Módulo

17

Equações de 1º grau

As equações do 1ª grau estão presentes no cotidiano. Ir ao supermercado e fazer compras é um dos modos de utilizar essas equações.

Objeto do conhecimento

- Equações de 1º grau com coeficientes inteiros, equações de 1º grau com coeficientes na forma fracionária e propriedades da igualdade

Habilidades

- Resolver equações de 1º grau com coeficientes inteiros.
- Resolver situações-problema utilizando equações de 1º grau com coeficientes inteiros.
- Resolver equações de 1º grau com coeficientes na forma fracionária, aplicando as propriedades de igualdade.
- Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Para começar

No módulo anterior, exploramos as expressões algébricas, aprendendo como elas podem representar situações do dia a dia. Agora, vamos dar um passo adiante e descobrir como essas expressões podem ser utilizadas na resolução de problemas matemáticos.

Por exemplo, suponha que estejamos procurando um número tal que seu dobro adicionado a 12 unidades seja igual a 48. Como encontrá-lo?

Vamos resolver esse problema utilizando, em um primeiro momento, apenas conhecimentos adquiridos no módulo passado. Vamos chamar de x o número desconhecido. Então, seu dobro valerá $2x$. Adicionando 12 unidades a esse número, chegaremos à expressão algébrica $2x + 12$. De acordo com as informações fornecidas, queremos que seu valor numérico seja igual a 48. Por tentativa e erro, temos:

- se $x = 10$, então $2x + 12 = 2 \cdot 10 + 12 = 20 + 12 = 32$. Logo, x deve ser maior que 10;
- se $x = 15$, então $2x + 12 = 2 \cdot 12 + 12 = 30 + 12 = 42$. Logo, x deve ser maior que 15;
- se $x = 20$, então $2x + 12 = 2 \cdot 20 + 12 = 40 + 12 = 52$. Logo, x deve ser menor que 20;
- se $x = 19$, então $2x + 12 = 2 \cdot 19 + 12 = 38 + 12 = 50$. Logo, x deve ser menor que 19;
- se $x = 18$, então $2x + 12 = 2 \cdot 18 + 12 = 36 + 12 = 48$. Logo, o número procurado é 18.

Nesse exemplo, o problema foi resolvido após 5 tentativas. Entretanto, em diversas situações, o método da tentativa e erro pode exigir muito tempo, de modo que será interessante desenvolvermos outras técnicas para resolver problemas como esse. No decorrer deste módulo, você aprenderá algumas delas.

Para aprender

Equação

No problema da seção **Para começar**, estávamos à procura do número desconhecido x tal que o valor numérico da expressão $2x + 12$ fosse igual a 48. Isso pode ser representado com uma **igualdade**:

$$2x + 12 = 48$$

Essa igualdade é um exemplo de **equação**.

Uma igualdade que contém pelo menos um valor desconhecido é chamada de equação.

Os valores desconhecidos em uma equação são chamados de incógnitas.

Outros exemplos de equações são:

$$36 - 3x = 15$$
$$10 + p = 5p$$
$$2y = 100$$

Equação do 1º grau com coeficientes inteiros

As equações citadas anteriormente são exemplos de **equações do 1º grau**. Todas podem ser resolvidas de maneira similar. Para entender isso, vamos resolver a equação $2x + 12 = 48$ por meio de uma analogia com um caso concreto.

Imagine que você tenha uma balança de dois pratos, perfeitamente equilibrada. Em um dos pratos, há uma caixa de 48 kg, e, no outro, uma caixa de 12 kg junto a outras duas caixas desconhecidas, mas de mesma massa.

Nosso objetivo é descobrir o valor da caixa desconhecida. Para isso, vamos remover caixas equivalentes dos dois lados da balança, de modo que ela continue equilibrada.

Para facilitar o trabalho, primeiro vamos trocar a caixa de 48 kg por uma caixa de 12 kg e outra caixa de 36 kg (note que a massa total desse lado da balança foi mantida).

