Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica
Controle Digital

Exercício de Simulação 1

Aluno:
Arthur de Matos Beggs —————————— 12/0111098

Brasília
2º/2019

Considere um sistema de controle a tempo discreto com realimentação unitária e período de amostragem $T = 1s$ cuja função de transferência é dada por

$$G(z) = \frac{K(0.379z + 0.2642)}{(z - 0.3679)(z - 1)}$$

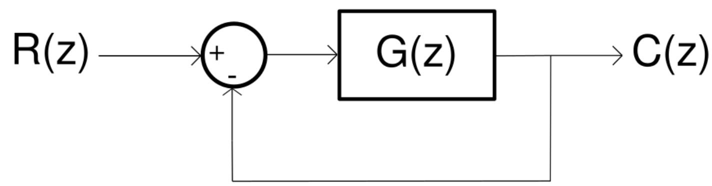

Figura 1: Diagrama de blocos do sistema

1^a Usando o critério de Jury, determine o intervalo de valores de K para o qual o sistema em malha fechada é estável

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K(0.3679z + 0.2642)}{z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K}$$

O polinômio característico $P(z)$ é dado por

$$P(z) = z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K$$

Assim, seus coeficientes são

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0.3679K - 1.3679 \qquad a_2 = 0.3679 + 0.2642K$$

Analisando os critérios de Jury, temos

1. $|a_2| < a_0 \implies |0.3679 + 0.2642K| < 1$

$$\begin{cases} 0.3679 + 0.2642K < 1 & \implies k < 2.3925 \\ -0.3679 - 0.2642K < 1 & \implies k > -5.1775 \end{cases}$$

2. $P(1) > 0 \implies P(1) = 0.6231K > 0 \implies K > 0$

3. $P(-1) > 0 \implies P(-1) = 1 - (0.3679K - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642 > 0 \implies K < 2.3925$

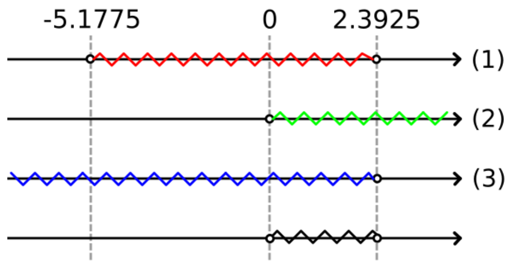

Figura 2: Intervalos de valores para K

Assim, o sistema é estável para $0 < K < 2.3925$.

2^a Repita o item anterior usando o critério de Routh Modificado

O critério de Routh-Hurwitz modificado mapeia o domínio s no domínio z utilizando a transformação

$$z = \frac{s+1}{s=1}$$

Aplicando a transformação em $P(z)$, temos

$$P(z) = z^2 + (0.3679K - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642K$$
$$P(s) = \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + (0.3679K - 1.3679)\left(\frac{s+1}{s-1}\right) + 0.3679 + 0.2642K$$
$$P(s) = (0.6321K)s^2 + (1.2642 - 0.5284K)s + (2.7358 - 0.1037K)$$

Montando a tabela de Routh-Hurwitz,

$$\begin{array}{c|l} s^2 & 0.6321K \\ s^1 & (1.2642 - 0.5284K) \\ s^0 & (2.7358 - 0.1037K) \end{array}$$

Para $s > 0$,

- $0.6321K > 0 \quad \Longrightarrow K > 0$
- $(1.2642 - 0.5284K) > 0 \quad \Longrightarrow K < \frac{1.2642}{0.5248} \quad \Longrightarrow K < 2.3925$
- $(2.7358 - 0.1037K) > 0 \quad \Longrightarrow K < \frac{2.7358}{0.1037} \quad \Longrightarrow K < 26.3818$

O intervalo $0 < K < 2.3925$ satisfaz as condições quando $s > 0$.

Para $s < 0$,

- $0.6321K < 0 \quad \Longrightarrow K < 0$
- $(1.2642 - 0.5284K) < 0 \quad \Longrightarrow K > \frac{1.2642}{0.5248} \quad \Longrightarrow K > 2.3925$
- $(2.7358 - 0.1037K) < 0 \quad \Longrightarrow K > \frac{2.7358}{0.1037} \quad \Longrightarrow K > 26.3818$

Não há intervalos de valores de K que satisfaçam as condições quando $s < 0$.

Assim, o sistema é estável para $0 < K < 2.3925$.

