

Transformações no plano cartesiano e simetria

+ Conteúdos

O Taj Mahal, localizado em Agra, Índia, é amplamente reconhecido por sua majestosa simetria. Construído no século XVII pelo imperador mogol Shah Jahan em homenagem à sua esposa, Mumtaz Mahal, o complexo revela essa simetria em diversos elementos de sua arquitetura.

Objetos do conhecimento

- Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem
- Simetrias de translação, rotação e reflexão

Habilidades

- Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.
- Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
- Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

Para começar

Na figura abaixo, que retrata uma borboleta, podemos observar um exemplo notável de simetria. Nas demais figuras, é possível perceber a repetição de padrões que podem ser descritos pelas isometrias abordadas neste módulo. A simetria é um conceito fundamental em diversas áreas da ciência e da arte e refere-se à propriedade de um objeto ou forma que se mantém inalterada quando submetida a certas transformações, como reflexões, rotações ou translações.



Imagem: Shutterstock



Imagem: Shutterstock



Imagem: Shutterstock



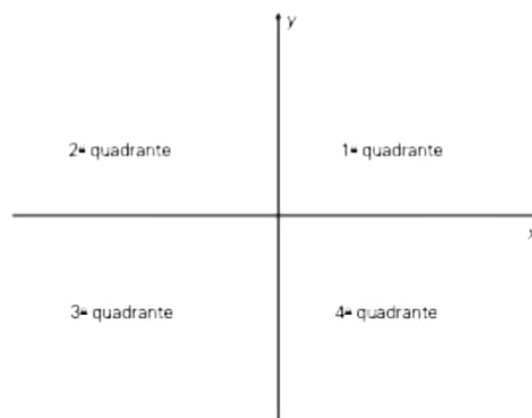
Imagem: Shutterstock

Plano cartesiano e coordenadas cartesianas

Vamos lembrar o conceito de plano cartesiano.

Trata-se de dois eixos reais perpendiculares entre si, que pertencem a um plano em comum.

- A linha vertical é chamada de **eixo das ordenadas (y)**.
- A linha horizontal é chamada de **eixo das abscissas (x)**.



Para localizar um ponto no plano cartesiano, são necessárias duas informações, uma referente ao eixo x e outra referente ao eixo y. Essa localização é feita por meio de um par ordenado (x, y) , em que o primeiro elemento representa a abscissa do ponto e indica sua posição em relação ao eixo x, e o segundo elemento representa a ordenada do ponto e indica sua posição em relação ao eixo y.

Exemplos

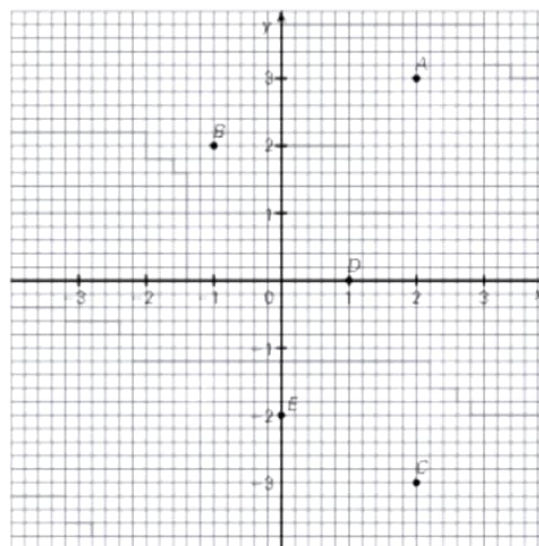
A (2, 3)

B (-1, 2)

C (2, -3)

D (1, 0)

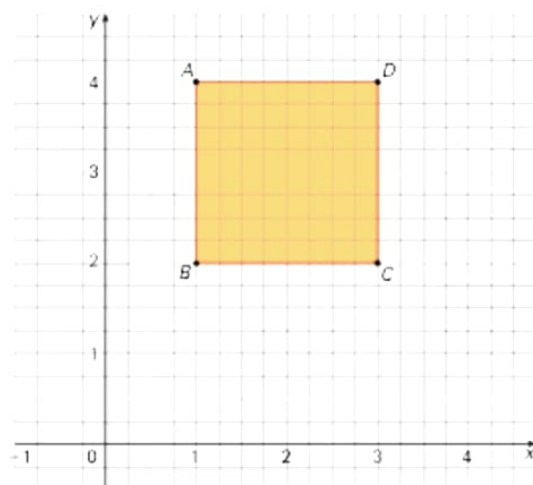
E (0, -2)



Transformações geométricas no plano

Adicionando um número inteiro às coordenadas dos vértices de um polígono

Vamos representar um polígono no plano.



Observe as coordenadas dos vértices desse polígono:

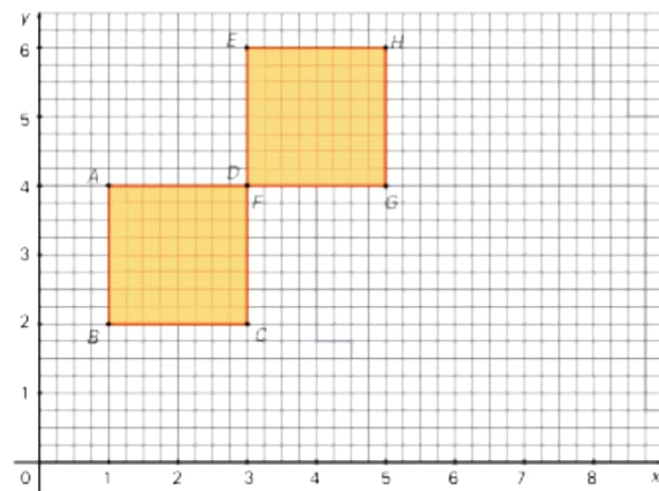
$A(1, 4)$

$B(1, 2)$

$C(3, 2)$

$D(3, 4)$

Vamos adicionar um número inteiro às coordenadas desse polígono, obtendo os pontos E , F , G e H .