Assim, podemos remover uma caixa de 12 kg de cada lado da balança, mantendo-a em equilíbrio.

Agora, no lado esquerdo, temos o dobro da massa desconhecida, e, no lado direito, temos uma massa de 36. Vamos, então, trocar a massa de 36 por duas de 18, e, em seguida, remover uma caixa de cada lado da balança.

Perceba que como os dois lados da balança estão equilibrados, reduzir ambos pela metade (dividir por 2) não altera o equilíbrio.

Portanto, a massa desconhecida x é igual a 18 kg.

Acompanhe, agora, os passos anteriores sendo aplicados diretamente à equação.

- Equação original:

$$2x + 12 = 48$$

- Subtraímos 12 unidades dos dois lados da equação:

$$2x + 12 - 12 = 48 - 12$$
$$2x = 36$$

- Dividimos os dois lados da equação por 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{36}{2}$$

$$x = 18$$

- Logo, $x = 18$ é a resposta.

Dizemos, então, que 18 é a **solução da equação**.

Outros exemplos:

- $3x + 10 = 31$

$$3x + 10 - 10 = 31 - 10$$
$$3x = 21$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$$
$$x = 7$$

- $4x - 5 = 111$

$$4x - 5 + 5 = 111 + 5$$
$$4x = 116$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{116}{4}$$
$$x = 29$$

- $42 - 9x = 15$

$$42 - 9x - 42 = 15 - 42$$
$$-9x = -27$$
$$\frac{-9x}{-9} = \frac{-27}{-9}$$
$$x = 3$$

Ao resolvermos uma equação, é possível verificar se o resultado encontrado está correto. Para isso, devemos substituir a incógnita pelo valor da resposta encontrada, efetuar as contas e verificar se a igualdade obtida está correta.

Por exemplo, em $3x + 10 = 31$, encontramos $x = 7$. Para sabermos se a resposta encontrada está correta, substituímos $x = 7$ na equação original.

$$3 \cdot 7 + 10 = 31$$
$$21 + 10 = 31$$
$$31 = 31 \text{ (verdadeiro)}$$

Se a igualdade encontrada não for correta, então o valor encontrado não será solução da equação. Por exemplo, suponha que um colega tenha resolvido a equação $8x - 7 = 25$ e encontrado como resposta $x = 5$. Vamos verificar se a resposta está correta:

$$8 \cdot 5 - 7 = 25$$
$$40 - 7 = 25$$
$$33 = 25 \text{ (falso)}$$

Logo, a solução dessa equação não é $x = 5$.

Repare e reflita

Qual seria a solução dessa equação?

Equação do 1º grau com coeficientes fracionários

Um número desconhecido é tal que a soma de sua quarta parte com sua sexta parte é igual a 50. Qual é esse número?

Denotando esse número desconhecido por n, temos a seguinte equação:

$$\frac{n}{4} + \frac{n}{6} = 50$$

Embora essa equação não tenha coeficientes inteiros, podemos resolvê-la de maneira similar às equações que resolvemos anteriormente. Vamos apresentar três métodos distintos.

1º método

No lado esquerdo da equação, temos duas frações com denominadores distintos. Para efetuarmos a adição de duas frações, seus denominadores devem ser iguais. Para isso, podemos encontrar um múltiplo comum dos denominadores e, assim, frações equivalentes que possam ser adicionadas sem dificuldade.

