Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica
Controle Digital

Exercício de Simulação 2

Aluno:
Arthur de Matos Beggs ———————————— 12/0111098

Brasília
2º/2019

1^a Discretize a função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

usando os métodos a seguir.

Para cada caso, calcule a solução para $u(t) = 0\ \forall\, t \geq 0$, $y(0) = 100$, $\dot{y}(0) = 0$, $T = 0.1s$ e compare no Matlab a solução exata a tempo contínuo com os resultados obtidos.

(a) Transformada de $G(s)$ com segurador de ordem zero em série:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+2)(s+5)}\right]$$

Expandindo em frações parciais:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{6s} + \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{2(s+2)}\right] = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{1}{6}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-e^{-3T}} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right)$$

$$G(z) = \frac{0.0042z + 0.0035}{z^2 - 1.5595z + 0.6065}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](z^2 - 1.5595z + 0.6065) = u[k](0.0042z + 0.0035), u[k] = 0\,\forall k \geq 0 \implies y[k](z^2 - 1.5595z + 0.6065) = 0$$

$$y[k] = 1.5595y[k-1] - 0.6065y[k-2]$$

$$\begin{cases} y[0] = 100 \\ y[1] - y[2] = 0 \implies y[1] = y[2] \end{cases}$$

(b) Regra retangular para frente:

$$G(z) = G(s)|_{s=\frac{z-1}{T}}\,; T = 0.1$$

$$G(z) = \frac{1}{\left(\left(\frac{z-1}{0.1}\right)+2\right)\left(\left(\frac{z-1}{0.1}\right)+3\right)} = \frac{0.001}{z^2 - 1.5z + 0.56}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](z^2 - 1.5z + 0.56) = 0.01u[k], u[k] = 0\,\forall k \geq 0 \implies y[k](z^2 - 1.5z + 0.56) = 0$$

$$y[k] = 1.5y[k-1] - 0.56y[k-2]$$

$$\begin{cases} y[0] = 100 \\ y[1] - y[2] = 0 \implies y[1] = y[2] \end{cases}$$

(c) Regra retangular para trás:

$$G(z) = G(s)|_{s=\frac{z-1}{Tz}}\,; T = 0.1$$

$$G(z) = \frac{1}{\left(\left(\frac{z-1}{0.1z}\right)+2\right)\left(\left(\frac{z-1}{0.1z}\right)+3\right)} = \frac{0.0064z^2}{z^2 - 1.6025z + 0.641}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](z^2 - 1.6025z + 0.641) = 0.0064z^2 u[k], u[k] = 0\,\forall k \geq 0 \implies y[k](z^2 - 1.6025z + 0.641) = 0$$

$$y[k] = 1.6025y[k-1] - 0.641y[k-2]$$

$$\begin{cases} y[0] = 100 \\ y[1] - y[2] = 0 \implies y[1] = y[2] \end{cases}$$

(d) Regra trapeizodal:

$$G(z) = G(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}; T = 0.1$$

$$G(z) = \frac{1}{\left(\left(\frac{2}{0.1}\frac{z-1}{z+1}\right) + 2\right)\left(\left(\frac{2}{0.1}\frac{z-1}{z+1}\right) + 3\right)} = \frac{z^2 + 2z + 1}{506z^2 - 788z + 306}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](506z^2 - 788z + 306) = z^2 + 2z + 1u[k], u[k] = 0\,\forall k \geq 0 \implies y[k](506z^2 - 788z + 306) = 0$$

$$y[k] = \frac{788y[k-1] - 306y[k-2]}{506}$$

$$\begin{cases} y[0] = 100 \\ y[1] - y[2] = 0 \implies y[1] = y[2] \end{cases}$$

(e) Mapeamento exato de pólos e zeros:

Para pólos e zeros finitos, $z = e^{sT}$; para zeros infinitos, $z = -1$. Assim,

$$G(z) = \frac{(z+1)^2}{(z - e^{-2T})(z - e^{-3T})} = \frac{(z+1)^2}{(z - 0.8187)(z - 0.7408)} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 1.5595z + 0.6065}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](z^2 - 1.5595z + 0.6065) = z^2 + 2z + 1u[k], u[k] = 0\,\forall k \geq 0 \implies y[k](z^2 - 1.5595z + 0.6065) = 0$$

$$y[k] = 1.5595y[k-1] - 0.6065y[k-2]$$

$$\begin{cases} y[0] = 100 \\ y[1] - y[2] = 0 \implies y[1] = y[2] \end{cases}$$

Tempo contínuo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right] = Ae^{-2t} - Be^{-3t}$$

