Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica
Controle Digital

Exercício de Simulação 3

Aluno:
Arthur de Matos Beggs —————————— 12/0111098

Brasília
2º/2020

Considere o sistema de controle a tempo discreto mostrado na Figura 1, cujo período de amostragem é $T = 0.2s$.

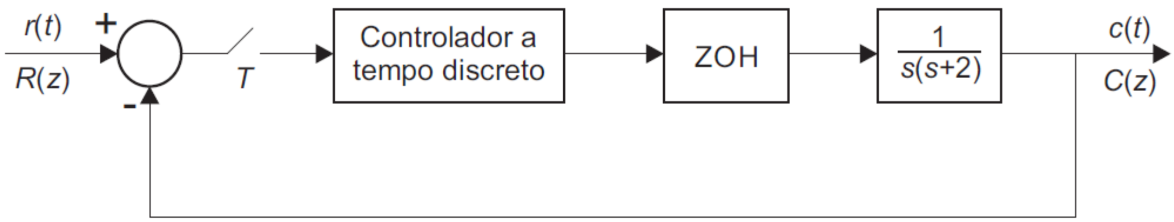

Figura 1: Diagrama do sistema.

1. Usando a técnica do LGR, projete no plano z um controlador de modo que os polos dominantes de malha fechada tenham um fator de amortecimento $\zeta = 0.5$ e tempo de acomodação $t_s = 2\,s$:

$$G_p(s) = G_{h0}(s) \times \frac{1}{s(s+2)}$$

$$G_p(z) = \mathcal{Z}\left\{G_{h0}(s) \times \frac{1}{s(s+2)}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}$$

Com o auxílio do Matlab,

» $T = 0.2;$
» $s = tf('s');$
» $z = tf('z', T);$
» $Gp\_s = zpk([\,], [0 \quad -2], [1]);$
» $Gp\_z = c2d(Gp\_s, T, 'zoh')$

$$G_p(z) = \frac{0.01758(z + 0.8753)}{(z-1)(z-0.6703)}$$

Temos que $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$, e dado que $t_s = 2\,s$ e $\zeta = 0.5$,

$$\omega_n = \frac{4}{t_s\zeta} = 4\,rad/s$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 3.4641\,rad/s$$

Com $z = e^{sT} = e^{-\zeta\omega_n T}e^{j\omega_d T}$,

$$|z| = e^{-\zeta\omega_n T} = 0.6703$$

$$\angle z = \omega_d T = 39.6957°$$

O par de polos complexos conjugados dominantes desejado pode ser encontrado por

$$z_{dom} = |z| \left(\cos(\angle z) \pm j \sin(\angle z)\right) = 0.5158 \pm j0.4281$$

O LGR do sistema não controlado apresentado na Figura 2 foi obtido no Matlab usando os comandos
» *hold on*
» *rlocus(Gp_z)*
» *plot(real(z_dom), imag(z_dom),' r*', real(z_dom), −imag(z_dom),' r*')*

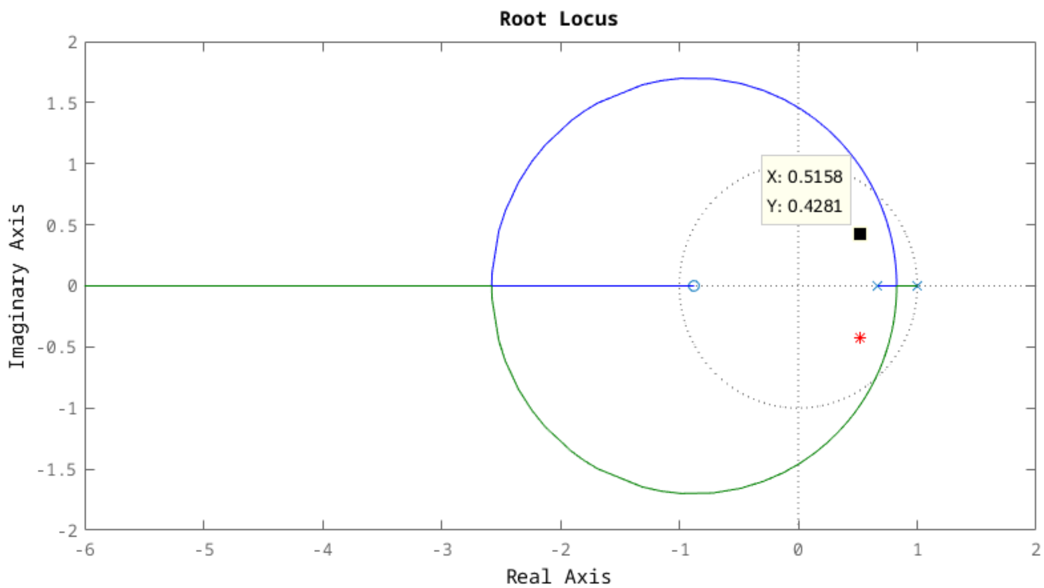

Figura 2: LGR do sistema $G_p(z)$, com os polos dominantes de malha fechada representados por um asterisco vermelho e pelo *data cursor* do Matlab.

