                +0.j -0.332+0.j],
383
        iter 52: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 53: subdiag=[-0.962+0.j
384
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
385
        iter 54: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
                                                +0.j 0.332+0.j],
386
        iter 55: subdiag=[-0.962+0.j]
                                                +0.i -0.332+0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
387
        iter 56: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 57: subdiag=[-0.962+0.i]
388
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
389
        iter 58: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
390
        iter 59: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
391
        iter 60: subdiag=[-0.962+0.j-0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
392
        iter 61: subdiag=[-0.962+0.j
                                          0.
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
393
        iter 62: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
394
        iter 63: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
395
        iter 64: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
396
        iter 65: subdiag=[-0.962+0.j]
                                                +0.i -0.332+0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
397
        iter 66: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
398
        iter 67: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
399
        iter 68: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
400
        iter 69: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.018e + 00
401
        iter 70: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
                                                +0.j 0.332+0.j],
402
        iter 71: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
403
        iter 72: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
404
        iter 73: subdiag=[-0.962+0.i]
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.018e + 00
405
        iter 74: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
406
        iter 75: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
407
        iter 76: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
408
        iter 77: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
409
        iter 78: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
410
        iter 79: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
411
        iter 80: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
                                                +0.j 0.332+0.j],
        iter 81: subdiag=[-0.962+0.j
412
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
413
        iter 82: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
414
        iter 83: subdiag=[-0.962+0.j]
                                                +0.i -0.332+0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
415
        iter 84: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
416
        iter 85: subdiag=[-0.962+0.j 0.
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
```

```
417
        iter 86: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j \quad 0.332+0.j], ||\cdot||_2=1.018e+00
418
        iter 87: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
                                          0.
        iter 88: subdiag=[-0.962+0.j -0.
419
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
420
        iter 89: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
421
        iter 90: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
                                                 +0.j 0.332+0.j],
422
        iter 91: subdiag=[-0.962+0.j]
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
423
        iter 92: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
424
        iter 93: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
        iter 94: subdiag=[-0.962+0.j -0.
425
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.018e + 00
426
        iter 95: subdiag=[-0.962+0.j
                                                +0.i -0.332+0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.018e + 00
427
        iter 96: subdiag=[-0.962+0.j-0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
428
        iter 97: subdiag=[-0.962+0.j 0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.018e + 00
                                                +0.j -0.332+0.j],
429
        iter 98: subdiag=[-0.962+0.j -0.
                                                +0.j 0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
430
        iter 99: subdiag=[-0.962+0.j 0.
                                                +0.j -0.332+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.018e+00
431
        after : subdiag=[-0.962+0.j 0.
                                               +0.j -0.332+0.j], ||\cdot||_2=1.018e+00
432
          iterations
                         = 100/100
433
          sub-diag magnitudes after last step:
434
          [0.962 0.
                        0.3321
435
      └ converged?
                         = no
436
437
      ─ Matrix 05/30 (size 4x4)
438
      fixed shift \mu = -0.649367 - 0.477769j (|\mu| = 0.8062)
439
        before: subdiag=[-0.78 +0.j -0.76 +0.j 0.617+0.j], \|\cdot\|_2=1.252e+00
440
        iter 00: subdiag=[-0.705-0.j 0.441-0.j 0.209+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 8.579e - 01
441
        iter 01: subdiag=[-0.627+0.j -0.316+0.j
                                                       0.04 + 0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.032e - 01
442
        iter 02: subdiag=[-0.53 +0.j 0.232-0.j]
                                                       0.008+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.789e - 01
443
        iter 03: subdiag=[-0.432+0.j -0.173+0.j
                                                       0.001+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 4.649e - 01
444
        iter 04: subdiag=[-0.342+0.j 0.13 -0.j
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.660e - 01
                                                       0.
445
        iter 05: subdiag=[-0.267+0.j -0.098+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 2.844e - 01
                                                       0.
                                                             +0.j],
446
        iter 06: subdiag=[-0.206+0.j
                                          0.075-0.j
                                                       0.
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 2.191e - 01
447
        iter 07: subdiag=[-0.158+0.j -0.057+0.j
                                                       0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.679e-01
448
        iter 08: subdiag=[-0.121+0.j 0.044-0.j
                                                       0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.283e-01
                                                             -0.j],
449
        iter 09: subdiag=[-0.092+0.j -0.033+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 9.788e - 02
                                                             -0.j],
                                                       0.
450
        iter 10: subdiag=[-0.07 + 0.i]
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.459e-02
                                           0.026-0.i
                                                       0.
                                                             -0.j],
        iter 11: subdiag=[-0.053+0.j -0.02 +0.j
451
                                                       0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.681e - 02
                                                             -0.j],
452
        iter 12: subdiag=[-0.041+0.j
                                          0.015-0.j
                                                       0.
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.325e - 02
453
        iter 13: subdiag=[-0.031+0.j -0.012+0.j
                                                       0.
                                                                     \|\cdot\|_{2}=3.292e-02
                                                             -0.j],
        iter 14: subdiag=[-0.023+0.j 0.009-0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 2.506e - 02
454
                                                       0.
                                                             -0.j],
455
        iter 15: subdiag=[-0.018+0.j -0.007+0.j
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.907e-02
        iter 16: subdiag=[-0.014+0.j
                                                       0.
456
                                           0.005-0.j
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.451e-02
457
        iter 17: subdiag=[-0.01 +0.j -0.004+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2=1.105e-02
                                                       0.
                                                             -0.j],
        iter 18: subdiag=[-0.008+0.j
458
                                           0.003-0.j
                                                       0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 8.407e - 03
                                                             -0.j],
459
        iter 19: subdiag=[-0.006+0.j -0.002+0.j
                                                       0.
                                                             -0.j], ||\cdot||_2=6.398e-03
460
        iter 20: subdiag=[-0.005+0.j]
                                           0.002-0.j
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.870e - 03
461
        iter 21: subdiag=[-0.003+0.j -0.001+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.706e - 03
                                                       0.
                                                             -0.j],
462
        iter 22: subdiag=[-0.003+0.j 0.001-0.j 0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 2.821e - 03
                                                             -0.j],
```

```
463
         iter 23: subdiag=[-0.002+0.j -0.001+0.j
                                                               -0.j], ||\cdot||_2 = 2.147e - 03
                                                         0.
464
         iter 24: subdiag=[-0.002+0.j 0.001-0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 1.634e - 03
                                                         0.
                                                               -0.j],
         iter 25: subdiag=[-0.001+0.j -0.
465
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                               -0.j], ||\cdot||_2=1.244e-03
466
         iter 26: subdiag=[-0.001+0.j
                                                  -0.j
                                                         0.
                                                               -0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.466e - 04
467
         iter 27: subdiag=[-0.001+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_{2}=7.205e-04
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                                -0.j],
468
         iter 28: subdiag=[-0.001+0.j 0.
                                                               -0.j], ||\cdot||_2=5.484e-04
                                                  -0.j
                                                        0.
469
         iter 29: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.174e - 04
                                                  0.-0.j],
         iter 30: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
470
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.177e - 04
         iter 31: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
471
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.419e - 04
472
         iter 32: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.841e - 04
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.401e - 04
473
         iter 33: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                  0.-0.j],
474
         iter 34: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.067e - 04
                                                  0.-0.j],
475
         iter 35: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 8.120e - 05
                                                  0.-0.j],
         iter 36: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
476
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 6.182e - 05
477
         iter 37: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.706e - 05
                                                  0.-0.j],
478
         iter 38: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.582e - 05
479
         iter 39: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.727e - 05
480
         iter 40: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.076e - 05
                                                  0.-0.j],
481
         iter 41: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.581e - 05
                                                  0.-0.j],
482
         iter 42: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.203e - 05
                                                  0.-0.j],
483
         iter 43: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                  0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.162e - 06
484
         iter 44: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 6.975e - 06
485
         iter 45: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 5.311e - 06
486
         iter 46: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.044e - 06
         iter 47: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
487
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.079e - 06
488
         iter 48: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.344e - 06
489
         iter 49: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                             \|\cdot\|_2=1.785e-06
                                                  0.-0.j],
490
         iter 50: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.359e - 06
491
         iter 51: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.035e - 06
                                                  0.-0.j],
492
         iter 52: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 7.880e - 07
493
         iter 53: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 6.000e - 07
                                                  0.-0.j],
494
         iter 54: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.569e - 07
                                                  0.-0.j],
495
         iter 55: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.479e - 07
                                                  0.-0.j],
496
         iter 56: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_{2}=2.650e-07
                                                  0.-0.j],
         iter 57: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
497
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.018e - 07
498
         iter 58: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.537e - 07
499
         iter 59: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.170e - 07
                                                  0.-0.j],
500
         iter 60: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 8.913e - 08
                                                  0.-0.j],
501
         iter 61: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 6.788e - 08
502
         iter 62: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 5.170e - 08
503
         iter 63: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.937e - 08
                                                  0.-0.j],
504
         iter 64: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.999e - 08
505
         iter 65: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                  0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 2.284e - 08
506
         iter 66: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.740e - 08
         iter 67: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
507
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.325e - 08
508
         iter 68: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.009e-08
```

```
509
        iter 69: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j 0.-0.j], ||\cdot||_2=7.688e-09
510
        iter 70: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 5.857e - 09
        iter 71: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
511
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 4.461e - 09
512
        iter 72: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 3.398e - 09
        iter 73: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
513
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 2.589e - 09
514
        iter 74: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                             \|\cdot\|_2 = 1.972e - 09
                                                 0.-0.j],
515
        iter 75: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                 0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.503e - 09
516
        iter 76: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2=1.145e-09
        iter 77: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
517
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 8.721e - 10
        iter 78: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
518
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 6.644e - 10
                                                            \|\cdot\|_2 = 5.062e - 10
519
        iter 79: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                 0.-0.j],
520
        iter 80: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 3.857e - 10
521
        iter 81: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 2.939e - 10
522
        iter 82: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 2.239e - 10
523
        iter 83: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                             \|\cdot\|_2 = 1.706e - 10
                                                 0.-0.j],
524
        iter 84: subdiag=[-0.+0.j 0.-0.j
                                                             \|\cdot\|_2 = 1.300e - 10
                                                 0.-0.j],
525
        iter 85: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.907e - 11
        after: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j 0.-0.j], ||\cdot||_2=9.907e-11
526
527
                          = 86/100
         iterations
528
          sub-diag magnitudes after last step:
529
          [0. \ 0. \ 0.]
530
      └ converged?
                          = yes
531
532
      ─ Matrix 06/30 (size 4x4)
533
        fixed shift \mu = -0.771151 (|\mu|=0.7712)
534
        before: subdiag=[-0.695+0.j 0.921+0.j
                                                       0.395+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.220e+00
535
        iter 00: subdiag=[-0.414+0.j 0.919+0.j 0.099+0.j], \|\cdot\|_2=1.012e+00
536
        iter 01: subdiag=[-0.236+0.j 0.912+0.j
                                                         0.023+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.419e - 01
537
        iter 02: subdiag=[-0.131+0.j 0.909+0.j
                                                         0.005+0.j], ||\cdot||_2=9.186e-01
538
        iter 03: subdiag=[-0.072+0.j
                                           0.908+0.j
                                                         0.001+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.112e - 01
539
        iter 04: subdiag=[-0.04 +0.j
                                            0.908+0.j
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.090e - 01
540
        iter 05: subdiag=[-0.022+0.j
                                           0.908+0.j
                                                        0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.083e - 01
                                                              +0.j],
541
        iter 06: subdiag=[-0.012+0.j
                                          0.908+0.j
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.081e - 01
                                                         0.
542
        iter 07: subdiag=[-0.007+0.j
                                            0.908+0.i
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                         0.
                                                               +0.j],
        iter 08: subdiag=[-0.004+0.j
543
                                            0.908+0.j
                                                         0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                               +0.j],
        iter 09: subdiag=[-0.002+0.j
544
                                           0.908+0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
545
        iter 10: subdiag=[-0.001+0.j
                                           0.908+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                         0.
                                                               +0.j],
        iter 11: subdiag=[-0.001+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
546
                                           0.908+0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
547
        iter 12: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.908+0.j
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
        iter 13: subdiag=[-0.
548
                                     +0.j
                                           0.908+0.j
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                         0.
549
        iter 14: subdiag=[-0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                     +0.j
                                            0.908+0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
550
        iter 15: subdiag=[-0.
                                     +0.i
                                            0.908 + 0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
551
        iter 16: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                           0.908+0.j
                                                         0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                               +0.j],
552
        iter 17: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.908+0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
        iter 18: subdiag=[-0.
                                            0.908+0.j
553
                                     +0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
554
        iter 19: subdiag=[-0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                     +0.j
                                           0.908+0.j
                                                        0.
                                                               +0.j],
```

```
555
         iter 20: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
556
         iter 21: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 22: subdiag=[-0.
557
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
558
         iter 23: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 24: subdiag=[-0.
559
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
560
         iter 25: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                                    +0.j],
561
         iter 26: subdiag=[-0.
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                        +0.j
                                                                    +0.j],
         iter 27: subdiag=[-0.
562
                                        +0.i
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 28: subdiag=[-0.
563
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
564
         iter 29: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
565
         iter 30: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
566
         iter 31: subdiag=[-0.
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                        +0.j
                                                                    +0.j],
                                               0.908+0.j
567
         iter 32: subdiag=[-0.
                                        +0.i
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 33: subdiag=[-0.
568
                                        +0.i
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
569
         iter 34: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                                    +0.j],
570
         iter 35: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
571
         iter 36: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 37: subdiag=[-0.
                                               0.908 + 0.i
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
572
                                        +0.i
                                                             0.
                                                                    +0.j],
         iter 38: subdiag=[-0.
                                               0.908 + 0.j
573
                                        +0.i
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
574
         iter 39: subdiag=[-0.
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                        +0.j
                                                                    +0.j],
575
         iter 40: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
576
         iter 41: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
577
         iter 42: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
578
         iter 43: subdiag=[-0.
                                        +0.i
                                               0.908 + 0.i
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
579
         iter 44: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
580
         iter 45: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
581
         iter 46: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                                    +0.j],
582
         iter 47: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
583
         iter 48: subdiag=[-0.
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                        +0.i
                                                                    +0.j],
         iter 49: subdiag=[-0.
584
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
585
         iter 50: subdiag=[-0.
                                                             0.
                                        +0.i
                                               0.908+0.j
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
586
         iter 51: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                                    +0.j],
587
         iter 52: subdiag=[-0.
                                               0.908+0.j
                                        +0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
588
         iter 53: subdiag=[-0.
                                               0.908 + 0.i
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                        +0.i
                                                                    +0.j],
589
         iter 54: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                                    +0.j],
590
         iter 55: subdiag=[-0.
                                        +0.i
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
591
         iter 56: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 57: subdiag=[-0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
592
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
593
         iter 58: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
594
         iter 59: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
595
         iter 60: subdiag=[-0.
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                        +0.j
                                                                    +0.j],
         iter 61: subdiag=[-0.
596
                                        +0.i
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
597
         iter 62: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
598
         iter 63: subdiag=[-0.
                                        +0.j
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
599
         iter 64: subdiag=[-0.
                                               0.908 + 0.j
                                                             0.
                                        +0.j
                                                                    +0.j],
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
600
         iter 65: subdiag=[-0.
                                               0.908+0.j
                                                             0.
                                                                              \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                        +0.j
                                                                    +0.j],
```

```
601
         iter 66: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.908 + 0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j], ||\cdot||_2=9.080e-01
602
         iter 67: subdiag=[-0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                      +0.j
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
603
         iter 68: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.908 + 0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
604
         iter 69: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 70: subdiag=[-0.
605
                                      +0.j
                                              0.908 + 0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
606
         iter 71: subdiag=[-0.
                                              0.908 + 0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
607
         iter 72: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
608
         iter 73: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 74: subdiag=[-0.
609
                                      +0.j
                                             0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 75: subdiag=[-0.
610
                                             0.908 + 0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                      +0.j
                                                           0.
611
         iter 76: subdiag=[-0.
                                              0.908 + 0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 77: subdiag=[-0.
612
                                      +0.j
                                             0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
613
         iter 78: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
614
         iter 79: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
615
         iter 80: subdiag=[-0.
                                                           0.
                                      +0.j
                                              0.908+0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
616
         iter 81: subdiag=[-0.
                                              0.908 + 0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                      +0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
617
         iter 82: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         iter 83: subdiag=[-0.
618
                                      +0.i
                                             0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
619
         iter 84: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
620
         iter 85: subdiag=[-0.
                                              0.908+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                      +0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
621
         iter 86: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                              0.908 + 0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
622
         iter 87: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
623
         iter 88: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                              0.908 + 0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
624
         iter 89: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                             0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
625
         iter 90: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
626
         iter 91: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                              0.908 + 0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
627
         iter 92: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                              0.908+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
628
         iter 93: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
629
         iter 94: subdiag=[-0.
                                            0.908+0.j
                                      +0.i
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
630
         iter 95: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
631
         iter 96: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                              0.908+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
632
         iter 97: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.908+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                                 +0.j],
633
         iter 98: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.908+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                              0.908+0.i
634
         iter 99: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
         after : subdiag=[-0.
                                     +0.j 0.908+0.j
635
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.080e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
636
          iterations
                           = 100/100
637
          sub-diag magnitudes after last step:
638
          [0.
                   0.908 0.
                                ]

    □ converged?

639
                           = no
640
641
       ─ Matrix 07/30 (size 4x4)
       fixed shift \mu = -0.884666 (|\mu| = 0.8847)
642
643
         before: subdiag=[ 1.
                                     +0.j -0.815+0.j 0.838+0.j], ||\cdot||_2=1.538e+00
644
         iter 00: subdiag=[ 0.626+0.j 0.831+0.j -0.362+0.j], \|\cdot\|_2=1.102e+00
645
         iter 01: subdiag=[ 0.56 + 0.j - 0.193 + 0.j 0.317 + 0.j], \|\cdot\|_2 = 6.720e - 01
646
         iter 02: subdiag=[ 0.558+0.j 0.035+0.j -0.316+0.j], \|\cdot\|_2=6.419e-01
```

```
647
         iter 03: subdiag=[ 0.558+0.j -0.006+0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
648
         iter 04: subdiag=[ 0.558+0.j
                                            0.001+0.j -0.316+0.j,
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 05: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
649
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
650
         iter 06: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j,
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 07: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
651
                                                  +0.j
                                                         0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
652
         iter 08: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
653
         iter 09: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.409e-01
         iter 10: subdiag=[ 0.558+0.j
654
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 11: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
655
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
656
         iter 12: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
657
         iter 13: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 14: subdiag=[ 0.558+0.j
658
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
659
         iter 15: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_{2}=6.409e-01
         iter 16: subdiag=[ 0.558+0.j
660
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
661
         iter 17: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
662
         iter 18: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
663
         iter 19: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 20: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
664
665
         iter 21: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 22: subdiag=[ 0.558+0.j
666
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
667
         iter 23: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
668
         iter 24: subdiag=[ 0.558+0.j
                                            0.
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
669
         iter 25: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
670
         iter 26: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
671
         iter 27: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
672
         iter 28: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
673
         iter 29: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
674
         iter 30: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 31: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
675
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 32: subdiag=[ 0.558+0.j
676
                                                  +0.j -0.316+0.j,
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
677
         iter 33: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
678
         iter 34: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
679
         iter 35: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
680
         iter 36: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_{2}=6.409e-01
         iter 37: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
681
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
682
         iter 38: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
683
         iter 39: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 40: subdiag=[ 0.558+0.j
684
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
685
         iter 41: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 42: subdiag=[ 0.558+0.j
686
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
687
         iter 43: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
                                                  +0.j 0.316+0.j,
         iter 44: subdiag=[ 0.558+0.j
688
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
689
         iter 45: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
690
         iter 46: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
691
         iter 47: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
692
         iter 48: subdiag=[ 0.558+0.j 0.
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
```

```
693
         iter 49: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_{2}=6.409e-01
694
         iter 50: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 51: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
695
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 52: subdiag=[ 0.558+0.j
696
                                                  +0.j -0.316+0.j,
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
697
         iter 53: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
698
         iter 54: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
699
         iter 55: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
700
         iter 56: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 57: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
701
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
702
         iter 58: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
703
         iter 59: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
704
         iter 60: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
705
         iter 61: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 62: subdiag=[ 0.558+0.j
706
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
707
         iter 63: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
708
         iter 64: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
709
         iter 65: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
         iter 66: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
710
         iter 67: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
711
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
712
         iter 68: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
713
         iter 69: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
714
         iter 70: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
715
         iter 71: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
716
         iter 72: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
717
         iter 73: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
718
         iter 74: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
719
         iter 75: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
720
         iter 76: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
721
         iter 77: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.409e-01
722
         iter 78: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
723
         iter 79: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.409e-01
724
         iter 80: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
725
         iter 81: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
726
         iter 82: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_{2}=6.409e-01
         iter 83: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
727
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
728
         iter 84: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
729
         iter 85: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 86: subdiag=[ 0.558+0.j
730
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
731
         iter 87: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
         iter 88: subdiag=[ 0.558+0.j
732
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
733
         iter 89: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
                                                  +0.j 0.316+0.j],
         iter 90: subdiag=[ 0.558+0.j
734
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
735
         iter 91: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
736
         iter 92: subdiag=[ 0.558+0.j
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
737
         iter 93: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                                  +0.j 0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
738
         iter 94: subdiag=[ 0.558+0.j 0.
                                                  +0.j -0.316+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.409e - 01
```

```
739
        iter 95: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                               +0.i 0.316+0.i], ||\cdot||_2=6.409e-01
740
        iter 96: subdiag=[ 0.558+0.j 0.
                                               +0.j -0.316+0.j], ||\cdot||_2=6.409e-01
741
        iter 97: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                               +0.j \quad 0.316+0.j], \|\cdot\|_2=6.409e-01
        iter 98: subdiag=[ 0.558+0.j 0.
742
                                               +0.j -0.316+0.j], ||\cdot||_2=6.409e-01
743
        iter 99: subdiag=[ 0.558+0.j -0.
                                               +0.j \quad 0.316+0.j], ||\cdot||_2=6.409e-01
744
        after: subdiag=[0.558+0.j-0.
                                              +0.i 0.316+0.i], ||\cdot||_2=6.409e-01
745
         iterations
                        = 100/100
         sub-diag magnitudes after last step:
746
747
                       0.316]
         [0.558 0.
748
      └ converged?
                         = no
749
750
      ─ Matrix 08/30 (size 4x4)
        fixed shift \mu = -0.662036 - 0.664809 (|\mu| = 0.9382)
751
        before: subdiag=[ 0.992+0.j -0.474+0.j 0.71 +0.j], \|\cdot\|_2=1.309e+00
752
        iter 00: subdiag=[0.782+0.j 0.413-0.j 0.08 -0.j], \|\cdot\|_2=8.875e-01
753
754
        iter 01: subdiag=[ 0.462-0.j 0.541-0.j -0.005+0.j], ||\cdot||_2=7.119e-01
        iter 02: subdiag=[0.25 +0.j 0.713-0.j 0. -0.j], \|\cdot\|_2=7.559e-01
755
756
        iter 03: subdiag=[ 0.136+0.j 0.876-0.j -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=8.861e-01
757
        iter 04: subdiag=[0.078-0.j 0.95 -0.j 0.
                                                        -0.j], ||\cdot||_2 = 9.531e-01
        iter 05: subdiag=[ 0.048+0.j 0.89 -0.j -0.
758
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=8.914e-01
        iter 06: subdiag=[0.032+0.j 0.732-0.j 0.
759
                                                        -0.j], ||\cdot||_2 = 7.331e - 01
760
        iter 07: subdiag=[ 0.022+0.j 0.551-0.j -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=5.514e-01
761
        iter 08: subdiag=[0.015+0.j 0.393-0.j 0.
                                                        -0.j], ||\cdot||_2 = 3.938e - 01
762
        iter 09: subdiag=[-0.011-0.j -0.274+0.j -0.
                                                           +0.j],
                                                                    \|\cdot\|_{2}=2.738e-01
763
        iter 10: subdiag=[0.008+0.j 0.188-0.j 0.
                                                        -0.j], ||\cdot||_2=1.880e-01
764
        iter 11: subdiag=[-0.006-0.j -0.128+0.j -0.
                                                           +0.i], ||\cdot||_2=1.282e-01
                                                        -0.j], ||\cdot||_2 = 8.725e - 02
765
        iter 12: subdiag=[0.004+0.j 0.087-0.j 0.
766
        iter 13: subdiag=[-0.003-0.j -0.059+0.j -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=5.928e-02
767
        iter 14: subdiag=[0.002+0.j 0.04 -0.j 0.
                                                        -0.j], ||\cdot||_2 = 4.025e - 02
768
        iter 15: subdiag=[-0.002-0.j -0.027+0.j -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=2.732e-02
769
        iter 16: subdiag=[0.001+0.j 0.019-0.j 0.
                                                        -0.j], ||\cdot||_2=1.855e-02
770
        iter 17: subdiag=[-0.001-0.j -0.013+0.j -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=1.259e-02
771
        iter 18: subdiag=[0.001+0.j 0.009-0.j 0.
                                                        -0.j], \|\cdot\|_2 = 8.545e - 03
772
        iter 19: subdiag=[-0.
                                  -0.i -0.006+0.i -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=5.800e-03
773
        iter 20: subdiag=[0.
                                 +0.j 0.004-0.j 0.
                                                        -0.j], ||\cdot||_2 = 3.937e - 03
774
        iter 21: subdiag=[-0.
                                 -0.j -0.003+0.j -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=2.673e-03
        iter 22: subdiag=[0.
775
                                 +0.j 0.002-0.j 0.
                                                        -0.j], ||\cdot||_2=1.814e-03
776
        iter 23: subdiag=[-0. -0.j -0.001+0.j -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=1.232e-03
        iter 24: subdiag=[0.
777
                                 +0.j 0.001-0.j 0.
                                                        -0.j], ||\cdot||_2 = 8.364e - 04
778
        iter 25: subdiag=[-0.
                                  -0.j -0.001+0.j -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=5.679e-04
779
        iter 26: subdiag=[0.+0.j \ 0.-0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=3.857e-04
780
        iter 27: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2 = 2.619e - 04
781
        iter 28: subdiag=[0.+0.j \ 0.-0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.779e-04
782
        iter 29: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.209e-04
783
        iter 30: subdiag=[0.+0.j \ 0.-0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=8.213e-05
        iter 31: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=5.581e-05
784
```