Para encontrar o menor múltiplo comum (MMC) de 4 e 6, podemos fatorar simultaneamente esses números.

$$\begin{array}{r|l} 4,\ 6 & 2 \\ 2,\ 3 & 2 \\ 1,\ 3 & 3 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

Logo, $\text{MMC}(4, 6) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Assim, vamos reescrever as frações do lado esquerdo da equação, utilizando o denominador 12. Para isso, é necessário multiplicar numerador e denominador da primeira fração por 3, e, os da segunda fração, por 2.

$$\frac{n \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{n \cdot 2}{6 \cdot 2} = 50$$

$$\frac{3n}{12} + \frac{2n}{12} = 50$$

Então, podemos efetuar a adição no lado esquerdo.

$$\frac{5n}{12} = 50$$

Para eliminarmos a divisão por 12 do lado esquerdo, podemos multiplicar os dois lados da equação por 12.

$$12 \cdot \frac{5n}{12} = 50 \cdot 12$$

$$5n = 600$$

Finalmente, dividimos os dois lados da equação por 5.

$$\frac{5n}{5} = \frac{600}{5}$$

$$n = 120$$

Logo, a solução da equação é 120.

Verificação:

Substituindo $n = 120$ na equação original:

$$\frac{n}{4} + \frac{n}{6} = 50$$

$$\frac{120}{4} + \frac{120}{6} = 50$$

$$30 + 20 = 50 \text{ (verdadeiro)}$$

2º método

Vamos reescrever os números dos dois lados da equação com um mesmo denominador.

$$\frac{n}{4} + \frac{n}{6} = \frac{50}{1}$$

O MMC de 4, 6 e 1 é igual a 12. Então:

$$\frac{n \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{n \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{50 \cdot 12}{1 \cdot 12}$$

$$\frac{3n}{12} + \frac{2n}{12} = \frac{600}{12}$$

Multiplicando os dois lados da equação por 12:

$$\left(\frac{3n}{12} + \frac{2n}{12}\right) \cdot 12 = \left(\frac{600}{12}\right) \cdot 12$$

$$3n + 2n = 600$$

Temos, agora, uma equação do 1º grau com coeficientes inteiros. Vamos resolvê-la:

$$3n + 2n = 600$$

$$5n = 600$$

$$\frac{5n}{5} = \frac{600}{5}$$

$$n = 120$$

3º método

Podemos multiplicar diretamente os dois lados da equação original pelo MMC dos denominadores de todas as frações, que, nesse caso, é 12 (como observado anteriormente).

$$\frac{n}{4} + \frac{n}{6} = 50$$

$$\left(\frac{n}{4} + \frac{n}{6}\right) \cdot 12 = (50) \cdot 12$$

$$\frac{12n}{4} + \frac{12n}{6} = 600$$

$$3n + 2n = 600$$

Assim:

$$5n = 600$$

$$\frac{5n}{5} = \frac{600}{5}$$

$$n = 120$$

Os três métodos apresentados podem ser utilizados para resolver qualquer equação do 1º grau com coeficientes fracionários.

Confira mais alguns exemplos.

- $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = x + 15$

1º método

$$\frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2x \cdot 2}{3 \cdot 2} = x + 15$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{4x}{6} = x + 15$$

$$\frac{7x}{6} = x + 15$$

$$\frac{7x}{6} \cdot 6 = (x + 15) \cdot 6$$

$$7x = 6x + 90$$

$$7x - 6x = 6x + 90 - 6x$$

$$x = 90$$

2º método

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = x + 15$$

$$\frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2x \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{x \cdot 6}{1 \cdot 6} + \frac{15 \cdot 6}{1 \cdot 6}$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{4x}{6} = \frac{6x}{6} + \frac{90}{6}$$

$$\left(\frac{3x}{6} + \frac{4x}{6}\right) \cdot 6 = \left(\frac{6x}{6} + \frac{90}{6}\right) \cdot 6$$

$$3x + 4x = 6x + 90$$

$$7x = 6x + 90$$

$$7x - 6x = 6x + 90 - 6x$$

$$x = 90$$

3º método

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = x + 15$$

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{2x}{3}\right) \cdot 6 = (x + 15) \cdot 6$$

$$\frac{6x}{2} + \frac{12x}{3} = 6x + 90$$

$$3x + 4x = 6x + 90$$

$$7x = 6x + 90$$

$$7x - 6x = 6x + 90 - 6x$$

$$x = 90$$

- $\frac{x}{2} + 2 = \frac{5x}{6} + \frac{2}{3}$

1º método

Para facilitar as contas, vamos reescrever a equação de modo que todas as frações com denominadores diferentes de 1 fiquem do mesmo lado da equação.