$E(3, 6)$

$F(3, 4)$

$G(5, 4)$

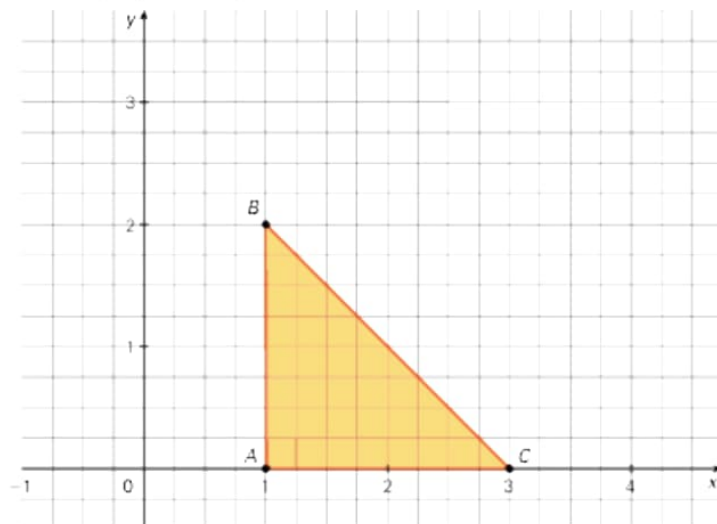
$H(5, 6)$

Note que:

- O polígono $EFGH$ é congruente ao polígono $ABCD$.
- O polígono $EFGH$ foi obtido ao adicionar 2 unidades às coordenadas do polígono $ABCD$.

Multiplicando um número inteiro pelas coordenadas dos vértices de um polígono

Vamos representar um polígono no plano.



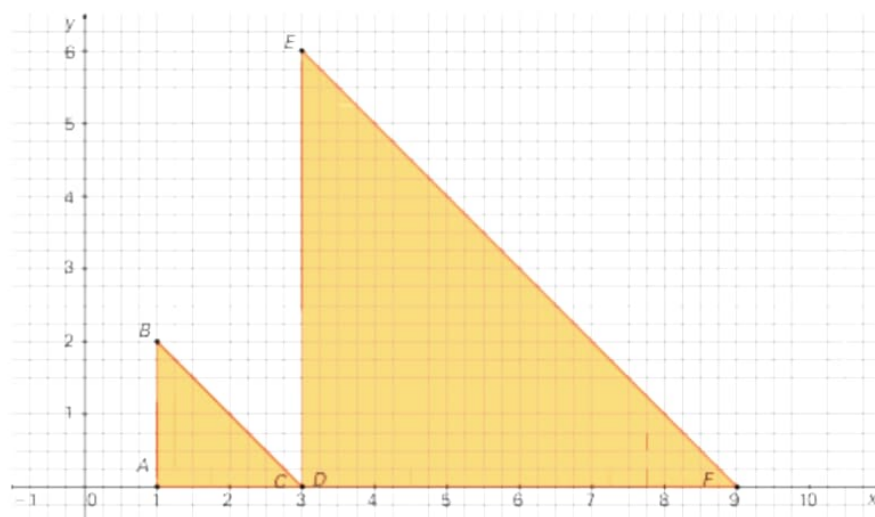
Observe as coordenadas dos vértices desse polígono:

A (1, 0)

B (1, 2)

C (3, 0)

Vamos multiplicar um número inteiro pelas coordenadas desse polígono.



D (3, 0)

E (3, 6)

F (9, 0)

Note que:

- O polígono DEF é semelhante (houve ampliação) ao polígono ABC.
- O polígono DEF foi obtido ao multiplicar por 3 as coordenadas do polígono ABC.

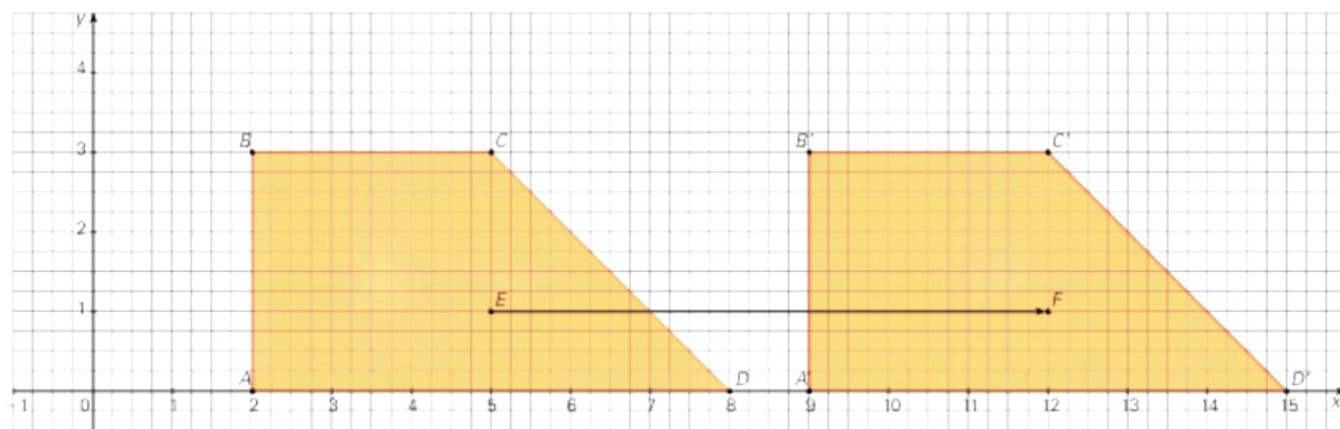
Isometrias

Isometria é toda transformação geométrica que preserva as distâncias e os ângulos entre os pontos. Quando um objeto sofre uma isometria, seu formato e seu tamanho permanecem inalterados, embora sua posição e orientação possam mudar.