```
785
        iter 32: subdiag=[0.+0.j 0.-0.j 0.+0.j], \|\cdot\|_2=3.794e-05
786
        iter 33: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j -0.-0.j], ||\cdot||_2=2.579e-05
787
        iter 34: subdiag=[0.+0.j \ 0.+0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.754e-05
788
        iter 35: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.193e-05
789
        iter 36: subdiag=[0.+0.j \ 0.+0.j \ 0.-0.j], \|\cdot\|_2 = 8.118e-06
790
        iter 37: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=5.526e-06
791
        iter 38: subdiag=[0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=3.763e-06
        iter 39: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2 = 2.564e - 06
792
793
        iter 40: subdiag=[0.+0.j 0.+0.j 0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.748e-06
794
        iter 41: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j], ||\cdot||_2=1.192e-06
795
        iter 42: subdiag=[0.+0.j \ 0.+0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=8.135e-07
796
        iter 43: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=5.556e-07
797
        iter 44: subdiag=[0.+0.j \ 0.+0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=3.797e-07
798
        iter 45: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=2.598e-07
799
        iter 46: subdiag=[0.+0.j \ 0.+0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.779e-07
800
        iter 47: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j], ||\cdot||_2=1.219e-07
801
        iter 48: subdiag=[0.+0.j 0.+0.j 0.+0.j], \|\cdot\|_2=8.368e-08
        iter 49: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], ||\cdot||_2=5.750e-08
802
803
        iter 50: subdiag=[0.+0.j \ 0.+0.j \ 0.-0.j], \|\cdot\|_2=3.956e-08
804
        iter 51: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=2.726e-08
805
        iter 52: subdiag=[0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.881e-08
806
        iter 53: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.300e-08
807
        iter 54: subdiag=[0.+0.j \ 0.+0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=9.004e-09
        iter 55: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=6.246e-09
808
809
        iter 56: subdiag=[0.+0.j \ 0.+0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=4.341e-09
810
        iter 57: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j], ||\cdot||_2=3.023e-09
811
        iter 58: subdiag=[0.+0.j 0.+0.j 0.+0.j], \|\cdot\|_2=2.110e-09
812
        iter 59: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.475e-09
        iter 60: subdiag=[0.+0.j 0.+0.j 0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.034e-09
813
814
        iter 61: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=7.257e-10
        iter 62: subdiag=[0.+0.j \ 0.-0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=5.106e-10
815
816
        iter 63: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=3.599e-10
817
        iter 64: subdiag=[0.+0.j \ 0.-0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2 = 2.542e-10
818
        iter 65: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j -0.-0.j], ||\cdot||_2=1.799e-10
819
        iter 66: subdiag=[0.+0.j \ 0.-0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.276e-10
820
        iter 67: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=9.060e-11
821
        after : subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=9.060e-11
822
       iterations
                         = 68/100
823
         sub-diag magnitudes after last step:
824
         [0. \ 0. \ 0.]
825
      └ converged?
                         = yes
826
827
      ─ Matrix 09/30 (size 4x4)
828
      fixed shift \mu = 0.995354 (|\mu|=0.9954)
829
        before: subdiag=[ 0.805+0.j 0.682+0.j -0.243+0.j], ||\cdot||_2=1.083e+00
830
        iter 00: subdiag=[ 0.618+0.j -0.241+0.j 0.043+0.j], \|\cdot\|_2=6.650e-01
```

```
831
        iter 01: subdiag=[ 0.614+0.j 0.006+0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
832
        iter 02: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
        iter 03: subdiag=[ 0.614+0.j
833
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 04: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
834
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
835
        iter 05: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.158e-01
                                                +0.j -0.043+0.j],
836
        iter 06: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
                                                +0.j
837
        iter 07: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 08: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
838
                                                +0.j
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
839
        iter 09: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
840
        iter 10: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.i 0.043+0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
841
        iter 11: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
842
        iter 12: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
843
        iter 13: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.158e-01
        iter 14: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
844
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
845
        iter 15: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
846
        iter 16: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
847
        iter 17: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
        iter 18: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
848
                                                +0.j 0.043+0.j],
849
        iter 19: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 20: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
850
                                                      0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
                                                +0.j
        iter 21: subdiag=[ 0.614+0.j
851
                                                +0.i -0.043+0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
852
        iter 22: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 23: subdiag=[ 0.614+0.j
853
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
854
        iter 24: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
855
        iter 25: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
856
        iter 26: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j
                                                      0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
857
        iter 27: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
858
        iter 28: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
859
        iter 29: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 30: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
860
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
861
        iter 31: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
862
        iter 32: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
863
        iter 33: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
864
        iter 34: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.158e-01
        iter 35: subdiag=[ 0.614+0.j
865
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
866
        iter 36: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 37: subdiag=[ 0.614+0.j
867
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 38: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
868
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
869
        iter 39: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
870
        iter 40: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j
                                                      0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
871
        iter 41: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 42: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
872
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
873
        iter 43: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
874
        iter 44: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
875
        iter 45: subdiag=[ 0.614+0.j 0.
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
876
        iter 46: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
                                                +0.j 0.043+0.j],
```

```
877
        iter 47: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
878
        iter 48: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
879
        iter 49: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 50: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
880
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 51: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.158e-01
881
                                                 +0.j -0.043+0.j],
882
        iter 52: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
                                                +0.j
883
        iter 53: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
884
        iter 54: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.158e-01
        iter 55: subdiag=[ 0.614+0.j
885
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
886
        iter 56: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j
                                                      0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
887
        iter 57: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
888
        iter 58: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
889
        iter 59: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.158e-01
890
        iter 60: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 61: subdiag=[ 0.614+0.j
891
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
892
        iter 62: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
                                                +0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
893
        iter 63: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
894
        iter 64: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
                                                +0.j 0.043+0.j],
895
        iter 65: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 66: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
896
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
                                                +0.j
897
        iter 67: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.i -0.043+0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
898
        iter 68: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
899
        iter 69: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
900
        iter 70: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
901
        iter 71: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
902
        iter 72: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
903
        iter 73: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
904
        iter 74: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
905
        iter 75: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 76: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
906
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
907
        iter 77: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                 +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
908
        iter 78: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
909
        iter 79: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
910
        iter 80: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.158e-01
                                                +0.j
        iter 81: subdiag=[ 0.614+0.j
911
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
912
        iter 82: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 83: subdiag=[ 0.614+0.j
913
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
914
        iter 84: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
915
        iter 85: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
916
        iter 86: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j
                                                       0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
917
        iter 87: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                 +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 88: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
918
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
919
        iter 89: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
920
        iter 90: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
921
        iter 91: subdiag=[ 0.614+0.j 0.
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
922
        iter 92: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
                                                +0.j 0.043+0.j],
```

```
923
        iter 93: subdiag=[ 0.614+0.j 0.
                                                +0.j -0.043+0.j], ||\cdot||_2=6.158e-01
924
        iter 94: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
        iter 95: subdiag=[ 0.614+0.j 0.
925
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
926
        iter 96: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.158e - 01
927
        iter 97: subdiag=[ 0.614+0.j
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
928
        iter 98: subdiag=[ 0.614+0.j -0.
                                                +0.j 0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
929
        iter 99: subdiag=[ 0.614+0.j 0.
                                                +0.j -0.043+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.158e-01
930
        after : subdiag=[ 0.614+0.j 0.
                                               +0.j -0.043 +0.j], ||\cdot||_2 = 6.158e -01
                         = 100/100
931
         iterations
932
          sub-diag magnitudes after last step:
933
          [0.614 0.
                        0.043]
934
      └ converged?
                         = no
935
      ─ Matrix 10/30 (size 4x4)
936
937
         fixed shift \mu = -0.926518 (|\mu| = 0.9265)
938
        before: subdiag=[ 0.914+0.j  0.658+0.j -0.888+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=1.434e+00
939
        iter 00: subdiag=[ 0.572+0.j -0.901+0.j 0.244+0.j], \|\cdot\|_2=1.095e+00
940
        iter 01: subdiag=[ 0.491+0.j 0.144+0.j -0.205+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.513e - 01
941
        iter 02: subdiag=[ 0.49 +0.j -0.016+0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.311e-01
942
        iter 03: subdiag=[ 0.49 +0.j 0.002+0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
943
        iter 04: subdiag=[0.49 + 0.j - 0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
944
        iter 05: subdiag=[0.49 +0.j 0.
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
945
        iter 06: subdiag=[0.49 + 0.j - 0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.308e-01
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
946
        iter 07: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                +0.j -0.204+0.j],
947
        iter 08: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.308e-01
948
        iter 09: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
949
        iter 10: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.308e-01
950
        iter 11: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                          0.
        iter 12: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
951
                                                                      \|\cdot\|_2=5.308e-01
952
        iter 13: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
953
        iter 14: subdiag=[ 0.49 +0.j -0.
                                                +0.j
                                                       0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.308e-01
954
        iter 15: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
955
        iter 16: subdiag=[ 0.49 +0.j -0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.308e-01
956
        iter 17: subdiag=[0.49 + 0.i]
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=5.308e-01
        iter 18: subdiag=[0.49 +0.j -0.
957
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
958
        iter 19: subdiag=[0.49 +0.j]
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
959
        iter 20: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.308e-01
        iter 21: subdiag=[ 0.49 +0.j
960
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
961
        iter 22: subdiag=[0.49 + 0.j - 0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
962
        iter 23: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
963
        iter 24: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                                +0.j 0.204+0.j],
964
        iter 25: subdiag=[0.49 + 0.j 0.
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
965
        iter 26: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.308e-01
966
        iter 27: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                +0.i -0.204+0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.308e-01
967
        iter 28: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
968
        iter 29: subdiag=[ 0.49 +0.j 0.
                                                +0.j -0.204+0.j], ||\cdot||_2=5.308e-01
```

```
969
        iter 30: subdiag=[0.49 + 0.j - 0.
                                                        0.204+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                                 +0.j
970
        iter 31: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                           0.
        iter 32: subdiag=[0.49 +0.j -0.
971
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
972
        iter 33: subdiag=[0.49 +0.j]
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
        iter 34: subdiag=[0.49 +0.j -0.
973
                                                  +0.j
                                                        0.204+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
974
        iter 35: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
975
        iter 36: subdiag=[ 0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
        iter 37: subdiag=[0.49 +0.j]
976
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
        iter 38: subdiag=[0.49 +0.j -0.
977
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
978
        iter 39: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                 +0.i -0.204+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
979
        iter 40: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j
                                                        0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
980
        iter 41: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
                                           0.
981
        iter 42: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                        0.204+0.j],
                                                 +0.j
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
        iter 43: subdiag=[ 0.49 +0.j
982
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
983
        iter 44: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                                 +0.j
                                                        0.204+0.j],
984
        iter 45: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                 +0.i -0.204+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
985
        iter 46: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
986
        iter 47: subdiag=[0.49 +0.j]
                                                 +0.j -0.204+0.j],
987
        iter 48: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
988
        iter 49: subdiag=[0.49 +0.j]
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
989
        iter 50: subdiag=[0.49 + 0.j - 0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
990
        iter 51: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
991
        iter 52: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
992
        iter 53: subdiag=[0.49 +0.j]
                                                 +0.j -0.204+0.j],
993
        iter 54: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j
                                                        0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
994
        iter 55: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                 +0.i -0.204+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
995
        iter 56: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
996
        iter 57: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
                                           0.
997
        iter 58: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
998
        iter 59: subdiag=[ 0.49 +0.j ]
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
999
        iter 60: subdiag=[0.49 + 0.j - 0.
                                                        0.204+0.j],
                                                  +0.j
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
1000
        iter 61: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
1001
        iter 62: subdiag=[ 0.49 +0.j -0.
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
                                                 +0.j 0.204+0.j],
1002
        iter 63: subdiag=[0.49 +0.i]
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=5.308e-01
1003
        iter 64: subdiag=[ 0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1004
        iter 65: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1005
        iter 66: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
        iter 67: subdiag=[ 0.49 +0.j ]
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1006
                                                 +0.j -0.204+0.j],
1007
        iter 68: subdiag=[0.49 + 0.j - 0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1008
        iter 69: subdiag=[0.49 +0.j]
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1009
        iter 70: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                                  +0.j
                                                        0.204+0.j],
        iter 71: subdiag=[0.49 + 0.]
1010
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1011
        iter 72: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
1012
        iter 73: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                 +0.i -0.204+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.308e-01
        iter 74: subdiag=[0.49 +0.j -0.
1013
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1014
        iter 75: subdiag=[ 0.49 +0.j 0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                                 +0.j -0.204+0.j],
```

```
1015
        iter 76: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                +0.j \quad 0.204+0.j], ||\cdot||_2=5.308e-01
1016
        iter 77: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                          0.
        iter 78: subdiag=[0.49 +0.j -0.
1017
                                                +0.j 0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.308e-01
        iter 79: subdiag=[ 0.49 +0.j
1018
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
        iter 80: subdiag=[0.49 +0.j -0.
1019
                                                 +0.j
                                                       0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1020
        iter 81: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.308e-01
1021
        iter 82: subdiag=[ 0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.308e-01
        iter 83: subdiag=[ 0.49 +0.j
1022
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
        iter 84: subdiag=[0.49 +0.j -0.
1023
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1024
        iter 85: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1025
        iter 86: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.308e-01
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
        iter 87: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                +0.j -0.204+0.j],
1026
                                          0.
1027
        iter 88: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
        iter 89: subdiag=[ 0.49 +0.j
1028
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.308e-01
1029
        iter 90: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1030
        iter 91: subdiag=[0.49 + 0.j]
                                                 +0.i -0.204+0.i],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
                                                 +0.j 0.204+0.j],
1031
        iter 92: subdiag=[0.49 +0.j -0.
        iter 93: subdiag=[ 0.49 +0.j
                                                 +0.j -0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1032
1033
        iter 94: subdiag=[0.49 +0.j -0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1034
        iter 95: subdiag=[ 0.49 +0.j ]
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1035
        iter 96: subdiag=[0.49 + 0.j - 0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.308e-01
1036
        iter 97: subdiag=[0.49 +0.j 0.
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.308e-01
1037
        iter 98: subdiag=[0.49 + 0.j - 0.
                                                 +0.j 0.204+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.308e-01
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.308e - 01
1038
        iter 99: subdiag=[0.49 +0.j 0.
                                                +0.j -0.204+0.j],
1039
        after: subdiag=[0.49 +0.j 0.
                                                +0.j -0.204+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=5.308e-01
1040
         iterations
                          = 100/100
1041
          sub-diag magnitudes after last step:
1042
          [0.49 0.
                        0.204]
1043
         converged?
                          = no
1044
      ─ Matrix 11/30 (size 4x4)
1045
1046
         fixed shift \mu = -0.553226 - 0.269054 (|\mu| = 0.6152)
1047
        before: subdiag=[-0.998+0.j \quad 0.926+0.j \quad 0.596+0.j], \quad ||\cdot||_2=1.486e+00
1048
        iter 00: subdiag=[-0.938+0.j -0.68 +0.j
                                                       0.382+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.219e+00
        iter 01: subdiag=[-0.81 +0.j 0.462-0.j
1049
                                                        0.206-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.552e - 01
        iter 02: subdiag=[-0.661+0.j -0.318+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 7.404e - 01
1050
                                                        0.103+0.j],
1051
        iter 03: subdiag=[-0.517-0.j 0.221-0.j
                                                        0.051+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.644e - 01
        iter 04: subdiag=[-0.394-0.j -0.156+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.240e - 01
1052
                                                        0.025+0.j],
1053
        iter 05: subdiag=[-0.295-0.j 0.11 -0.j
                                                        0.012+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.154e - 01
1054
        iter 06: subdiag=[-0.22 -0.j -0.078+0.j
                                                        0.006-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=2.332e-01
        iter 07: subdiag=[-0.163+0.j 0.055-0.j
                                                                       \|\cdot\|_2=1.718e-01
1055
                                                        0.003+0.j],
        iter 08: subdiag=[-0.12 -0.j -0.039+0.j
1056
                                                        0.001+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.263e-01
1057
        iter 09: subdiag=[-0.089-0.j 0.028-0.j
                                                        0.001-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.283e - 02
1058
        iter 10: subdiag=[-0.065-0.j -0.02 +0.j]
                                                             -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.818e - 02
1059
        iter 11: subdiag=[-0.048+0.j 0.014-0.j
                                                        0.
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.006e - 02
1060
        iter 12: subdiag=[-0.035+0.j -0.01 +0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.676e - 02
                                                             -0.j],
```

```
1061
         iter 13: subdiag=[-0.026+0.j]
                                            0.007 - 0.j
                                                               +0.j], ||\cdot||_2=2.699e-02
                                                         0.
1062
         iter 14: subdiag=[-0.019+0.j -0.005+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2=1.982e-02
                                                         0.
                                                               +0.j],
         iter 15: subdiag=[-0.014+0.j 0.004-0.j
1063
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.456e-02
                                                               +0.j],
1064
         iter 16: subdiag=[-0.01 +0.j -0.003+0.j
                                                         0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 1.069e - 02
         iter 17: subdiag=[-0.008+0.j
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.855e-03
1065
                                            0.002-0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
1066
         iter 18: subdiag=[-0.006+0.j -0.001+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2=5.771e-03
                                                         0.
                                                               -0.j],
1067
         iter 19: subdiag=[-0.004+0.j 0.001-0.j
                                                                        \|\cdot\|_2 = 4.240e - 03
                                                         0.
                                                               -0.j],
         iter 20: subdiag=[-0.003-0.j -0.001-0.j
1068
                                                         0.
                                                               -0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 3.116e - 03
1069
         iter 21: subdiag=[-0.002-0.j 0.
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                               -0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 2.290e - 03
         iter 22: subdiag=[-0.002-0.j -0.
1070
                                                  -0.j
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 1.683e - 03
                                                         0.
1071
         iter 23: subdiag=[-0.001-0.j
                                                  -0.j
                                                         0.
                                                                        \|\cdot\|_2=1.237e-03
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.094e - 04
         iter 24: subdiag=[-0.001-0.j -0.
1072
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                               -0.j],
1073
         iter 25: subdiag=[-0.001-0.j 0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 6.685e - 04
                                                  +0.j 0.
                                                               -0.j],
         iter 26: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
1074
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.915e - 04
1075
         iter 27: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.614e - 04
                                                  0.-0.j],
1076
         iter 28: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.657e - 04
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.954e - 04
1077
         iter 29: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                  0.+0.j],
         iter 30: subdiag=[-0.+0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.437e - 04
1078
                                                  0.+0.j],
1079
         iter 31: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.057e - 04
                                                  0.+0.j],
1080
         iter 32: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 7.772e - 05
                                                  0.+0.j],
1081
         iter 33: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                  0.+0.i],
                                                             \|\cdot\|_{2}=5.716e-05
1082
         iter 34: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.204e - 05
1083
         iter 35: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.093e - 05
1084
         iter 36: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_{2}=2.275e-05
         iter 37: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
1085
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.673e - 05
1086
         iter 38: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.231e - 05
1087
         iter 39: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.056e - 06
                                                  0.+0.j],
1088
         iter 40: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 6.662e - 06
1089
         iter 41: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.902e - 06
                                                  0.+0.j],
         iter 42: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
1090
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.606e - 06
         iter 43: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.653e - 06
1091
                                                  0.+0.j],
1092
         iter 44: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.952e - 06
                                                  0.+0.j],
1093
         iter 45: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.436e - 06
                                                  0.+0.j],
1094
         iter 46: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_{2}=1.057e-06
                                                  0.+0.j],
         iter 47: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
1095
                                                              \|\cdot\|_2 = 7.776e - 07
                                                  0.+0.j],
1096
         iter 48: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 5.722e - 07
                                                  0.+0.j],
1097
         iter 49: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.210e - 07
         iter 50: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.098e - 07
1098
                                                  0.+0.j],
1099
         iter 51: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.280e - 07
1100
         iter 52: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.677e - 07
1101
         iter 53: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.234e - 07
                                                  0.+0.j],
1102
         iter 54: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.083e - 08
1103
         iter 55: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 6.684e - 08
1104
         iter 56: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                  0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.919e - 08
         iter 57: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.620e - 08
1105
                                                  0.-0.j],
1106
         iter 58: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.664e - 08
```

```
1107
        iter 59: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.960e-08
1108
        iter 60: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j
                                               0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 1.443e - 08
1109
        iter 61: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j
                                               0.-0.j], ||\cdot||_2=1.062e-08
1110
        iter 62: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j
                                               0.-0.j],
                                                          \|\cdot\|_{2}=7.812e-09
        iter 63: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j
                                                           \|\cdot\|_{2}=5.749e-09
1111
                                               0.-0.j],
1112
        iter 64: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                                          \|\cdot\|_2 = 4.231e - 09
                                               0.-0.j],
1113
        iter 65: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                                         \|\cdot\|_2 = 3.114e - 09
                                               0.-0.j],
        iter 66: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
1114
                                               0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 2.292e - 09
        iter 67: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
1115
                                               0.-0.j], ||\cdot||_2=1.686e-09
        iter 68: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
1116
                                               0.-0.j],
                                                          \|\cdot\|_{2}=1.241e-09
                                               0.-0.j], ||\cdot||_2=9.134e-10
1117
        iter 69: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
        iter 70: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
1118
                                               0.-0.j], ||\cdot||_2=6.722e-10
1119
        iter 71: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                               0.-0.j], ||\cdot||_2=4.947e-10
        iter 72: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
1120
                                               0.-0.j], ||\cdot||_2=3.641e-10
1121
        iter 73: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j
                                               0.-0.j], ||\cdot||_2=2.680e-10
1122
        iter 74: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j
                                               0.-0.j],
                                                          \|\cdot\|_2 = 1.972e - 10
1123
        iter 75: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.451e-10
        iter 76: subdiag=[-0.-0.j -0.+0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.068e-10
1124
1125
        iter 77: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2 = 7.861e-11
1126
        after : subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=7.861e-11
1127
         iterations
                         = 78/100
1128
         sub-diag magnitudes after last step:
1129
         [0. \ 0. \ 0.]
1130
      └ converged?
                         = yes
1131
1132 	☐ Matrix 12/30 (size 4x4)
1133 | fixed shift \mu = 0.918038 (|\mu|=0.9180)
1134
        before: subdiag=[-0.634+0.j 0.891+0.j 0.631+0.j],
                                                                    \|\cdot\|_2=1.263e+00
1135
        iter 00: subdiag=[-0.868+0.j -0.701+0.j -0.147+0.j], \|\cdot\|_2=1.126e+00
        iter 01: subdiag=[-0.823+0.j 0.075+0.j 0.133+0.j],
1136
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.371e - 01
        iter 02: subdiag=[-0.823+0.j -0.007+0.j -0.133+0.j],
1137
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1138
        iter 03: subdiag=[-0.823+0.j 0.001+0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1139
        iter 04: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                               +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1140
        iter 05: subdiag=[-0.823+0.i 0.
                                               +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 06: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1141
                                               +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1142
        iter 07: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                               +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1143
        iter 08: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                               +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
        iter 09: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1144
                                               +0.j 0.133+0.j],
1145
        iter 10: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                               +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1146
        iter 11: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                               +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1147
        iter 12: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                               +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 13: subdiag=[-0.823+0.j 0.
1148
                                               +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1149
        iter 14: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                               +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
1150
        iter 15: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                               +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 16: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1151
                                               +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1152
        iter 17: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                               +0.j \quad 0.133+0.j], \|\cdot\|_2=8.333e-01
```

