Módulo 10

Triângulos

Observe na foto as estruturas triangulares no suporte de um telhado. Essa estrutura é muito usada em construções. Isso se deve ao fato de o triângulo ser rígido: não pode ser deformado, promovendo estabilidade e resistência ao projeto.

+ Conteúdos

Objetos do conhecimento

- Triângulos: classificação, construção e condição de existência
- Triângulos na arquitetura e na arte
- Soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e relação entre os ângulos internos do triângulo
- Relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes do triângulo

Habilidades

- Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
- Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.
- Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
- Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

Para começar

Leia a tira a seguir.

Discuta com os colegas sobre a pergunta: qual o humor presente no quadrinho?

Para entender melhor a piada, vamos nos aprofundar no estudo dos triângulos e suas propriedades.

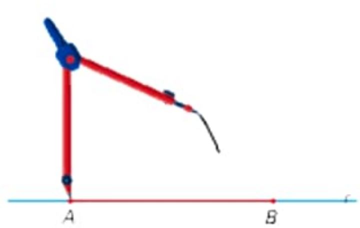
Para aprender

Construção de triângulos com régua e compasso

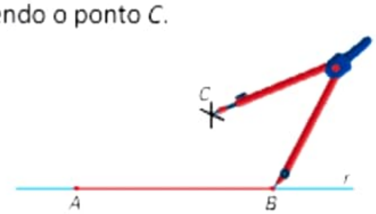
Conhecendo as medidas dos lados de um triângulo, poderemos construí-lo usando régua e compasso. Acompanhe o passo a passo da construção de um triângulo *ABC* com lados que medem 6 cm, 4 cm e 5 cm.

I) Trace uma reta *r* e sobre ela construa o segmento $\overline{AB}$, de medida igual a 6 cm, que será um dos lados do triângulo.

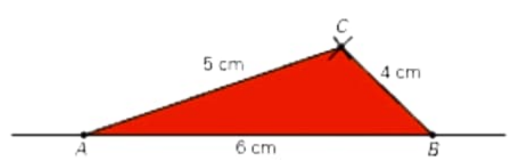
II) Utilize um compasso com abertura de 5 cm e, com a ponta-seca do compasso no ponto *A* da reta *r*, trace um arco.



III) Com abertura de 4 cm e com a ponta-seca do compasso no ponto *B* da reta *r*, trace outro arco de modo que ele cruze o anterior, obtendo o ponto *C*.



IV) A partir do ponto *C* trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Em seguida, pinte a região interna da figura para obter o triângulo *ABC*.



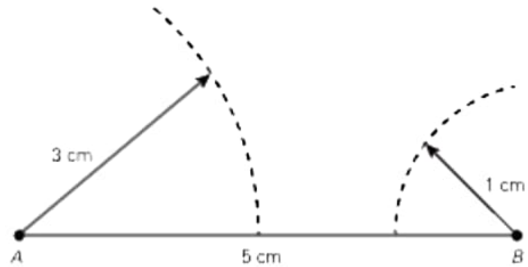
+ Conteúdos

Condição de existência

Será que com quaisquer 3 medidas é possível construir um triângulo?

Vamos tentar com as seguintes medidas: $AB = 5$ cm, $BC = 1$ cm e $AC = 3$ cm.

Repetindo o procedimento para construção de um triângulo com régua e compasso, observa-se que não houve interseção dos arcos, logo não é possível construir um triângulo com essas medidas.

