Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica
Controle Digital

Exercício de Simulação 6

Aluno:
Arthur de Matos Beggs ——————————— 12/0111098

Brasília
2º/2020

Um sistema a tempo discreto é descrito por

$$x[k+1] = Gx[k] + H_1u[k] + H_2v[k],$$
$$y[k] = Cx[k],$$

onde

$$x[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$u[k]$ é a entrada e $v[k]$ é uma perturbação.

Para $y[k]$ e $x[k]$ medidos:

1. Determine uma realimentação de estados $u[k] = Nr[k] - Fx[k]$ de modo que os polos de malha fechada fiquem em $z = 0.5 \pm j0.5$ e o erro estacionário seja nulo quando $r[k]$ for um degrau e $v[k] = 0$. Simule o sistema para $r[k]$ degrau unitário e $v[k] = 0$, e para $r[k] = 0$ e $v[k]$ degrau unitário. Para cada simulação, apresente os gráficos de $x_1[k]$, $x_2[k]$, $u[k]$ e $e[k] = r[k] - y[k]$:

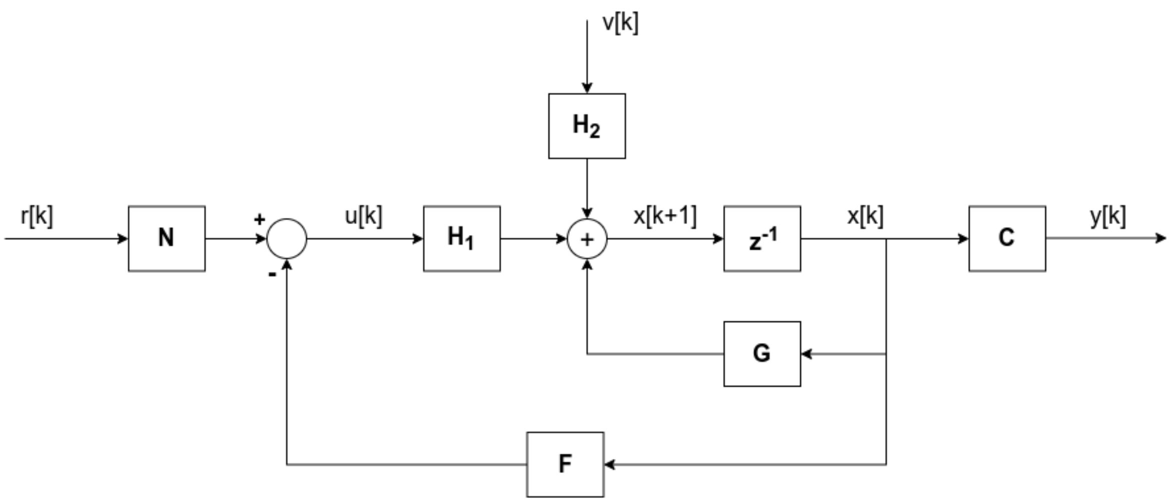

Figura 1: Diagrama do sistema.

Para que o sistema seja controlável, $\det \mathscr{C} \neq 0$

$$\mathscr{C} = \begin{bmatrix} H_1 & GH_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.17 \end{bmatrix}; \quad \det \mathscr{C} = 0.014$$

Assim, o par (G, H_1) é controlável.

Os polos de malha fechada desejados são $\Delta_f(z) = (z - 0.5 + j0.5)(z - 0.5 - j0.5) = z^2 - z + 0.5 = 0$.

Considerando condições iniciais nulas de $x[0]$ e perturbação $v[k] = 0$,

$$x[k+1] = Gx[k] + H_1u[k]; \quad u[k] = Nr[k] - Fx[k]; \quad y[k] = Cx[k]$$

$$x[k+1] = Gx[k] + H_1(Nr[k] - Fx[k]) = (G - H_1F)x[k] + H_1Nr[k]$$

Fazendo a transformada $\mathcal{Z}$,

$$zX(z) + x[0] = (G - H_1F)X(z) + H_1NR(z) \implies X(z) = (zI - G + H_1F)^{-1}H_1NR(z)$$

$$Y(z) = CX(z) = C(zI - G + H_1F)^{-1}H_1NR(z) \implies \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)H_1N}{\det(zI - G + H_1F)}$$

Com $F = [f_1 \quad f_2]$,

$$\Delta_f(z) = \det(zI - G + H_1F) = \det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Delta_f(z) = \det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2f_1 & 0.2f_2 \\ 0.1f_1 & 0.1f_2 \end{bmatrix}\right)$$