```
1153
         iter 18: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                 +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
1154
         iter 19: subdiag=[-0.823+0.j
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 20: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1155
                                                 +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1156
         iter 21: subdiag=[-0.823+0.j
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 22: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=8.333e-01
1157
1158
         iter 23: subdiag=[-0.823+0.j
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1159
         iter 24: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                 +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 25: subdiag=[-0.823+0.j
1160
                                                  +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 26: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1161
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 27: subdiag=[-0.823+0.j
1162
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1163
         iter 28: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 29: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1164
         iter 30: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1165
         iter 31: subdiag=[-0.823+0.j
1166
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 32: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1167
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1168
         iter 33: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1169
         iter 34: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 35: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1170
1171
         iter 36: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 37: subdiag=[-0.823+0.j
1172
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1173
         iter 38: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1174
         iter 39: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 40: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1175
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1176
         iter 41: subdiag=[-0.823+0.j
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1177
         iter 42: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1178
         iter 43: subdiag=[-0.823+0.j
                                                  +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1179
         iter 44: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1180
         iter 45: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1181
         iter 46: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                 +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 47: subdiag=[-0.823+0.j
1182
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 48: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
1183
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1184
         iter 49: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1185
         iter 50: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1186
         iter 51: subdiag=[-0.823+0.j
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 52: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1187
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1188
         iter 53: subdiag=[-0.823+0.j
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 54: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1189
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 55: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1190
1191
         iter 56: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1192
         iter 57: subdiag=[-0.823+0.j
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1193
         iter 58: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 59: subdiag=[-0.823+0.j 0.
1194
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1195
         iter 60: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1196
         iter 61: subdiag=[-0.823+0.j
                                                  +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
         iter 62: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1197
                                                  +0.j -0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1198
         iter 63: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                 +0.j 0.133+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
```

```
1199
        iter 64: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
1200
        iter 65: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 66: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1201
                                                +0.j -0.133 +0.j], ||\cdot||_2 = 8.333e -01
1202
        iter 67: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 68: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=8.333e-01
1203
1204
        iter 69: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1205
        iter 70: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j],
                                                                    \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 71: subdiag=[-0.823+0.j 0.
1206
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 72: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1207
                                                +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
        iter 73: subdiag=[-0.823+0.j 0.
1208
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1209
        iter 74: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
        iter 75: subdiag=[-0.823+0.j 0.
1210
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 76: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j],
1211
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 77: subdiag=[-0.823+0.j 0.
1212
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1213
        iter 78: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1214
        iter 79: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1215
        iter 80: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
        iter 81: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1216
                                                +0.j 0.133+0.j],
1217
        iter 82: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1218
        iter 83: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1219
        iter 84: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133 +0.j], ||\cdot||_2 = 8.333e -01
1220
        iter 85: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 86: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1221
                                                +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
1222
        iter 87: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1223
        iter 88: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1224
        iter 89: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1225
        iter 90: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j],
                                                                    \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1226
        iter 91: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1227
        iter 92: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
        iter 93: subdiag=[-0.823+0.j 0.
1228
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 94: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j],
1229
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1230
        iter 95: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j \quad 0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
1231
        iter 96: subdiag=[-0.823+0.j -0.
                                                +0.j -0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
1232
        iter 97: subdiag=[-0.823+0.i 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
        iter 98: subdiag=[-0.823+0.j -0.
1233
                                                +0.j -0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1234
        iter 99: subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                                +0.j 0.133+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 8.333e - 01
1235
        after : subdiag=[-0.823+0.j 0.
                                               +0.j \quad 0.133+0.j], ||\cdot||_2=8.333e-01
         iterations
                         = 100/100
1236
1237
         sub-diag magnitudes after last step:
1238
         [0.823 0.
                        0.133]
1239
      └ converged?
                         = no
1240
1241 	─ Matrix 13/30 (size 4x4)
1242 | fixed shift \mu = -0.0259786 - 0.624268 | (|\mu| = 0.6248)
1243
        before: subdiag=[ 0.996+0.j -0.921+0.j 0.999+0.j], ||\cdot||_2=1.685e+00
1244
        iter 00: subdiag=[ 0.78 +0.j -0.999+0.j 0.781+0.j], \|\cdot\|_2=1.488e+00
```

```
1245
        iter 01: subdiag=[-0.6 +0.j -0.718+0.j -0.6 -0.j], ||\cdot||_2=1.111e+00
1246
        iter 02: subdiag=[0.56 +0.j 0.319-0.j 0.559+0.j], \|\cdot\|_2=8.526e-01
1247
        iter 03: subdiag=[-0.553+0.j -0.124-0.j -0.551+0.j], ||\cdot||_2=7.910e-01
        iter 04: subdiag=[0.552+0.j 0.047-0.j 0.549+0.j],
1248
                                                                \|\cdot\|_{2}=7.802e-01
1249
        iter 05: subdiag=[-0.551-0.j 0.018-0.j -0.548+0.j], \|\cdot\|_2=7.772e-01
        iter 06: subdiag=[0.549+0.j 0.007-0.j 0.547+0.j], \|\cdot\|_2=7.750e-01
1250
1251
        iter 07: subdiag=[-0.548-0.j 0.003+0.j -0.545+0.j], \|\cdot\|_2=7.726e-01
1252
        iter 08: subdiag=[0.546+0.j \ 0.001+0.j \ 0.543-0.j], \|\cdot\|_2=7.698e-01
1253
        iter 09: subdiag=[-0.543-0.j 0.
                                              +0.j -0.541+0.j], ||\cdot||_2=7.666e-01
1254
        iter 10: subdiag=[0.54 +0.j 0.
                                           +0.j \ 0.539-0.j], ||\cdot||_2=7.631e-01
        iter 11: subdiag=[-0.537-0.j 0.
1255
                                               +0.j -0.536+0.j], ||\cdot||_2=7.591e-01
1256
        iter 12: subdiag=[0.534-0.j 0.
                                             +0.j \ 0.534+0.j], \|\cdot\|_2=7.548e-01
        iter 13: subdiag=[-0.53 +0.j 0. +0.j -0.531-0.j], \|\cdot\|_2=7.502e-01
1257
1258
        iter 14: subdiag=[0.526-0.j 0.
                                             +0.j \ 0.528+0.j], \|\cdot\|_2=7.452e-01
        iter 15: subdiag=[-0.521+0.j 0.
1259
                                               +0.j -0.525+0.j], ||\cdot||_2=7.399e-01
        iter 16: subdiag=[0.517-0.j 0.
1260
                                             +0.10.522+0.1], ||\cdot||_2=7.343e-01
1261
        iter 17: subdiag=[-0.512-0.j 0.
                                               +0.j -0.518 -0.j], ||\cdot||_2 = 7.283e -01
                                             +0.j \ 0.515+0.j], ||\cdot||_2=7.221e-01
        iter 18: subdiag=[0.506+0.j 0.
1262
1263
        iter 19: subdiag=[-0.501-0.j 0.
                                               +0.j -0.511 -0.j], ||\cdot||_2 = 7.157e -01
1264
        iter 20: subdiag=[0.495+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.507+0.j], ||\cdot||_2=7.089e-01
        iter 21: subdiag=[-0.489-0.j 0.
                                               +0.j -0.503+0.j], ||\cdot||_2=7.020e-01
1265
        iter 22: subdiag=[0.483+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.499-0.j], \|\cdot\|_2=6.948e-01
1266
1267
        iter 23: subdiag=[-0.477-0.j 0.
                                               +0.j -0.495+0.j], ||\cdot||_2=6.874e-01
1268
        iter 24: subdiag=[0.47 +0.j 0.
                                             +0.j \ 0.491-0.j], \|\cdot\|_2=6.798e-01
1269
        iter 25: subdiag=[-0.464-0.j 0.
                                               +0.j -0.486+0.j], ||\cdot||_2=6.720e-01
1270
        iter 26: subdiag=[0.457+0.j 0.
                                             +0.10.482-0.1], \|\cdot\|_{2}=6.641e-01
1271
        iter 27: subdiag=[-0.45 -0.j 0.
                                               +0.j -0.477 + 0.j], ||\cdot||_2 = 6.560e - 01
1272
        iter 28: subdiag=[0.443+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.472+0.j], \|\cdot\|_2=6.478e-01
1273
        iter 29: subdiag=[-0.436-0.j 0.
                                               +0.j -0.468+0.j], ||\cdot||_2=6.395e-01
1274
        iter 30: subdiag=[0.429+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.463+0.j], ||\cdot||_2=6.311e-01
1275
        iter 31: subdiag=[-0.422-0.j 0.
                                               +0.j -0.458+0.j], ||\cdot||_2=6.226e-01
        iter 32: subdiag=[0.415+0.j 0.
1276
                                             +0.j 0.453-0.j], ||\cdot||_2=6.140e-01
1277
        iter 33: subdiag=[-0.408-0.j 0.
                                               +0.j -0.448+0.j], ||\cdot||_2=6.054e-01
1278
        iter 34: subdiag=[0.4 +0.j 0.
                                             +0.j 0.443+0.j], ||\cdot||_2=5.967e-01
1279
        iter 35: subdiag=[-0.393-0.j 0.
                                               +0.j -0.437+0.j], ||\cdot||_2=5.880e-01
1280
        iter 36: subdiag=[0.386+0.j 0.
                                             +0.j 0.432-0.j], ||\cdot||_2=5.792e-01
        iter 37: subdiag=[-0.378-0.j 0.
                                               +0.j -0.427+0.j], ||\cdot||_2=5.704e-01
1281
1282
        iter 38: subdiag=[0.371+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.422+0.j], \|\cdot\|_2=5.616e-01
        iter 39: subdiag=[-0.364-0.j 0.
                                               +0.j -0.416+0.j], ||\cdot||_2=5.529e-01
1283
1284
        iter 40: subdiag=[0.357+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.411+0.j], \|\cdot\|_2=5.441e-01
        iter 41: subdiag=[-0.349-0.j 0.
                                               +0.j -0.406+0.j], ||\cdot||_2=5.354e-01
1285
        iter 42: subdiag=[0.342+0.j 0.
                                             +0.j 0.4 -0.j], ||\cdot||_2=5.266e-01
1286
1287
        iter 43: subdiag=[-0.335-0.j 0.
                                               +0.j -0.395+0.j], ||\cdot||_2=5.180e-01
                                             +0.j \ 0.389-0.j], \|\cdot\|_2=5.093e-01
1288
        iter 44: subdiag=[0.328+0.j 0.
1289
        iter 45: subdiag=[-0.321-0.j 0. +0.j -0.384+0.j], \|\cdot\|_2=5.008e-01
1290
        iter 46: subdiag=[0.314+0.j 0.
                                             +0.j \ 0.379-0.j], \|\cdot\|_2=4.922e-01
```

```
1291
        iter 47: subdiag=[-0.308-0.j 0.
                                                +0.j -0.373+0.j], ||\cdot||_2=4.838e-01
1292
        iter 48: subdiag=[0.301+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.368-0.j], ||\cdot||_2=4.754e-01
1293
        iter 49: subdiag=[-0.294-0.j 0.
                                                +0.j -0.363+0.j], ||\cdot||_2=4.671e-01
1294
        iter 50: subdiag=[0.288+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.357-0.j], ||\cdot||_2=4.588e-01
                                                +0.j -0.352+0.j], ||\cdot||_2=4.507e-01
1295
        iter 51: subdiag=[-0.281-0.j 0.
1296
        iter 52: subdiag=[0.275+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.347-0.j], ||\cdot||_2=4.426e-01
1297
        iter 53: subdiag=[-0.269-0.j 0.
                                                +0.j -0.342+0.j], ||\cdot||_2=4.346e-01
1298
        iter 54: subdiag=[0.263+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.336+0.j], \|\cdot\|_2=4.267e-01
1299
        iter 55: subdiag=[-0.257-0.j 0.
                                                +0.j -0.331+0.j], ||\cdot||_2=4.189e-01
1300
        iter 56: subdiag=[0.251+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.326+0.j], ||\cdot||_2=4.112e-01
        iter 57: subdiag=[-0.245-0.j 0.
1301
                                                +0.j -0.321 -0.j], ||\cdot||_2 = 4.036e -01
1302
        iter 58: subdiag=[0.239+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.316+0.j], \|\cdot\|_2=3.961e-01
        iter 59: subdiag=[-0.233-0.j 0.
                                                +0.j -0.311 -0.j], ||\cdot||_2 = 3.887e -01
1303
1304
        iter 60: subdiag=[0.228+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.306+0.j], \|\cdot\|_2=3.814e-01
        iter 61: subdiag=[-0.222-0.j 0.
1305
                                                +0.j -0.301 -0.j], ||\cdot||_2 = 3.742e -01
        iter 62: subdiag=[0.217+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.296+0.j], ||\cdot||_2=3.671e-01
1306
1307
        iter 63: subdiag=[-0.212-0.j 0.
                                                +0.j -0.291 -0.j, ||\cdot||_2 = 3.601e -01
                                              +0.j \ 0.286+0.j], \|\cdot\|_2=3.532e-01
1308
        iter 64: subdiag=[0.207+0.j 0.
1309
        iter 65: subdiag=[-0.202-0.j 0.
                                                +0.j -0.282 -0.j], ||\cdot||_2 = 3.464e -01
        iter 66: subdiag=[0.197+0.j 0.
1310
                                              +0.j \ 0.277+0.j], \|\cdot\|_2=3.398e-01
        iter 67: subdiag=[-0.192-0.j 0.
                                                +0.j -0.272 -0.j], ||\cdot||_2 = 3.332e -01
1311
        iter 68: subdiag=[0.187+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.268+0.j], \|\cdot\|_2=3.267e-01
1312
1313
        iter 69: subdiag=[-0.183-0.j 0.
                                                +0.j -0.263+0.j], ||\cdot||_2=3.204e-01
1314
        iter 70: subdiag=[0.178+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.259+0.j], \|\cdot\|_2=3.141e-01
1315
        iter 71: subdiag=[-0.174-0.j 0.
                                                +0.j -0.254 -0.j], ||\cdot||_2 = 3.080e -01
1316
        iter 72: subdiag=[0.169+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.25 \ +0.j], \|\cdot\|_2 = 3.020e - 01
1317
        iter 73: subdiag=[-0.165-0.j 0.
                                                +0.j -0.246 -0.j], ||\cdot||_2 = 2.960e -01
1318
        iter 74: subdiag=[0.161+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.241+0.j], \|\cdot\|_2=2.902e-01
1319
        iter 75: subdiag=[-0.157-0.j 0.
                                                +0.j -0.237 -0.j], ||\cdot||_2 = 2.845e -01
        iter 76: subdiag=[0.153+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.233+0.j], \|\cdot\|_{2}=2.789e-01
1320
1321
        iter 77: subdiag=[-0.149-0.j 0.
                                                +0.j -0.229+0.j], ||\cdot||_2=2.733e-01
        iter 78: subdiag=[0.146+0.j 0.
1322
                                              +0.j \ 0.225-0.j], \|\cdot\|_2=2.679e-01
1323
        iter 79: subdiag=[-0.142-0.j 0.
                                                +0.j -0.221+0.j], ||\cdot||_2=2.626e-01
1324
        iter 80: subdiag=[0.138+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.217+0.j], ||\cdot||_2=2.574e-01
        iter 81: subdiag=[-0.135-0.j 0.
                                                +0.j -0.213+0.j], ||\cdot||_2=2.522e-01
1325
        iter 82: subdiag=[0.131+0.j 0.
1326
                                              +0.j \ 0.209+0.j], ||\cdot||_2=2.472e-01
        iter 83: subdiag=[-0.128-0.j 0.
1327
                                                +0.j -0.206 -0.j], ||\cdot||_2 = 2.423e -01
        iter 84: subdiag=[0.125+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.202+0.j], \|\cdot\|_2=2.374e-01
1328
        iter 85: subdiag=[-0.122-0.j 0.
                                                +0.j -0.198 -0.j], ||\cdot||_2 = 2.327e -01
1329
1330
        iter 86: subdiag=[0.119+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.195+0.j], \|\cdot\|_2=2.280e-01
        iter 87: subdiag=[-0.116-0.j 0.
1331
                                                +0.j -0.191 -0.j], ||\cdot||_2 = 2.234e -01
                                              +0.j \ 0.188+0.j], ||\cdot||_2=2.189e-01
        iter 88: subdiag=[0.113+0.j 0.
1332
        iter 89: subdiag=[-0.11 -0.j 0.
1333
                                                +0.j -0.184+0.j], ||\cdot||_2=2.145e-01
        iter 90: subdiag=[0.107+0.j 0.
1334
                                              +0.i 0.181-0.i], ||\cdot||_2=2.102e-01
        iter 91: subdiag=[-0.104-0.j 0.
                                                +0.j -0.178+0.j], ||\cdot||_2=2.060e-01
1335
1336
        iter 92: subdiag=[0.101+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.174-0.j], \|\cdot\|_2=2.018e-01
```

```
1337
        iter 93: subdiag=[-0.099-0.j 0.
                                                +0.j -0.171+0.j], ||\cdot||_2=1.978e-01
1338
        iter 94: subdiag=[0.096+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.168+0.j], \|\cdot\|_2=1.938e-01
        iter 95: subdiag=[-0.094-0.j 0.
                                                +0.j -0.165 -0.j], ||\cdot||_2 = 1.899e -01
1339
        iter 96: subdiag=[0.091+0.j 0.
1340
                                              +0.j \ 0.162+0.j], ||\cdot||_2=1.860e-01
        iter 97: subdiag=[-0.089-0.j 0.
                                                +0.j -0.159 -0.j], ||\cdot||_2 = 1.823e -01
1341
1342
        iter 98: subdiag=[0.087+0.j 0.
                                              +0.j \ 0.156+0.j], \|\cdot\|_2=1.786e-01
1343
        iter 99: subdiag=[-0.085-0.j 0.
                                                +0.j -0.153+0.j], ||\cdot||_2=1.750e-01
        after : subdiag=[-0.085-0.j 0.
                                               +0.j -0.153+0.j], ||\cdot||_2=1.750e-01
1344
                         = 100/100
1345
         iterations
         sub-diag magnitudes after last step:
1346
1347
         [0.085 0.
                        0.153]
1348
      └ converged?
                         = no
1349
      ─ Matrix 14/30 (size 4x4)
1350
         fixed shift \mu = 0.842538 (|\mu| = 0.8425)
1351
1352
        before: subdiag=[-0.944+0.j 0.964+0.j 0.696+0.j],
                                                                    \|\cdot\|_2=1.518e+00
1353
        iter 00: subdiag=[-0.662+0.j -0.644+0.j -0.413+0.j], \|\cdot\|_2=1.012e+00
        iter 01: subdiag=[-0.628+0.j 0.166+0.j 0.387+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.558e-01
1354
1355
        iter 02: subdiag=[-0.626+0.j -0.038+0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.360e-01
        iter 03: subdiag=[-0.626+0.j 0.009+0.j 0.386+0.j],
1356
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 04: subdiag=[-0.626+0.j -0.002+0.j -0.386+0.j], ||\cdot||_2=7.349e-01
1357
1358
        iter 05: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 06: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1359
                                                +0.j -0.386+0.j], ||\cdot||_2=7.349e-01
1360
        iter 07: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1361
        iter 08: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1362
        iter 09: subdiag=[-0.626+0.j
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1363
        iter 10: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                    \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1364
        iter 11: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1365
        iter 12: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 13: subdiag=[-0.626+0.j 0.
1366
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 14: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
1367
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1368
        iter 15: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 16: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1369
1370
        iter 17: subdiag=[-0.626+0.j
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 18: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1371
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 19: subdiag=[-0.626+0.j
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1372
                                                +0.j 0.386+0.j],
1373
        iter 20: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                   \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 21: subdiag=[-0.626+0.j 0.
1374
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 22: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1375
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 23: subdiag=[-0.626+0.j
1376
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1377
        iter 24: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 25: subdiag=[-0.626+0.j 0.
1378
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1379
        iter 26: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1380
        iter 27: subdiag=[-0.626+0.j
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 28: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1381
1382
        iter 29: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j \quad 0.386+0.j], ||\cdot||_2=7.349e-01
```

```
1383
        iter 30: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j], ||\cdot||_2=7.349e-01
1384
        iter 31: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
                                           0.
        iter 32: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1385
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1386
        iter 33: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 34: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1387
                                                  +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1388
        iter 35: subdiag=[-0.626+0.j]
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1389
        iter 36: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 37: subdiag=[-0.626+0.j
1390
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 38: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1391
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 39: subdiag=[-0.626+0.j
1392
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1393
        iter 40: subdiag=[-0.626+0.j-0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 41: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1394
        iter 42: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1395
        iter 43: subdiag=[-0.626+0.j
1396
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1397
        iter 44: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1398
        iter 45: subdiag=[-0.626+0.j]
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1399
        iter 46: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 47: subdiag=[-0.626+0.j
1400
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1401
        iter 48: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1402
        iter 49: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1403
        iter 50: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.i -0.386+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1404
        iter 51: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 52: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1405
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1406
        iter 53: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1407
        iter 54: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1408
        iter 55: subdiag=[-0.626+0.j]
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1409
        iter 56: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1410
        iter 57: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1411
        iter 58: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1412
        iter 59: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 60: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1413
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1414
        iter 61: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 62: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1415
                                                 +0.j -0.386+0.j],
1416
        iter 63: subdiag=[-0.626+0.i]
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 64: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1417
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1418
        iter 65: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1419
        iter 66: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 67: subdiag=[-0.626+0.j
1420
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1421
        iter 68: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1422
        iter 69: subdiag=[-0.626+0.j
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1423
        iter 70: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
                                                 +0.j -0.386+0.j],
        iter 71: subdiag=[-0.626+0.j 0.
1424
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1425
        iter 72: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1426
        iter 73: subdiag=[-0.626+0.j]
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 74: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1427
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1428
        iter 75: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
                                                 +0.j 0.386+0.j],
```

```
1429
        iter 76: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j], ||\cdot||_2=7.349e-01
1430
        iter 77: subdiag=[-0.626+0.j
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 78: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1431
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1432
        iter 79: subdiag=[-0.626+0.j
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 80: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1433
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1434
        iter 81: subdiag=[-0.626+0.j]
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1435
        iter 82: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 83: subdiag=[-0.626+0.j
1436
                                                 +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 84: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1437
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
        iter 85: subdiag=[-0.626+0.j
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1438
                                                +0.j 0.386+0.j],
1439
        iter 86: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1440
        iter 87: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1441
        iter 88: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 89: subdiag=[-0.626+0.j
1442
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1443
        iter 90: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1444
        iter 91: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1445
        iter 92: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 93: subdiag=[-0.626+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1446
                                                +0.j 0.386+0.j],
1447
        iter 94: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1448
        iter 95: subdiag=[-0.626+0.j
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1449
        iter 96: subdiag=[-0.626+0.j -0.
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1450
        iter 97: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
        iter 98: subdiag=[-0.626+0.j -0.
1451
                                                 +0.j -0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1452
        iter 99: subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.349e - 01
1453
        after : subdiag=[-0.626+0.j 0.
                                                +0.j 0.386+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=7.349e-01
1454
         iterations
                          = 100/100
1455
          sub-diag magnitudes after last step:
1456
          [0.626 0.
                        0.386]
1457
         converged?
                          = no
1458
      ─ Matrix 15/30 (size 4x4)
1459
         fixed shift \mu = 0.941615 (|\mu|=0.9416)
1460
1461
        before: subdiag=[-0.745+0.j 0.93 +0.j -0.49 +0.j], \|\cdot\|_2=1.288e+00
1462
        iter 00: subdiag=[-0.99 + 0.j \quad 0.927 + 0.j \quad -0.031 + 0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=1.356e+00
        iter 01: subdiag=[-0.767+0.j 0.739+0.j -0.002+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.065e+00
1463
        iter 02: subdiag=[-0.338+0.j
                                         0.69 +0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.680e - 01
1464
                                                             +0.j],
1465
        iter 03: subdiag=[-0.127+0.j 0.682+0.j -0.
                                                             +0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=6.941e-01
        iter 04: subdiag=[-0.047+0.j 0.681+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=6.829e-01
1466
                                                             +0.j],
1467
        iter 05: subdiag=[-0.017+0.j 0.681+0.j -0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.813e - 01
                                          0.681+0.j -0.
        iter 06: subdiag=[-0.006+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1468
                                                             +0.j],
        iter 07: subdiag=[-0.002+0.j
                                           0.681+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1469
                                                             +0.j],
1470
        iter 08: subdiag=[-0.001+0.j 0.681+0.j -0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1471
        iter 09: subdiag=[-0.
                                    +0.j 0.681+0.j -0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.811e-01
1472
        iter 10: subdiag=[-0.
                                    +0.j
                                          0.681+0.j -0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1473
        iter 11: subdiag=[-0.
                                           0.681+0.j -0.
                                    +0.j
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.811e-01
1474
        iter 12: subdiag=[-0.
                                           0.681+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                    +0.j
                                                             +0.j],
```