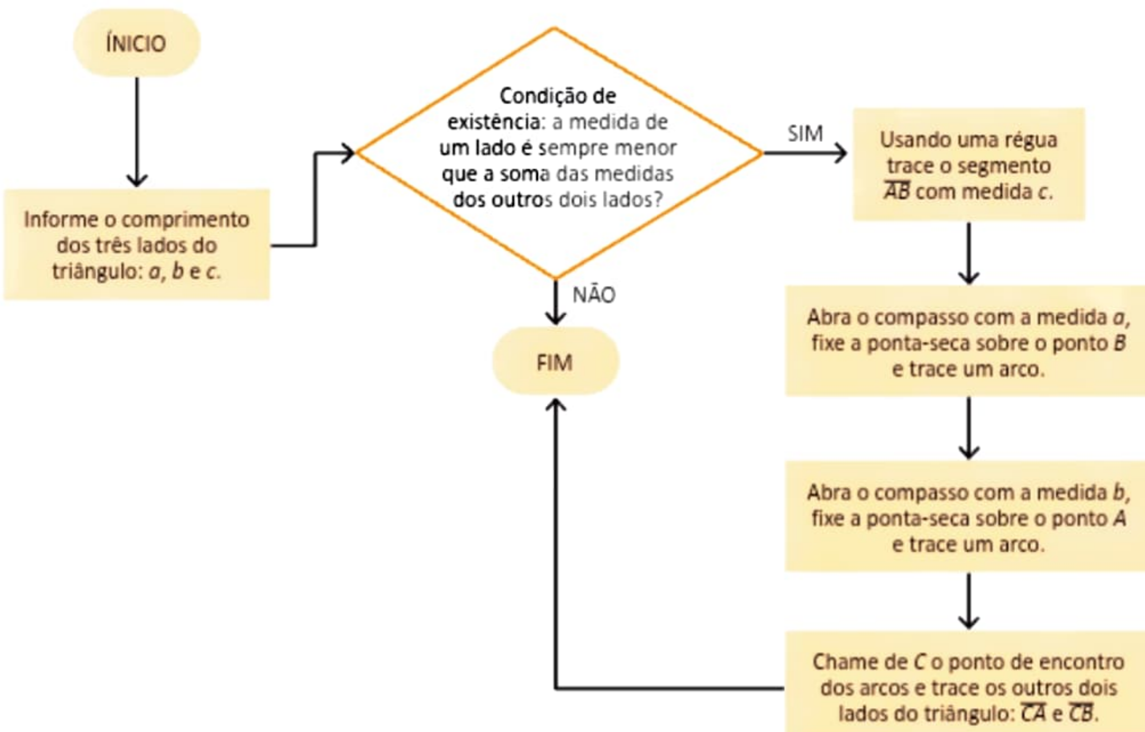


Só é possível construir um triângulo dadas três medidas se elas obedecerem à condição de existência enunciada a seguir.

Qualquer que seja o triângulo, a medida de um lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Note no exemplo anterior que **5 cm > 1 cm + 3 cm**. Por isso, não foi possível construir o triângulo.

Agora, observe o fluxograma a seguir, que verifica a condição de existência de um triângulo dadas as medidas dos lados, e instrui sua construção.

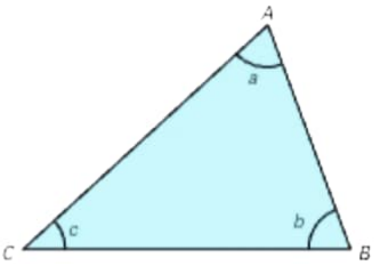


Pense em três medidas possíveis para compor um triângulo e construa-o seguindo os passos do fluxograma.

+ Conteúdos

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

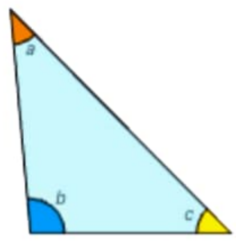
Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é 180°.



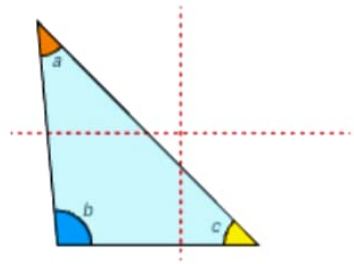
$a + b + c = 180°$

Vamos verificar essa afirmação? Siga o passo a passo.