Pelo gráfico, o polo dominante desejado não faz parte do LGR do sistema. A condição de fase é utilizada para encontrar a contribuição angular que o controlador deve fornecer.

O controlador projetado terá a forma $G_c(z) = K_c \frac{z-z_c}{z-p_c}$.

Como o a planta discretizada possui dois polos e um zero finito, o controlador fará o cancelamento do polo $z \neq 1$.

$$\angle G_p(z) = \arctan\left(\frac{0.4281}{0.5158+0.8753}\right) - \left(180° - \arctan\left(\frac{0.4281}{1-0.5158}\right)\right) - \left(180° - \arctan\left(\frac{0.4281}{0.6703-0.5158}\right)\right) + \left(180° - \arctan\left(\frac{0.4281}{0.6703-0.5158}\right)\right)$$

$$\angle G_p(z) = 121.4106° \neq 180° \pm 360° i$$

Assim, o polo do controlador precisa contribuir com $180° - 121.4106° = 58.5893°$.

$$tan(58.5893°) = \frac{0.4281}{0.5158 - p_c} \implies p_c = -\frac{0.4281}{tan(58.5893°)} + 0.5158 = 0.2543$$

O controlador projetado é dado por

$$G_c(z) = K_c \frac{z - 0.6703}{z - 0.2543} \quad ,$$

onde K_c é o ganho do controlador.

A função de transferência de malha aberta do sistema controlado é dada por

$$G_s(z) = G_c(z) \times G_p(z) = \frac{0.01758K_c(z + 0.8753)}{(z - 1)(z - 0.2543)}$$

O LGR do sistema $G_s(z)$ apresentado na Figura 3 foi obtido no Matlab usando os comandos
» $Gc\_z = zpk([0.6703], [0.2543], [1], T);$
» $Gs\_z = Gc\_z * Gp\_z$
» *hold on*
» $rlocus(Gs\_z)$
» $plot(real(z\_dom), imag(z\_dom), 'r*', real(z\_dom), -imag(z\_dom), 'r*')$

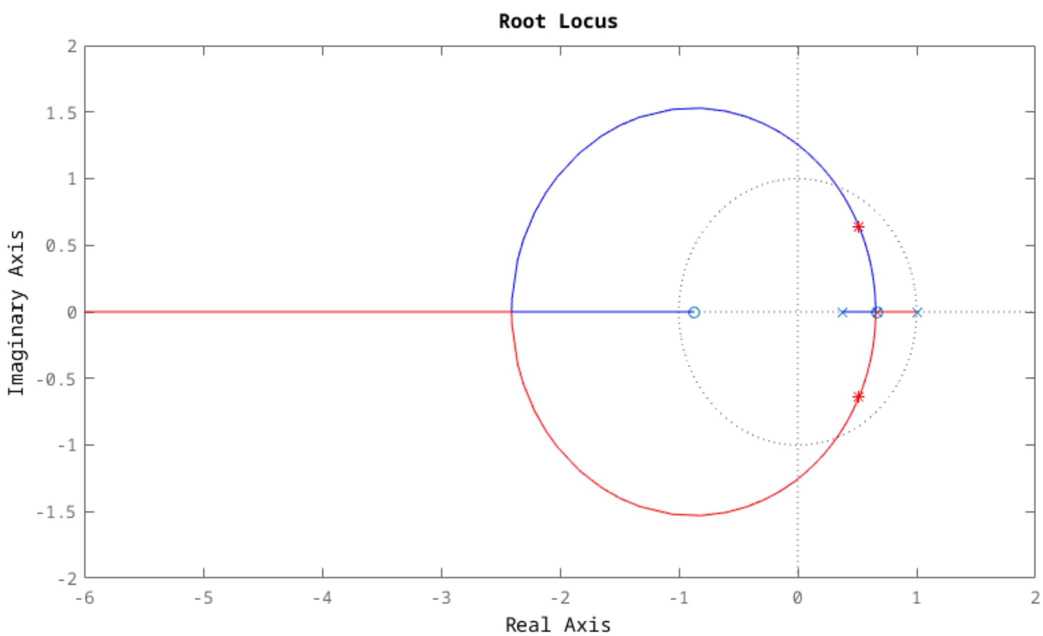

Figura 3: LGR do sistema $G_s(z)$, com os polos dominantes de malha fechada representados por asteriscos vermelhos fazendo parte do LGR.