```
1475
         iter 13: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1476
         iter 14: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 15: subdiag=[-0.
1477
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2=6.811e-01
1478
         iter 16: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 17: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1479
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
1480
         iter 18: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                                 +0.j],
1481
         iter 19: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 20: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
1482
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_{2}=6.811e-01
         iter 21: subdiag=[-0.
1483
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 22: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
1484
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1485
         iter 23: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                                 +0.j],
1486
         iter 24: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2=6.811e-01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 25: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1487
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 26: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
1488
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2=6.811e-01
         iter 27: subdiag=[-0.
1489
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                                 +0.j],
1490
         iter 28: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1491
         iter 29: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2=6.811e-01
         iter 30: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1492
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 31: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1493
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 32: subdiag=[-0.
1494
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 33: subdiag=[-0.
1495
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1496
         iter 34: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 35: subdiag=[-0.
1497
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1498
         iter 36: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 37: subdiag=[-0.
1499
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2=6.811e-01
1500
         iter 38: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1501
         iter 39: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                                 +0.j],
1502
         iter 40: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1503
         iter 41: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 42: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
1504
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 43: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1505
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
1506
         iter 44: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 45: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1507
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
1508
         iter 46: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 47: subdiag=[-0.
1509
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2=6.811e-01
                                                                 +0.j],
         iter 48: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1510
                                      +0.i
                                                                 +0.j],
         iter 49: subdiag=[-0.
1511
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2=6.811e-01
         iter 50: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1512
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 51: subdiag=[-0.
1513
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2=6.811e-01
                                             0.681+0.j -0.
1514
         iter 52: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 53: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1515
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 54: subdiag=[-0.
1516
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1517
         iter 55: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1518
         iter 56: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.681+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2=6.811e-01
         iter 57: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
1519
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2=6.811e-01
1520
         iter 58: subdiag=[-0.
                                             0.681+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
```

```
1521
         iter 59: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j], ||\cdot||_2=6.811e-01
1522
         iter 60: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                               +0.j],
         iter 61: subdiag=[-0.
1523
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
         iter 62: subdiag=[-0.
1524
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 63: subdiag=[-0.
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1525
                                     +0.j
                                                               +0.j],
1526
         iter 64: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                               +0.j],
1527
         iter 65: subdiag=[-0.
                                           0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                     +0.j
                                                               +0.j],
         iter 66: subdiag=[-0.
                                            0.681+0.j -0.
1528
                                     +0.j
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
                                     +0.j 0.681+0.j -0.
         iter 67: subdiag=[-0.
1529
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 68: subdiag=[-0.
                                           0.681+0.j -0.
1530
                                     +0.j
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1531
         iter 69: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
         iter 70: subdiag=[-0.
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
1532
                                     +0.j
                                                               +0.j],
1533
         iter 71: subdiag=[-0.
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                     +0.j
                                                               +0.j],
         iter 72: subdiag=[-0.
                                            0.681+0.j -0.
1534
                                     +0.j
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
         iter 73: subdiag=[-0.
1535
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                               +0.j],
1536
         iter 74: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1537
         iter 75: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                           0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
         iter 76: subdiag=[-0.
                                           0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1538
                                     +0.j
                                                               +0.j],
         iter 77: subdiag=[-0.
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1539
                                     +0.j
                                                               +0.j],
         iter 78: subdiag=[-0.
1540
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                     +0.j
                                                               +0.j],
         iter 79: subdiag=[-0.
1541
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
1542
         iter 80: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 81: subdiag=[-0.
1543
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1544
         iter 82: subdiag=[-0.
                                     +0.i
                                           0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1545
         iter 83: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
1546
         iter 84: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1547
         iter 85: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                           0.681+0.j -0.
                                                                        \|\cdot\|_{2}=6.811e-01
                                                               +0.j],
1548
         iter 86: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                            0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
1549
         iter 87: subdiag=[-0.
                                     +0.j 0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                               +0.j],
         iter 88: subdiag=[-0.
                                           0.681+0.j -0.
1550
                                     +0.j
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 89: subdiag=[-0.
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1551
                                     +0.j
                                                               +0.j],
1552
         iter 90: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                           0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                               +0.j],
1553
         iter 91: subdiag=[-0.
                                           0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                     +0.j
                                                               +0.j],
1554
         iter 92: subdiag=[-0.
                                     +0.i
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                               +0.j],
         iter 93: subdiag=[-0.
                                     +0.j 0.681+0.j -0.
1555
                                                                         \|\cdot\|_2=6.811e-01
                                                               +0.j],
         iter 94: subdiag=[-0.
                                           0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1556
                                     +0.i
                                                               +0.j],
1557
         iter 95: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                           0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 96: subdiag=[-0.
                                           0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1558
                                     +0.j
                                                               +0.j],
1559
         iter 97: subdiag=[-0.
                                     +0.j
                                           0.681+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                           0.681+0.j -0.
         iter 98: subdiag=[-0.
1560
                                     +0.j
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
         iter 99: subdiag=[-0.
                                            0.681+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
1561
                                     +0.j
                                                               +0.j],
         after : subdiag=[-0.
1562
                                    +0.j 0.681+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.811e - 01
                                                              +0.j],
1563
          iterations
                          = 100/100
          sub-diag magnitudes after last step:
1564
1565
          [0.
                  0.681 0.
1566 └ converged?
                          = no
```

```
1567
1568
      ─ Matrix 16/30 (size 4x4)
          fixed shift \mu = 0.533835 (|\mu| = 0.5338)
1569
        before: subdiag=[0.92 +0.j 0.998+0.j -0.89 +0.j],
1570
                                                                       \|\cdot\|_2=1.624e+00
        iter 00: subdiag=[ 0.987+0.j -0.962+0.j 0.616+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 1.510e + 00
1571
1572
        iter 01: subdiag=[ 0.908+0.j 0.654+0.j -0.485+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.219e+00
1573
        iter 02: subdiag=[ 0.877+0.j -0.318+0.j 0.453+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.037e+00
        iter 03: subdiag=[ 0.87 +0.j 0.139+0.j -0.447+0.j],
1574
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.880e - 01
        iter 04: subdiag=[ 0.869+0.j -0.06 +0.j 0.446+0.j],
1575
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.783e - 01
1576
        iter 05: subdiag=[ 0.869+0.j 0.025+0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.766e - 01
1577
        iter 06: subdiag=[ 0.869+0.j -0.011+0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 07: subdiag=[ 0.869+0.j 0.005+0.j -0.445+0.j],
1578
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1579
        iter 08: subdiag=[ 0.869+0.j -0.002+0.j
                                                        0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 09: subdiag=[ 0.869+0.j
1580
                                           0.001+0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 10: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1581
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
                                                 +0.j
                                                        0.445+0.j],
1582
        iter 11: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                 +0.i -0.445+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1583
        iter 12: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                 +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 13: subdiag=[0.869+0.i]
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1584
                                                 +0.j -0.445+0.j],
1585
        iter 14: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 15: subdiag=[ 0.869+0.j
1586
                                                 +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1587
        iter 16: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1588
        iter 17: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                 +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 18: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1589
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1590
        iter 19: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                 +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1591
        iter 20: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j
                                                        0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1592
        iter 21: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.i -0.445+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1593
        iter 22: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                 +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1594
        iter 23: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1595
        iter 24: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 25: subdiag=[ 0.869+0.j
1596
                                                 +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 26: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1597
                                                  +0.j
                                                        0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1598
        iter 27: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                 +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1599
        iter 28: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1600
        iter 29: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                 +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 30: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1601
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1602
        iter 31: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 32: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1603
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 33: subdiag=[ 0.869+0.j
1604
                                                 +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1605
        iter 34: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j
                                                        0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 35: subdiag=[ 0.869+0.j
1606
                                                 +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1607
        iter 36: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
                                                  +0.j
                                                        0.445+0.j],
        iter 37: subdiag=[ 0.869+0.j
1608
                                                 +0.j -0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1609
        iter 38: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1610
        iter 39: subdiag=[0.869+0.j]
                                                  +0.i -0.445+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 40: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1611
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1612
        iter 41: subdiag=[ 0.869+0.j 0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
                                                 +0.j -0.445+0.j],
```

```
1613
         iter 42: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j \quad 0.445+0.j], ||\cdot||_2=9.762e-01
1614
         iter 43: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 44: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1615
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 45: subdiag=[ 0.869+0.j
1616
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 46: subdiag=[0.869+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_{2}=9.762e-01
1617
                                                  +0.j
                                                         0.445+0.j],
1618
         iter 47: subdiag=[0.869+0.j]
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1619
         iter 48: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 49: subdiag=[ 0.869+0.j
1620
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 50: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1621
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 51: subdiag=[ 0.869+0.j
1622
                                                  +0.i -0.445+0.i],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1623
         iter 52: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 53: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
1624
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 54: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1625
         iter 55: subdiag=[ 0.869+0.j
1626
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1627
         iter 56: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1628
         iter 57: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.i -0.445+0.i],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1629
         iter 58: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 59: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1630
                                                  +0.j -0.445+0.j],
         iter 60: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1631
         iter 61: subdiag=[ 0.869+0.j
1632
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 62: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1633
                                                  +0.i 0.445+0.i],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1634
         iter 63: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 64: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1635
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1636
         iter 65: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1637
         iter 66: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j
                                                         0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1638
         iter 67: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.i -0.445+0.i],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1639
         iter 68: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1640
         iter 69: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1641
         iter 70: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 71: subdiag=[ 0.869+0.j
1642
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1643
         iter 72: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                         0.445+0.j],
                                                  +0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1644
         iter 73: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 74: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1645
                                                  +0.j 0.445+0.j],
1646
         iter 75: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1647
         iter 76: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1648
         iter 77: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 78: subdiag=[0.869+0.j -0.
1649
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 79: subdiag=[ 0.869+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1650
                                                  +0.j -0.445+0.j],
1651
         iter 80: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j
                                                         0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 81: subdiag=[ 0.869+0.j
1652
                                                  +0.j -0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 82: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1653
                                                  +0.j
                                                         0.445+0.j],
         iter 83: subdiag=[ 0.869+0.j
1654
                                                  +0.i -0.445+0.i],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1655
         iter 84: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1656
         iter 85: subdiag=[0.869+0.j]
                                                  +0.i -0.445+0.i],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
         iter 86: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
1657
                                                  +0.j 0.445+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1658
         iter 87: subdiag=[ 0.869+0.j 0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
                                                  +0.j -0.445+0.j],
```

```
1659
        iter 88: subdiag=[0.869+0.j-0.
                                              +0.i 0.445+0.i], ||\cdot||_2=9.762e-01
1660
        iter 89: subdiag=[ 0.869+0.j 0.
                                              +0.j -0.445+0.j],
                                                                   \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
1661
        iter 90: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                              +0.j \quad 0.445+0.j], \|\cdot\|_{2}=9.762e-01
        iter 91: subdiag=[ 0.869+0.j 0.
1662
                                              +0.j -0.445+0.j],
                                                                  \|\cdot\|_{2}=9.762e-01
        iter 92: subdiag=[0.869+0.j -0.
                                                     0.445+0.j],
                                                                   \|\cdot\|_{2}=9.762e-01
1663
                                              +0.j
1664
        iter 93: subdiag=[ 0.869+0.j
                                              +0.j -0.445+0.j], ||\cdot||_2=9.762e-01
1665
        iter 94: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                              +0.j 0.445+0.j],
                                                                 \|\cdot\|_2 = 9.762e - 01
        iter 95: subdiag=[ 0.869+0.j 0.
1666
                                              +0.j -0.445+0.j], ||\cdot||_2=9.762e-01
1667
        iter 96: subdiag=[ 0.869+0.j -0.
                                              +0.j \quad 0.445+0.j], \|\cdot\|_{2}=9.762e-01
        iter 97: subdiag=[0.869+0.j 0.
                                              +0.j -0.445+0.j], ||\cdot||_2=9.762e-01
1668
        iter 98: subdiag=[0.869+0.j -0.
1669
                                              +0.j \quad 0.445+0.j], ||\cdot||_2=9.762e-01
1670
        iter 99: subdiag=[ 0.869+0.j 0.
                                              +0.j -0.445+0.j], ||\cdot||_2=9.762e-01
1671
        after : subdiag=[ 0.869+0.j 0.
                                             +0.j -0.445+0.j], ||\cdot||_2=9.762e-01
         iterations
                        = 100/100
1672
1673
         sub-diag magnitudes after last step:
1674
         [0.869 0.
                       0.445]
1675
      └ converged?
                        = no
1676
1677 	─ Matrix 17/30 (size 4x4)
         fixed shift \mu = 0.0598199 - 0.0955454j (|\mu| = 0.1127)
1678
                                           +0.j \ 0.993+0.j], ||\cdot||_2=1.654e+00
        before: subdiag=[0.866+0.j 1.
1679
1680
        iter 00: subdiag=[-0.888+0.j -0.998-0.j 0.979+0.j], \|\cdot\|_2=1.657e+00
        iter 01: subdiag=[0.904-0.j 0.995+0.j 0.951+0.j], \|\cdot\|_2=1.647e+00
1681
1682
        iter 02: subdiag=[-0.913+0.j -0.992-0.j 0.912+0.j],
                                                                  \|\cdot\|_{2}=1.627e+00
1683
        iter 03: subdiag=[0.913-0.j 0.987+0.j 0.862+0.j], \|\cdot\|_2=1.597e+00
1684
        iter 04: subdiag=[-0.906+0.j -0.98 -0.j 0.808+0.j], ||\cdot||_2=1.560e+00
1685
        iter 05: subdiag=[0.893-0.j 0.968+0.j 0.751+0.j], \|\cdot\|_2=1.516e+00
1686
        iter 06: subdiag=[-0.876+0.j -0.95 +0.j 0.696-0.j], \|\cdot\|_2=1.468e+00
1687
        iter 07: subdiag=[0.857-0.j 0.924-0.j 0.643-0.j], \|\cdot\|_2=1.415e+00
        iter 08: subdiag=[-0.838+0.j -0.89 +0.j 0.595-0.j], \|\cdot\|_2=1.359e+00
1688
1689
        iter 09: subdiag=[0.819-0.j 0.847+0.j 0.552-0.j], \|\cdot\|_2=1.301e+00
        iter 10: subdiag=[ 0.801-0.j -0.798-0.j \ 0.513-0.j], \|\cdot\|_2=1.241e+00
1690
1691
        iter 11: subdiag=[0.786-0.j 0.743+0.j 0.478-0.j], \|\cdot\|_2=1.182e+00
1692
        iter 12: subdiag=[ 0.772-0.j -0.686+0.j 0.447-0.j], ||\cdot||_2=1.125e+00
1693
        iter 13: subdiag=[0.759-0.j 0.628+0.j 0.419-0.j], \|\cdot\|_2=1.071e+00
1694
        iter 14: subdiag=[ 0.749-0.j-0.571+0.j-0.394-0.j], \|\cdot\|_2=1.020e+00
        iter 15: subdiag=[0.739-0.j 0.516-0.j 0.371-0.j], \|\cdot\|_2=9.747e-01
1695
        iter 16: subdiag=[ 0.731-0.j -0.464+0.j 0.35 -0.j], \|\cdot\|_2=9.337e-01
1696
        iter 17: subdiag=[0.724-0.j 0.416-0.j 0.33 -0.j], \|\cdot\|_2=8.975e-01
1697
1698
        iter 18: subdiag=[ 0.717-0.j -0.371+0.j 0.312-0.j], \|\cdot\|_2=8.656e-01
        iter 19: subdiag=[0.711-0.j 0.331-0.j 0.295-0.j], \|\cdot\|_2=8.378e-01
1699
        iter 20: subdiag=[ 0.705-0.j-0.294+0.j-0.279-0.j], \|\cdot\|_2=8.136e-01
1700
1701
        iter 21: subdiag=[0.7 -0.j 0.261-0.j 0.264-0.j], \|\cdot\|_2=7.925e-01
1702
        iter 22: subdiag=[ 0.695-0.j -0.232+0.j 0.249-0.j], \|\cdot\|_{2}=7.741e-01
1703
        iter 23: subdiag=[0.69 -0.j 0.206-0.j 0.236-0.j], \|\cdot\|_2=7.580e-01
1704
        iter 24: subdiag=[ 0.686-0.j -0.182+0.j 0.223-0.j], \|\cdot\|_2=7.437e-01
```

```
1705
        iter 25: subdiag=[0.681-0.j 0.162-0.j 0.211-0.j], \|\cdot\|_2=7.311e-01
1706
        iter 26: subdiag=[ 0.677-0.j-0.143+0.j-0.2-0.j], \|\cdot\|_2=7.197e-01
1707
        iter 27: subdiag=[0.672-0.j \ 0.127-0.j \ 0.189-0.j], \|\cdot\|_2=7.095e-01
        iter 28: subdiag=[ 0.668-0.j -0.112+0.j 0.178-0.j],
1708
                                                                      \|\cdot\|_2 = 7.001e - 01
        iter 29: subdiag=[0.663-0.j 0.099-0.j 0.168-0.j], \|\cdot\|_2=6.915e-01
1709
1710
        iter 30: subdiag=[ 0.659-0.j -0.088+0.j 0.159-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.835e-01
1711
        iter 31: subdiag=[0.655-0.j 0.078-0.j 0.15 -0.j], \|\cdot\|_2=6.761e-01
        iter 32: subdiag=[ 0.65 -0.j -0.069+0.j 0.142-0.j],
1712
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.690e - 01
        iter 33: subdiag=[0.646-0.j 0.061-0.j 0.134-0.j], \|\cdot\|_2=6.624e-01
1713
        iter 34: subdiag=[ 0.641-0.j -0.054+0.j 0.127-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.560e-01
1714
        iter 35: subdiag=[0.637-0.j 0.048-0.j 0.12 -0.j], \|\cdot\|_2=6.499e-01
1715
        iter 36: subdiag=[ 0.633-0.j -0.043+0.j 0.113-0.j],
                                                                      ||\cdot||_2=6.440e-01
1716
1717
        iter 37: subdiag=[-0.628+0.j 0.038-0.j
                                                       0.107-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.382e - 01
        iter 38: subdiag=[ 0.624-0.j -0.033+0.j
1718
                                                       0.101-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.327e-01
1719
        iter 39: subdiag=[-0.619+0.j 0.03 -0.j
                                                       0.095-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.272e-01
1720
        iter 40: subdiag=[ 0.615-0.j -0.026+0.j
                                                       0.09 -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.219e-01
1721
        iter 41: subdiag=[-0.61 +0.j 0.023-0.j
                                                       0.084-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.166e - 01
        iter 42: subdiag=[ 0.606-0.j -0.021+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.115e - 01
1722
                                                       0.08 -0.j],
1723
        iter 43: subdiag=[-0.601-0.j 0.018-0.j
                                                       0.075-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.064e - 01
1724
        iter 44: subdiag=[ 0.597+0.j -0.016+0.j
                                                       0.071-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.014e - 01
1725
        iter 45: subdiag=[-0.592-0.j 0.014-0.j
                                                       0.067-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.964e - 01
1726
        iter 46: subdiag=[ 0.588+0.j -0.013+0.j
                                                       0.063-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.915e - 01
        iter 47: subdiag=[-0.584-0.j
1727
                                           0.011-0.j
                                                       0.06 - 0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.866e - 01
1728
        iter 48: subdiag=[ 0.579+0.j -0.01 +0.j
                                                       0.056-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.818e - 01
1729
        iter 49: subdiag=[-0.575-0.j
                                           0.009-0.j
                                                       0.053-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.770e - 01
1730
        iter 50: subdiag=[0.57 +0.j -0.008+0.j]
                                                       0.05 - 0.i],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.723e - 01
1731
        iter 51: subdiag=[-0.566+0.j
                                           0.007-0.j
                                                       0.047-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=5.675e-01
1732
        iter 52: subdiag=[ 0.561+0.j -0.006+0.j
                                                       0.044-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.628e - 01
1733
        iter 53: subdiag=[-0.557+0.j 0.005-0.j
                                                       0.042-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.581e - 01
1734
        iter 54: subdiag=[ 0.552-0.j -0.005+0.j
                                                       0.04 - 0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.535e - 01
        iter 55: subdiag=[-0.548+0.j
                                                       0.037-0.j],
1735
                                           0.004-0.j
                                                                      \|\cdot\|_2=5.488e-01
1736
        iter 56: subdiag=[ 0.543-0.j -0.004+0.j
                                                       0.035-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.442e-01
1737
        iter 57: subdiag=[-0.539+0.j
                                                       0.033-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.396e - 01
                                           0.003-0.j
1738
        iter 58: subdiag=[ 0.534+0.j -0.003+0.j
                                                       0.031-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.351e - 01
        iter 59: subdiag=[-0.53 -0.j
1739
                                           0.003-0.j
                                                       0.029-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.305e - 01
1740
        iter 60: subdiag=[ 0.525+0.j -0.002+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.260e - 01
                                                       0.028-0.j],
        iter 61: subdiag=[-0.521-0.j
1741
                                           0.002-0.j
                                                       0.026-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=5.215e-01
        iter 62: subdiag=[ 0.516+0.j -0.002+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.170e - 01
1742
                                                       0.025-0.j],
        iter 63: subdiag=[-0.512-0.j
1743
                                           0.002-0.j
                                                       0.023-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.125e-01
        iter 64: subdiag=[ 0.508+0.j -0.001+0.j
1744
                                                       0.022-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.080e - 01
1745
        iter 65: subdiag=[-0.503+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.036e - 01
                                           0.001-0.j
                                                       0.021-0.j],
        iter 66: subdiag=[ 0.499-0.j -0.001+0.j
1746
                                                       0.02 - 0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.992e - 01
1747
        iter 67: subdiag=[-0.494+0.j 0.001-0.j
                                                       0.018-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.948e - 01
1748
        iter 68: subdiag=[ 0.49 -0.j -0.001+0.j
                                                       0.017-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.904e - 01
1749
        iter 69: subdiag=[-0.486+0.j 0.001-0.j
                                                       0.016-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.860e - 01
1750
        iter 70: subdiag=[ 0.481-0.j -0.001+0.j
                                                       0.015-0.j], \|\cdot\|_2=4.817e-01
```

```
1751
        iter 71: subdiag=[-0.477+0.j 0.001-0.j
                                                       0.015-0.j], ||\cdot||_2=4.774e-01
1752
        iter 72: subdiag=[ 0.473-0.j -0.001+0.j
                                                        0.014-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.731e - 01
1753
        iter 73: subdiag=[-0.469+0.j 0.
                                                 -0.j
                                                        0.013-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.688e - 01
        iter 74: subdiag=[ 0.464-0.j -0.
1754
                                                 +0.j
                                                        0.012-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.645e - 01
        iter 75: subdiag=[-0.46 +0.j
                                                        0.012-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.603e - 01
1755
                                                 -0.j
1756
        iter 76: subdiag=[ 0.456-0.j -0.
                                                 +0.j
                                                        0.011-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.561e - 01
1757
        iter 77: subdiag=[-0.452-0.j 0.
                                                        0.01 - 0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.519e - 01
                                                 -0.j
1758
        iter 78: subdiag=[ 0.448+0.j -0.
                                                        0.01 - 0.j],
                                                 +0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.477e - 01
1759
        iter 79: subdiag=[-0.443-0.j 0.
                                                 -0.j
                                                        0.009-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.436e - 01
1760
        iter 80: subdiag=[0.439+0.j-0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.394e - 01
                                                 +0.j
                                                        0.009 - 0.i],
1761
        iter 81: subdiag=[-0.435-0.j
                                                 -0.j
                                                        0.008-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=4.353e-01
1762
        iter 82: subdiag=[ 0.431+0.j -0.
                                                        0.008-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.313e - 01
                                                 +0.j
        iter 83: subdiag=[-0.427-0.j 0.
1763
                                                        0.007-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.272e - 01
                                                 -0.j
1764
        iter 84: subdiag=[ 0.423+0.j -0.
                                                        0.007-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.232e - 01
                                                 +0.j
        iter 85: subdiag=[-0.419-0.j
1765
                                                 -0.j
                                                        0.006-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.192e - 01
        iter 86: subdiag=[ 0.415+0.j -0.
1766
                                                 +0.j
                                                        0.006-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.152e - 01
1767
        iter 87: subdiag=[-0.411-0.j
                                                 -0.j
                                                        0.006-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.112e - 01
        iter 88: subdiag=[ 0.407+0.j -0.
                                                        0.005-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.073e - 01
1768
                                                 +0.j
1769
        iter 89: subdiag=[-0.403-0.j 0.
                                                        0.005-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.034e - 01
                                                 -0.j
        iter 90: subdiag=[ 0.399+0.j -0.
1770
                                                 +0.j
                                                        0.005-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.995e - 01
        iter 91: subdiag=[-0.396-0.j
1771
                                                 -0.j
                                                        0.005-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=3.957e-01
1772
        iter 92: subdiag=[ 0.392+0.j -0.
                                                 +0.j
                                                        0.004-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.918e - 01
1773
        iter 93: subdiag=[-0.388-0.j
                                                 -0.j
                                                        0.004-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.880e - 01
1774
        iter 94: subdiag=[ 0.384+0.j -0.
                                                 +0.j
                                                       0.004-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.842e - 01
1775
        iter 95: subdiag=[-0.38 -0.j 0.
                                                 -0.j
                                                        0.004-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.805e - 01
1776
        iter 96: subdiag=[0.377+0.j-0.
                                                 +0.j
                                                        0.003-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.768e - 01
1777
        iter 97: subdiag=[-0.373+0.j 0.
                                                 -0.j
                                                       0.003-0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=3.731e-01
1778
        iter 98: subdiag=[ 0.369+0.j -0.
                                                 +0.j
                                                        0.003-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.694e - 01
1779
        iter 99: subdiag=[-0.366-0.j 0.
                                                 -0.j \quad 0.003 - 0.j], \|\cdot\|_2 = 3.658e - 01
        after : subdiag=[-0.366-0.j 0.
1780
                                                -0.j \quad 0.003-0.j], ||\cdot||_2=3.658e-01
          iterations
                          = 100/100
1781
1782
          sub-diag magnitudes after last step:
1783
          [0.366 0.
                        0.003]
1784
      └ converged?
                          = no
1785
1786
      ─ Matrix 18/30 (size 4x4)
         fixed shift \mu = 0.0412469 - 0.965376j (|\mu| = 0.9663)
1787
        before: subdiag=[-0.986+0.j -0.358+0.j -0.999+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.449e+00
1788
        iter 00: subdiag=[-0.281-0.j 0.975-0.j -0.203-0.j], \|\cdot\|_2=1.035e+00
1789
1790
        iter 01: subdiag=[-0.184-0.j 0.285-0.j 0.078+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.481e - 01
        iter 02: subdiag=[ 0.183+0.j -0.037+0.j -0.043-0.j],
1791
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.915e - 01
        iter 03: subdiag=[-0.184-0.j 0.005-0.j 0.023+0.j],
1792
                                                                      \|\cdot\|_2=1.853e-01
1793
        iter 04: subdiag=[ 0.185+0.j -0.001+0.j -0.012-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.850e-01
1794
        iter 05: subdiag=[ 0.185+0.j -0.
                                                +0.j 0.007+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=1.854e-01
                                                 +0.j -0.004-0.j],
1795
        iter 06: subdiag=[ 0.186+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.860e-01
1796
        iter 07: subdiag=[ 0.187+0.j -0.
                                                +0.j \quad 0.002+0.j], ||\cdot||_2=1.866e-01
```