I) Desenhe, em uma folha de papel, um triângulo qualquer e pinte cada ângulo interno da figura de uma cor diferente.



II) Recorte o triângulo em três partes de modo que cada uma contenha apenas um dos ângulos internos.



III) Junte os três ângulos, formando um ângulo de medida igual a 180°.

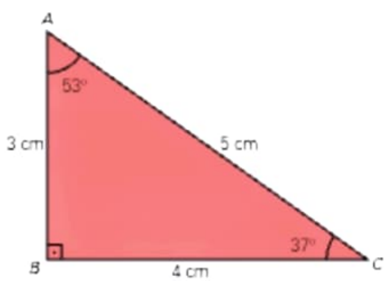
Viu como é simples? Agora, você não vai mais se esquecer dessa propriedade. Ela é válida para qualquer triângulo, como você deve ter observado nos diferentes triângulos construídos em sua turma.

+ Conteúdos

Relação entre lados e ângulos internos do triângulo

Em todo triângulo, o maior ângulo está oposto ao maior lado e, reciprocamente, o maior lado está oposto ao maior ângulo. Da mesma forma, o menor ângulo está oposto ao menor lado e, reciprocamente, o menor lado está oposto ao menor ângulo.

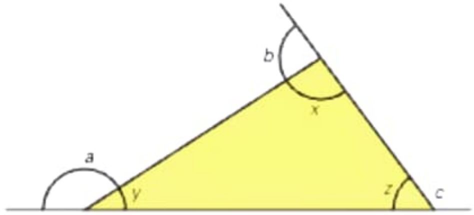
Observe como ela pode ser verificada no triângulo do exemplo.



$$\begin{array}{ccccc} 90° & > & 53° & > & 37° \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5\text{ cm} & > & 4\text{ cm} & > & 3\text{ cm} \end{array}$$

Relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes

Em todo triângulo a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.



Vamos verificar essa afirmação com base no que você aprendeu até aqui.

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Então, podemos escrever: (I) $x + y + z = 180°$.

Agora, a soma do ângulo externo a com o interno y adjacente a ele também é 180°, o que nos dá a equação: (II) $a + y = 180°$.

Fazendo (I) = (II), temos: $a + y = x + y + z$.

E, finalmente, podemos concluir que: $a = x + z$.

De maneira análoga, é possível provar que: $b = y + z$ e $c = x + y$.

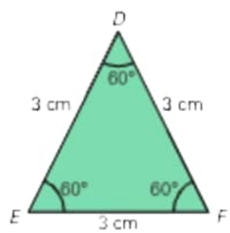
Classificação dos triângulos de acordo com as medidas dos lados

Elementos fora de proporção

Cores fantasia

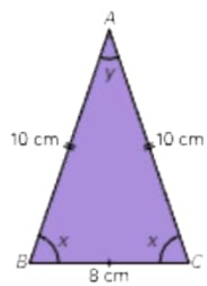
De acordo com as medidas dos lados, os triângulos podem ser classificados em **equilátero**, **isósceles** ou **escaleno**.

Triângulo equilátero: é o triângulo que tem os três lados com medidas iguais (três lados congruentes).



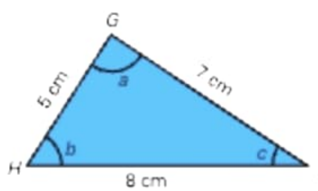
Os ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes. Nesse caso, cada ângulo interno mede 60°.

Triângulo isósceles: é o triângulo que tem dois lados com medidas iguais.



Observe no triângulo isósceles ABC ao lado que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes, então o lado $\overline{BC}$ é considerado a base do triângulo. Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Triângulo escaleno: é o triângulo que tem os três lados com medidas diferentes.



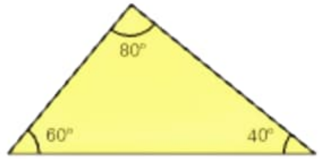
Em todo triângulo escaleno, os ângulos são diferentes entre si.