3^a Determine o valor de K para o qual o sistema a malha fechada apresenta resposta ao degrau oscilatória com amplitude constante. Determine também a frequência de oscilação correspondente

De acordo com os intervalos para K encontrados nas questões anteriores, tomando os valores nos limites de K, temos que:

$$\text{Para } K = 0, \quad C(z) = 0 \; \forall \; R(z)$$

$$\text{Para } K = 2.3925, \quad P(z) = z^2 - 0.4877z + 1$$

$$z = 0.2439 \pm j0.9698$$

$$|z| = \sqrt{0.2439^2 + 0.9698^2} = 1$$

Assim, para $K = 2.3925$, o sistema possui pólos no Círculo de Raio Unitário, e oscila com amplitude constante. Para determinar a frequência de oscilação quando $K = 2.3925$,

$$z = e^{sT} = e^{j\omega T} = 1\angle\omega_n T$$

$$\angle z = \arctan\frac{0.9698}{0.2439} = 1.3244rad = \omega_n T$$

Como $T = 1s$, $\omega_n = 1.3244rad/s$.

4^a Simule o sistema no Simulink usando o bloco de função de transferência discreta para referência degrau unitário. Escolha valores de K de modo que a resposta do sistema seja estável, instável e marginalmente estável. Verifique se a frequência de oscilação da resposta marginalmente estável é igual a calculada no item anterior. Apresente o diagrama de simulação e os gráficos das respostas obtidas.

Para o sistema com resposta estável, foi escolhido $K = 1$.

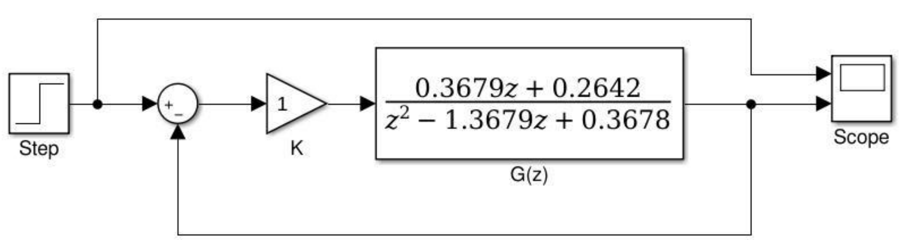

Figura 3: Diagrama do sistema com resposta estável

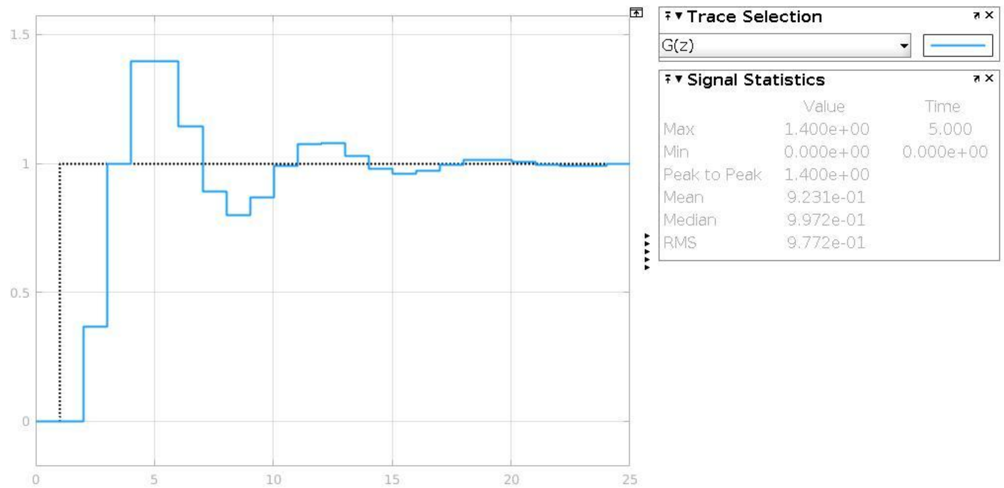

Figura 4: Gráfico da resposta estável

Para o sistema com resposta instável, foi escolhido $K = 3$.