$$\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{2} = \frac{5x}{6} + \frac{2}{3} - \frac{x}{2}$$

$$2 = \frac{5x}{6} + \frac{2}{3} - \frac{x}{2}$$

$$2 = \frac{5x \cdot 1}{6 \cdot 1} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} - \frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3}$$

$$2 = \frac{5x}{6} + \frac{4}{6} - \frac{3x}{6}$$

$$2 = \frac{2x + 4}{6}$$

$$2 \cdot 6 = \left(\frac{2x + 4}{6}\right) \cdot 6$$

$$12x = 2x + 4$$

$$12x - 4 = 2x + 4 - 4$$

$$8 = 2x$$

$$\frac{8}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$4 = x$$

2º método

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{5x}{6} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 6}{1 \cdot 6} = \frac{5x \cdot 1}{6 \cdot 1} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{12}{6} = \frac{5x}{6} + \frac{4}{6}$$

$$\left(\frac{3x}{6} + \frac{12}{6}\right) \cdot 6 = \left(\frac{5x}{6} + \frac{4}{6}\right) \cdot 6$$

$$3x + 12 = 5x + 4$$

$$3x + 12 - 3x = 5x + 4 - 3x$$

$$12x = 2x + 4$$

$$12x - 4 = 2x + 4 - 4$$

$$8 = 2x$$

$$\frac{8}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$4 = x$$

3º método

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{5x}{6} + \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{x}{2} + 2\right) \cdot 6 = \left(\frac{5x}{6} + \frac{2}{3}\right) \cdot 6$$

$$\frac{6x}{2} + 12 = \frac{30x}{6} + \frac{12}{3}$$

$$3x + 12 = 5x + 4$$

$$3x + 12 - 3x = 5x + 4 - 3x$$

$$12x = 2x + 4$$

$$12x - 4 = 2x + 4 - 4$$

$$8 = 2x$$

$$\frac{8}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$4 = x$$

Para solucionar

Situação-problema

Quatro irmãos receberam como herança uma coleção de moedas. De acordo com o testamento, um deles deveria receber metade das moedas; o segundo receberia um terço das moedas; o terceiro, a sétima parte das moedas; e o último receberia as 5 moedas restantes. Como calcular a quantidade de moedas que cada irmão deverá receber?

Estudo autodirigido

Seguindo as orientações do professor, reúna-se com um colega e discuta estratégias para que se possa calcular a quantidade de moedas que cada irmão deverá receber.

- Como podemos representar esse problema na forma de uma equação?

- Quais são as características dessa equação? Os coeficientes são inteiros ou fracionários?

- Quais métodos podem ser aplicados para a resolução desse problema?

Resolução do problema

Após a discussão anterior, calcule a quantidade de moedas que cada irmão deverá receber.

Para explorar

E se tivéssemos dois valores desconhecidos em uma equação do 1º grau?

Por exemplo, o dobro de um número somado a 1 unidade é igual ao triplo de outro número somado a 2 unidades. Denotando um desses números por x, e outro por y, temos a equação:

$$2x + 1 = 3y + 2$$

Vamos tentar encontrar uma solução para esse problema.

1. Explique como a equação anterior pode ser reescrita como $2x - 3y = 1$.

2. Preencha o quadro abaixo com os valores da expressão $2x - 3y$. Note que alguns resultados já foram preenchidos. Conforme for preenchendo, você perceberá um padrão para a construção de cada linha e outro para a construção de cada coluna. Quais são esses padrões?