+ Conteúdos

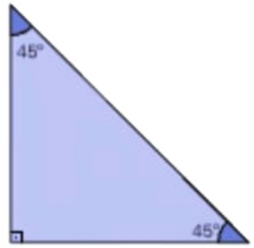
Classificação dos triângulos de acordo com as medidas dos ângulos

De acordo com as medidas dos ângulos, os triângulos podem ser classificados em **acutângulo**, **retângulo** ou **obtusângulo**.

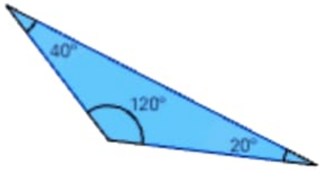
Triângulo acutângulo: é o triângulo que possui os três ângulos agudos, ou seja, menores que 90° e maiores que 0°.



Triângulo retângulo: é o triângulo que tem um ângulo reto, ou seja, igual a 90°. Os demais ângulos são agudos.



Triângulo obtusângulo: é o triângulo que tem um ângulo obtuso (ou seja, maior que 90°e menor que 180°) e os demais são agudos.

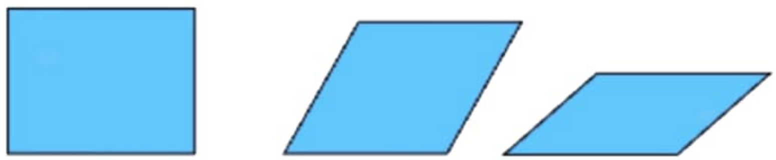


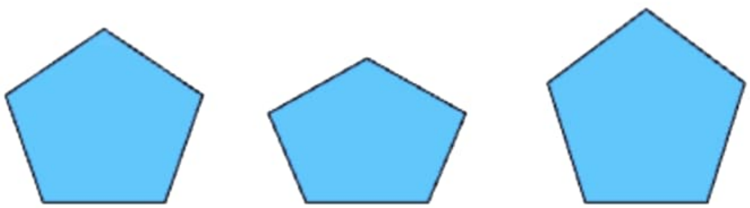
Rigidez do triângulo

Um triângulo é um polígono rigidamente estático, o que significa que ele é rígido e não pode ser deformado sem alterar as medidas de seus lados. Ou seja, uma vez definidos os comprimentos dos três lados de um triângulo, sua forma é totalmente fixada e não pode ser alterada sem modificar esses comprimentos.

Isso ocorre, porque as medidas dos ângulos internos de um triângulo são completamente determinadas pelos comprimentos dos seus lados. Portanto, qualquer tentativa de deformar um triângulo enquanto se mantém constante o comprimento de seus lados resultará na alteração de sua forma geral, confirmando a rigidez estrutural do triângulo.

Outros polígonos podem ser deformados mantendo as medidas de seus lados. Observe a seguir.