Vamos estudar as seguintes isometrias: translação, rotação e reflexão.

Translação

Na translação, um objeto ou uma figura é deslocado de um lugar para outro sem que seu formato, seu tamanho ou sua orientação sejam alterados. É como deslizar um objeto ao longo de um plano ou espaço com a orientação de um vetor.



Observe na figura acima que o polígono $A'B'C'D'$ equivale ao polígono $ABCD$ deslocado em 7 unidades na mesma direção e no mesmo sentido que o vetor \overrightarrow{EF} .

Se avaliarmos as coordenadas dos vértices desse polígono, notaremos que foram adicionadas 7 unidades apenas às abscissas. Isso acontece porque a figura foi deslocada apenas horizontalmente.

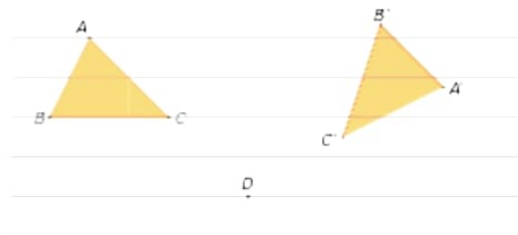
Um exemplo de aplicação da simetria de translação são as estampas. Geralmente, temos um padrão que é deslocado, como no exemplo a seguir.



Note que o trecho destacado se repete por um vetor horizontal, mas também por um vetor diagonal.

Rotação

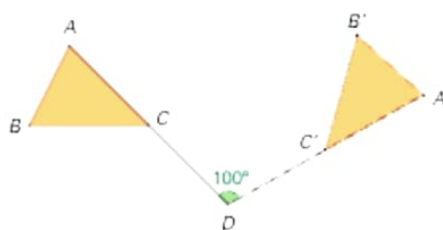
Na rotação, um objeto ou uma figura é girado em torno de um ponto fixo (chamado de centro de rotação) com base em um ângulo e uma direção específicos. O formato e o tamanho do objeto ou figura permanecem inalterados, apenas sua orientação muda.



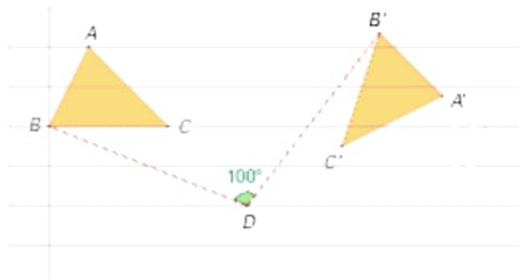
Na imagem acima, o triângulo $A'B'C'$ é obtido por uma rotação de 100° no sentido horário do triângulo ABC em relação ao ponto D .

Para isso, fazemos:

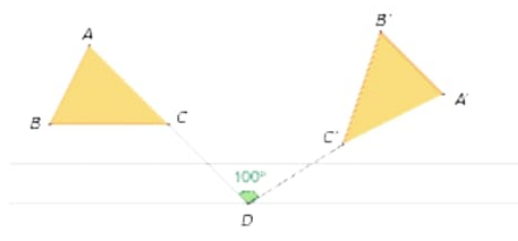
- a rotação do ponto A , obtendo A' ;



- a rotação do ponto B , obtendo B' ;



- a rotação do ponto C , obtendo C' ;

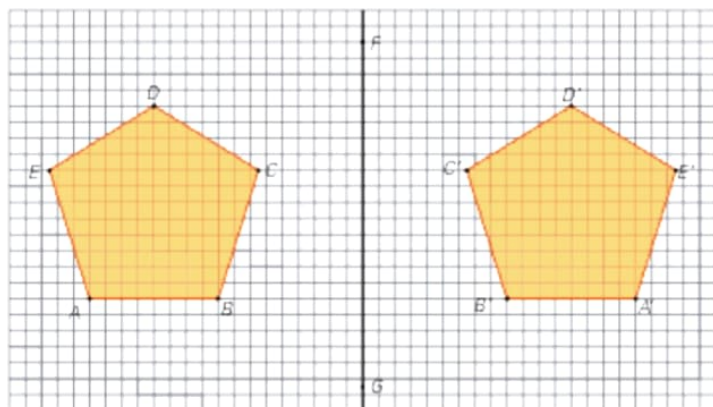


Reflexão

Na reflexão, um objeto ou uma figura é espelhado em relação a uma reta ou a um ponto, invertendo sua orientação, mas mantendo suas dimensões e seu formato.

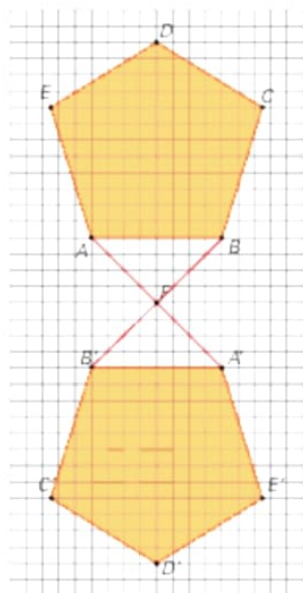
Em relação a uma reta

Quando há reflexão de uma figura em relação a uma reta, a distância de cada ponto da figura original até a reta é igual à distância de cada ponto da figura refletida em relação à reta.



