XXIX SIC | XII SDTI | X SEMEX | VII SEMAE | I SEG | VII MC | IV CP-PRPG | I SIPECTUFPI

SIUFPI 2020

SEMINÁRIOS INTEGRADOS DA UFPI

UFPI: COMPROMISSO, DESAFIOS E PATRIMÔNIO SOCIAL NO CONTEXTO DA PANDEMIA

50 anos Universidade Federal do Piauí 1971 - 2021

Método de Ponto Proximal Aplicado no Problema de Minimização DC

Arthur do Carmo Araújo (bolsista do PIBIC CNPq/UFPI), Jurandir Lopes de Oliveira (Orientador, Departamento de Matemática, UFPI).

Introdução

Desde a antiguidade as funções são utilizadas para se servir as necessidades humanas como. A partir do século XVII, com a formalização e o desenvolvimento dessa área tão importante à matemática, surgiam complicações algébricas com o qual era necessário lançar mão de certas ferramentas matemáticas em sua resolução.

Nesse contexto, temos a otimização de uma classe de funções especiais chamadas de funções DC, e o Método do Ponto Proximal como recurso eficaz na obtenção de uma boa aproximação.

Metodologia

Exposição ao orientador do assunto objeto desse estudo, bem como seu embasamento ocorrendo em encontros semanais e aplicação dos mesmos em eventuais resoluções de exercícios.

Resultados e Discussões

Algoritmo do Ponto Proximal

Dado f : IRⁿ → IR uma função DC limitada inferiormente, com f (x) = p (x) – q (x).

Passo 1: Escolher um ponto x^0 ∈ IRⁿ e uma sequência $\{\beta_k\}$ de números reais positivos tal que lim inf β_k > 0, k = 1, 2, ...

Passo 2: Calcular $w^k \in \partial$q (x^k)

Passo 3: Calcular x^{k+1} = arg $min_{x \in \mathrm{IR}^n}$ {p (x) - $\langle w^k, x - x^k \rangle$ + $\frac{1}{2\beta_k}$ $\|x - x^k\|^2$}

Passo 4(Critério de Parada): se $x^k = x^{k+1}$, pare. Caso contrário, tome k := k +1 e volte ao passo 2.

Teorema 1. A sequência $\{x^k\}$ resultante do algoritmo acima está bem definida

Demonstração: Faremos por indução em k. Para k = 0 é verdadeiro. Suponha válido para k, ou seja, existe x^k, temos também que existe $v^k \in \partial q\,(x^k)$.

Seja

f_k (x) = p (x) - $\langle v^k, x - x^k \rangle$ + $\frac{1}{2\beta_k}$ $\|x - x^k\|^2$,

temos que f (x) é limitada inferiormente, então existe L ∈ IR tal que L ≤ f (x). Como q é convexa, temos

-q(x) ≤ -q(x^k) - $\langle v^k, x - x^k \rangle$

assim L ≤ f(x) = p (x) − q(x) ≤ p (x) – q (x^k) - $\langle v^k, x - x^k \rangle$. Somando $\frac{1}{2\beta_k}$ $\|x - x^k\|^2$ na desigualdade teremos,

f_k (x) ≥ L + q (x^k) + $\frac{1}{2\beta_k}$ $\|x - x^k\|^2$

logo

$\lim_{\|x\| \to \infty} f_k$ (x) = ∞

Assim, existe x^{k+1} e é único pois f_k (x) é estritamente convexa ■

Teorema 2. A sequência {f (x^k)}, com f definida no algoritmo, é convergente.

Demonstração: Como q (x) é um função convexa, então dados x^k, x^{k+1} ∈ IRⁿ, temos

q (x^{k+1}) ≥ q (x^k) + $\langle v^k, x^{k+1} - x^k \rangle$

e, do passo 3 do algoritmo,

p (x^{k+1}) ≥ p (x^k) + $\langle v^k, x^{k+1} - x^k \rangle$ + $\frac{1}{2\beta_k}\|x^{k+1} - x^k\|^2$

Subtraindo as desigualdades acima, da definição de f temos que

f (x^k) ≥ f (x^{k+1}) + $\frac{1}{2\beta_k}\|x^{k+1} - x^k\|^2$

Como β_k é positivo, segue que

f (x^k) > f (x^{k+1})

e portanto, como f é limitada inferiormente, a sequência em questão é convergente ■

Teorema 3. Se a sequência $\{x^k\}$ é gerada pelo algoritmo, então

$\lim_{k \to +\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$

Demonstração: Sabemos que

f (x^k) ≥ f (x^{k+1}) + $\frac{1}{2\beta_k}\|x^{k+1} - x^k\|^2$

Observe que somando as desigualdades, obtemos

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\beta_k}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq$ f (x^0) – f (x^k)

Por hipótese, f é limitada inferiormente. Logo

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\beta_k}\|x^{k+1} - x^k\|^2 < \infty$,

e consequentemente

$\sum_{k=0}^{n-1} \|x^{k+1} - x^k\|^2 < \infty$, e

$\lim_{k \to +\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$ ■

Conclusão

Mostramos a aplicação do MPP na minimização de funções DC, bem com resultados importantes ao desenvolvimento e compreensão de nosso estudo.

Referências

[1] Izmailov, A.; Solodov, M.. Otimização. Vol. 1. Condições de otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade. Rio de Janeiro: IMPA, 2005..

[2] Sousa, J.C.O., Oliveria

Apoio

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC;
Conselho acional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq;
Departamento de Matemática da UFPI;
Universidade Federal do Piauí – UFPI.

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico | PROPESQI Pró-Reitoria de Pesquisa e Inovação | PREXC Pró-Reitoria de Extensão e Cultura | PRAEC Pró-Reitoria de Assuntos Estudantis e Comunitários | PREG Pró-Reitoria de Ensino de Graduação | PRPG Pró-Reitoria de Ensino de Pós-Graduação | CAPES