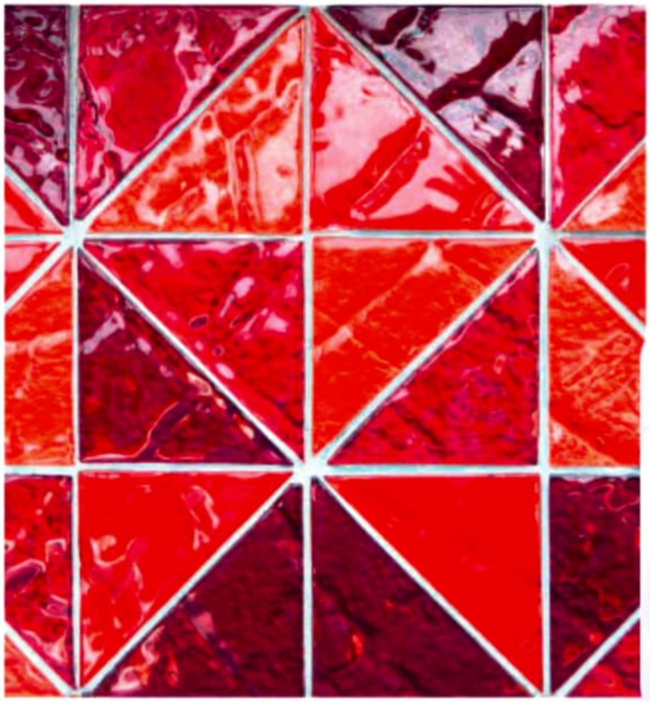


+ Conteúdos

Triângulo na arquitetura e na arte

O triângulo, além de suas propriedades geométricas básicas, desempenha um papel importante na arquitetura e na arte. Na arquitetura, ele oferece estabilidade estrutural e inovação, enquanto na arte, proporciona equilíbrio, simbolismo e novas formas de expressão. A combinação de funcionalidade e estética faz do triângulo um componente vital na criação e apreciação de obras em ambos os campos.

O ladrilhamento de triângulos é uma técnica matemática e artística que explora a disposição e a repetição de triângulos para cobrir um plano sem deixar lacunas ou sobreposições. Essa abordagem é um exemplo de mosaico, em que uma forma geométrica é repetida para preencher uma superfície.

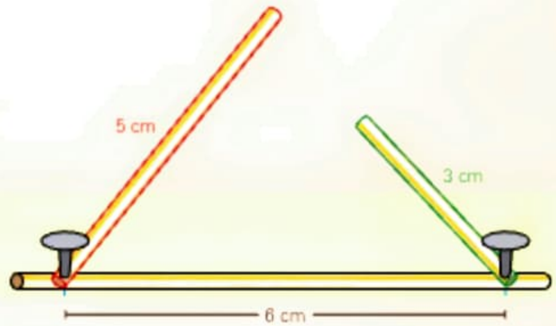


Catedral em Christchurch, Nova Zelândia, 2013.

Museu do Louvre, Paris, 2014.

Para explorar

Construindo triângulos



Materiais:

- canudos coloridos
- tesoura de ponta arredondada
- régua
- percevejo ou tachinha
- pequeno pedaço de cartolina ou isopor

Instruções:

Pegue três canudos. Com a tesoura, corte um canudo com medida de 6 cm, um com 5 cm e o outro com 3 cm. Cada pedaço de canudo deve ser de uma cor.

Com cuidado para não se machucar, use o percevejo para prender as extremidades dos canudos na cartolina ou na placa de isopor, como mostra a figura.

Por fim, tente unir as extremidades dos pedaços de canudo.

- Você conseguiu representar um triângulo com essas medidas? Por quê?

____

____

- Repita o procedimento com outros canudos usando as seguintes medidas: 5 cm, 3 cm e 8 cm; 4 cm, 4 cm e 7 cm. Em algum dos casos, você não conseguiu formar um triângulo? Por quê?

____

____

+ Conteúdos

Para solucionar

Situação-problema

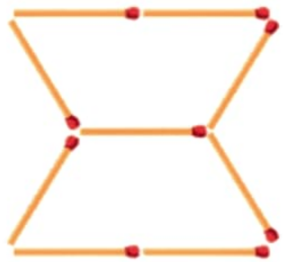
Vamos utilizar palitos de fósforo para resolver desafios que testam o raciocínio lógico e aprofundam o entendimento sobre triângulos e suas propriedades.