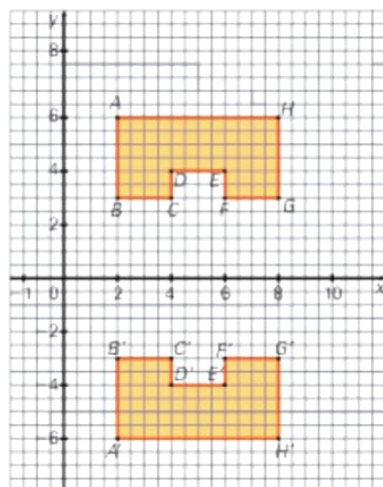
Em relação a um ponto

Quando há reflexão de uma figura em relação a um ponto, o ponto fixo está alinhado com o ponto da figura original e com o da figura refletida. Além disso, a distância de cada ponto da figura original até o ponto é igual à distância de cada ponto da figura refletida em relação ao ponto.

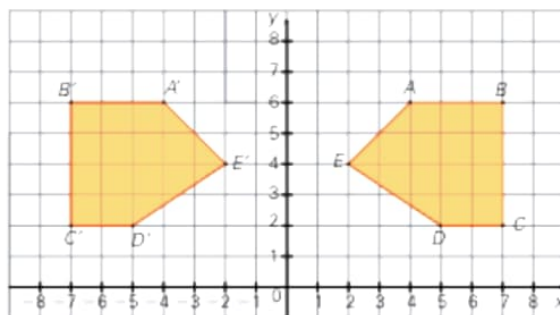


Agora que você conhece os tipos de reflexão, vamos ver como elas se comportam no plano cartesiano.

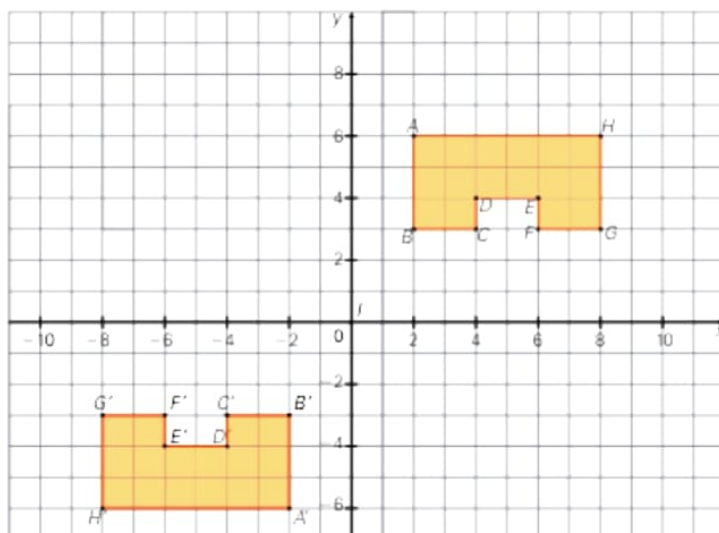
Em relação ao eixo x



Em relação ao eixo y

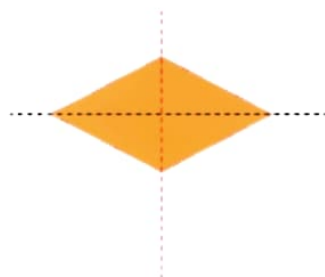


Em relação à origem (um ponto) do plano cartesiano

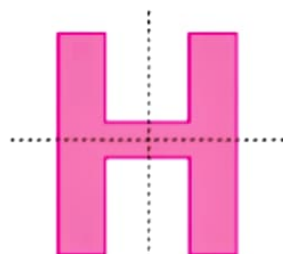


Eixo de simetria

Um eixo de simetria é uma linha sobre a qual uma figura pode ser refletida para que as duas metades resultantes sejam exatamente iguais. A simetria pode ser observada em diversos contextos, como na Geometria, na arquitetura e na natureza, e proporciona uma sensação de equilíbrio e harmonia, sendo um princípio fundamental em muitas áreas do conhecimento e da estética.



O losango possui dois eixos de simetria, e cada um deles contém uma das diagonais.



O eixo de simetria divide o H em partes simétricas.



O eixo de simetria divide a figura em duas partes iguais.



Podemos verificar simetrias na natureza, em paisagens com água, por exemplo.



Situação-problema

Leia a manchete a seguir.

Queimada consome vegetação nativa na Reserva do Aguapeí e mobiliza aviões para combater chamas em Castilho

Incêndio dura quatro dias. Na manhã desta segunda-feira (16), foram enviadas três aeronaves, porém a baixa visibilidade provocada por nuvens paralisou o trabalho.

G1 Rio Preto e Araçatuba. Queimada consome vegetação nativa na Reserva do Aguapeí e mobiliza aviões para combater chamas em Castilho. G1, 16 set. 2024. Disponível em: <https://g1.globo.com/sp/sao-jose-do-rio-preto-aracatuba/noticia/2024/09/16/queimada-consume-vegetacao-nativa-na-reserva-do-aguapei-e-mobiliza-avioes-para-combater-chamas-em-castilho.ghtml>.

Acesso em: 18 set. 2024.

Eventos climáticos extremos têm ocorrido com crescente frequência devido ao aquecimento global. Nessas situações, as aeronaves desempenham papel crucial no resgate de pessoas, no transporte de alimentos e na extinção de incêndios. Quais características das aeronaves as tornam tão adequadas para esse tipo de situação?



Foto: Reprodução/YouTube

Avião derramando água para conter incêndio em área de preservação em Cianorte, no Paraná. Foto de 2024.