Pelo Matlab,

```
G = [[0.5 1]; [0.5 0.7]]
H1 = [0.2; 0.1]
syms z f1 f2
F = [f1 f2]
delta_f = vpa(collect(det(z*eye(2) - G + H1*F), z))
```

$$\Delta_f(z) = z^2 + (0.2f_1 + 0.1f_2 - 1.2)z + (-0.04f_1 + 0.05f_2 - 0.15) = z^2 - z + 0.5$$

$$\begin{cases} 0.2f_1 + 0.1f_2 - 1.2 = -1 \implies 0.2f_1 + 0.1f_2 = 0.2 \implies 0.2f_1 + 0.08f_1 + 1.3 = 0.2 \\ -0.04f_1 + 0.05f_2 - 0.15 = 0.5 \implies -0.04f_1 + 0.05f_2 = 0.65 \implies 0.1f_2 = 0.08f_1 + 1.3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = -3.9286 \\ f_2 = 9.8571 \end{cases}$$

$$F = [-3.9286 \quad 9.8571]$$

Para $e_{ss} = 0$ para $r[k]$ degrau unitário e $v[k] = 0$, $e_{ss} = e[\infty] = r[\infty] - y[\infty]$, $R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$,

$$y[\infty] = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})Y(z) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})C(zI - G + H_1F)^{-1}H_1N\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$y[\infty] = C(zI - G + H_1F)^{-1}H_1N$$

$$e[\infty] = r[\infty] - y[\infty] = 1 - C(zI - G + H_1F)^{-1}H_1N = 0 \implies C(zI - G + H_1F)^{-1}H_1N = 1$$

$$N = \frac{1}{C(zI - G + H_1F)^{-1}H_1}$$

Pelo Matlab,

```
F = [ ((0.2-1.3)/0.28) ((((0.2-1.3)/0.28)*0.08 + 1.3)/0.1) ]
N = 1/(C * inv(eye(2) - G + H1*F) * H1)
```

$$N = 3.125$$

$$u[k] = 3.125r[k] - [-3.9286 \quad 9.8571]\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}$$

Simulando o sistema da Figura 2 no Simulink, obtemos a resposta da Figura 3 para $r[k]$ degrau unitário e $v[k] = 0$, e a resposta da Figura 4 para $r[k] = 0$ e $v[k]$ degrau unitário.

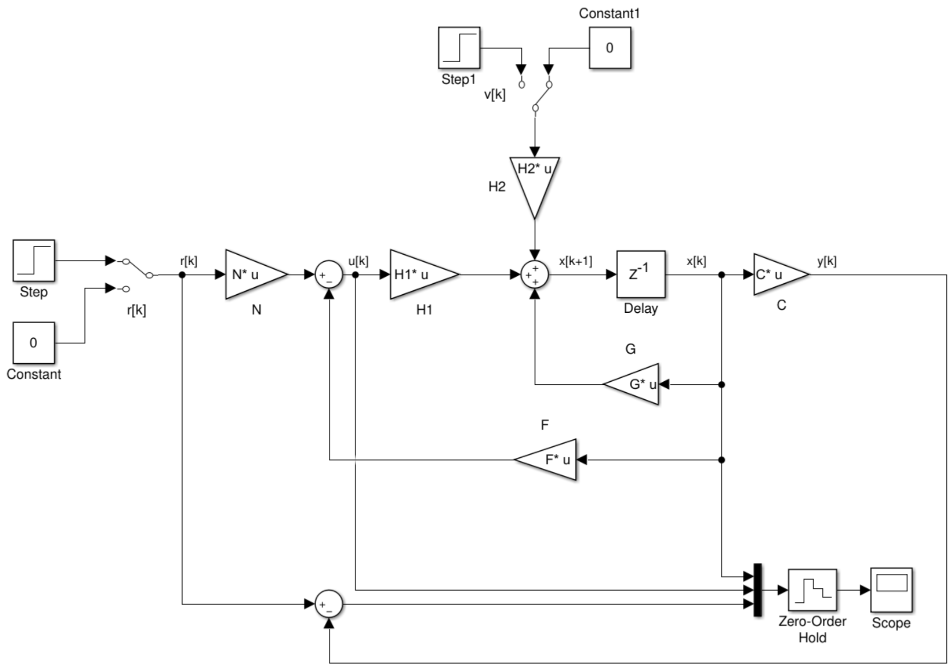

Figura 2: Diagrama do sistema no Simulink.