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0		−6	−9			−18		−24		
1	2		−4	−7	−10	−13	−16	−19	−22	−25	−28
2		1	−2		−8						−26
3	6		0		−6		−12	−15	−18	−21	
4		5	2	−1			−10	−13	−16	−19	
5	10	7			−2	−5			−14	−17	−20
6		9			0	−3	−6	−9	−12		−18
7		11	8			−1		−7	−10		−16
8	16			7	4	1	−2	−5		−11	
9		15		9			0		−6		−12
10	20	17	14		8	5	2		−4		−10
11			16		10		4		−2	−5	−8
12	24	21	18	15	12	9			0		
13		23					8		2		−4
14	28		22	19	16	13		7	4	1	
15	30			21	18			9	6	3	0

3. Analise os números escritos e responda:

Quantas soluções distintas você encontrou para a equação $2x + 1 = 3y + 2$? Existem outras?

4. Suponha que uma informação adicional seja dada: a soma desses dois números desconhecidos vale 39. Nesse caso, utilizando os padrões observados nessa tabela, encontre os valores de x e y.

Praticando o aprendizado

1. Resolva as equações a seguir e faça a verificação do resultado encontrado.

a) $x + 8 = 20$

b) $7 + x = 13$

c) $12 - x = 9$

d) $15 - x = 20$

e) $14 + x = 19$

f) $3 + x = 1$

g) $50 - x = 10$

h) $24 - x = 30$

2. Resolva as equações a seguir e faça a verificação do resultado encontrado.

a) $4x + 15 = 95$

b) $13 + 2x = 25$

c) $19 - 3x = 4$

d) $44 - 10x = -6$

e) $5x + 20 = 5$

f) $60 + 9x = 105$

g) $71 - 2x = 43$

h) $77 - 7x = 0$

Uso pessoal e intransferível para Ícaro Coelho Antonoff (11152

3. Resolva as equações a seguir e faça a verificação do resultado encontrado.

a) $6(x + 4) = 4(x - 2)$

b) $12 - x = 2(x + 3)$

c) $6(x + 2) - 4(x + 4) + 20 = 0$

d) $8(x + 3) - 20(x + 1) + 44 = 0$

4. Escreva a equação que representa cada um dos problemas a seguir. Em seguida, resolva-os.

a) A soma de dois números consecutivos é igual a 71. Quais são esses números?

b) A soma de dois números ímpares consecutivos é igual a 208. Quais são esses números?

c) O quíntuplo de um número é 4 unidades maior que o número 36. Qual é esse número?

d) A soma de três números pares consecutivos é igual a 192. Quais são esses números?

e) A soma de cinco números consecutivos é igual a 85. Quais são esses números?

f) O quádruplo da diferença entre o quádruplo de um número e o número 3 (nessa ordem) é igual ao quíntuplo da soma desse número com o número 2. Qual é esse número?

5. Resolva as equações a seguir.

a) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} = 20$

d) $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = 14$

b) $5x - \frac{x}{4} = 19$

e) $\frac{4x}{3} - \frac{x}{2} = 5$

c) $\frac{7x}{4} + 10 = x + 19$

f) $\frac{3x}{2} + \frac{5x}{9} = 185$

g) $\frac{2x}{3} + 6 = x + 10$

h) $117 - \frac{3x}{4} = \frac{5x}{2}$

i) $\frac{4x}{3} - \frac{14}{15} = \frac{6x}{5} - 4$

j) $\frac{10x}{3} + \frac{5}{6} = 5x - \frac{25}{12}$

k) $x - 15 = \frac{5x}{3} - 35$

l) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 54$

6. Escreva a equação que representa cada uma das situações a seguir. Em seguida, resolva-as.

a) A terça parte de um número menos a sua quinta parte é igual a 36. Qual é esse número?

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 36$$

b) A quarta parte de um número adicionada a um décimo desse número é igual à metade de 21. Qual é esse número?