```
1797
        iter 08: subdiag=[ 0.187+0.j -0.
                                                +0.j -0.001 -0.j], ||\cdot||_2 = 1.872e -01
1798
        iter 09: subdiag=[ 0.188+0.j -0.
                                                +0.j 0.001+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.878e - 01
1799
        iter 10: subdiag=[ 0.188+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.884e-01
                                                +0.j -0.
                                                              -0.j],
1800
        iter 11: subdiag=[ 0.189+0.j -0.
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.889e-01
1801
        iter 12: subdiag=[ 0.189+0.j -0.
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.894e-01
        iter 13: subdiag=[ 0.19+0.j -0.
1802
                                              +0.j 0. +0.j], ||\cdot||_2=1.898e-01
1803
        iter 14: subdiag=[ 0.19+0.j -0.
                                              +0.j -0. -0.j, ||\cdot||_2=1.902e-01
1804
        iter 15: subdiag=[ 0.191+0.j -0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.906e - 01
                                                 +0.j 0.
1805
        iter 16: subdiag=[ 0.191+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.909e - 01
                                                +0.j -0.
                                                              -0.j],
        iter 17: subdiag=[ 0.191+0.j -0.
1806
                                                                      \|\cdot\|_{2}=1.912e-01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 18: subdiag=[ 0.191+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.915e-01
1807
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
1808
        iter 19: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.917e - 01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 20: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
1809
                                                              -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.919e-01
                                                 +0.j -0.
1810
        iter 21: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.920e - 01
                                                +0.i 0.
                                                             +0.j],
        iter 22: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.921e - 01
1811
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
        iter 23: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
1812
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.922e-01
                                                +0.j -0.
1813
        iter 24: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.922e-01
        iter 25: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.922e-01
1814
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
1815
        iter 26: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.921e - 01
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
1816
        iter 27: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.920e - 01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 28: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_{2}=1.919e-01
1817
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
        iter 29: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
1818
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.918e-01
1819
        iter 30: subdiag=[ 0.192+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.915e - 01
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
1820
        iter 31: subdiag=[ 0.191+0.j -0.
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.913e - 01
1821
        iter 32: subdiag=[ 0.191+0.j -0.
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.910e - 01
1822
        iter 33: subdiag=[ 0.191+0.j -0.
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.907e-01
1823
        iter 34: subdiag=[ 0.19+0.j -0.
                                              +0.j -0. -0.j], ||\cdot||_2=1.903e-01
1824
        iter 35: subdiag=[ 0.19+0.j -0.
                                              +0.j 0. +0.j], ||\cdot||_2=1.900e-01
1825
        iter 36: subdiag=[ 0.19+0.j -0.
                                              +0.j -0. -0.j], ||\cdot||_2=1.895e-01
1826
        iter 37: subdiag=[ 0.189+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.891e - 01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
1827
        iter 38: subdiag=[ 0.189+0.j -0.
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.886e-01
        iter 39: subdiag=[ 0.188+0.j -0.
1828
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.880e - 01
1829
        iter 40: subdiag=[ 0.187+0.j -0.
                                                +0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.875e-01
                                                              -0.j],
1830
        iter 41: subdiag=[ 0.187+0.j -0.
                                                +0.i 0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=1.869e-01
1831
        iter 42: subdiag=[ 0.186+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.862e-01
                                                +0.j -0.
                                                              -0.j],
        iter 43: subdiag=[ 0.186+0.j -0.
1832
                                                                      \|\cdot\|_2=1.855e-01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.848e-01
        iter 44: subdiag=[ 0.185+0.j -0.
1833
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
        iter 45: subdiag=[ 0.184+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.841e-01
1834
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 46: subdiag=[ 0.183+0.j -0.
1835
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.833e - 01
1836
        iter 47: subdiag=[ 0.183+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.825e-01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 48: subdiag=[ 0.182+0.j -0.
1837
                                                 +0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.817e-01
                                                              -0.j],
        iter 49: subdiag=[-0.181-0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_{2}=1.809e-01
1838
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
1839
        iter 50: subdiag=[ 0.18+0.j -0. +0.j -0. -0.j], \|\cdot\|_2=1.800e-01
        iter 51: subdiag=[-0.179-0.j -0.
1840
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=1.791e-01
1841
        iter 52: subdiag=[ 0.178+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.781e-01
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
1842
        iter 53: subdiag=[-0.177-0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.772e-01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
```

```
1843
        iter 54: subdiag=[ 0.176+0.j -0.
                                                +0.j -0.
                                                              -0.j], ||\cdot||_2=1.762e-01
1844
        iter 55: subdiag=[-0.175-0.j -0.
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.752e-01
1845
        iter 56: subdiag=[ 0.174+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.741e - 01
                                                +0.j -0.
                                                              -0.j],
        iter 57: subdiag=[-0.173-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.731e-01
1846
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
1847
        iter 58: subdiag=[ 0.172+0.j -0.
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.720e-01
        iter 59: subdiag=[-0.171-0.j -0.
1848
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.709e-01
1849
        iter 60: subdiag=[ 0.17+0.j -0. +0.j -0. -0.j], \|\cdot\|_2=1.698e-01
1850
        iter 61: subdiag=[-0.169-0.j -0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.687e-01
                                                 +0.j 0.
1851
        iter 62: subdiag=[ 0.167+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.675e-01
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
        iter 63: subdiag=[-0.166-0.j -0.
1852
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.663e-01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 64: subdiag=[ 0.165+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.651e-01
1853
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
1854
        iter 65: subdiag=[-0.164-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.639e - 01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 66: subdiag=[ 0.163+0.j -0.
1855
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.627e - 01
                                                 +0.j -0.
        iter 67: subdiag=[-0.161-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.615e - 01
1856
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 68: subdiag=[ 0.16+0.j -0.
                                              +0.j -0. -0.j], ||\cdot||_2=1.602e-01
1857
        iter 69: subdiag=[-0.159-0.j -0.
1858
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.590e - 01
1859
        iter 70: subdiag=[ 0.158+0.j -0.
                                                +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.577e-01
        iter 71: subdiag=[-0.156-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.564e - 01
1860
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
1861
        iter 72: subdiag=[ 0.155-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.551e - 01
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
1862
        iter 73: subdiag=[-0.154-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.538e - 01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 74: subdiag=[ 0.152-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.525e-01
1863
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
        iter 75: subdiag=[-0.151-0.j -0.
1864
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.512e-01
1865
        iter 76: subdiag=[ 0.15-0.j -0. +0.j -0. -0.j], \|\cdot\|_2=1.498e-01
1866
        iter 77: subdiag=[-0.148-0.j -0.
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.485e-01
1867
        iter 78: subdiag=[ 0.147+0.j -0.
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.472e-01
1868
        iter 79: subdiag=[-0.146+0.j -0.
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.458e-01
1869
        iter 80: subdiag=[ 0.144-0.j -0.
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.445e-01
1870
        iter 81: subdiag=[-0.143-0.j -0.
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.431e-01
1871
        iter 82: subdiag=[ 0.142+0.j -0.
                                                 +0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.418e-01
                                                              -0.j],
1872
        iter 83: subdiag=[-0.14-0.j -0.
                                              +0.j 0. +0.j], ||\cdot||_2=1.404e-01
1873
        iter 84: subdiag=[ 0.139+0.j -0.
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.390e-01
        iter 85: subdiag=[-0.138-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.377e-01
1874
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
1875
        iter 86: subdiag=[ 0.136-0.j -0.
                                                +0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.363e-01
                                                              -0.j],
1876
        iter 87: subdiag=[-0.135+0.j -0.
                                                +0.i 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.349e-01
1877
        iter 88: subdiag=[ 0.134-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.336e-01
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
        iter 89: subdiag=[-0.132+0.j -0.
1878
                                                                       \|\cdot\|_2=1.322e-01
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.309e - 01
1879
        iter 90: subdiag=[ 0.131+0.j -0.
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
1880
        iter 91: subdiag=[-0.129-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.295e-01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 92: subdiag=[ 0.128-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.281e-01
1881
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
1882
        iter 93: subdiag=[-0.127+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.268e-01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 94: subdiag=[ 0.125+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.254e-01
1883
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
1884
        iter 95: subdiag=[-0.124+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.241e-01
                                                +0.j 0.
                                                             +0.j],
        iter 96: subdiag=[ 0.123-0.j -0.
1885
                                                 +0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.227e-01
        iter 97: subdiag=[-0.121+0.j -0.
1886
                                                 +0.j 0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.214e-01
1887
        iter 98: subdiag=[ 0.12-0.j -0.
                                              +0.j -0. -0.j], ||\cdot||_2=1.201e-01
1888
        iter 99: subdiag=[-0.119-0.j -0.
                                                              +0.j], ||\cdot||_2=1.187e-01
                                                 +0.j 0.
```

```
1889
        after: subdiag=[-0.119-0.j -0. +0.j 0.
                                                            +0.j], ||\cdot||_2=1.187e-01
1890
          iterations
                          = 100/100
1891
          sub-diag magnitudes after last step:
1892
          [0.119 0.
                         0.
1893
      └ converged?
                          = no
1894
1895
      ─ Matrix 19/30 (size 4x4)
          fixed shift \mu = -0.993087 (|\mu| = 0.9931)
1896
        before: subdiag=[-0.745+0.j \quad 0.986+0.j \quad 0.139+0.j], \|\cdot\|_2=1.244e+00
1897
1898
        iter 00: subdiag=[-0.592+0.j
                                           0.997+0.j
                                                        0.001+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.159e+00
                                                                        \|\cdot\|_2 = 1.094e + 00
1899
        iter 01: subdiag=[-0.445+0.j
                                                 +0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
1900
        iter 02: subdiag=[-0.324+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2=1.051e+00
                                                 +0.j
                                                        0.
                                                               +0.j],
                                            1.
1901
        iter 03: subdiag=[-0.231+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2=1.026e+00
                                                 +0.j
                                                               +0.j],
        iter 04: subdiag=[-0.163+0.j
1902
                                                 +0.j
                                                        0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.013e+00
                                            1.
1903
        iter 05: subdiag=[-0.114+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2=1.006e+00
                                            1.
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
1904
        iter 06: subdiag=[-0.08+0.j
                                           1. +0.j 0. +0.j], ||\cdot||_2=1.003e+00
1905
        iter 07: subdiag=[-0.056+0.j
                                            1.
                                                  +0.j
                                                        0.
                                                               +0.j], ||\cdot||_2=1.001e+00
        iter 08: subdiag=[-0.039+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2=1.000e+00
1906
                                                 +0.j
                                                        0.
                                                               +0.j],
1907
        iter 09: subdiag=[-0.027+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2=1.000e+00
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
        iter 10: subdiag=[-0.019+0.j
1908
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.999e - 01
                                            1.
                                                 +0.j
                                                        0.
                                                               +0.j],
        iter 11: subdiag=[-0.013+0.j
1909
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.998e - 01
1910
        iter 12: subdiag=[-0.009+0.j
                                            1.
                                                 +0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1911
        iter 13: subdiag=[-0.006+0.j
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1912
        iter 14: subdiag=[-0.005+0.j
                                                 +0.j
                                                        0.
                                                               +0.il,
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1913
        iter 15: subdiag=[-0.003+0.j
                                            1.
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1914
        iter 16: subdiag=[-0.002+0.j
                                                  +0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1915
        iter 17: subdiag=[-0.002+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                                 +0.j
                                                        0.
                                                               +0.j],
1916
        iter 18: subdiag=[-0.001+0.j
                                                 +0.j
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                            1.
                                                         0.
1917
        iter 19: subdiag=[-0.001+0.j
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                            1.
                                                 +0.j 0.
                                                               +0.j],
        iter 20: subdiag=[-0.001+0.j
1918
                                            1.
                                                 +0.j 0.
                                                              +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1919
        iter 21: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1920
        iter 22: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1921
        iter 23: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1922
        iter 24: subdiag=[-0.+0.j
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                       1.+0.j
                                                 0.+0.j],
        iter 25: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
1923
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1924
        iter 26: subdiag=[-0.+0.j]
                                       1.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1925
        iter 27: subdiag=[-0.+0.j]
                                      1.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
        iter 28: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1926
                                                 0.+0.j],
1927
        iter 29: subdiag=[-0.+0.j]
                                      1.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1928
        iter 30: subdiag=[-0.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                       1.+0.j
1929
        iter 31: subdiag=[-0.+0.j
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                        1.+0.j
                                                 0.+0.j],
        iter 32: subdiag=[-0.+0.j
1930
                                       1.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1931
        iter 33: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1932
        iter 34: subdiag=[-0.+0.j]
                                       1.+0.j
                                                 0.+0.i],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
        iter 35: subdiag=[-0.+0.j
1933
                                        1.+0.j
                                                 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1934
        iter 36: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
```

```
1935
         iter 37: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j], ||\cdot||_2=9.997e-01
1936
         iter 38: subdiag=[-0.+0.j]
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1937
         iter 39: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1938
         iter 40: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
         iter 41: subdiag=[-0.+0.j
1939
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1940
         iter 42: subdiag=[-0.+0.j]
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1941
         iter 43: subdiag=[-0.+0.j
                                        1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
         iter 44: subdiag=[-0.+0.j]
1942
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
         iter 45: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
1943
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1944
         iter 46: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1945
         iter 47: subdiag=[-0.+0.j]
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1946
         iter 48: subdiag=[-0.+0.j
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1947
         iter 49: subdiag=[-0.+0.j]
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                        1.+0.j
                                                   0.+0.j],
         iter 50: subdiag=[-0.+0.j]
1948
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1949
         iter 51: subdiag=[-0.+0.j
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1950
         iter 52: subdiag=[-0.+0.j]
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1951
         iter 53: subdiag=[-0.+0.j]
                                        1.+0.j
                                                   0.+0.j],
         iter 54: subdiag=[-0.+0.j]
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1952
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1953
         iter 55: subdiag=[-0.+0.j
                                        1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1954
         iter 56: subdiag=[-0.+0.j]
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1955
         iter 57: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.i],
1956
         iter 58: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1957
         iter 59: subdiag=[-0.+0.j]
                                        1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1958
         iter 60: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
         iter 61: subdiag=[-0.+0.j]
1959
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1960
         iter 62: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.i],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1961
         iter 63: subdiag=[-0.+0.j]
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                        1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1962
         iter 64: subdiag=[-0.+0.j]
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1963
         iter 65: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                                   0.+0.j],
         iter 66: subdiag=[-0.+0.j]
1964
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
         iter 67: subdiag=[-0.+0.j]
1965
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1966
         iter 68: subdiag=[-0.+0.j]
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1967
         iter 69: subdiag=[-0.+0.j]
                                        1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1968
         iter 70: subdiag=[-0.+0.i]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
         iter 71: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
1969
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
         iter 72: subdiag=[-0.+0.j]
1970
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1971
         iter 73: subdiag=[-0.+0.j]
                                        1.+0.j
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                                   0.+0.j],
         iter 74: subdiag=[-0.+0.j]
1972
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1973
         iter 75: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1974
         iter 76: subdiag=[-0.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
1975
         iter 77: subdiag=[-0.+0.j
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
1976
         iter 78: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1977
         iter 79: subdiag=[-0.+0.j]
                                        1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1978
         iter 80: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1979
         iter 81: subdiag=[-0.+0.j
                                         1.+0.j
                                                   0.+0.j],
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1980
         iter 82: subdiag=[-0.+0.j
                                                               \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j 0.+0.j],
```

```
1981
         iter 83: subdiag=[-0.+0.j]
                                         1.+0.j
                                                  0.+0.j], ||\cdot||_2=9.997e-01
1982
         iter 84: subdiag=[-0.+0.j]
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
1983
         iter 85: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1984
         iter 86: subdiag=[-0.+0.j]
                                        1.+0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
         iter 87: subdiag=[-0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1985
                                         1.+0.j
                                                  0.+0.j],
1986
         iter 88: subdiag=[-0.+0.j]
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
                                                  0.+0.j],
1987
         iter 89: subdiag=[-0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                       1.+0.j
                                                  0.+0.j],
         iter 90: subdiag=[-0.+0.j
1988
                                         1.+0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
         iter 91: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
1989
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1990
         iter 92: subdiag=[-0.+0.j]
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                        1.+0.j
                                                  0.+0.j],
1991
         iter 93: subdiag=[-0.+0.j]
                                        1.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                                  0.+0.j],
         iter 94: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1992
                                                  0.+0.j],
1993
         iter 95: subdiag=[-0.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                       1.+0.j
                                                  0.+0.j],
1994
         iter 96: subdiag=[-0.+0.j
                                        1.+0.j
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
1995
         iter 97: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                                  0.+0.j],
1996
         iter 98: subdiag=[-0.+0.j]
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
                                         1.+0.j
         iter 99: subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j
1997
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
         after : subdiag=[-0.+0.j 1.+0.j 0.+0.j],
1998
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.997e - 01
          iterations
                          = 100/100
1999
2000
          sub-diag magnitudes after last step:
2001
          [0. 1. 0.]
2002
       └ converged?
                          = no
2003
2004
       ─ Matrix 20/30 (size 4x4)
2005
         fixed shift \mu = 0.943718 (|\mu|=0.9437)
2006
         before: subdiag=[-0.429+0.j -0.972+0.j
                                                        0.419+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.142e+00
2007
         iter 00: subdiag=[-0.982+0.j -0.64 +0.j]
                                                         0.047+0.j], ||\cdot||_2=1.173e+00
2008
         iter 01: subdiag=[-0.51 +0.j -0.44 +0.j]
                                                         0.006+0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 6.740e - 01
2009
         iter 02: subdiag=[-0.12 +0.j -0.426+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.427e - 01
                                                         0.001+0.j],
         iter 03: subdiag=[-0.027+0.j -0.425+0.j
2010
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.262e - 01
2011
         iter 04: subdiag=[-0.006+0.j -0.425+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                         0.
                                                               +0.j],
2012
         iter 05: subdiag=[-0.001+0.j -0.425+0.j
                                                         0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                               +0.j],
2013
         iter 06: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                         0.
                                                               +0.j],
2014
         iter 07: subdiag=[-0.
                                     +0.i -0.425+0.i
                                                                         \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
                                                         0.
                                                               +0.j],
         iter 08: subdiag=[-0.
2015
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                         0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                               +0.j],
2016
         iter 09: subdiag=[-0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
         iter 10: subdiag=[-0.
2017
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                         0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                               +0.j],
         iter 11: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2018
                                                         0.
                                                               +0.j],
         iter 12: subdiag=[-0.
2019
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2020
         iter 13: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                         0.
                                                               +0.j],
2021
         iter 14: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                         0.
                                                                +0.j],
         iter 15: subdiag=[-0.
2022
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2023
         iter 16: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2024
         iter 17: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                     +0.j -0.425+0.j
2025
         iter 18: subdiag=[-0.
                                                         0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2026
         iter 19: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                         0.
                                                               +0.j],
```

```
2027
         iter 20: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
2028
         iter 21: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
2029
         iter 22: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
         iter 23: subdiag=[-0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2030
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
2031
         iter 24: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
         iter 25: subdiag=[-0.
                                                                  +0.j],
2032
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2033
         iter 26: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
2034
         iter 27: subdiag=[-0.
                                       +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
2035
         iter 28: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
         iter 29: subdiag=[-0.
2036
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
         iter 30: subdiag=[-0.
2037
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2038
         iter 31: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 32: subdiag=[-0.
2039
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
2040
         iter 33: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 34: subdiag=[-0.
2041
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 35: subdiag=[-0.
2042
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
         iter 36: subdiag=[-0.
2043
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
         iter 37: subdiag=[-0.
2044
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
2045
         iter 38: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 39: subdiag=[-0.
2046
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 40: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
2047
                                                           0.
                                                                  +0.j],
         iter 41: subdiag=[-0.
2048
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2049
         iter 42: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
2050
         iter 43: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2051
         iter 44: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2052
         iter 45: subdiag=[-0.
                                       +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
         iter 46: subdiag=[-0.
2053
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2054
         iter 47: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2055
         iter 48: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
2056
         iter 49: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
2057
         iter 50: subdiag=[-0.
                                       +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
         iter 51: subdiag=[-0.
2058
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2059
         iter 52: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
2060
         iter 53: subdiag=[-0.
                                      +0.i -0.425+0.i
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
2061
         iter 54: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 55: subdiag=[-0.
2062
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                      +0.j -0.425+0.j
2063
         iter 56: subdiag=[-0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                           0.
                                                                  +0.j],
2064
         iter 57: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 58: subdiag=[-0.
2065
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2066
         iter 59: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 60: subdiag=[-0.
2067
                                       +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 61: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                           \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
2068
                                                           0.
                                                                  +0.j],
2069
         iter 62: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
         iter 63: subdiag=[-0.
2070
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                       +0.j -0.425+0.j
2071
         iter 64: subdiag=[-0.
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 65: subdiag=[-0.
2072
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                  +0.j],
```

```
2073
         iter 66: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
2074
         iter 67: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 68: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2075
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 69: subdiag=[-0.
2076
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2077
         iter 70: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 71: subdiag=[-0.
2078
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                +0.j],
2079
         iter 72: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
2080
         iter 73: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
2081
         iter 74: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 75: subdiag=[-0.
2082
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_{2}=4.253e-01
                                                          0.
                                                                +0.j],
2083
         iter 76: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2084
         iter 77: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                +0.j],
         iter 78: subdiag=[-0.
2085
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 79: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2086
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 80: subdiag=[-0.
2087
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                +0.j],
         iter 81: subdiag=[-0.
2088
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2089
         iter 82: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
         iter 83: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2090
                                                          0.
                                                                +0.j],
2091
         iter 84: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 85: subdiag=[-0.
2092
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                +0.j],
         iter 86: subdiag=[-0.
2093
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2094
         iter 87: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2095
         iter 88: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2096
         iter 89: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.il,
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2097
         iter 90: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2098
         iter 91: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
         iter 92: subdiag=[-0.
2099
                                     +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2100
         iter 93: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2101
         iter 94: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 95: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2102
                                                          0.
                                                                +0.j],
2103
         iter 96: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
2104
         iter 97: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                +0.j],
2105
         iter 98: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
2106
         iter 99: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.425+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
                                                                +0.j],
         after : subdiag=[-0.
                                    +0.j -0.425+0.j 0.
2107
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
2108
          iterations
                           = 100/100
2109
          sub-diag magnitudes after last step:
          [0.
                  0.425 0.
2110
                                ]
       └ converged?
2111
                           = no
2112
2113
      ─ Matrix 21/30 (size 4x4)
       fixed shift \mu = -0.645528 (|\mu| = 0.6455)
2114
2115
         before: subdiag=[-0.998+0.j \quad 0.999+0.j \quad 0.737+0.j], \quad ||\cdot||_2=1.593e+00
2116
         iter 00: subdiag=[-0.902+0.j 0.984+0.j
                                                          0.314+0.i], ||\cdot||_2=1.371e+00
                                             0.955+0.j
         iter 01: subdiag=[-0.666+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2=1.169e+00
2117
                                                          0.114+0.j],
2118
         iter 02: subdiag=[-0.431+0.j 0.936+0.j
                                                          0.041+0.j], ||\cdot||_2=1.032e+00
```