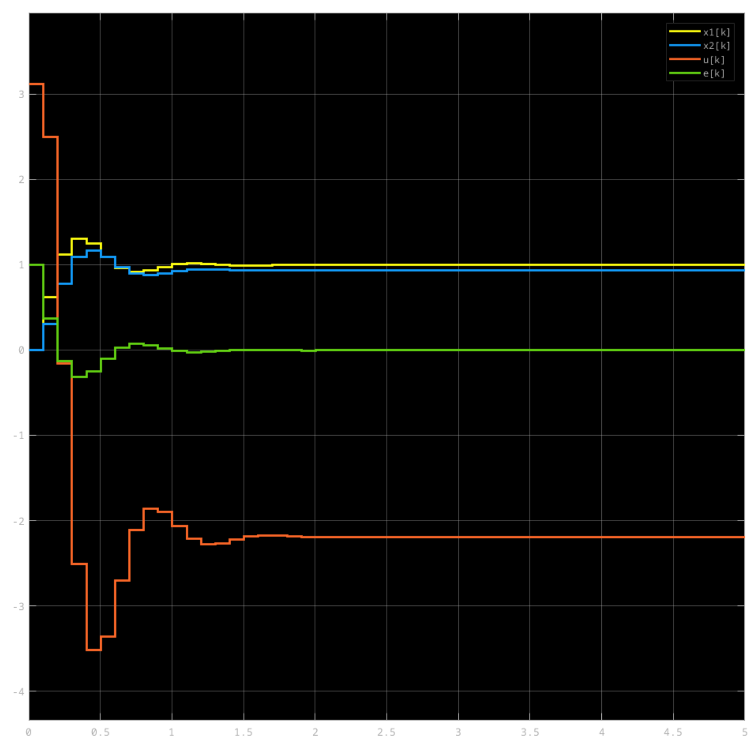

Figura 3: Gráficos para $r[k]$ degrau unitário e $v[k] = 0$.

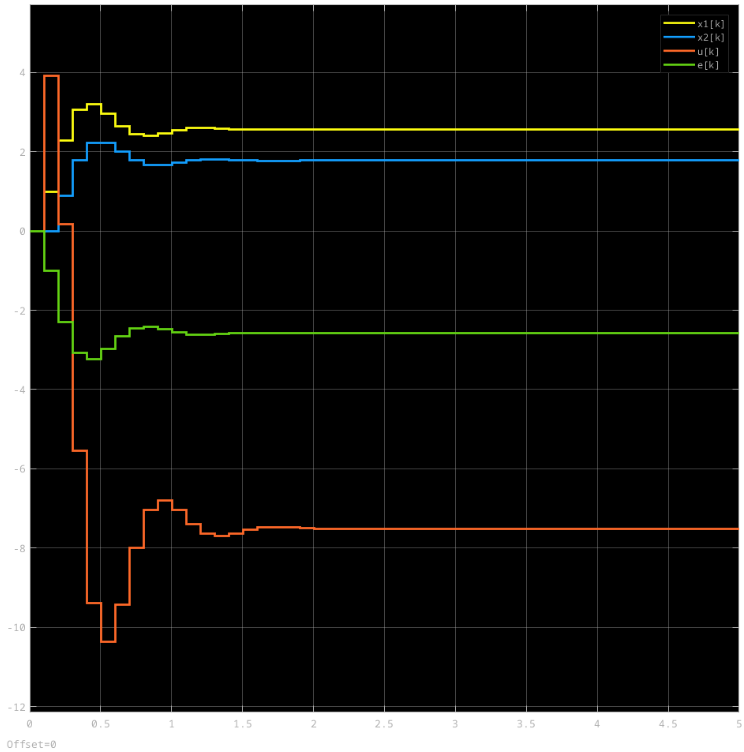

Figura 4: Gráficos para $r[k] = 0$ e $v[k]$ degrau unitário.

2. Determine uma realimentação de estados $u[k] = f_a x_a[k] - Fx[k]$, onde $x_a[k+1] = x_a[k] + r[k] - y[k]$, de modo que os polos de malha fechada fiquem em $z = 0.5 \pm j0.5$ e $z = 0$. Simule o sistema para $r[k]$ degrau unitário e $v[k] = 0$, e para $r[k] = 0$ e $v[k]$ degrau unitário. Para cada simulação, apresente os gráficos de $x_1[k]$, $x_2[k]$, $u[k]$ e $e[k] = r[k] - y[k]$:

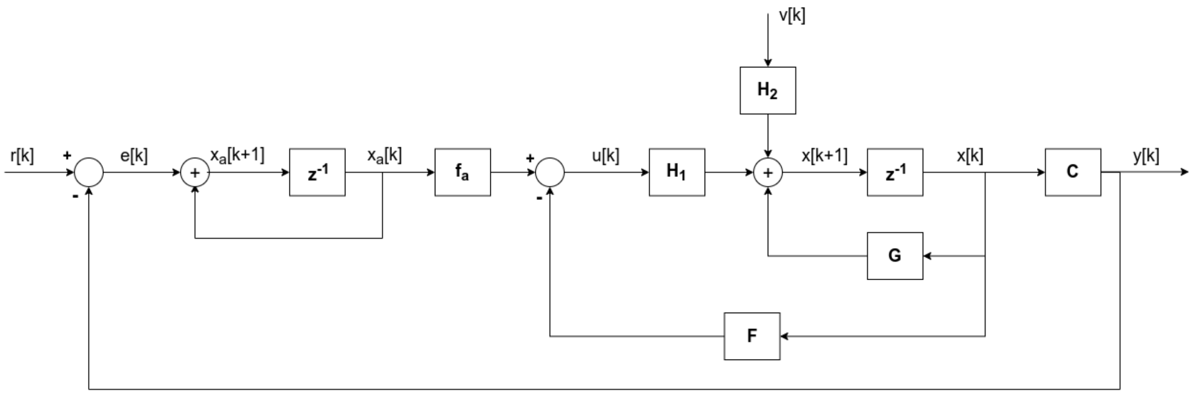

Figura 5: Diagrama do sistema.

Considerando condições iniciais nulas de $x[0]$,

$$u[k] = f_a x_a[k] - Fx[k]; \quad x_a[k+1] = x_a[k] + r[k] - y[k] = x_a[k] + e[k]; \quad y[k] = Cx[k]$$

Fazendo a transformada $\mathcal{Z}$ de $x_a[k+1]$ considerando $x_a[0] = 0$,

$$zX_a(z) - x_a[0] = X_a(z) + R(z) - Y(z) \implies X_a(z) = \frac{R(z) - Y(z)}{z-1}$$

$$x[k+1] = Gx[k] + H_1(f_a x_a[k] - Fx[k]) + H_2 v[k] = (G - H_1F)x[k] + H_1 f_a x_a[k] + H_2 v[k]$$

Fazendo a transformada $\mathcal{Z}$ de $x[k+1]$ considerando $x[0] = 0$,

$$zX(z) - x[0] = (G - H_1F)X(z) + H_1 f_a X_a(z) + H_2 V(z)$$

$$X(z) = (zI - G + H_1F)^{-1}(H_1 f_a X_a(z) + H_2 V(z))$$

$$Y(z) = CX(z) = C(zI - G + H_1F)^{-1}(H_1 f_a X_a(z) + H_2 V(z)) = \frac{C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)}{\det(zI - G + H_1F)}\left(\frac{H_1 f_a (R(z) - Y(z))}{z-1} + H_2 V(z)\right)$$

$$Y(z) = \frac{C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)H_1 f_a R(z)}{\det(zI - G + H_1F)(z-1)} - \frac{C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)H_1 f_a Y(z)}{\det(zI - G + H_1F)(z-1)} + \frac{C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)H_2 V(z)}{\det(zI - G + H_1F)}$$

Isolando $Y(z)$,

$$Y(z) = \frac{C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)(H_1 f_a R(z) + (z-1)H_2 V(z))}{\det(zI - G + H_1F)(z-1) + C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)H_1 f_a}$$

Para $v[k] = 0$,

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)H_1 f_a}{\det(zI - G + H_1F)(z-1) + C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)H_1 f_a}$$

Os polos de malha fechada desejados são $\Delta_f(z) = (z - 0.5 + j0.5)(z - 0.5 - j0.5)z = z^3 - z^2 + 0.5z = 0$.

$$\Delta_f(z) = \det(zI - G + H_1F)(z-1) + C\,\mathrm{adj}(zI - G + H_1F)H_1 f_a$$

Pelo Matlab,

```
syms f1 f2 fa
F = [f1 f2]
delta_f2 = vpa(collect(det(z*eye(2) -G + H1*F)*(z-1) + C * adjoint(z*eye(2) -G +
    H1*F)*H1*fa, z))
```

$$\Delta_f(z) = z^3 - z^2 + 0.5z = z^3 + (0.2f_1 + 0.1f_2 - 2.2)z^2 + (-0.24f_1 - 0.05f_2 + 0.2f_a + 1.05)z + (0.04f_1 - 0.05f_2 - 0.04f_a + 0.15) = 0$$

$$\begin{cases} 0.2f_1 + 0.1f_2 - 2.2 = -1 \implies f_1 = 6 - 0.5f_2 & \implies f_1 = 4.1071 \\ -0.24f_1 - 0.05f_2 + 0.2f_a + 1.05 = 0.5 \implies 0.07f_2 + 0.2f_a = 0.89 & \implies f_a = 3.125 \\ 0.04f_1 - 0.05f_2 - 0.04f_a + 0.15 = 0 \implies 0.056f_2 = 0.212 & \implies f_2 = 3.7857 \end{cases}$$

$$u[k] = 3.125x_a[k] - \begin{bmatrix} 4.1071 & 3.7857 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}$$