Materiais:

- Palitos de fósforo
- Fita adesiva (para fixar os palitos, se necessário)
- Papel e lápis (para anotações)

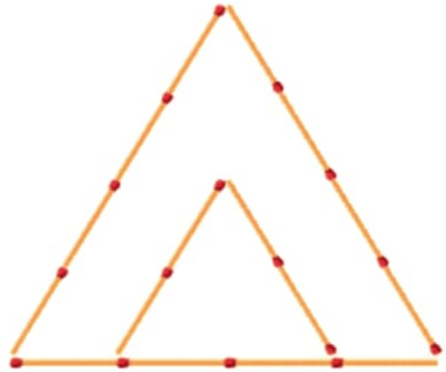
Em grupos com 4 ou 5 alunos, tentem resolver às seguintes atividades.

- Com 9 palitos, construa a figura abaixo:



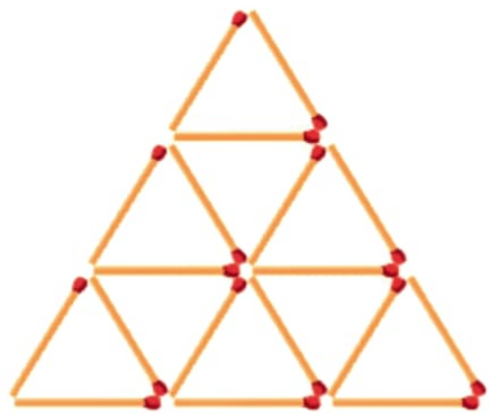
Movimente dois palitos para formar três triângulos.

- Com 16 palitos, construa a figura abaixo:



Movimente dois palitos para formar três triângulos.

- Com 18 palitos, construa a figura abaixo:



Retire cinco palitos para formar cinco triângulos.

Como é possível criar um desafio relacionado a triângulos, seguindo o estilo dos desafios anteriores?

Estudo autodirigido

- Relembre os conceitos que você estudou neste módulo. Quais deles é possível identificar na resolução desses desafios?
- Após analisar as resoluções às quais você e o seu grupo chegaram, identifiquem qual é o padrão encontrado nas três atividades propostas.
- Pesquisem na internet mais desafios que sigam o padrão que vocês identificaram.

Resolução do problema

Com base no que pesquisaram, proponham um desafio, diferente dos que encontraram na internet e dos que foram apresentados aqui. Depois, apresentem-no para a turma e resolvam todos os desafios propostos.

Praticando o aprendizado

1. Pesquise e identifique três objetos triangulares que você encontra no seu cotidiano. Descreva como o formato triangular é utilizado nesses objetos e quais são suas funções práticas.

____

____

____

____

____

____

2. Verifique se é possível construir triângulos com as medidas abaixo:

a) 7 cm, 5 cm e 4 cm

____

b) 3 cm, 5 cm e 1,5 cm

____

c) 6 cm, 6 cm e 8 cm

____

d) 9 cm, 6 cm e 3 cm

____

3. Usando régua e compasso, construa os triângulos cujas medidas dos lados são:

a) 4 cm, 4 cm e 7 cm

b) 3 cm, 4 cm e 5 cm

c) 5 cm, 6 cm e 9 cm

d) 8 cm, 8 cm e 8 cm

4. Classifique os triângulos da **atividade 3** quanto aos lados.

____

____

____

____

+ Conteúdos

5. O triângulo ABC possui as seguintes medidas:

- $AB = 9$ cm
- $BC = 6$ cm
- $AC = x$ cm

Sabendo que $\overline{AB}$ é o maior lado desse triângulo, quais números naturais correspondem aos possíveis valores de x?

6. O triângulo FLA possui os três ângulos internos com mesma medida. Qual é a medida de cada ângulo interno desse triângulo?

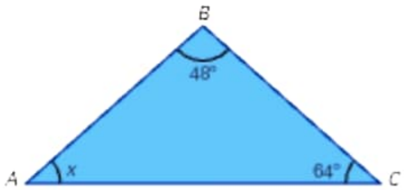
7. Dois ângulos internos de um triângulo medem, cada um, 35°. Qual é a medida do outro ângulo interno desse triângulo?