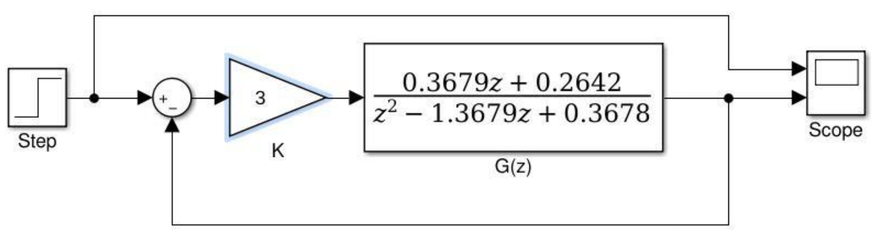

Figura 5: Diagrama do sistema com resposta instável

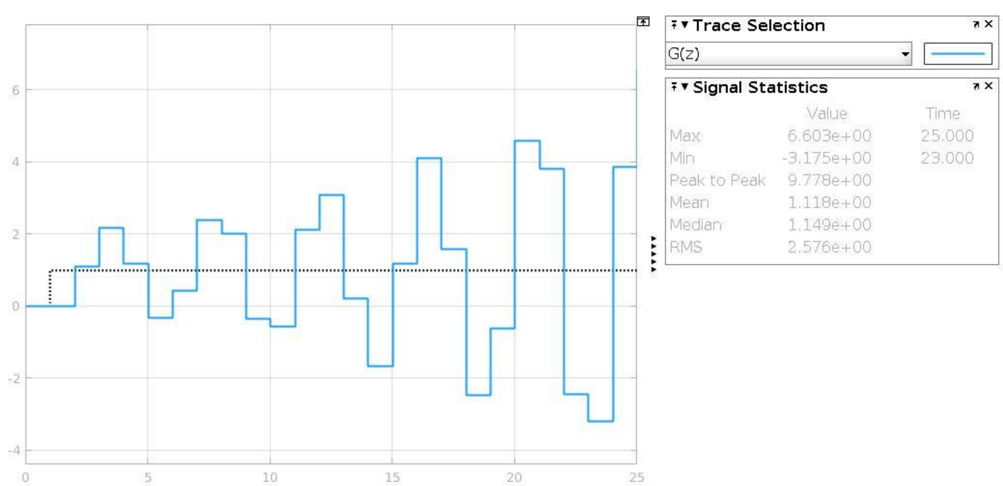

Figura 6: Gráfico da resposta instável

Para o sistema com resposta marginalmente estável, foi escolhido $K = 2.3925$.

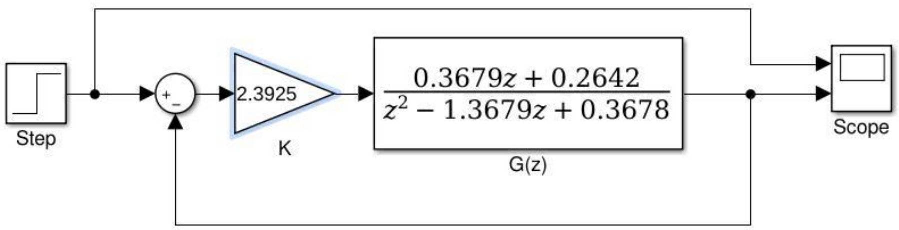

Figura 7: Diagrama do sistema com resposta marginalmente estável

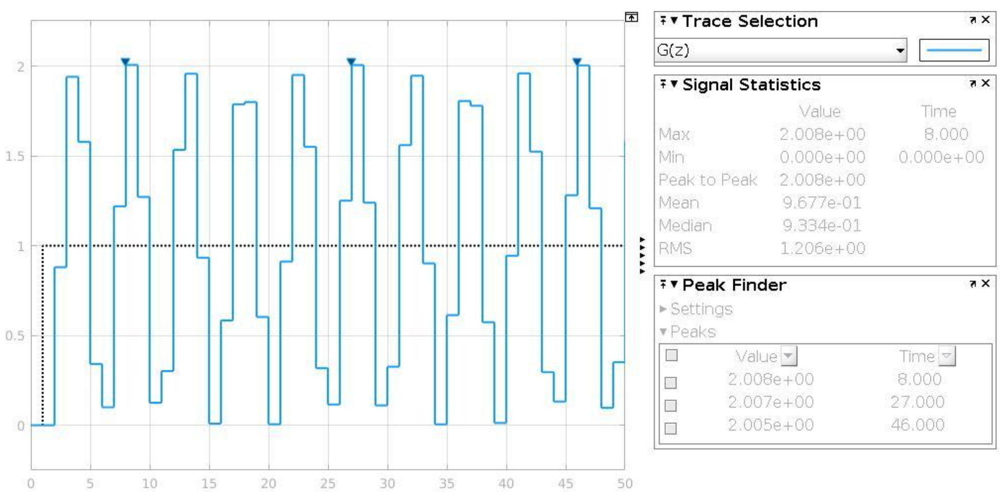

Figura 8: Gráfico da resposta marginalmente estável

Os picos ocorrem nos instantes $8s$, $27s$ e $46s$. Como o sinal oscila quatro vezes entre um pico e o seguinte, o período de oscilação é dado por

$$27 - 8 = 46 - 27 = 19s$$

$$\frac{19s}{4} = T = 4.75s$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} \approx 1.3228 rad/s \approx 1.3244 rad/s$$

O valor da frequência de oscilação encontrado na simulação é aproxiamdamente igual ao valor calculado.