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{10} = \frac{21}{2}$$

c) Se subtrairmos de um número um terço desse mesmo número, encontramos 40. Qual é esse número?

$$x - \frac{x}{3} = 40$$

d) A soma da metade com a terça parte e com a quarta parte de um mesmo número é igual a 1 unidade a mais que o próprio número. Qual é esse número?

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1x + 1$$

7. Após estudar o conteúdo desse módulo. Volte e analise a imagem de abertura. Elabore um problema, com resolução, que envolva uma ida ao supermercado.

Desenvolvendo habilidades

1. Pedro foi ao *shopping* comprar um presente para sua mãe. O estacionamento cobra R$ 15,00 pela primeira hora e R$ 4,00 por hora adicional. Se ele pagou R$ 31,00 pelo período em que ficou no estabelecimento, por quantas horas ele deixou o carro estacionado?

a) 2 horas

b) 3 horas

c) 4 horas

d) 5 horas

2. A mãe de Joana é 34 anos mais velha que a filha. Quais são suas idades atuais, se hoje elas somam 50 anos?

a) Joana tem 8 anos e sua mãe, 42 anos.

b) Joana tem 9 anos e sua mãe, 43 anos.

c) Joana tem 10 anos e sua mãe, 44 anos.

d) Joana tem 11 anos e sua mãe, 45 anos.

3. Um carro de aplicativo cobra R$ 4,50 fixos mais R$ 2,50 pelo quilômetro rodado. Se uma corrida custou R$ 32,00, quantos quilômetros foram percorridos?

a) 10 km

b) 11 km

c) 12 km

d) 13 km

4. Uma concessionária de veículos comercializa carros e motos. Se há um total de 77 veículos e 250 rodas, quantos carros e quantas motos há nesse estabelecimento? Considere que cada carro tem 4 rodas (desconsidere o estepe).

a) Há 48 carros e 29 motos.

b) Há 50 carros e 30 motos.

c) Há 52 carros e 32 motos.

d) Há 54 carros e 34 motos.

5. Sofia tem 5 brinquedos a mais que sua irmã, Marina, que tem $\frac{3}{7}$ do total de brinquedos. Quantos brinquedos tem cada uma delas?

a) Marina tem 15 brinquedos e Sofia tem 20 brinquedos.

b) Marina tem 20 brinquedos e Sofia tem 25 brinquedos.

c) Marina tem 25 brinquedos e Sofia tem 30 brinquedos.

d) Marina tem 20 brinquedos e Sofia tem 15 brinquedos.

6. Ângelo está lendo um livro.

- Na segunda-feira, leu metade do total de páginas.
- Na terça-feira, leu um quinto do total de páginas.
- Na quarta-feira, leu, novamente, um quinto do total de páginas.
- Na quinta-feira, leu 110 páginas, e acabou a leitura.

Quantas páginas tem esse livro?

a) 1000

b) 1100

c) 1200

d) 1300

7. Um bebê, após ganhar 6 kg, triplicou sua massa. Com quantos kg ele nasceu?

a) 1 kg

b) 2 kg

c) 3 kg

d) 4 kg

8. Na festa de 10 anos de sua neta, Sandra deu uma certa quantia de presente de aniversário. Na festa de 11 anos, deu o dobro da quantia que havia dado no ano anterior. Na festa de 12 anos, deu o dobro da quantia que havia dado no ano anterior. Se o total presenteado foi de R$ 1.750,00 nesses três aniversários, quantos reais Sandra deu de presente no aniversário de 10 anos de sua neta?

a) R$ 200,00

b) R$ 250,00

c) R$ 300,00

d) R$ 350,00

Para concluir

Nesse módulo, aprendemos o que é uma equação e como resolver equações do 1º grau com coeficientes inteiros e com coeficientes fracionários.

Mapa conceitual

Para sistematizar os conceitos desenvolvidos nos módulos 16 e 17, preencha o mapa conceitual da **página 393**.

Flashcards

Para consolidar os principais conteúdos abordados neste módulo, acesse os *flashcards* disponíveis no **Plurall**.