8. No triangulo $\overline{ABC}$ o ângulo $\hat{A}$ mede 30° e a medida do ângulo $\hat{B}$ é o dobro da medida do ângulo $\hat{C}$. Determine as medidas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

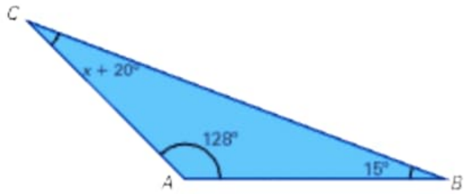
9. Sabe-se que o triângulo MAR é isósceles e dois de seus lados medem 5 cm e 10 cm. Qual é a medida do terceiro lado desse triângulo?

10. Calcule o valor de ***x***, em grau, nos triângulos a seguir.

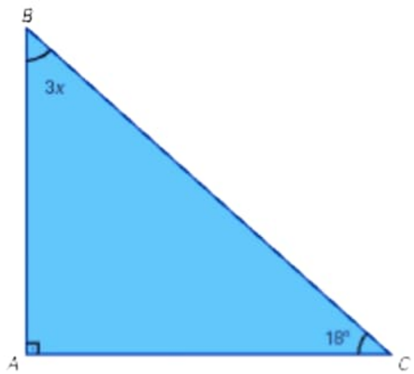
a)



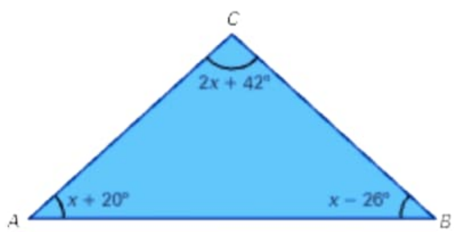
b)



c)

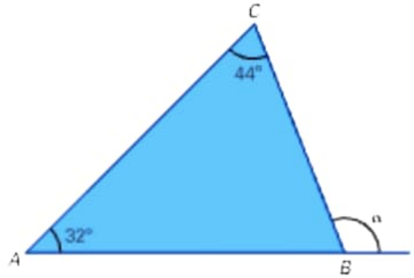


d)

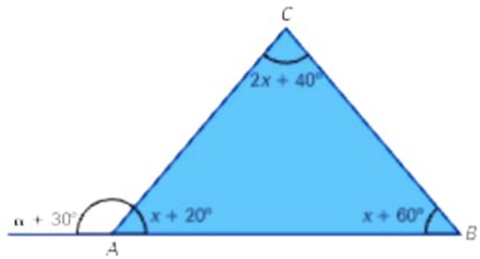


11. Calcule o valor de α nos triângulos abaixo.

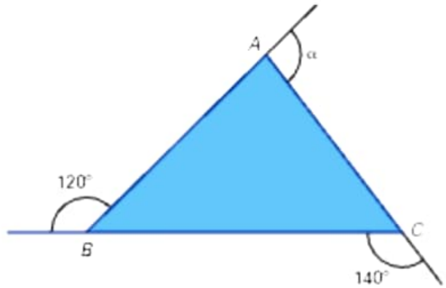
a)



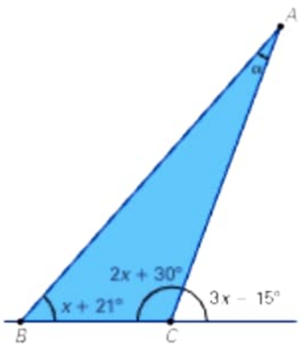
b)



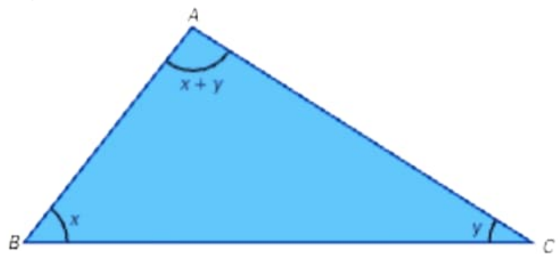
c)



d)



12. Dado o triângulo ABC abaixo, classifique-o como acutângulo, retângulo ou obtusângulo. Justifique a sua resposta.



13. No triângulo PQR, os ângulos internos medem $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{6}$. Quais as medidas, em grau, desses ângulos?