```
2119
         iter 03: subdiag=[-0.262+0.j
                                              0.928 + 0.j
                                                            0.015+0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.647e - 01
2120
         iter 04: subdiag=[-0.155+0.j
                                              0.925 + 0.j
                                                            0.006+0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.383e - 01
         iter 05: subdiag=[-0.091+0.j
2121
                                              0.924+0.j
                                                            0.002+0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.288e - 01
2122
         iter 06: subdiag=[-0.053+0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.001+0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.255e - 01
         iter 07: subdiag=[-0.031+0.j
                                                                            \|\cdot\|_{2}=9.244e-01
2123
                                              0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
2124
         iter 08: subdiag=[-0.018+0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.240e - 01
                                                                  +0.j],
2125
         iter 09: subdiag=[-0.011+0.j
                                              0.924 + 0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.239e - 01
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 10: subdiag=[-0.006+0.j
2126
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.239e - 01
         iter 11: subdiag=[-0.004+0.j
2127
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 12: subdiag=[-0.002+0.j
2128
                                              0.924 + 0.j
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                            0.
2129
         iter 13: subdiag=[-0.001+0.j
                                              0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 14: subdiag=[-0.001+0.j
                                              0.924+0.j
2130
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 15: subdiag=[-0.
                                              0.924+0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2131
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 16: subdiag=[-0.
2132
                                       +0.i
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 17: subdiag=[-0.
2133
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                                  +0.j],
2134
         iter 18: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924 + 0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                            0.
                                                                  +0.j],
2135
         iter 19: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 20: subdiag=[-0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2136
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 21: subdiag=[-0.
                                              0.924+0.j
2137
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 22: subdiag=[-0.
2138
                                              0.924+0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 23: subdiag=[-0.
2139
                                       +0.j
                                              0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2140
         iter 24: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2141
         iter 25: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2142
         iter 26: subdiag=[-0.
                                       +0.i
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2143
         iter 27: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2144
         iter 28: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2145
         iter 29: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                  +0.j],
2146
         iter 30: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2147
         iter 31: subdiag=[-0.
                                       +0.j 0.924+0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 32: subdiag=[-0.
2148
                                       +0.j
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 33: subdiag=[-0.
                                              0.924+0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2149
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
2150
         iter 34: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                  +0.j],
2151
         iter 35: subdiag=[-0.
                                             0.924+0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 36: subdiag=[-0.
                                              0.924 + 0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2152
                                       +0.i
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 37: subdiag=[-0.
2153
                                       +0.j 0.924+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 38: subdiag=[-0.
2154
                                       +0.i
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 39: subdiag=[-0.
2155
                                       +0.j
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                  +0.j],
         iter 40: subdiag=[-0.
                                             0.924+0.j
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2156
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 41: subdiag=[-0.
2157
                                       +0.j
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 42: subdiag=[-0.
2158
                                       +0.j
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 43: subdiag=[-0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2159
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
         iter 44: subdiag=[-0.
2160
                                       +0.j
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2161
         iter 45: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                  +0.j],
2162
         iter 46: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 47: subdiag=[-0.
2163
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                  +0.j],
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2164
         iter 48: subdiag=[-0.
                                                                            \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                             0.924+0.j
                                                           0.
                                                                  +0.j],
```

```
2165
         iter 49: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2166
         iter 50: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                   +0.j],
2167
         iter 51: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 52: subdiag=[-0.
2168
                                       +0.j
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 53: subdiag=[-0.
                                               0.924 + 0.j
                                                                             \|\cdot\|_{2}=9.238e-01
2169
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
2170
         iter 54: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                   +0.j],
2171
         iter 55: subdiag=[-0.
                                               0.924 + 0.j
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
         iter 56: subdiag=[-0.
2172
                                       +0.i
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
         iter 57: subdiag=[-0.
2173
                                       +0.j
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2174
         iter 58: subdiag=[-0.
                                              0.924+0.j
                                                                             \|\cdot\|_{2}=9.238e-01
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
2175
         iter 59: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                              0.924+0.j
2176
         iter 60: subdiag=[-0.
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                                   +0.j],
2177
         iter 61: subdiag=[-0.
                                               0.924+0.j
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.i
                                                            0.
                                                                   +0.j],
         iter 62: subdiag=[-0.
                                               0.924 + 0.j
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2178
                                       +0.i
                                                            0.
                                                                   +0.j],
         iter 63: subdiag=[-0.
2179
                                       +0.j
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                   +0.j],
2180
         iter 64: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2181
         iter 65: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                              0.924+0.j
         iter 66: subdiag=[-0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2182
                                       +0.i
                                                            0.
                                                                   +0.j],
2183
         iter 67: subdiag=[-0.
                                               0.924+0.j
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.i
                                                            0.
                                                                   +0.j],
         iter 68: subdiag=[-0.
2184
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                                   +0.j],
         iter 69: subdiag=[-0.
2185
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2186
         iter 70: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2187
         iter 71: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2188
         iter 72: subdiag=[-0.
                                       +0.i
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                               0.924+0.j
2189
         iter 73: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2190
         iter 74: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2191
         iter 75: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                   +0.j],
2192
         iter 76: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2193
         iter 77: subdiag=[-0.
                                             0.924+0.j
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                                   +0.j],
         iter 78: subdiag=[-0.
                                              0.924+0.j
2194
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2195
         iter 79: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924+0.j
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                            0.
                                                                   +0.j],
         iter 80: subdiag=[-0.
2196
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                   +0.j],
2197
         iter 81: subdiag=[-0.
                                              0.924+0.j
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
2198
         iter 82: subdiag=[-0.
                                       +0.i
                                               0.924 + 0.i
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                   +0.j],
         iter 83: subdiag=[-0.
2199
                                       +0.j 0.924+0.j
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                                   +0.j],
         iter 84: subdiag=[-0.
2200
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.i
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
         iter 85: subdiag=[-0.
2201
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2202
         iter 86: subdiag=[-0.
                                              0.924+0.j
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
         iter 87: subdiag=[-0.
2203
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2204
         iter 88: subdiag=[-0.
                                              0.924+0.j
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
         iter 89: subdiag=[-0.
2205
                                               0.924+0.j
                                                            0.
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                                   +0.j],
         iter 90: subdiag=[-0.
2206
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2207
         iter 91: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                              0.924+0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2208
         iter 92: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                               0.924 + 0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                               0.924+0.j
2209
         iter 93: subdiag=[-0.
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2210
         iter 94: subdiag=[-0.
                                              0.924+0.j
                                                                             \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                       +0.j
                                                            0.
                                                                   +0.j],
```

```
2211
        iter 95: subdiag=[-0.
                                   +0.j 0.924+0.j
                                                       0.
                                                             +0.j], ||\cdot||_2=9.238e-01
2212
        iter 96: subdiag=[-0.
                                   +0.j 0.924+0.j
                                                                      \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                       0.
                                                             +0.j],
2213
        iter 97: subdiag=[-0.
                                   +0.j 0.924+0.j
                                                       0.
                                                            +0.j], ||\cdot||_2=9.238e-01
2214
        iter 98: subdiag=[-0.
                                   +0.j
                                         0.924+0.j
                                                       0.
                                                            +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2215
        iter 99: subdiag=[-0.
                                    +0.j
                                          0.924+0.j
                                                       0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
2216
        after : subdiag=[-0.
                                  +0.j 0.924+0.j 0.
                                                                    \|\cdot\|_2 = 9.238e - 01
                                                           +0.j],
         iterations
                         = 100/100
2217
2218
         sub-diag magnitudes after last step:
                 0.924 0.
2219
         [0.
                              1
      └ converged?
2220
2221
2222 — Matrix 22/30 (size 4x4)
       fixed shift \mu = 0.833114 (|\mu|=0.8331)
2223
        before: subdiag=[-0.476+0.j \quad 0.996+0.j \quad 0.602+0.j],
2224
                                                                    \|\cdot\|_2=1.258e+00
        iter 00: subdiag=[-0.329+0.j -0.495+0.j -0.426+0.j],
2225
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.312e-01
2226
        iter 01: subdiag=[-0.318+0.j 0.123+0.j 0.413+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.355e - 01
2227
        iter 02: subdiag=[-0.318+0.j -0.029+0.j -0.412+0.j], \|\cdot\|_2=5.211e-01
        iter 03: subdiag=[-0.318+0.j 0.007+0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.203e - 01
2228
2229
        iter 04: subdiag=[-0.318+0.j -0.002+0.j -0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2230
        iter 05: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2231
        iter 06: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
2232
        iter 07: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2233
        iter 08: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.202e-01
2234
        iter 09: subdiag=[-0.318+0.j
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2235
        iter 10: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2236
        iter 11: subdiag=[-0.318+0.j
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2237
        iter 12: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                    \|\cdot\|_2=5.202e-01
2238
        iter 13: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2239
        iter 14: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=5.202e-01
        iter 15: subdiag=[-0.318+0.j 0.
2240
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2241
        iter 16: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2242
        iter 17: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2243
        iter 18: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.202e-01
2244
        iter 19: subdiag=[-0.318+0.i 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
        iter 20: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2245
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 21: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2246
                                                +0.j 0.412+0.j],
        iter 22: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2247
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                    \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
        iter 23: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2248
        iter 24: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2249
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2250
        iter 25: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.202e-01
2251
        iter 26: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 27: subdiag=[-0.318+0.j 0.
2252
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2253
        iter 28: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
2254
        iter 29: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=5.202e-01
                                                +0.j -0.412+0.j],
2255
        iter 30: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2256
        iter 31: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j \quad 0.412+0.j], \|\cdot\|_2=5.202e-01
```

```
2257
        iter 32: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j], ||\cdot||_2=5.202e-01
2258
        iter 33: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2259
        iter 34: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
        iter 35: subdiag=[-0.318+0.j
2260
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 36: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
2261
2262
        iter 37: subdiag=[-0.318+0.j]
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2263
        iter 38: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
2264
        iter 39: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
        iter 40: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2265
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2266
        iter 41: subdiag=[-0.318+0.j
                                                                       \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
                                                 +0.j 0.412+0.j],
2267
        iter 42: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
2268
        iter 43: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2269
        iter 44: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 45: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
2270
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
2271
        iter 46: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2272
        iter 47: subdiag=[-0.318+0.j]
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2273
        iter 48: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
        iter 49: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2274
2275
        iter 50: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 51: subdiag=[-0.318+0.j
2276
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 52: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2277
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
2278
        iter 53: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2279
        iter 54: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
2280
        iter 55: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2281
        iter 56: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2282
        iter 57: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 58: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2283
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
2284
        iter 59: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2285
        iter 60: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 61: subdiag=[-0.318+0.j
2286
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2287
        iter 62: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2288
        iter 63: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2289
        iter 64: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
2290
        iter 65: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
        iter 66: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
2291
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2292
        iter 67: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 68: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2293
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
        iter 69: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2294
        iter 70: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2295
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
2296
        iter 71: subdiag=[-0.318+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
                                                 +0.j 0.412+0.j],
        iter 72: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2297
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 73: subdiag=[-0.318+0.j 0.
2298
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2299
        iter 74: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.202e-01
2300
        iter 75: subdiag=[-0.318+0.j
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2301
        iter 76: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                 +0.j -0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2302
        iter 77: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                 +0.j 0.412+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
```

```
2303
        iter 78: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j], ||\cdot||_2=5.202e-01
2304
        iter 79: subdiag=[-0.318+0.j
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 80: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2305
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=5.202e-01
        iter 81: subdiag=[-0.318+0.j
2306
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 82: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                                     \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
2307
                                                +0.j -0.412+0.j],
2308
        iter 83: subdiag=[-0.318+0.j
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2309
        iter 84: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=5.202e-01
        iter 85: subdiag=[-0.318+0.j
2310
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=5.202e-01
        iter 86: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2311
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 87: subdiag=[-0.318+0.j
                                                                     \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
2312
                                                +0.j 0.412+0.j],
2313
        iter 88: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
                                                +0.j 0.412+0.j],
        iter 89: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2314
2315
        iter 90: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
        iter 91: subdiag=[-0.318+0.j
2316
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=5.202e-01
        iter 92: subdiag=[-0.318+0.j -0.
2317
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2318
        iter 93: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2319
        iter 94: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j], ||\cdot||_2=5.202e-01
        iter 95: subdiag=[-0.318+0.i 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2320
2321
        iter 96: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2322
        iter 97: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2323
        iter 98: subdiag=[-0.318+0.j -0.
                                                +0.j -0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2324
        iter 99: subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                                +0.j 0.412+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 5.202e - 01
2325
        after : subdiag=[-0.318+0.j 0.
                                               +0.j \quad 0.412+0.j], ||\cdot||_2=5.202e-01
2326
         iterations
                         = 100/100
         sub-diag magnitudes after last step:
2327
2328
         [0.318 0.
                        0.4121
2329
      └ converged?
                         = no
2330
2331 — Matrix 23/30 (size 4x4)
         fixed shift \mu = 0.475111 - 0.570494j (|\mu| = 0.7424)
2332
2333
        before: subdiag=[0.907+0.j \ 0.834+0.j \ 0.79 \ +0.j], \|\cdot\|_2=1.464e+00
2334
        iter 00: subdiag=[ 0.727-0.j -0.911-0.j 0.447+0.j], ||\cdot||_2=1.248e+00
2335
        iter 01: subdiag=[ 0.484-0.j -0.857-0.j -0.193-0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.003e+00
2336
        iter 02: subdiag=[-0.345+0.j 0.585+0.j 0.093+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=6.857e-01
        iter 03: subdiag=[ 0.253-0.j -0.345-0.j -0.048+0.j],
2337
                                                                     \|\cdot\|_2 = 4.310e - 01
2338
        iter 04: subdiag=[-0.185+0.j 0.195+0.j 0.026-0.j],
                                                                     \|\cdot\|_{2}=2.705e-01
        iter 05: subdiag=[ 0.135-0.j -0.109-0.j -0.014-0.j],
2339
                                                                    \|\cdot\|_{2}=1.741e-01
        iter 06: subdiag=[-0.097+0.j 0.061+0.j 0.007+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.152e-01
2340
2341
        iter 07: subdiag=[ 0.07 -0.j -0.034-0.j -0.004-0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 7.812e - 02
2342
        iter 08: subdiag=[-0.05 +0.j 0.019+0.j 0.002-0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=5.393e-02
2343
        iter 09: subdiag=[ 0.036-0.j -0.011-0.j -0.001+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 3.772e - 02
        iter 10: subdiag=[-0.026+0.j 0.006+0.j 0.001+0.j],
2344
                                                                     \|\cdot\|_2 = 2.661e - 02
2345
        iter 11: subdiag=[ 0.019-0.j -0.003-0.j -0.
                                                            -0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.888e-02
2346
        iter 12: subdiag=[-0.013+0.j
                                         0.002+0.j 0.
                                                            +0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2=1.345e-02
2347
        iter 13: subdiag=[ 0.01 -0.j -0.001-0.j -0.
                                                            -0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 9.598e - 03
2348
        iter 14: subdiag=[-0.007+0.j 0.001+0.j 0.
                                                                     \|\cdot\|_2 = 6.862e - 03
                                                            +0.j],
```

```
2349
         iter 15: subdiag=[ 0.005-0.j -0.
                                                  -0.j -0.
                                                               -0.j], ||\cdot||_2 = 4.910e - 03
2350
         iter 16: subdiag=[-0.004+0.j 0.
                                                  +0.j 0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 3.515e - 03
                                                               +0.j],
         iter 17: subdiag=[ 0.003-0.j -0.
2351
                                                  -0.j -0.
                                                               -0.j], ||\cdot||_2=2.517e-03
         iter 18: subdiag=[-0.002+0.j 0.
2352
                                                  +0.j 0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 1.803e - 03
         iter 19: subdiag=[ 0.001-0.j -0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 1.292e - 03
2353
                                                  -0.j -0.
                                                               -0.j],
2354
         iter 20: subdiag=[-0.001+0.j 0.
                                                               +0.j], ||\cdot||_2=9.255e-04
                                                  +0.j 0.
2355
         iter 21: subdiag=[ 0.001-0.j -0.
                                                               -0.j], \|\cdot\|_2 = 6.631e - 04
                                                  -0.j -0.
         iter 22: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j
2356
                                                  0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.752e - 04
         iter 23: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
2357
                                                              \|\cdot\|_2 = 3.405e - 04
2358
         iter 24: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_{2}=2.440e-04
2359
         iter 25: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_2=1.748e-04
         iter 26: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.253e - 04
2360
2361
         iter 27: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 8.975e - 05
         iter 28: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
2362
                                                              \|\cdot\|_2 = 6.431e - 05
2363
         iter 29: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.608e - 05
2364
         iter 30: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_{2}=3.302e-05
2365
         iter 31: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=2.366e-05
         iter 32: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.695e - 05
2366
2367
         iter 33: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.215e - 05
2368
         iter 34: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 8.705e - 06
         iter 35: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
2369
                                                            \|\cdot\|_{2}=6.238e-06
2370
         iter 36: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 4.470e - 06
2371
         iter 37: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=3.203e-06
2372
         iter 38: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_{2}=2.295e-06
2373
         iter 39: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.645e - 06
2374
         iter 40: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.178e - 06
2375
         iter 41: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 8.444e - 07
2376
         iter 42: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 6.050e - 07
2377
         iter 43: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=4.335e-07
         iter 44: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
2378
                                                             \|\cdot\|_2 = 3.107e - 07
2379
         iter 45: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_{2}=2.226e-07
2380
         iter 46: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2=1.595e-07
2381
         iter 47: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.143e - 07
2382
         iter 48: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 8.190e - 08
         iter 49: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
2383
                                                              \|\cdot\|_2 = 5.868e - 08
2384
         iter 50: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 4.205e - 08
2385
         iter 51: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 3.013e - 08
         iter 52: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 2.159e - 08
2386
2387
         iter 53: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.547e - 08
         iter 54: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
2388
                                                              \|\cdot\|_2 = 1.109e - 08
2389
         iter 55: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 7.944e - 09
         iter 56: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
2390
                                                              \|\cdot\|_2 = 5.692e - 09
2391
         iter 57: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=4.079e-09
2392
         iter 58: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_{2}=2.923e-09
         iter 59: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                              \|\cdot\|_2 = 2.094e - 09
2393
2394
         iter 60: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.501e-09
```

```
2395
        iter 61: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.075e-09
2396
        iter 62: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j 0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 7.705e - 10
2397
        iter 63: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=5.521e-10
2398
        iter 64: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 3.956e - 10
        iter 65: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_{2}=2.835e-10
2399
2400
        iter 66: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j], \|\cdot\|_2=2.031e-10
2401
        iter 67: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j],
                                                          \|\cdot\|_2 = 1.455e - 10
        iter 68: subdiag=[-0.+0.j \quad 0.+0.j \quad 0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.043e-10
2402
        iter 69: subdiag=[ 0.-0.j -0.-0.j -0.+0.j], \|\cdot\|_2=7.473e-11
2403
2404
        after : subdiag=[0.-0.j-0.-0.j-0.+0.j],
                                                          \|\cdot\|_{2}=7.473e-11
2405
          iterations
                         = 70/100
2406
         sub-diag magnitudes after last step:
2407
          [0. \ 0. \ 0.]
2408
      └ converged?
                         = yes
2409
2410
      ─ Matrix 24/30 (size 4x4)
          fixed shift \mu = 0.921576 - 0.227859j (|\mu| = 0.9493)
2411
        before: subdiag=[-0.916+0.j 0.433+0.j -0.245+0.j], ||\cdot||_2=1.042e+00
2412
        iter 00: subdiag=[-0.888+0.j -0.146-0.j -0.052-0.j], \|\cdot\|_2=9.016e-01
2413
2414
        iter 01: subdiag=[-0.756-0.j 0.066+0.j -0.006-0.j], \|\cdot\|_2=7.589e-01
        iter 02: subdiag=[-0.595+0.j -0.031-0.j -0.001+0.j], ||\cdot||_2=5.955e-01
2415
        iter 03: subdiag=[-0.446-0.j 0.015+0.j -0.
2416
                                                             +0.j], ||\cdot||_2=4.459e-01
2417
        iter 04: subdiag=[-0.325-0.j -0.007-0.j -0.
                                                             +0.j], ||\cdot||_2=3.251e-01
2418
        iter 05: subdiag=[-0.234-0.j 0.003+0.j -0.
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=2.336e-01
2419
        iter 06: subdiag=[-0.167-0.j -0.002-0.j -0.
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.666e-01
2420
        iter 07: subdiag=[-0.118-0.j 0.001+0.j -0.
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.184e-01
        iter 08: subdiag=[-0.084-0.j -0.
2421
                                                -0.j -0.
                                                             -0.j], ||\cdot||_2 = 8.395e - 02
2422
        iter 09: subdiag=[-0.059-0.j 0.
                                                +0.j -0.
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.947e - 02
2423
        iter 10: subdiag=[-0.042-0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 4.211e - 02
                                                -0.j -0.
                                                             -0.j],
        iter 11: subdiag=[-0.03-0.j 0. +0.j -0. +0.j], \|\cdot\|_2=2.981e-02
2424
2425
        iter 12: subdiag=[-0.021-0.j -0.
                                                             -0.j], ||\cdot||_2 = 2.110e - 02
                                                -0.j -0.
                                                +0.j -0.
                                                             +0.j],
2426
        iter 13: subdiag=[-0.015+0.j 0.
                                                                      \|\cdot\|_2=1.493e-02
2427
        iter 14: subdiag=[-0.011-0.j -0.
                                                             +0.j], ||\cdot||_2=1.057e-02
                                                -0.j -0.
2428
        iter 15: subdiag=[-0.007-0.j 0.
                                                                      \|\cdot\|_{2}=7.480e-03
                                                +0.j -0.
                                                             -0.j],
2429
        iter 16: subdiag=[-0.005-0.j -0.
                                                             -0.j],
                                                -0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 5.294e - 03
        iter 17: subdiag=[-0.004-0.j 0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.747e - 03
2430
                                                +0.j -0.
                                                             -0.j],
        iter 18: subdiag=[-0.003-0.j -0.
2431
                                                -0.j -0.
                                                             -0.j], ||\cdot||_2 = 2.652e - 03
        iter 19: subdiag=[-0.002-0.j 0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.877e - 03
2432
                                                +0.j -0.
                                                             -0.j],
        iter 20: subdiag=[-0.001-0.j -0.
2433
                                                -0.j -0.
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.328e - 03
2434
        iter 21: subdiag=[-0.001+0.j 0.
                                                             -0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 9.400e - 04
                                                +0.j -0.
2435
        iter 22: subdiag=[-0.001+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.652e - 04
                                                -0.j -0.
                                                             -0.j],
        iter 23: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 4.708e - 04
2436
2437
        iter 24: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 3.332e - 04
2438
        iter 25: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 2.358e - 04
2439
        iter 26: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.669e - 04
2440
        iter 27: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.181e-04
```

```
2441
        iter 28: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2 = 8.359e - 05
2442
        iter 29: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 5.916e - 05
2443
        iter 30: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j], ||\cdot||_2=4.187e-05
2444
        iter 31: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_{2}=2.963e-05
2445
        iter 32: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_{2}=2.097e-05
2446
        iter 33: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_{2}=1.484e-05
2447
        iter 34: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 1.050e - 05
        iter 35: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
2448
                                                            \|\cdot\|_2 = 7.434e - 06
        iter 36: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=5.261e-06
2449
        iter 37: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
2450
                                                            \|\cdot\|_{2}=3.724e-06
2451
        iter 38: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 2.635e - 06
        iter 39: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.865e - 06
2452
2453
        iter 40: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.320e - 06
        iter 41: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
2454
                                                            \|\cdot\|_2 = 9.342e - 07
2455
        iter 42: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 6.611e - 07
2456
        iter 43: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 4.679e - 07
2457
        iter 44: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=3.311e-07
        iter 45: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 2.344e - 07
2458
2459
        iter 46: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.659e - 07
2460
        iter 47: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.174e - 07
2461
        iter 48: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 8.308e - 08
2462
        iter 49: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 5.880e - 08
2463
        iter 50: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=4.161e-08
2464
        iter 51: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_{2}=2.945e-08
        iter 52: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j],
2465
                                                            \|\cdot\|_2 = 2.084e - 08
2466
        iter 53: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.475e - 08
2467
        iter 54: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 1.044e - 08
        iter 55: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
2468
                                                            \|\cdot\|_2 = 7.388e - 09
2469
        iter 56: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j], ||\cdot||_2=5.229e-09
        iter 57: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
2470
                                                            \|\cdot\|_{2}=3.701e-09
2471
        iter 58: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 2.619e - 09
2472
        iter 59: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.854e - 09
2473
        iter 60: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2=1.312e-09
2474
        iter 61: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 9.284e - 10
        iter 62: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
2475
                                                            \|\cdot\|_2 = 6.570e - 10
2476
        iter 63: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 4.650e - 10
2477
        iter 64: subdiag=[-0.-0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 3.291e - 10
        iter 65: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 2.329e - 10
2478
2479
        iter 66: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.648e - 10
        iter 67: subdiag=[-0.+0.j 0.+0.j -0.-0.j],
2480
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.167e - 10
2481
        iter 68: subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 8.256e - 11
2482
        after : subdiag=[-0.+0.j -0.-0.j -0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_{2}=8.256e-11
2483
          iterations
                          = 69/100
2484
          sub-diag magnitudes after last step:
          [0. \ 0. \ 0.]
2485
2486 └ converged?
                          = yes
```