Estudo autogerido

- Pesquise eventos climáticos extremos que aconteceram nos últimos dois anos pelo mundo e analise em quantos deles as aeronaves foram utilizadas para amenizar os danos causados.
- Quais foram os tipos de aeronaves utilizados? Qual é o formato delas?
- Quais estruturas das aeronaves conferem a elas estabilidade durante o voo?

Resolução do problema

Com os colegas, discutam sobre o que vocês pesquisaram e respondam à situação-problema apresentada. Se precisarem de ajuda, criem aviãozinhos de papel e testem o que acontece com eles quando uma das asas é retirada, por exemplo. Depois, sintetizem suas percepções relacionando-as aos conteúdos matemáticos estudados neste módulo.



Para explorar

Explorando a simetria com espelhos

Materiais

- Cartolina ou papel branco
- Canetas coloridas ou marcadores
- Um espelho plano (ou uma folha de papel-alumínio apoiada em um papelão)
- Tesoura com pontas arredondadas (se necessário)

Retome o conceito de simetria e, em duplas, sigam o passo a passo.

Passo 1: Escrevam palavras simples e curtas em uma cartolina, como "SOL", "LUZ", "ÁGUA", "NOME", "OVO", "OSSO", entre outras.

Passo 2: Coloquem um espelho plano ao lado das palavras escritas (ou ao lado da cartolina onde estão as palavras). Certifiquem-se de que o espelho esteja posicionado de modo a refletir todas as letras da palavra escrita.

Passo 3: Observem o resultado da reflexão no espelho e registrem, como veem, a imagem refletida das palavras. Comparem essa imagem com as palavras originais.

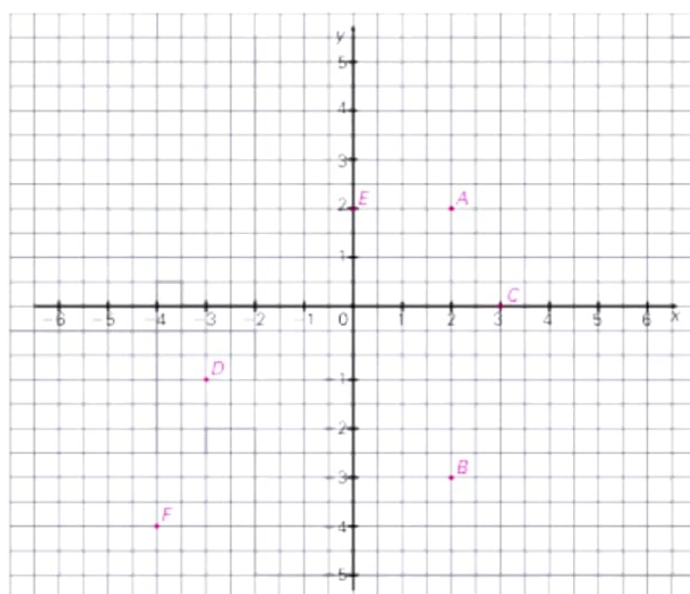
- Como a palavra refletida se parece com a palavra original?

- Quais palavras que, quando refletidas, não têm alteração? Por que isso acontece?



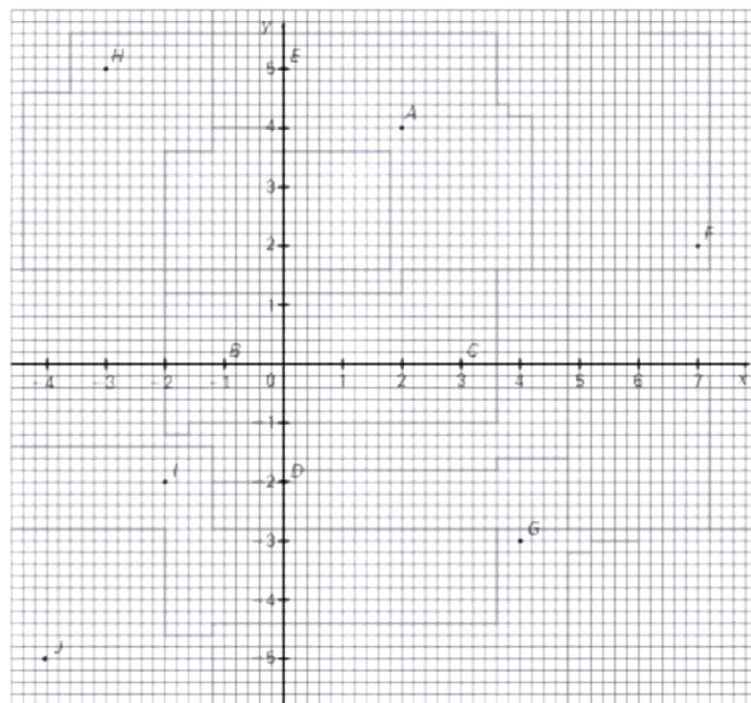
Praticando o aprendizado

1. Represente os pontos abaixo no plano cartesiano.

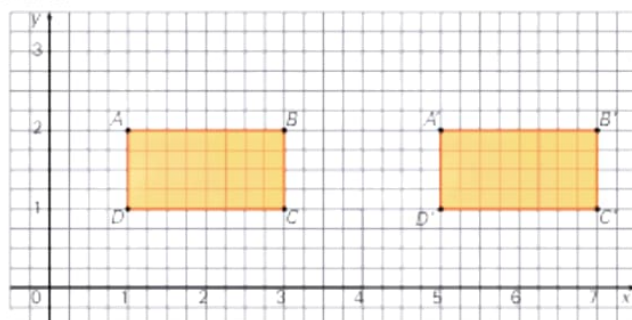


- | | | |
|---------------|----------------|---------------|
| a) $A(2, 2)$ | c) $C(3, 0)$ | e) $E(0, 2)$ |
| b) $B(2, -3)$ | d) $D(-3, -1)$ | f) $F(-4, 4)$ |