14. Sabe-se que o triângulo MRU é retângulo e que a razão entre as medidas dos seus ângulos agudos é $\frac{3}{2}$. Quanto mede o maior ângulo desse triângulo?

15. O maior lado do triângulo MON mede 16 dm. Os outros dois medem 10 dm e x dm. Sabendo-se que x é um número natural, qual é o menor valor de x?

16. Em um triângulo retângulo, a razão entre as medidas dos ângulos agudos é $\frac{2}{7}$. Determine as medidas dos três ângulos desse triângulo.

17. A professora do 7º ano pediu para a turma construir triângulos usando as medidas abaixo:

Triângulo I	8 cm	4 cm	11 cm
Triângulo II	8 cm	4 cm	12 cm
Triângulo III	5 cm	10 cm	18 cm
Triângulo IV	20 cm	25 cm	40 cm

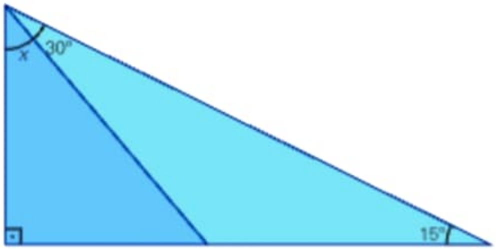
Com quais dessas medidas é possível construir um triângulo?

Matemática

+ Conteúdos

Desenvolvendo habilidades

1. Considere o triângulo a seguir.



O valor de ***x*** é

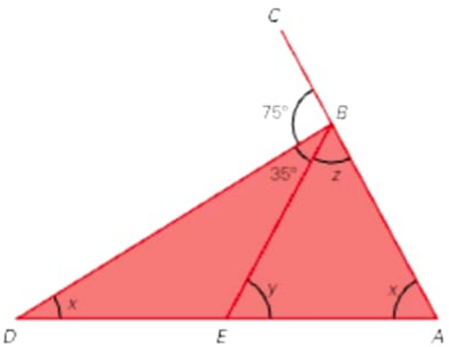
a) 15°

b) 20°

c) 27,5°

d) 45°

2. Calcule no triângulo abaixo o valor de $x + y + 2z$.



a) 230°

b) 250°

c) 270°

d) 290°

3. Os ângulos internos de um triângulo são formados por números pares consecutivos. Determine o maior ângulo desse triângulo.

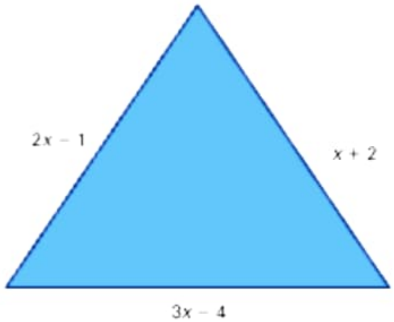
a) 62°

b) 68°

c) 74°

d) 80°

4. Sabe-se que o triângulo abaixo é equilátero. Sendo assim, determine o perímetro desse triângulo.



a) 15

b) 17,5

c) 20

d) 22,5

+ Conteúdos

Para concluir

Neste módulo, você estudou: construção e condição de existência de um triângulo e classificação de um triângulo quanto aos lados e ângulos. Conheceu também alguns usos de triângulos na arquitetura e na arte, calculou a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e estudou a relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes do triângulo.

Mapa conceitual

Para sistematizar os conceitos desenvolvidos nos módulos 10, 11 e 14, preencha o mapa conceitual da **página 519**.

Flashcards

Para consolidar os principais conteúdos abordados neste módulo, acesse os *flashcards* disponíveis no **Plurall**.