Simulando o sistema da Figura 6 no Simulink, obtemos a resposta da Figura 7 para $r[k]$ degrau unitário e $v[k] = 0$, e a resposta da Figura 8 para $r[k] = 0$ e $v[k]$ degrau unitário.

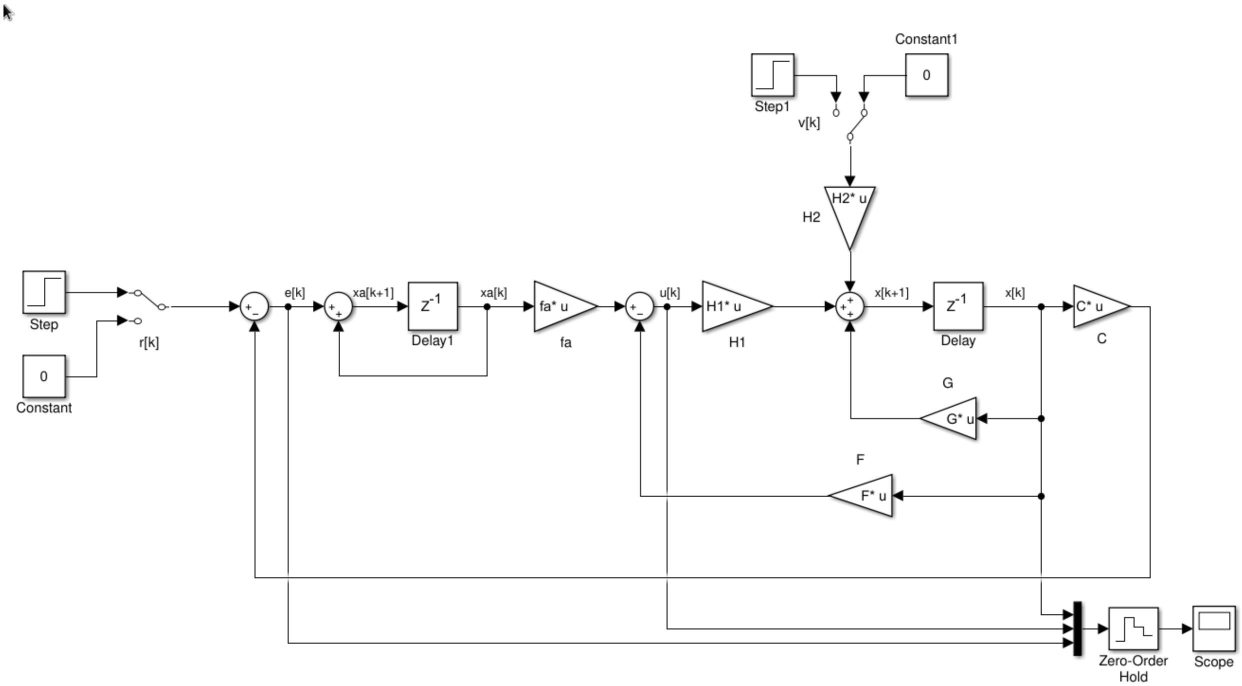

Figura 6: Diagrama do sistema no Simulink.

Figura 7: Gráficos para $r[k]$ degrau unitário e $v[k] = 0$.

Figura 8: Gráficos para $r[k] = 0$ e $v[k]$ degrau unitário.

Para o sistema com a segunda realimentação de estados e considerando que apenas $y[k]$ é medido:

3. Projete um observador de estados $\tilde{x}[k+1] = G\tilde{x}[k] + H_1u[k] + L(y[k] - C\tilde{x}[k])$ com polos em $z = 0.2 \pm j0.2$:

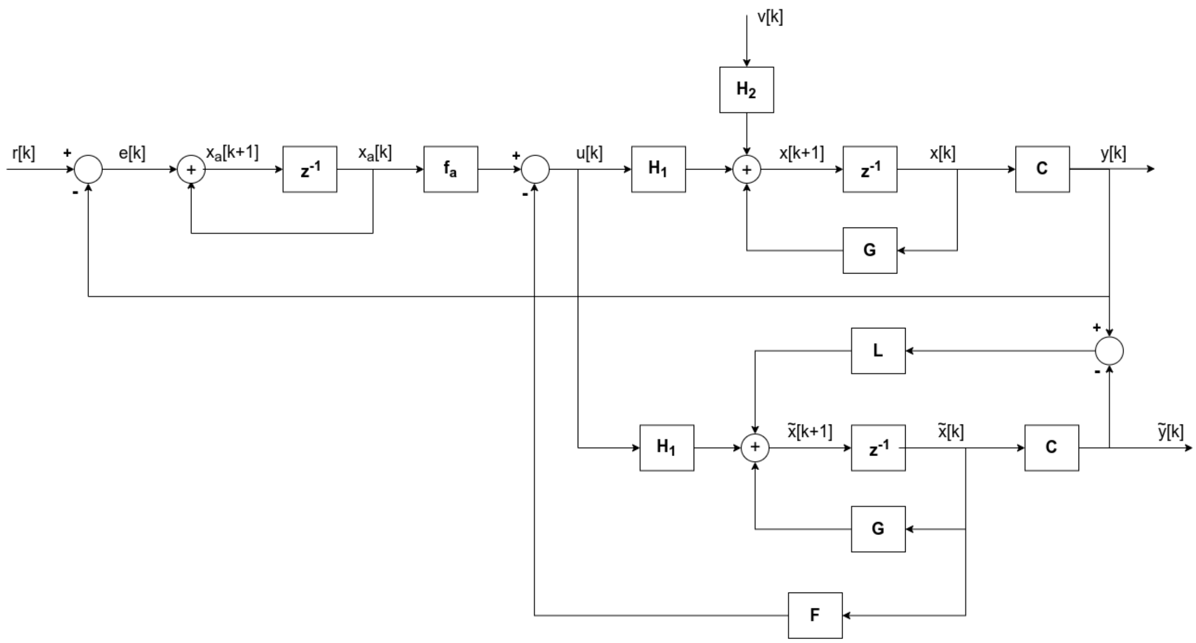

Figura 9: Diagrama do sistema.

Para que o sistema seja observável, $\det \mathscr{O} \neq 0$

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} C \\ CG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}; \quad \det \mathscr{O} = 1$$

Assim, o par (G, C) é observável.

Os polos desejados do observador de estados são

$$\Delta_o(z) = (z - 0.2 + j0.2)(z - 0.2 - j0.2) = z^2 - 0.4z + 0.08 = 0$$

$$\tilde{y}[k] = C\tilde{x}[k]$$

$$\tilde{x}[k+1] = G\tilde{x}[k] + H_1u[k] + L(y[k] - C\tilde{x}[k]) = (G - LC)\tilde{x}[k] + H_1u[k]$$

Fazendo a transformada $\mathcal{Z}$,

$$z\tilde{X}(z) - \tilde{x}[0] = (G - LC)\tilde{X}(z) + H_1U(z)$$

$$\tilde{X}(z) = (zI - G + LC)^{-1}H_1U(z)$$

$$\tilde{Y}(z) = C\tilde{X}(z) = C(zI - G + LC)^{-1}H_1U(z)$$

$$\frac{\tilde{Y}(z)}{U(z)} = C(zI - G + LC)^{-1}H_1 = \frac{C\,\text{adj}(zI - G + LC)H_1}{\det(zI - G + LC)}$$

Com $L = [l_1 \quad l_2]^T$, usando o Matlab,

```
syms l1 l2
L = [l1; l2]
delta_o = vpa(collect(det(z*eye(2) -G + L*C), z))
```

$$\Delta_o(z) = \det(zI - G + LC) = z^2 + (l_1 - 1.2)z + (-0.7l_1 + l_2 - 0.15) = z^2 - 0.4z + 0.08 = 0$$

$$\begin{cases} l_1 - 1.2 = -0.4 & \implies l_1 = 0.8 \\ -0.7l_1 + l_2 - 0.15 = 0.08 & \implies l_2 = 0.79 \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.79 \end{bmatrix}$$

4. Simule o sistema em malha fechada com o observador de estados, $r[k] = 0$, $v[k] = 0$, $x[0] = [1 \quad -1]^T$ e $\tilde{x}[0] = [0 \quad 0]^T$. Apresente gráficos de $x_1[k]$, $\tilde{x}_1[k]$, $x_2[k]$, $\tilde{x}_2[k]$, $u[k]$ e $e[k]$:

Simulando o sistema da Figura 10 no Simulink, obtemos a resposta da Figura 11 para $r[k] = v[k] = 0$, $\tilde{x}[0] = [00]^T$ e $x[0] = [1 \quad -1]^T$.