2. Indique as coordenadas dos pontos localizados no plano cartesiano abaixo.

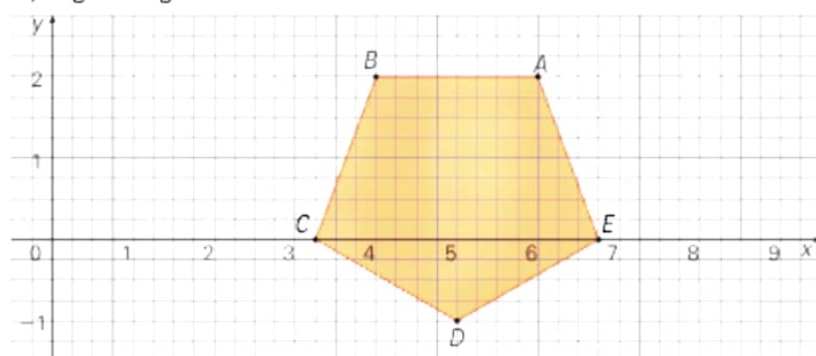


3. Observe a figura abaixo.



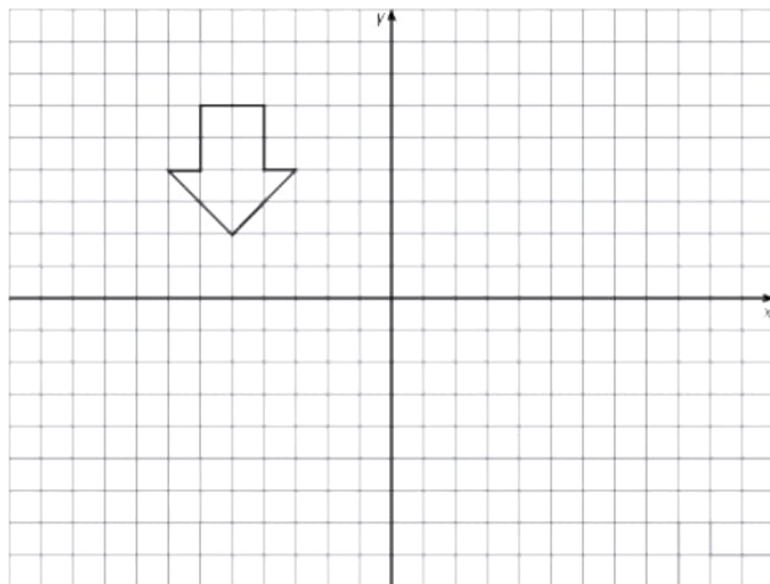
O polígono $A'B'C'D'$ foi obtido adicionando um número a uma das coordenadas dos pontos do polígono $ABCD$. Determine quantas unidades foram adicionadas a qual coordenada.

4. Observe o polígono regular abaixo.

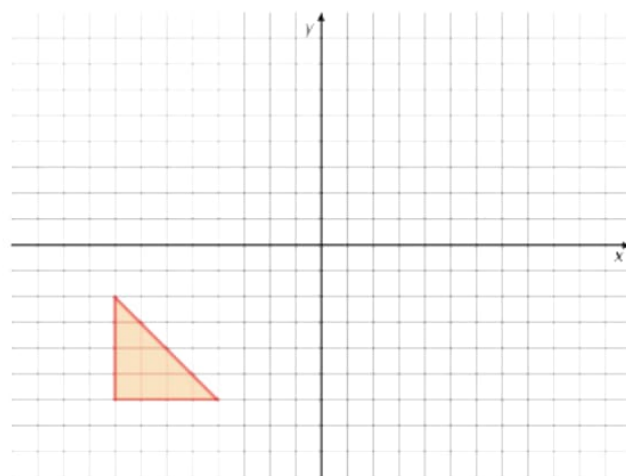


Se ampliarmos esse polígono, multiplicando por 4 as coordenadas dos seus vértices, qual será a medida do lado desse novo polígono?

5. Desenhe a reflexão da imagem abaixo nos quatro quadrantes.

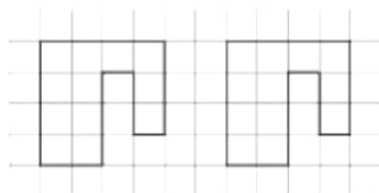


6. Desenhe a reflexão da imagem abaixo nos outros três quadrantes.



7. Nos pares de imagens abaixo, classifique a transformação geométrica em reflexão, translação ou rotação.

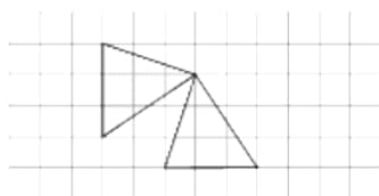
a)



c)



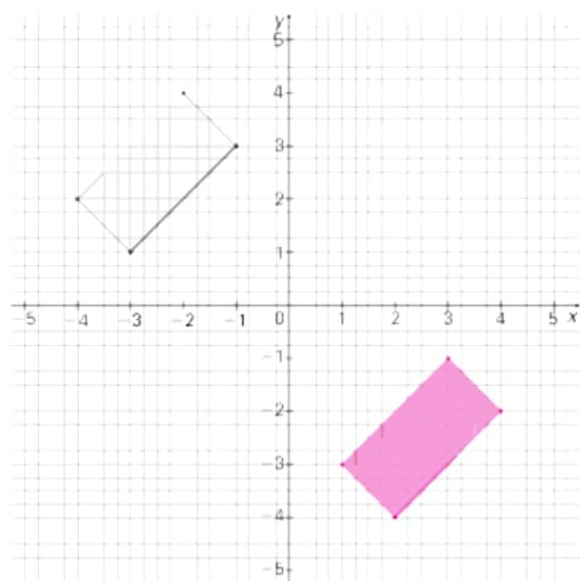
b)



d)