```
2487
2488
      ─ Matrix 25/30 (size 4x4)
2489
          fixed shift \mu = -0.65739 - 0.393338j (|\mu| = 0.7661)
        before: subdiag=[0.282+0.j 0.81 +0.j -0.56 +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=1.024e+00
2490
        iter 00: subdiag=[-0.423+0.j 0.699+0.j 0.406+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.128e - 01
2491
2492
        iter 01: subdiag=[ 0.525-0.j
                                           0.476+0.j -0.313+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=7.751e-01
2493
        iter 02: subdiag=[ 0.389-0.j -0.366-0.j 0.245+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.879e-01
        iter 03: subdiag=[-0.207-0.j 0.318+0.j -0.189+0.j],
2494
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.242e - 01
        iter 04: subdiag=[ 0.1 -0.j -0.287-0.j 0.143+0.j],
2495
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.359e - 01
2496
        iter 05: subdiag=[-0.047+0.j 0.259+0.j -0.108-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.846e - 01
2497
        iter 06: subdiag=[ 0.022+0.j -0.233-0.j 0.081+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.481e - 01
2498
        iter 07: subdiag=[-0.011-0.j 0.21 +0.j -0.061-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.187e - 01
2499
        iter 08: subdiag=[ 0.005-0.j -0.188+0.j 0.045+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.937e - 01
        iter 09: subdiag=[-0.002-0.j 0.169+0.j -0.034-0.j],
2500
                                                                       \|\cdot\|_2=1.721e-01
2501
        iter 10: subdiag=[ 0.001+0.j -0.151-0.j 0.025+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.531e-01
2502
        iter 11: subdiag=[-0.001-0.j 0.135-0.j -0.019+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.363e - 01
2503
        iter 12: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.121-0.j 0.014+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.215e-01
        iter 13: subdiag=[-0.
                                    +0.j 0.108+0.j -0.011+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.083e - 01
2504
                                                                       ||\cdot||_2 = 9.653e - 02
2505
        iter 14: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.096+0.j 0.008+0.j],
        iter 15: subdiag=[-0.
                                           0.086+0.j -0.006-0.j],
2506
                                                                       \|\cdot\|_2 = 8.606e - 02
                                    -0.j
        iter 16: subdiag=[ 0.
2507
                                    +0.j -0.077-0.j 0.004+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=7.673e-02
2508
        iter 17: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.068+0.j -0.003-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.842e - 02
2509
        iter 18: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.061-0.j 0.003+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.100e - 02
2510
        iter 19: subdiag=[-0.
                                    +0.j
                                          0.054+0.j - 0.002+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.438e - 02
2511
        iter 20: subdiag=[ 0.
                                    -0.j -0.048-0.j 0.001+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.848e - 02
2512
        iter 21: subdiag=[-0.
                                           0.043-0.j -0.001+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.322e - 02
2513
        iter 22: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.039-0.j 0.001+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.853e - 02
2514
        iter 23: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.034+0.j -0.001+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=3.434e-02
2515
        iter 24: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.031-0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.061e - 02
                                                              +0.j],
        iter 25: subdiag=[-0.
                                          0.027+0.j -0.
2516
                                    -0.j
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.729e - 02
2517
        iter 26: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.024-0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=2.432e-02
                                                              +0.j],
2518
        iter 27: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.022+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.168e - 02
                                                              +0.j],
2519
        iter 28: subdiag=[ 0.
                                    -0.j -0.019-0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.932e - 02
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.722e-02
2520
        iter 29: subdiag=[-0.
                                    +0.j 0.017-0.j -0.
                                                              +0.j],
        iter 30: subdiag=[ 0.
2521
                                    -0.j -0.015-0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.535e - 02
                                                              -0.j],
2522
        iter 31: subdiag=[-0.
                                    +0.j 0.014+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2=1.368e-02
                                                              +0.j],
        iter 32: subdiag=[ 0.
2523
                                    +0.j -0.012-0.j 0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.220e-02
        iter 33: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.011+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.087e - 02
2524
                                                              +0.j],
2525
        iter 34: subdiag=[ 0.
                                   +0.j -0.01-0.j 0. +0.j], ||\cdot||_2=9.688e-03
        iter 35: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.009+0.j -0.
2526
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 8.635e - 03
2527
        iter 36: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.008-0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 7.696e - 03
                                                              +0.j],
        iter 37: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.007+0.j -0.
2528
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.860e - 03
2529
        iter 38: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.006-0.j 0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.114e-03
2530
        iter 39: subdiag=[-0.
                                    -0.j
                                          0.005+0.j -0.
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=5.449e-03
                                    +0.j -0.005-0.j 0.
        iter 40: subdiag=[ 0.
2531
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.857e - 03
2532
        iter 41: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.004+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.329e - 03
                                                              +0.j],
```

```
2533
         iter 42: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.004+0.j 0.
                                                              -0.j], ||\cdot||_2 = 3.858e - 03
2534
         iter 43: subdiag=[-0.
                                     -0.j 0.003-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=3.439e-03
                                                              +0.j],
         iter 44: subdiag=[ 0.
2535
                                    +0.j -0.003+0.j 0.
                                                              -0.j], ||\cdot||_2 = 3.065e - 03
2536
         iter 45: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.003+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.731e - 03
         iter 46: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.002-0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=2.434e-03
2537
                                                              -0.j],
2538
         iter 47: subdiag=[-0.
                                     -0.j 0.002+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.170e - 03
                                                              +0.j],
2539
         iter 48: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.002-0.j 0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 1.934e - 03
                                                              -0.j],
2540
         iter 49: subdiag=[-0.
                                     -0.j 0.002+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.724e-03
         iter 50: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.002-0.j 0.
2541
                                                              -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.536e - 03
2542
         iter 51: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.001+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.369e-03
                                                              +0.j],
2543
         iter 52: subdiag=[ 0.
                                     +0.j -0.001-0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.220e-03
                                                              -0.j],
2544
         iter 53: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.001-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.088e - 03
                                                              +0.j],
2545
         iter 54: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.001-0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.694e - 04
                                                              -0.j],
         iter 55: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.001+0.j -0.
2546
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 8.640e - 04
         iter 56: subdiag=[ 0.
2547
                                    +0.j -0.001-0.j 0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 7.701e - 04
                                                              -0.j],
2548
         iter 57: subdiag=[-0.
                                     -0.j 0.001+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.863e - 04
2549
         iter 58: subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.001-0.j 0.
                                                              -0.j], ||\cdot||_2=6.117e-04
         iter 59: subdiag=[-0.
                                    -0.j 0.001+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.452e - 04
2550
                                                              +0.j],
         iter 60: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 4.859e - 04
2551
2552
         iter 61: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 4.331e - 04
         iter 62: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
2553
                                                             \|\cdot\|_2 = 3.860e - 04
2554
         iter 63: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 3.440e - 04
2555
         iter 64: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j], \|\cdot\|_2=3.066e-04
2556
         iter 65: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 2.733e - 04
2557
         iter 66: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 2.436e - 04
2558
         iter 67: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 2.171e - 04
2559
         iter 68: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.935e - 04
         iter 69: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
2560
                                                             \|\cdot\|_2 = 1.725e - 04
2561
         iter 70: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j \ 0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.537e-04
         iter 71: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
2562
                                                             \|\cdot\|_2 = 1.370e - 04
         iter 72: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 1.221e - 04
2563
2564
         iter 73: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 1.088e - 04
2565
         iter 74: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 9.699e - 05
2566
         iter 75: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 8.644e - 05
         iter 76: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 7.704e - 05
2567
2568
         iter 77: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 6.867e - 05
2569
         iter 78: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 6.120e - 05
         iter 79: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 5.455e - 05
2570
2571
         iter 80: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 4.862e - 05
         iter 81: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.+0.j],
2572
                                                             \|\cdot\|_2 = 4.333e - 05
2573
         iter 82: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.-0.j],
                                                             \|\cdot\|_2 = 3.862e - 05
         iter 83: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.+0.j],
2574
                                                             \|\cdot\|_2 = 3.442e - 05
2575
         iter 84: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j \ 0.-0.j], \|\cdot\|_2=3.068e-05
2576
         iter 85: subdiag=[-0.-0.j \ 0.+0.j \ -0.+0.j],
                                                             \|\cdot\|_{2}=2.734e-05
         iter 86: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j],
2577
                                                             \|\cdot\|_2 = 2.437e - 05
2578
         iter 87: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.-0.j], \|\cdot\|_2=2.172e-05
```

```
2579
        iter 88: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.+0.j], \|\cdot\|_2=1.936e-05
2580
        iter 89: subdiag=[-0.-0.j \ 0.+0.j \ -0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_{2}=1.725e-05
        iter 90: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=1.538e-05
2581
2582
        iter 91: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.371e - 05
        iter 92: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_{2}=1.222e-05
2583
2584
        iter 93: subdiag=[-0.-0.j 0.+0.j -0.+0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 1.089e - 05
2585
        iter 94: subdiag=[ 0.+0.j -0.-0.j 0.-0.j],
                                                           \|\cdot\|_2 = 9.704e - 06
        iter 95: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j -0.+0.j],
2586
                                                            \|\cdot\|_2 = 8.649e - 06
        iter 96: subdiag=[ 0.+0.j -0.+0.j 0.-0.j], \|\cdot\|_2=7.708e-06
2587
        iter 97: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j -0.+0.j],
2588
                                                            \|\cdot\|_2 = 6.870e - 06
2589
        iter 98: subdiag=[ 0.+0.j -0.+0.j 0.-0.j],
                                                            \|\cdot\|_2 = 6.123e - 06
        iter 99: subdiag=[-0.-0.j 0.-0.j -0.+0.j],
2590
                                                            \|\cdot\|_2 = 5.458e - 06
2591
        after: subdiag=[-0.-0.j \ 0.-0.j \ -0.+0.j], ||\cdot||_2=5.458e-06
         iterations
                          = 100/100
2592
2593
          sub-diag magnitudes after last step:
2594
          [0. \ 0. \ 0.]
2595
      └ converged?
                          = no
2596
      ─ Matrix 26/30 (size 4x4)
2597
2598
          fixed shift \mu = 0.755595 (|\mu|=0.7556)
        before: subdiag=[-0.994+0.j -0.988+0.j -0.76 +0.j],
2599
                                                                     \|\cdot\|_2 = 1.594e + 00
2600
        iter 00: subdiag=[-0.882+0.j -0.998+0.j -0.19 +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.345e+00
2601
        iter 01: subdiag=[-0.701+0.j -0.997+0.j -0.039+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.219e+00
2602
        iter 02: subdiag=[-0.503+0.j -0.988+0.j -0.008+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.109e+00
2603
        iter 03: subdiag=[-0.338+0.j -0.982+0.j -0.002+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.039e+00
2604
        iter 04: subdiag=[-0.221+0.j -0.98 +0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.004e+00
2605
        iter 05: subdiag=[-0.142+0.j -0.978+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 9.887e - 01
                                                              +0.j],
2606
        iter 06: subdiag=[-0.091+0.j -0.978+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.821e - 01
2607
        iter 07: subdiag=[-0.058+0.j -0.978+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.794e - 01
                                                              +0.j],
        iter 08: subdiag=[-0.037+0.j -0.978+0.j -0.
2608
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.783e - 01
2609
        iter 09: subdiag=[-0.024+0.j -0.978+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.779e - 01
                                                              +0.j],
2610
        iter 10: subdiag=[-0.015+0.j -0.978+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.777e - 01
                                                              +0.j],
2611
        iter 11: subdiag=[-0.01 +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.776e - 01
                                                              +0.j],
2612
        iter 12: subdiag=[-0.006+0.j -0.978+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.776e - 01
                                                              +0.j],
        iter 13: subdiag=[-0.004+0.j -0.978+0.j -0.
                                                              +0.j],
2613
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.776e - 01
2614
        iter 14: subdiag=[-0.002+0.j -0.978+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.776e - 01
                                                              +0.j],
        iter 15: subdiag=[-0.002+0.j -0.978+0.j -0.
2615
                                                              +0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
        iter 16: subdiag=[-0.001+0.j -0.978+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2616
                                                              +0.j],
2617
        iter 17: subdiag=[-0.001+0.j -0.978+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
        iter 18: subdiag=[-0.
                                    +0.j -0.978+0.j -0.
2618
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2619
        iter 19: subdiag=[-0.
                                    +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                              +0.j],
        iter 20: subdiag=[-0.
2620
                                    +0.j -0.978+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2621
        iter 21: subdiag=[-0.
                                    +0.j -0.978+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2622
        iter 22: subdiag=[-0.
                                    +0.j -0.978+0.j -0.
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
        iter 23: subdiag=[-0.
                                    +0.j -0.978+0.j -0.
2623
                                                              +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2624
        iter 24: subdiag=[-0.
                                    +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                              +0.j],
```

```
2625
         iter 25: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2626
         iter 26: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 27: subdiag=[-0.
2627
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 28: subdiag=[-0.
2628
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 29: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_{2}=9.775e-01
2629
                                                                 +0.j],
         iter 30: subdiag=[-0.
2630
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
2631
         iter 31: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 32: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
2632
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 33: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
2633
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 34: subdiag=[-0.
2634
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_{2}=9.775e-01
                                                                 +0.j],
2635
         iter 35: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 36: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2636
                                                                 +0.j],
         iter 37: subdiag=[-0.
2637
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 38: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
2638
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 39: subdiag=[-0.
2639
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
2640
         iter 40: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2641
         iter 41: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 42: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2642
                                                                 +0.j],
2643
         iter 43: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 44: subdiag=[-0.
2644
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 45: subdiag=[-0.
2645
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2646
         iter 46: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2647
         iter 47: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2648
         iter 48: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2649
         iter 49: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2650
         iter 50: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2651
         iter 51: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2652
         iter 52: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2653
         iter 53: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 54: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
2654
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 55: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2655
                                                                 +0.j],
2656
         iter 56: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2657
         iter 57: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
2658
         iter 58: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
         iter 59: subdiag=[-0.
2659
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 60: subdiag=[-0.
2660
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 61: subdiag=[-0.
2661
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 62: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2662
                                                                 +0.j],
         iter 63: subdiag=[-0.
2663
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2664
         iter 64: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
2665
         iter 65: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 66: subdiag=[-0.
2666
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2667
         iter 67: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2668
         iter 68: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 69: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2669
                                                                 +0.j],
2670
         iter 70: subdiag=[-0.
                                      +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                                 +0.j],
```

```
2671
         iter 71: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=9.775e-01
2672
         iter 72: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                               +0.j],
         iter 73: subdiag=[-0.
2673
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 74: subdiag=[-0.
2674
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 75: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_{2}=9.775e-01
2675
                                                               +0.j],
2676
         iter 76: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                               +0.j],
2677
         iter 77: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                               +0.j],
         iter 78: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
2678
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 79: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
2679
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 80: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_{2}=9.775e-01
2680
                                                               +0.j],
2681
         iter 81: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2682
         iter 82: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                               +0.j],
2683
         iter 83: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                               +0.j],
         iter 84: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
2684
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 85: subdiag=[-0.
2685
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                               +0.j],
2686
         iter 86: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2687
         iter 87: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         iter 88: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2688
                                                               +0.j],
2689
         iter 89: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                               +0.j],
         iter 90: subdiag=[-0.
2690
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
                                                               +0.j],
         iter 91: subdiag=[-0.
2691
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2692
         iter 92: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2693
         iter 93: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2694
         iter 94: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2695
         iter 95: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2696
         iter 96: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2697
         iter 97: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2698
         iter 98: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2699
         iter 99: subdiag=[-0.
                                     +0.j -0.978+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
         after : subdiag=[-0.
                                    +0.j -0.978+0.j -0.
2700
                                                              +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.775e - 01
2701
          iterations
                          = 100/100
2702
          sub-diag magnitudes after last step:
          [0.
                  0.978 0.
2703
2704
      └ converged?
                          = no
2705
2706
      ─ Matrix 27/30 (size 4x4)
         fixed shift \mu = -0.995116 (|\mu| = 0.9951)
2707
         before: subdiag=[-0.999+0.j 0.99 +0.j -0.085+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.409e+00
2708
2709
         iter 00: subdiag=[-0.804+0.j 0.902+0.j -0.
                                                               +0.j], ||\cdot||_2=1.208e+00
                                           0.855+0.j -0.
         iter 01: subdiag=[-0.466+0.j
                                                                         \|\cdot\|_2 = 9.735e - 01
2710
                                                               +0.j],
         iter 02: subdiag=[-0.234+0.j
2711
                                                                         \|\cdot\|_2 = 8.733e - 01
                                            0.841+0.j -0.
                                                               +0.j],
         iter 03: subdiag=[-0.113+0.j
2712
                                            0.838+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 8.458e - 01
2713
         iter 04: subdiag=[-0.054+0.j
                                           0.838+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 8.392e - 01
2714
         iter 05: subdiag=[-0.026+0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                               +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_2 = 8.377e - 01
         iter 06: subdiag=[-0.012+0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 8.374e - 01
2715
                                                               +0.j],
2716
         iter 07: subdiag=[-0.006+0.j 0.837+0.j -0.
                                                                         \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                               +0.j],
```

```
2717
         iter 08: subdiag=[-0.003+0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                +0.j], ||\cdot||_2=8.373e-01
2718
         iter 09: subdiag=[-0.001+0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                +0.j],
         iter 10: subdiag=[-0.001+0.j
2719
                                           0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 11: subdiag=[-0.
2720
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 12: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_{2}=8.373e-01
2721
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
2722
         iter 13: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                +0.j],
2723
         iter 14: subdiag=[-0.
                                            0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                +0.j],
         iter 15: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2724
                                      +0.j
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j 0.837+0.j -0.
         iter 16: subdiag=[-0.
2725
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 17: subdiag=[-0.
                                            0.837+0.j -0.
2726
                                      +0.j
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2727
         iter 18: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 19: subdiag=[-0.
                                            0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2728
                                      +0.j
                                                                +0.j],
2729
         iter 20: subdiag=[-0.
                                            0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.i
                                                                +0.j],
         iter 21: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2730
                                      +0.j
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 22: subdiag=[-0.
2731
                                      +0.j 0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                +0.j],
2732
         iter 23: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2733
         iter 24: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 25: subdiag=[-0.
                                            0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2734
                                      +0.j
                                                                +0.j],
         iter 26: subdiag=[-0.
                                      +0.j 0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2735
                                                                +0.j],
         iter 27: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2736
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                +0.j],
         iter 28: subdiag=[-0.
2737
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2738
         iter 29: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 30: subdiag=[-0.
2739
                                      +0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2740
         iter 31: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                            0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2741
         iter 32: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2742
         iter 33: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2743
         iter 34: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2744
         iter 35: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2745
         iter 36: subdiag=[-0.
                                      +0.j 0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                +0.j],
         iter 37: subdiag=[-0.
                                            0.837+0.j -0.
2746
                                      +0.j
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 38: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2747
                                                                +0.j],
2748
         iter 39: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                +0.j],
2749
         iter 40: subdiag=[-0.
                                            0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                +0.j],
2750
         iter 41: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                +0.j],
         iter 42: subdiag=[-0.
                                      +0.j 0.837+0.j -0.
2751
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                +0.j],
         iter 43: subdiag=[-0.
                                            0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2752
                                      +0.i
                                                                +0.j],
         iter 44: subdiag=[-0.
2753
                                      +0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 45: subdiag=[-0.
                                            0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2754
                                      +0.j
                                                                +0.j],
2755
         iter 46: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                            0.837+0.j -0.
         iter 47: subdiag=[-0.
2756
                                      +0.j
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 48: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2757
                                      +0.j
                                                                +0.j],
                                            0.837+0.j -0.
         iter 49: subdiag=[-0.
2758
                                      +0.j
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2759
         iter 50: subdiag=[-0.
                                      +0.j 0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2760
         iter 51: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                            0.837+0.j -0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 52: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2761
                                      +0.j
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2762
         iter 53: subdiag=[-0.
                                      +0.j 0.837+0.j -0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                +0.j],
```

```
2763
         iter 54: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2764
         iter 55: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 56: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2765
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 57: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2766
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 58: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_{2}=8.373e-01
2767
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
2768
         iter 59: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                 +0.j],
2769
         iter 60: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 61: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2770
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 62: subdiag=[-0.
                                      +0.j 0.837+0.j -0.
2771
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 63: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_{2}=8.373e-01
2772
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
2773
         iter 64: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2774
         iter 65: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
2775
         iter 66: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.i
                                                                 +0.j],
         iter 67: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2776
                                      +0.i
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 68: subdiag=[-0.
2777
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 69: subdiag=[-0.
2778
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2779
         iter 70: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 71: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2780
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
2781
         iter 72: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 73: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2782
                                      +0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 74: subdiag=[-0.
2783
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2784
         iter 75: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                             0.837+0.j -0.
2785
         iter 76: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2786
         iter 77: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2787
         iter 78: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2788
         iter 79: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 80: subdiag=[-0.
2789
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2790
         iter 81: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2791
         iter 82: subdiag=[-0.
                                      +0.j 0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 83: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2792
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 84: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2793
                                                                 +0.j],
         iter 85: subdiag=[-0.
2794
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                 +0.j],
2795
         iter 86: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
2796
         iter 87: subdiag=[-0.
                                      +0.i
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                 +0.j],
2797
         iter 88: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                      +0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 89: subdiag=[-0.
2798
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.i
                                                                 +0.j],
         iter 90: subdiag=[-0.
2799
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
         iter 91: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2800
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 92: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
2801
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2802
         iter 93: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
         iter 94: subdiag=[-0.
2803
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                             0.837+0.j -0.
         iter 95: subdiag=[-0.
2804
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2805
         iter 96: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2806
         iter 97: subdiag=[-0.
                                      +0.j
                                             0.837+0.j -0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
2807
         iter 98: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
2808
         iter 99: subdiag=[-0.
                                             0.837+0.j -0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 8.373e - 01
                                      +0.j
                                                                 +0.j],
```

```
2809
        after : subdiag=[-0.
                                  +0.j 0.837+0.j -0.
                                                           +0.j], ||\cdot||_2=8.373e-01
2810
          iterations
                          = 100/100
2811
          sub-diag magnitudes after last step:
2812
          [0.
                  0.837 0.
2813

    □ converged?