Para encontrar o ganho K_c do controlador, a condição de módulo é utilizada. Assim,

$$|G_s(z)|_{z=0.5158+j0.4281} = \frac{0.01758K_c\,|z + 0.8753|}{|z - 1|\,|z - 0.2543|} = 1$$

$$\Longrightarrow\ K_c = \left.\frac{|z - 1|\,|z - 0.2543|}{0.01758\,|z + 0.8753|}\right|_{z=0.5158+j0.4281} = 12.6722$$

$$G_c(z) = \frac{12.6722(z - 0.6703)}{(z - 0.2543)}$$

2. Obtenha computacionalmente a resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada. Verifique se os requisitos de projeto foram satisfeitos:

A resposta do sistema em malha fechada a uma entrada degrau unitário é apresentada na Figura 4 foi obtida no Matlab usando o comando
» $step(feedback(Gs_z, 1))$

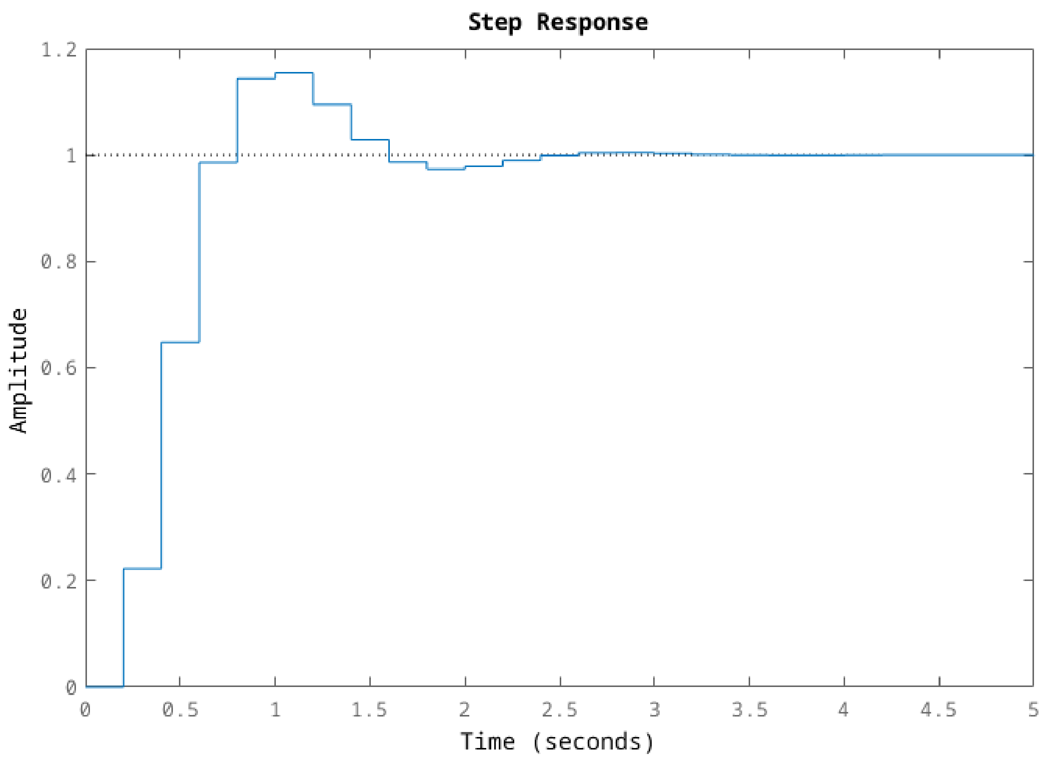

Figura 4: Resposta do sistema em malha fechada a uma entrada degrau unitário.

Os parâmetros da resposta foram obtidos pelo comando
» $stepinfo(feedback(Gs_z, 1))$

RiseTime:	0.400000000000000
SettlingTime:	2.200000000000000
SettlingMin:	0.973504789254130
SettlingMax:	1.154551426500324
Overshoot:	15.455142650032405
Undershoot:	0
Peak:	1.154551426500324
PeakTime:	1

Verificando os parâmetros de resposta, o tempo de acomodação t_s foi de $2.2\,s$, apenas um período de amostragem além do desejado. Para verificar se o requisito do coeficiente de amortecimento $\zeta = 0.5$ foi atendido, o *overshoot* será utilizado.

$$\zeta = \frac{-\log\left(\frac{\text{overshoot}}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \log^2\left(\frac{\text{overshoot}}{100}\right)}} = \frac{-\log\left(\frac{15.4551}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \log^2\left(\frac{15.4551}{100}\right)}} = 0.5109$$

O resultado do projeto se aproxima satisfatoriamente dos requisitos.

3. **Obtenha computacionalmente a resposta à rampa unitária do sistema em malha fechada. Determine o valor do erro estacionário:**

4. **Refaça o projeto de modo que o valor do erro estacionário seja reduzido a um terço do valor anterior e fazendo o LGR passar próximo dos polos dominantes usados no item (1). Obtenha computacionalmente a resposta à rampa unitária do sistema em malha fechada. Verifique se o requisito do erro estacionário foi atingido. Obtenha computacionalmente a resposta ao degrau unitário do sistema em malha fechada. A resposta transitória foi semelhante à do item (1)? Explique a diferença:**