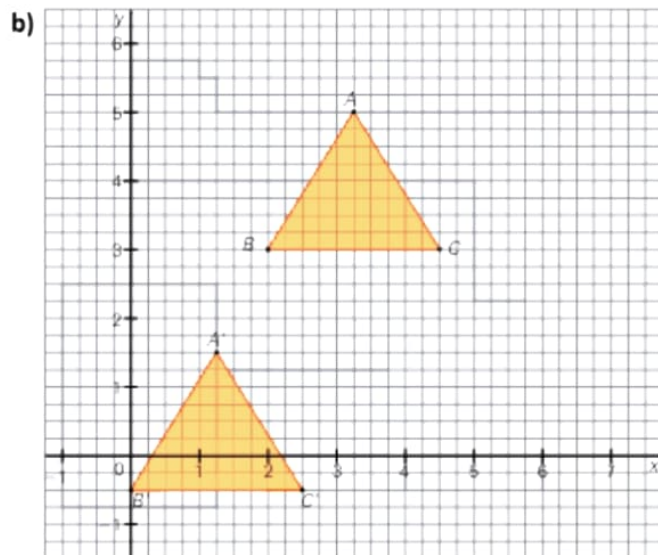
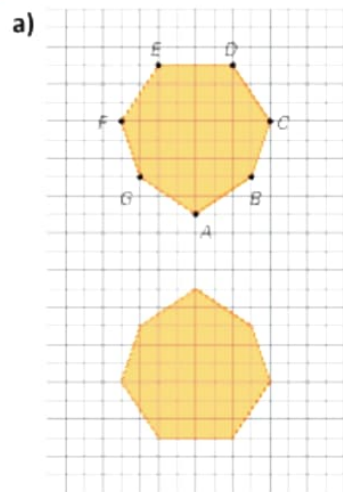


8. O plano cartesiano a seguir apresenta um retângulo.

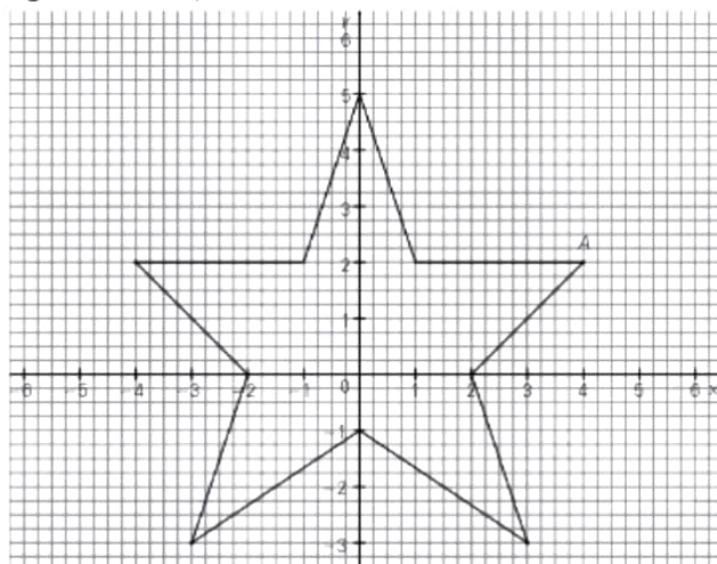


Deseja-se construir o simétrico do retângulo da imagem em relação à origem. Quais serão as coordenadas correspondentes aos vértices do retângulo simétrico?

9. Nos desenhos abaixo trace o eixo de simetria entre as figuras.



- 10.** Observe o polígono abaixo representado no sistema de eixos.

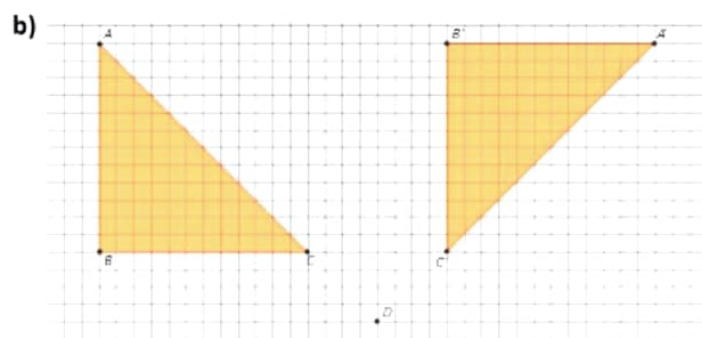
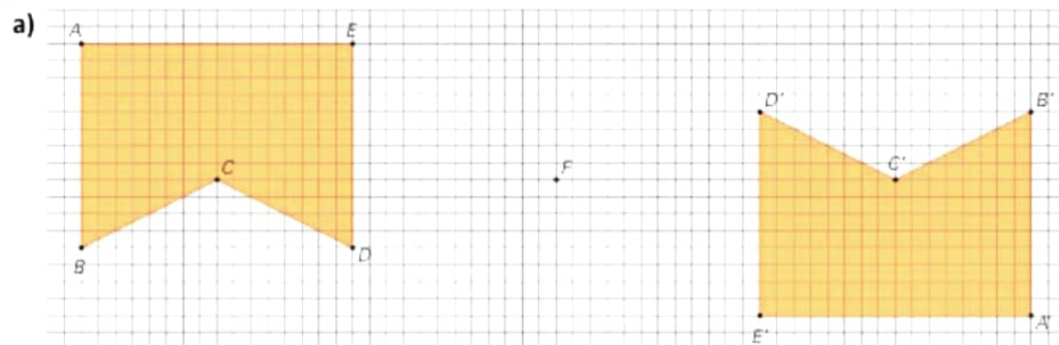


Determine as coordenadas:

- a) do vértice A;

- b) do vértice A' simétrico ao vértice A em relação ao eixo y.