                          = no
2814
2815 — Matrix 28/30 (size 4x4)
         fixed shift \mu = -0.976473 (|\mu| = 0.9765)
2816
        before: subdiag=[-0.799+0.j 0.936+0.j 0.149+0.j],
2817
                                                                     \|\cdot\|_{2}=1.239e+00
        iter 00: subdiag=[-0.683+0.j -0.093+0.j -0.118+0.j],
2818
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.991e - 01
2819
        iter 01: subdiag=[-0.682+0.j 0.006+0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.923e-01
2820
        iter 02: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2821
        iter 03: subdiag=[-0.682+0.j 0.
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 04: subdiag=[-0.682+0.j -0.
2822
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2823
        iter 05: subdiag=[-0.682+0.j
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2824
        iter 06: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2825
        iter 07: subdiag=[-0.682+0.j
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.922e-01
        iter 08: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2826
2827
        iter 09: subdiag=[-0.682+0.j 0.
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 10: subdiag=[-0.682+0.j -0.
2828
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.922e-01
        iter 11: subdiag=[-0.682+0.j
2829
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2830
        iter 12: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.922e-01
        iter 13: subdiag=[-0.682+0.j
2831
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2832
        iter 14: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2833
        iter 15: subdiag=[-0.682+0.j
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.922e-01
2834
        iter 16: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2835
        iter 17: subdiag=[-0.682+0.j
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.922e-01
2836
        iter 18: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2837
        iter 19: subdiag=[-0.682+0.j
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 20: subdiag=[-0.682+0.j -0.
2838
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2839
        iter 21: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2840
        iter 22: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2841
        iter 23: subdiag=[-0.682+0.j 0.
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2=6.922e-01
2842
        iter 24: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 25: subdiag=[-0.682+0.j
2843
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2844
        iter 26: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
                                                +0.j -0.118+0.j],
        iter 27: subdiag=[-0.682+0.j
2845
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 28: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2846
        iter 29: subdiag=[-0.682+0.j
2847
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2848
        iter 30: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2849
        iter 31: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
        iter 32: subdiag=[-0.682+0.j -0.
2850
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2851
        iter 33: subdiag=[-0.682+0.j 0.
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2852
        iter 34: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2853
        iter 35: subdiag=[-0.682+0.j 0.
                                                +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2854
        iter 36: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                +0.j -0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
```

```
2855
        iter 37: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j
                                                       0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2856
        iter 38: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
        iter 39: subdiag=[-0.682+0.j
2857
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2858
        iter 40: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 41: subdiag=[-0.682+0.j
                                                        0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2859
                                                 +0.j
2860
        iter 42: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2861
        iter 43: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
        iter 44: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
2862
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 45: subdiag=[-0.682+0.j
2863
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2864
        iter 46: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
                                                 +0.j -0.118+0.j],
2865
        iter 47: subdiag=[-0.682+0.j]
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
2866
        iter 48: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2867
        iter 49: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 50: subdiag=[-0.682+0.j -0.
2868
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2869
        iter 51: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2870
        iter 52: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2871
        iter 53: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
        iter 54: subdiag=[-0.682+0.i -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2872
2873
        iter 55: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 56: subdiag=[-0.682+0.j -0.
2874
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2875
        iter 57: subdiag=[-0.682+0.j]
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2876
        iter 58: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
        iter 59: subdiag=[-0.682+0.j
2877
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2878
        iter 60: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2879
        iter 61: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
2880
        iter 62: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2881
        iter 63: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
2882
        iter 64: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2883
        iter 65: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 66: subdiag=[-0.682+0.j -0.
2884
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2885
        iter 67: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2886
        iter 68: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2887
        iter 69: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
2888
        iter 70: subdiag=[-0.682+0.i -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 71: subdiag=[-0.682+0.j
2889
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2890
        iter 72: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
                                                 +0.j -0.118+0.j,
        iter 73: subdiag=[-0.682+0.j
2891
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 74: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2892
        iter 75: subdiag=[-0.682+0.j
2893
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2894
        iter 76: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
                                                 +0.j -0.118+0.j],
2895
        iter 77: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
        iter 78: subdiag=[-0.682+0.j -0.
2896
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
2897
        iter 79: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2898
        iter 80: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
2899
        iter 81: subdiag=[-0.682+0.j 0.
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2900
        iter 82: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
```

```
2901
        iter 83: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                      \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2902
        iter 84: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2903
        iter 85: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 86: subdiag=[-0.682+0.j -0.
2904
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
2905
        iter 87: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2906
        iter 88: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2907
        iter 89: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
2908
        iter 90: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2909
        iter 91: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2910
        iter 92: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2911
        iter 93: subdiag=[-0.682+0.j]
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
        iter 94: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.922e-01
2912
2913
        iter 95: subdiag=[-0.682+0.j 0.
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2914
        iter 96: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2915
        iter 97: subdiag=[-0.682+0.j
                                                 +0.j 0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2916
        iter 98: subdiag=[-0.682+0.j -0.
                                                 +0.j -0.118+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.922e - 01
2917
        iter 99: subdiag=[-0.682+0.j 0.
                                                 +0.j 0.118+0.j],
        after : subdiag=[-0.682+0.j 0.
                                                +0.j 0.118+0.j],
2918
                                                                     \|\cdot\|_{2}=6.922e-01
2919
         iterations
                          = 100/100
2920
          sub-diag magnitudes after last step:
2921
          [0.682 0.
                         0.118]
2922
      └ converged?
                          = no
2923
      ─ Matrix 29/30 (size 4x4)
2924
2925
        fixed shift \mu = 0.790166 (|\mu|=0.7902)
2926
        before: subdiag=[ 0.811+0.j -0.867+0.j
                                                       0.948+0.j],
                                                                     \|\cdot\|_2 = 1.519e + 00
2927
        iter 00: subdiag=[ 0.726+0.j -0.795+0.j
                                                        0.199+0.j], ||\cdot||_2=1.095e+00
2928
        iter 01: subdiag=[ 0.664+0.j -0.832+0.j
                                                        0.027+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.064e+00
2929
        iter 02: subdiag=[ 0.596+0.j -0.861+0.j
                                                        0.004+0.j], ||\cdot||_2=1.047e+00
        iter 03: subdiag=[ 0.525+0.j -0.883+0.j
2930
                                                        0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.028e+00
2931
        iter 04: subdiag=[ 0.456+0.j -0.899+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2=1.008e+00
                                                        0.
                                                             +0.j],
        iter 05: subdiag=[ 0.391+0.j -0.909+0.j
2932
                                                        0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.899e - 01
                                                             +0.j],
2933
        iter 06: subdiag=[ 0.332+0.j -0.917+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.751e - 01
                                                        0.
                                                             +0.j],
2934
        iter 07: subdiag=[ 0.28 +0.j -0.922+0.j
                                                                       \|\cdot\|_{2}=9.635e-01
                                                        0.
                                                             +0.il,
        iter 08: subdiag=[ 0.234+0.j -0.925+0.j
                                                             +0.j],
2935
                                                        0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.547e - 01
2936
        iter 09: subdiag=[ 0.196+0.j -0.928+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.483e - 01
                                                        0.
                                                             +0.j],
        iter 10: subdiag=[ 0.163+0.j -0.93 +0.j
2937
                                                        0.
                                                             +0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 9.437e - 01
        iter 11: subdiag=[ 0.135+0.j -0.931+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.405e - 01
2938
                                                        0.
                                                             +0.j],
        iter 12: subdiag=[ 0.112+0.j -0.931+0.j
2939
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.382e - 01
2940
        iter 13: subdiag=[ 0.093+0.j -0.932+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.366e - 01
                                                        0.
                                                             +0.j],
        iter 14: subdiag=[ 0.077+0.j -0.932+0.j
2941
                                                        0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.355e - 01
                                                             +0.j],
        iter 15: subdiag=[ 0.064+0.j -0.933+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.348e - 01
2942
                                                        0.
                                                             +0.j],
2943
        iter 16: subdiag=[ 0.053+0.j -0.933+0.j
                                                        0.
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.342e - 01
2944
        iter 17: subdiag=[0.044+0.j -0.933+0.j]
                                                             +0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.339e - 01
2945
        iter 18: subdiag=[ 0.036+0.j -0.933+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.336e - 01
                                                        0.
                                                             +0.j],
2946
        iter 19: subdiag=[ 0.03 +0.j -0.933+0.j
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.335e - 01
                                                             +0.j],
```

```
2947
         iter 20: subdiag=[ 0.025+0.j -0.933+0.j
                                                                 +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.334e - 01
         iter 21: subdiag=[ 0.02 +0.j -0.933+0.j
2948
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.333e - 01
2949
         iter 22: subdiag=[ 0.017+0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.332e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
         iter 23: subdiag=[ 0.014+0.j -0.933+0.j
2950
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.332e - 01
2951
         iter 24: subdiag=[ 0.012+0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_{2}=9.332e-01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2952
         iter 25: subdiag=[0.01 + 0.j - 0.933 + 0.j]
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
2953
         iter 26: subdiag=[ 0.008+0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
2954
         iter 27: subdiag=[ 0.007+0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2955
         iter 28: subdiag=[ 0.005+0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2956
         iter 29: subdiag=[ 0.004+0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
         iter 30: subdiag=[ 0.004+0.j -0.933+0.j
2957
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2958
         iter 31: subdiag=[ 0.003+0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 32: subdiag=[ 0.003+0.j -0.933+0.j
2959
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2960
         iter 33: subdiag=[ 0.002+0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
         iter 34: subdiag=[ 0.002+0.j -0.933+0.j
2961
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 35: subdiag=[ 0.001+0.j -0.933+0.j
2962
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2963
         iter 36: subdiag=[ 0.001+0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
         iter 37: subdiag=[ 0.001+0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2964
                                                                 +0.j],
2965
         iter 38: subdiag=[ 0.001+0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2966
         iter 39: subdiag=[ 0.001+0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 40: subdiag=[ 0.001+0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2967
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2968
         iter 41: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2969
         iter 42: subdiag=[ 0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2970
         iter 43: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2971
         iter 44: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2972
         iter 45: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2973
         iter 46: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2974
         iter 47: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2975
         iter 48: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
2976
         iter 49: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2977
         iter 50: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
         iter 51: subdiag=[ 0.
2978
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2979
         iter 52: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2980
         iter 53: subdiag=[ 0.
                                      +0.i -0.933+0.i
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2981
         iter 54: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
         iter 55: subdiag=[ 0.
2982
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2983
         iter 56: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
2984
         iter 57: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 58: subdiag=[ 0.
2985
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2986
         iter 59: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                           0.
                                                                 +0.j],
         iter 60: subdiag=[ 0.
2987
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 61: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2988
                                                           0.
                                                                 +0.j],
         iter 62: subdiag=[ 0.
2989
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
         iter 63: subdiag=[ 0.
2990
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                 +0.j],
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2991
         iter 64: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
         iter 65: subdiag=[ 0.
2992
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                           0.
                                                                           \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                 +0.j],
```

```
2993
         iter 66: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j], ||\cdot||_2=9.331e-01
2994
         iter 67: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 68: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
2995
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
         iter 69: subdiag=[ 0.
2996
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
         iter 70: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
2997
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 71: subdiag=[ 0.
2998
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                +0.j],
2999
         iter 72: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 73: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
3000
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                      +0.j -0.933+0.j
         iter 74: subdiag=[ 0.
3001
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
         iter 75: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3002
                                                          0.
                                                                +0.j],
3003
         iter 76: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                +0.j],
3004
         iter 77: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 78: subdiag=[ 0.
3005
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 79: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3006
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 80: subdiag=[ 0.
3007
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                +0.j],
         iter 81: subdiag=[ 0.
3008
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3009
         iter 82: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
         iter 83: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3010
                                                          0.
                                                                +0.j],
3011
         iter 84: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 85: subdiag=[ 0.
3012
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                +0.j],
         iter 86: subdiag=[ 0.
3013
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3014
         iter 87: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
         iter 88: subdiag=[ 0.
3015
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3016
         iter 89: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3017
         iter 90: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3018
         iter 91: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3019
         iter 92: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                         \|\cdot\|_{2}=9.331e-01
3020
         iter 93: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3021
         iter 94: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         iter 95: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
3022
                                                                +0.j],
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
3023
         iter 96: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
3024
         iter 97: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                                +0.j],
3025
         iter 98: subdiag=[ 0.
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                          0.
                                                                +0.j],
3026
         iter 99: subdiag=[ 0.
                                      +0.j -0.933+0.j
                                                                          \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
                                                          0.
                                                                +0.j],
         after : subdiag=[ 0.
                                    +0.j -0.933+0.j 0.
3027
                                                               +0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.331e - 01
          iterations
                           = 100/100
3028
3029
          sub-diag magnitudes after last step:
3030
          [0.
                  0.933 0.
                                ]
       └ converged?
3031
                           = no
3032
       ─ Matrix 30/30 (size 4x4)
3033
         fixed shift \mu = -0.0383725 - 0.203948 (|\mu| = 0.2075)
3034
3035
         before: subdiag=[-0.744+0.j -0.999+0.j -0.997+0.j], ||\cdot||_2=1.596e+00
3036
         iter 00: subdiag=[-0.752-0.j -0.99 +0.j -0.977+0.j], ||\cdot||_2=1.581e+00
         iter 01: subdiag=[0.757+0.j 0.957+0.j 0.928-0.j], \|\cdot\|_2=1.533e+00
3037
3038
         iter 02: subdiag=[-0.758-0.j -0.894+0.j -0.87 +0.j], \|\cdot\|_2=1.460e+00
```

```
3039
        iter 03: subdiag=[0.76 +0.j 0.803-0.j 0.814-0.j], \|\cdot\|_2=1.372e+00
3040
        iter 04: subdiag=[-0.761-0.j -0.694-0.j -0.766+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.284e+00
3041
        iter 05: subdiag=[0.761+0.j 0.582-0.j 0.729-0.j], \|\cdot\|_2=1.204e+00
        iter 06: subdiag=[-0.758-0.j -0.477+0.j -0.699+0.j],
3042
                                                                       \|\cdot\|_2=1.136e+00
3043
        iter 07: subdiag=[-0.751-0.j -0.385-0.j 0.674-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=1.080e+00
3044
        iter 08: subdiag=[-0.738-0.j -0.309+0.j -0.653+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.033e+00
3045
        iter 09: subdiag=[-0.719-0.j -0.247+0.j 0.635-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.907e - 01
        iter 10: subdiag=[ 0.694+0.j -0.197-0.j -0.618+0.j],
3046
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.504e - 01
3047
        iter 11: subdiag=[-0.665-0.j -0.158-0.j 0.602-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 9.105e - 01
        iter 12: subdiag=[ 0.631+0.j -0.126-0.j -0.586+0.j],
3048
                                                                       \|\cdot\|_2 = 8.704e - 01
        iter 13: subdiag=[-0.594-0.j -0.102-0.j 0.571-0.j],
3049
                                                                       \|\cdot\|_2 = 8.301e - 01
        iter 14: subdiag=[ 0.555+0.j -0.082-0.j -0.556+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 7.899e - 01
3050
3051
        iter 15: subdiag=[-0.516+0.j -0.066-0.j 0.541+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 7.503e - 01
        iter 16: subdiag=[ 0.476+0.j -0.054-0.j -0.526+0.j],
3052
                                                                       \|\cdot\|_{2}=7.118e-01
        iter 17: subdiag=[-0.438+0.j -0.044-0.j 0.511+0.j],
3053
                                                                       \|\cdot\|_2=6.747e-01
3054
        iter 18: subdiag=[ 0.401-0.j -0.036-0.j -0.496-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 6.393e - 01
3055
        iter 19: subdiag=[-0.366-0.j -0.029+0.j 0.482+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=6.059e-01
        iter 20: subdiag=[ 0.333+0.j -0.024+0.j -0.467-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.745e - 01
3056
3057
        iter 21: subdiag=[-0.303+0.j -0.019+0.j 0.453+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 5.451e - 01
3058
        iter 22: subdiag=[ 0.275+0.j -0.016+0.j -0.439+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=5.176e-01
        iter 23: subdiag=[-0.248+0.j -0.013+0.j 0.425-0.j],
3059
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.921e - 01
3060
        iter 24: subdiag=[ 0.224-0.j -0.011+0.j -0.411+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.682e - 01
3061
        iter 25: subdiag=[-0.203+0.j -0.009-0.j 0.397-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.460e - 01
3062
        iter 26: subdiag=[ 0.183+0.j -0.007-0.j -0.384+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.253e - 01
3063
        iter 27: subdiag=[-0.165-0.j -0.006-0.j 0.371-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 4.060e - 01
3064
        iter 28: subdiag=[ 0.148+0.j -0.005-0.j -0.358+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.878e - 01
3065
        iter 29: subdiag=[-0.134+0.j -0.004-0.j 0.346-0.j],
                                                                      \|\cdot\|_2 = 3.708e - 01
3066
        iter 30: subdiag=[ 0.12 -0.j -0.003-0.j -0.334+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.548e - 01
3067
        iter 31: subdiag=[-0.108-0.j -0.003-0.j 0.322-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.397e - 01
        iter 32: subdiag=[ 0.097+0.j -0.002-0.j -0.311+0.j],
3068
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.255e - 01
        iter 33: subdiag=[-0.088+0.j -0.002-0.j 0.299-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 3.120e - 01
3069
3070
        iter 34: subdiag=[ 0.079+0.j -0.002-0.j -0.289+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.992e - 01
3071
        iter 35: subdiag=[-0.071-0.j -0.001-0.j 0.278-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.870e - 01
3072
        iter 36: subdiag=[ 0.064-0.j -0.001+0.j -0.268+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.754e - 01
        iter 37: subdiag=[-0.057+0.j -0.001+0.j 0.258-0.j],
3073
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.644e - 01
3074
        iter 38: subdiag=[ 0.051-0.j -0.001+0.j -0.249+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=2.538e-01
        iter 39: subdiag=[-0.046+0.j -0.001+0.j 0.239-0.j],
3075
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.437e - 01
        iter 40: subdiag=[ 0.042-0.j -0.
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.341e - 01
3076
                                                 +0.j -0.23 +0.j],
        iter 41: subdiag=[-0.037+0.j -0.
3077
                                                 -0.j 0.222-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_{2}=2.249e-01
3078
        iter 42: subdiag=[ 0.034+0.j -0.
                                                 -0.j -0.213+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.160e - 01
3079
        iter 43: subdiag=[-0.03 +0.j -0.
                                                 -0.j 0.205-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 2.075e - 01
        iter 44: subdiag=[ 0.027-0.j -0.
3080
                                                 -0.j -0.198+0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.994e-01
3081
        iter 45: subdiag=[-0.024+0.j -0.
                                                 -0.j 0.19 -0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2=1.916e-01
3082
        iter 46: subdiag=[ 0.022-0.j -0.
                                                 -0.i -0.183+0.i],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.841e - 01
        iter 47: subdiag=[-0.02 +0.j -0.
3083
                                                 -0.j 0.176-0.j],
                                                                       \|\cdot\|_2 = 1.769e - 01
3084
        iter 48: subdiag=[ 0.018-0.j -0.
                                                 -0.j -0.169+0.j], ||\cdot||_2=1.700e-01
```

```
3085
         iter 49: subdiag=[-0.016+0.j -0.
                                                  -0.j 0.163-0.j], ||\cdot||_2=1.634e-01
3086
         iter 50: subdiag=[ 0.014-0.j -0.
                                                  -0.j -0.156+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 1.570e - 01
         iter 51: subdiag=[-0.013+0.j -0.
3087
                                                  -0.j 0.15 -0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.509e-01
         iter 52: subdiag=[ 0.012-0.j -0.
3088
                                                  -0.j -0.145+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 1.450e - 01
         iter 53: subdiag=[-0.01 + 0.j - 0.
                                                  -0.i \quad 0.139+0.i],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.393e-01
3089
3090
         iter 54: subdiag=[ 0.009-0.j -0.
                                                  +0.j -0.134-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.339e-01
3091
         iter 55: subdiag=[-0.008-0.j -0.
                                                  +0.j 0.128+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.286e-01
         iter 56: subdiag=[ 0.008-0.j -0.
3092
                                                  +0.j -0.123-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=1.236e-01
         iter 57: subdiag=[-0.007+0.j -0.
3093
                                                  +0.j 0.119+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.188e-01
         iter 58: subdiag=[ 0.006-0.j -0.
                                                  +0.j -0.114-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=1.141e-01
3094
3095
         iter 59: subdiag=[-0.005+0.j -0.
                                                  +0.j 0.11 + 0.j,
                                                                        \|\cdot\|_2=1.097e-01
3096
         iter 60: subdiag=[ 0.005-0.j -0.
                                                  +0.j -0.105-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=1.054e-01
3097
         iter 61: subdiag=[-0.004+0.j -0.
                                                  +0.j 0.101+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 1.013e - 01
3098
         iter 62: subdiag=[ 0.004-0.j -0.
                                                  -0.j -0.097 -0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.730e - 02
         iter 63: subdiag=[-0.004+0.j -0.
3099
                                                  -0.j 0.093+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 9.349e - 02
3100
         iter 64: subdiag=[ 0.003-0.j -0.
                                                  -0.j -0.09 -0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.983e - 02
3101
         iter 65: subdiag=[-0.003+0.j -0.
                                                  -0.j 0.086+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.631e - 02
         iter 66: subdiag=[ 0.003-0.j -0.
                                                  -0.j -0.083-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 8.292e - 02
3102
3103
         iter 67: subdiag=[-0.002+0.j -0.
                                                  -0.j \quad 0.08 + 0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.967e-02
3104
         iter 68: subdiag=[ 0.002-0.j -0.
                                                  -0.j -0.077-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 7.655e - 02
         iter 69: subdiag=[-0.002+0.j -0.
3105
                                                  -0.j 0.074+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.355e-02
3106
         iter 70: subdiag=[ 0.002-0.j -0.
                                                  -0.j -0.071-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=7.066e-02
3107
         iter 71: subdiag=[-0.002+0.j -0.
                                                  -0.j 0.068+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 6.789e - 02
3108
         iter 72: subdiag=[ 0.001-0.j -0.
                                                  -0.j -0.065 -0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 6.522e - 02
3109
         iter 73: subdiag=[-0.001+0.j -0.
                                                  -0.j 0.063+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 6.266e - 02
3110
         iter 74: subdiag=[ 0.001-0.j -0.
                                                  -0.j -0.06 -0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 6.020e - 02
         iter 75: subdiag=[-0.001+0.j -0.
3111
                                                  -0.j \quad 0.058+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=5.783e-02
3112
         iter 76: subdiag=[ 0.001-0.j -0.
                                                  -0.j -0.056-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.556e - 02
3113
         iter 77: subdiag=[-0.001+0.j -0.
                                                  -0.j 0.053+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2=5.338e-02
         iter 78: subdiag=[ 0.001-0.j -0.
                                                  -0.j -0.051-0.j],
3114
                                                                        \|\cdot\|_2 = 5.128e - 02
         iter 79: subdiag=[-0.001+0.j -0.
                                                  -0.j 0.049+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 4.926e - 02
3115
3116
         iter 80: subdiag=[ 0.001-0.j -0.
                                                  -0.j -0.047 -0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 4.733e - 02
3117
         iter 81: subdiag=[-0.001+0.j -0.
                                                  -0.j 0.045+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 4.547e - 02
3118
         iter 82: subdiag=[ 0.
                                     -0.j -0.
                                                  -0.j -0.044 -0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=4.368e-02
         iter 83: subdiag=[-0.
3119
                                     +0.j -0.
                                                  -0.j 0.042+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 4.196e - 02
3120
         iter 84: subdiag=[ 0.
                                               -0.j -0.04 -0.j], ||\cdot||_2 = 4.031e -02
                                    -0.j -0.
         iter 85: subdiag=[-0.
3121
                                     +0.j -0.
                                                  -0.j \quad 0.039+0.j], \|\cdot\|_{2}=3.872e-02
3122
         iter 86: subdiag=[ 0.
                                                  -0.j -0.037-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=3.720e-02
                                     -0.j -0.
         iter 87: subdiag=[-0.
3123
                                     +0.j -0.
                                                  -0.j 0.036+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=3.574e-02
3124
         iter 88: subdiag=[ 0.
                                                  -0.j -0.034-0.j],
                                     -0.j -0.
                                                                        \|\cdot\|_2 = 3.433e - 02
         iter 89: subdiag=[-0.
3125
                                     +0.j -0.
                                                  -0.j 0.033+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 3.298e - 02
         iter 90: subdiag=[ 0.
3126
                                     -0.j -0.
                                                  -0.j -0.032-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 3.168e - 02
3127
         iter 91: subdiag=[-0.
                                    +0.j -0. -0.j 0.03+0.j], ||\cdot||_2=3.043e-02
3128
         iter 92: subdiag=[ 0.
                                     -0.j -0.
                                                  -0.j -0.029-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_{2}=2.924e-02
                                     +0.j -0.
         iter 93: subdiag=[-0.
                                                  -0.j 0.028+0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 2.809e - 02
3129
3130
         iter 94: subdiag=[ 0.
                                     -0.j -0.
                                                  -0.j -0.027-0.j],
                                                                        \|\cdot\|_2 = 2.698e - 02
```

```
3131
        iter 95: subdiag=[-0.
                                   +0.j -0.
                                                -0.j 0.026+0.j], ||\cdot||_2=2.592e-02
3132
        iter 96: subdiag=[ 0.
                                   -0.j -0.
                                                -0.j -0.025 -0.j], ||\cdot||_2 = 2.490e -02
3133
        iter 97: subdiag=[-0.
                                   +0.j -0.
                                                -0.j 0.024+0.j], ||\cdot||_2=2.392e-02
3134
        iter 98: subdiag=[ 0.
                                   -0.j -0.
                                                -0.j -0.023 -0.j], ||\cdot||_2 = 2.298e -02
3135
        iter 99: subdiag=[-0.
                                   +0.j -0.
                                                -0.j 0.022+0.j], ||\cdot||_2=2.207e-02
        after : subdiag=[-0.
                                  +0.j -0.
                                              -0.j 0.022+0.j],
                                                                    \|\cdot\|_2 = 2.207e - 02
3136
3137
         iterations
                         = 100/100
3138
         sub-diag magnitudes after last step:
3139
         [0.
                        0.022]
3140
      └ converged?
                         = no
```

From this monstrosity we conclude that using one constant shift  $\mu$  (taken from the trailing  $2\times 2$  block) attacks only the last sub-diagonal element. That entry shrinks quickly, but the higher sub-diagonals are influenced only through round-off-sized couplings, so they plateau at some non-zero value  $\approx 10^{-2}$  Consequently the matrix rarely satisfies the stringent " $|H_{i,i-1}|<10^{-10}$ " test, and the script reports converged = no even after 100 iterations.

Using the Wilkinson shift would definitely force convergence, but since we are using one  $\mu=\lambda_1$  of the trailing  $2\times 2$  block, we can expect convergence only for the last sub-diagonal element.

## **Bibliography**

[1] L. N. Trefethen and D. Bau, Numerical Linear Algebra. 1997.