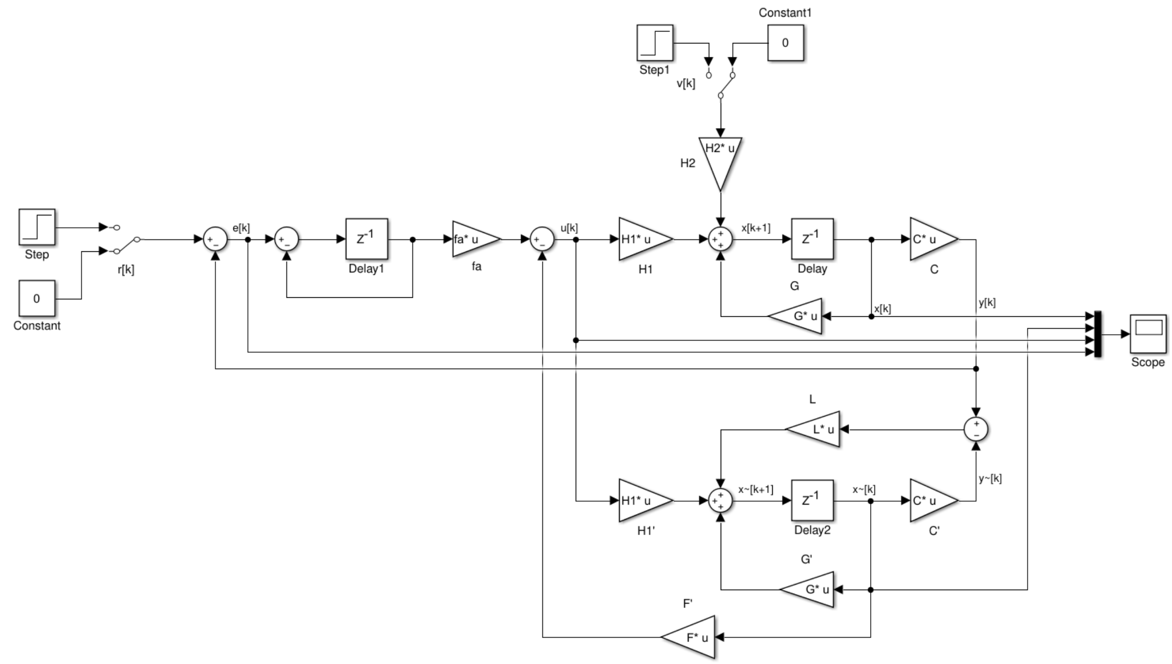

Figura 10: Diagrama do sistema no Simulink.

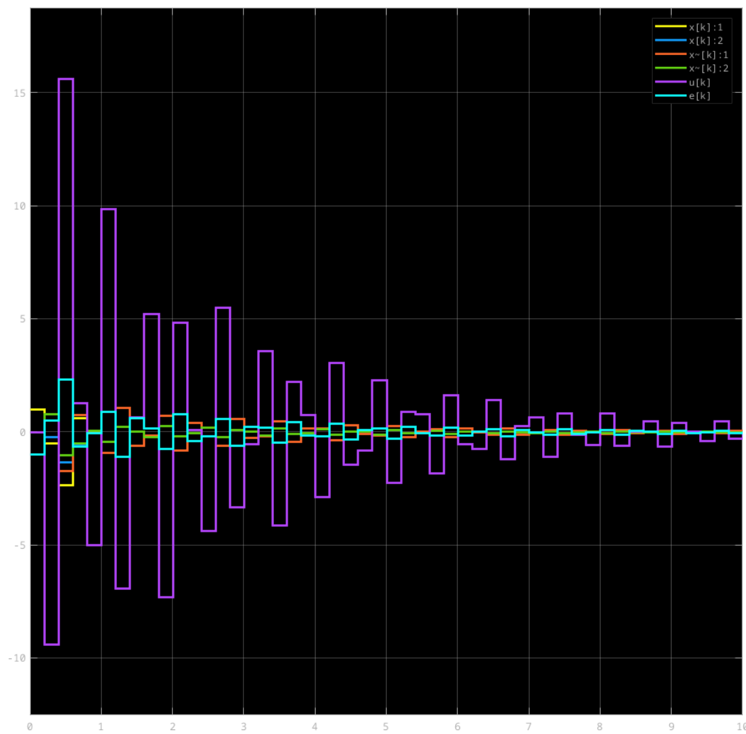

Figura 11: Gráficos para $r[k] = v[k] = 0$ com $x[0] = [1 \quad -1]^T$ e $\tilde{x}[0] = [0 \quad 0]^T$.

