

Projeto 3

Álgebra Linear Numérica

para 6 de Junho de 2025

Instruções: Justifique seu raciocínio e escreva respostas completas. Os resultados de questões anteriores podem ser usados nas questões seguintes.

Explique seu código e comente os gráficos: um gráfico sem referência no texto está “perdido”.

Questão 1. Redução à forma de Hessemberg.

- a) **Cálculo dos refletores.** Escreva uma função `to_hessemberg(A)` que calcula a forma de Hessemberg de uma matriz A usando refletores de Householder. A função deve retornar uma lista de refletores v_i , a matriz H tal que $A = QHQ^*$, e Q , que é a matriz ortogonal dada pelo produto dos refletores.
- b) Verifique que sua função de fato está correta, calculando $\|A - QHQ^*\|$ e $\|Q^*Q - I\|$ para diversas matrizes A : use simétricas e não simétricas, e de diferentes tamanhos.
- c) **Complexidade.** Realize testes para matrizes $n \times n$, com n variando de 10 até 1000 (ou mais, se o seu computador aguentar!). Quanto tempo seu algoritmo leva para calcular a forma de Hessemberg? Para matrizes pequenas, repita o teste até levar pelo menos 1 segundo, para evitar erros de medida de tempos muito pequenos. Qual parece ser a complexidade observada do algoritmo?
- d) A complexidade do seu código muda se A for simétrica? O que precisaria ser feito para acelerar este cálculo?

Questão 2. Matrizes ortogonais.

- a) **Um pouco de teoria.** O que você pode dizer dos autovalores de uma matriz ortogonal? O que isto implica para o método da potência? E para a iteração inversa?
- b) **O caso 2×2 .** Calcule os autovalores de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- c) Construa matrizes ortogonais de ordem 4 a partir da fatoração QR de matrizes aleatórias A . Para cada matriz Q assim obtida, transforme-a em sua forma de Hessemberg, e calcule (analiticamente) os autovalores do bloco $Q[3:4, 3:4]$. O que você observa?
- d) **Shifts.** Continuando o exercício anterior, use um dos autovalores do bloco final como *shift* (fixo) para a iteração QR. O algoritmo parece convergir?