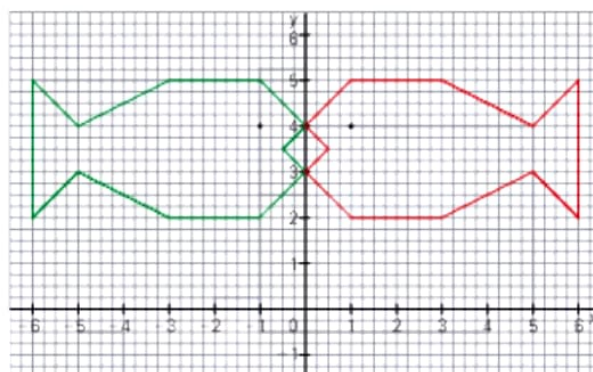
- 11.** Com o auxílio de régua e transferidor, determine o ângulo de rotação das figuras abaixo.





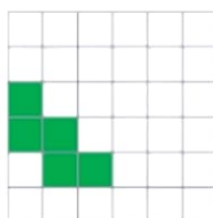
Desenvolvendo habilidades

1. Observe a figura abaixo.

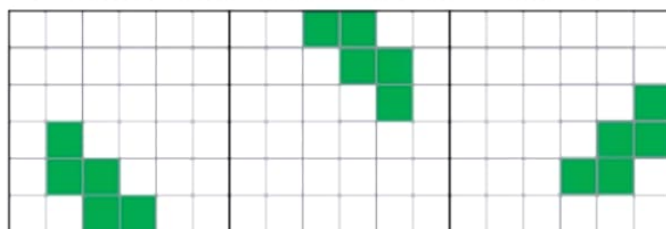


É correto afirmar que os peixes vermelho e verde são:

- a) assimétricos.
 - b) simétricos com relação ao eixo y .
 - c) simétricos com relação ao eixo x .
 - d) simétricos com relação à origem.
2. Observe a figura.



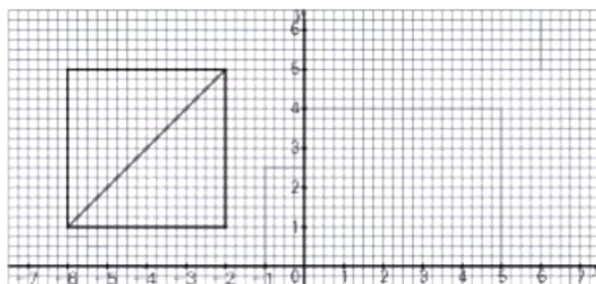
As figuras abaixo representam três tipos de simetria da figura acima.



Assinale a alternativa que corresponda a cada uma, respectivamente, da esquerda para a direita.

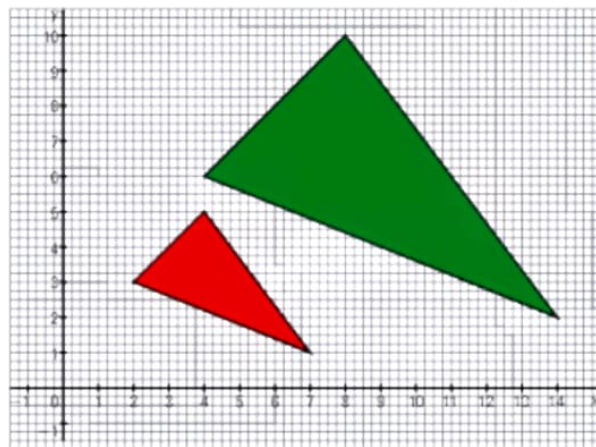
- a) Rotação, translação e reflexão.
- b) Translação, rotação e reflexão.
- c) Rotação, reflexão e translação.
- d) Reflexão, translação e rotação.

3. Analise o quadrado construído no plano cartesiano a seguir.



Construindo um quadrado simétrico ao da figura em relação ao eixo y , a diagonal destacada terá, nesse novo quadrado, vértices nos pontos:

- a) (6, 5) e (1, 2). b) (2, 5) e (1, 6). c) (5, 2) e (6, 1). d) (2, 5) e (6, 1).
4. Os vértices do polígono verde são obtidos com base nos vértices do polígono vermelho por meio de:



- a) uma ampliação. b) uma translação. c) uma reflexão. d) uma rotação.



Neste capítulo, você estudou transformações no plano cartesiano e isometrias (reflexão, rotação e translação).

Você estudou transformações geométricas ditadas pela operação com as coordenadas cartesianas, que podem gerar alterações de tamanho, orientação e/ou posição da figura inicial.

As isometrias são um tipo de transformação geométrica que preserva as distâncias e o formato dos objetos e das figuras geométricas, e podem ser definidas por um ponto, um ângulo de rotação e um sentido, uma reta ou um vetor. Ao aplicar uma isometria a uma figura, a figura resultante é congruente à original, e mantém tanto o tamanho quanto o formato da figura original.

Mapa conceitual

Para sistematizar os conceitos desenvolvidos neste módulo, preencha o mapa conceitual da página 517.



Para consolidar os principais conteúdos abordados neste módulo, acesse os flashcards disponíveis no Plurall.