5. Simule o sistema em malha fechada com o observador de estados, $r[k] = 0$, $v[k]$ degrau unitário, $x[0] = \tilde{x}[0] = [0 \quad 0]^T$. Apresente gráficos de $x_1[k]$, $\tilde{x}_1[k]$, $x_2[k]$, $\tilde{x}_2[k]$, $u[k]$ e $e[k]$:

Simulando o sistema da Figura 12 no Simulink, obtemos a resposta da Figura 13 para $r[k] = 0$ e $v[k]$ degrau unitário.

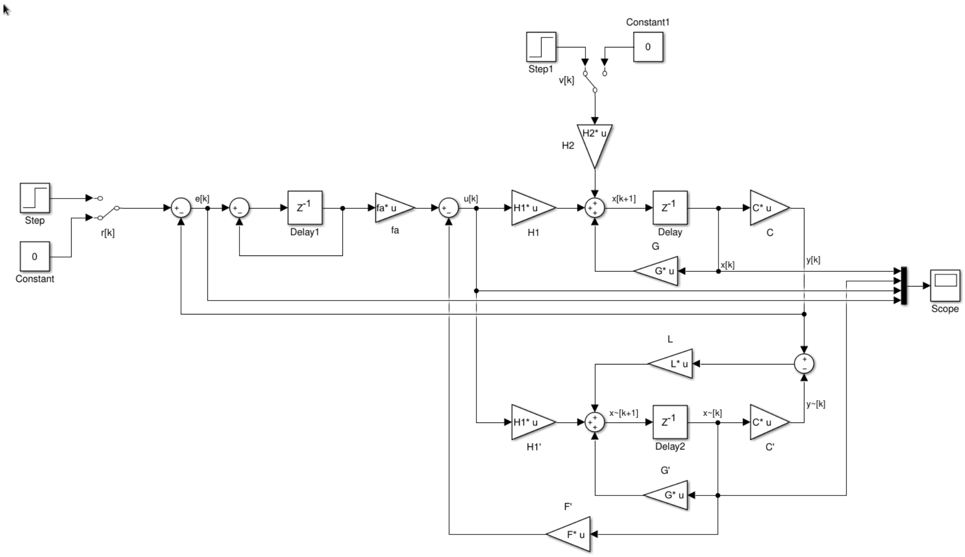

Figura 12: Diagrama do sistema no Simulink.

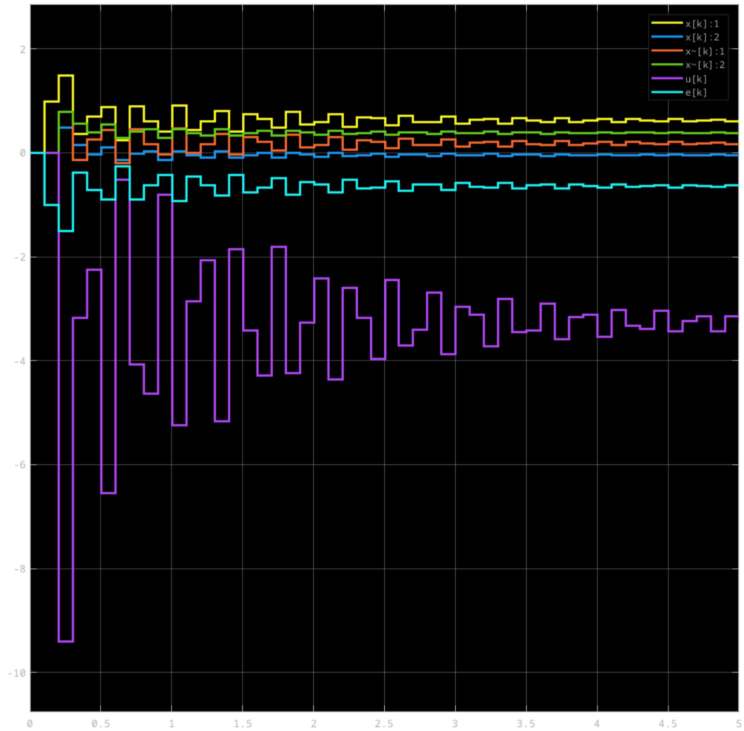

Figura 13: Gráficos para $r[k] = 0$ e $v[k]$ degrau unitário com $x[0] = \tilde{x}[0] = [0 \quad 0]^T$.