Dadas as condições iniciais $u(t) = 0\ \forall\, t \geq 0$, $y(0) = 100$, $\dot{y}(0) = 0$,

$$y(t) = 300e^{-2t} - 200e^{-3t}$$

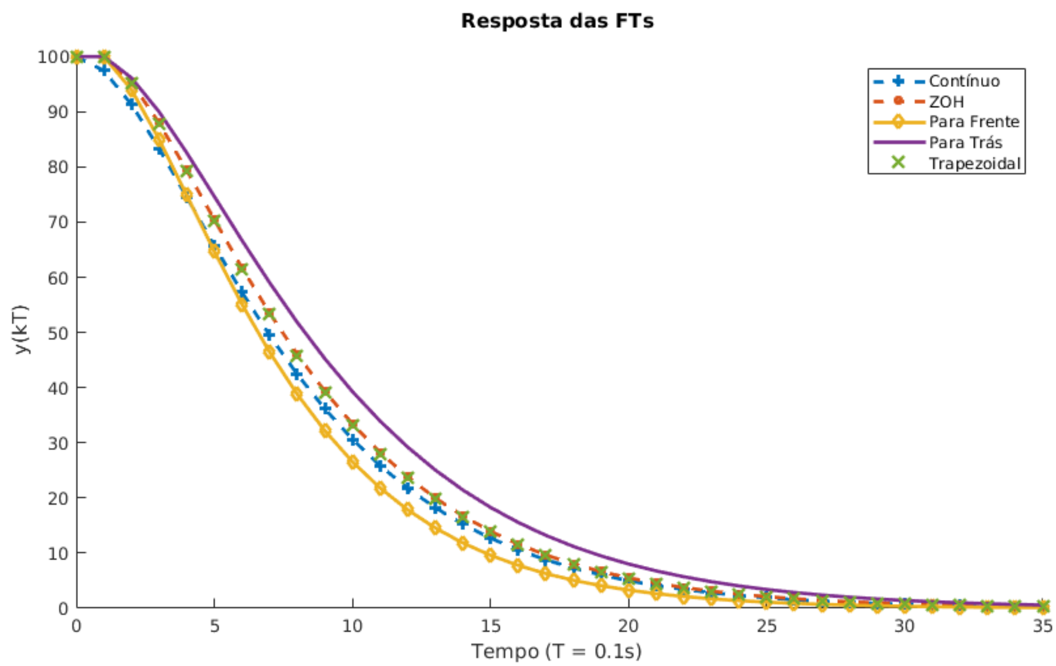

Figura 1: Gráfico de G(s) discretizado

2^a Considere uma planta com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$, cuja função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_p}{Js^2}$$

Deseja-se utilizar um controlador com a estrutura

$$U(s) = \frac{bk_C}{a}U_c(s) - k_C\frac{s+b}{s+a}Y(s),$$

onde $U_C(s)$ é o sinal de referência. O polinômio característico de malha fechada deve ser

$$P(s) = (s+\omega_0)(s^2+\omega_0 s+\omega_0^2) = s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3.$$

Para isso, basta escolher os parâmetros do controlador como $a = 2\omega_0$, $b = \omega_0/2$ e $k_C = 2\frac{J\omega_0^2}{k_P}$. Nesse caso, é possível verificar que o tempo de acomodação de 5% do sistema a malha fechada para a entrada degrau é $t_s(5\%) = 5.52/\omega_0$. Quando necessário, utilize $\omega_0 = 1$.

(a) Mostre que a função de transferência de malha fechada é dada por

$$\frac{Y(s)}{U_C(s)} = \frac{(\frac{\omega_0^2}{2})\,(s+2\omega_0)}{s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3}:$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_P}{Js^2} \implies U(s) = \frac{Js^2}{k_P}Y(s)$$

$$U(s) = \frac{Js^2}{k_P}Y(s) = \frac{bk_C}{a}U_c(s) - k_C\frac{s+b}{s+a}Y(s) \implies \left(\frac{Js^2}{k_P} + k_C\frac{s+b}{s+a}\right)Y(s) = \frac{bk_C}{a}U_c(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U_C(s)} = \frac{\frac{bk_C}{a}}{\frac{Js^2}{k_P} + k_C\frac{s+b}{s+a}} = \frac{\frac{\omega_0/2}{2\omega_0}\frac{2J\omega_0^2}{k_P}}{\frac{Js^2}{k_P} + \frac{2J\omega_0^2}{k_P}\left(\frac{s+\omega_0/2}{s+2\omega_0}\right)}$$

$$\frac{Y(s)}{U_C(s)} = \frac{\left(\frac{\omega_0^2}{2}\right)}{s^2 + 2\omega_0^2\left(\frac{s+\omega_0/2}{s+2\omega_0}\right)} = \frac{\left(\frac{\omega_0^2}{2}\right)(s+2\omega_0)}{s^2(s+2\omega_0) + 2\omega_0^2(s+\omega_0/2)} = \frac{\left(\frac{\omega_0^2}{2}\right)(s+2\omega_0)}{s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s + \omega_0^3}$$

(b) Obtenha o diagrama de Bode do sistema a malha fechada e determine a frequência de corte ω_c:

O script para a geração do diagrama de Bode foi alterado a fim de encontrar a frequência de corte:

```
%
   https://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/314007-bode-plot-and-cutoff-frequency
clear
close all

global newx a b kc T

J = 1;
kp = 1;
w0 = 1;
a = 2*w0;
b = w0/2;
kc = 2*J*w0^2/kp;

syscl = tf([w0^2/2 w0^3],[1 2*w0 2*w0^2 w0^3]);

[mag,phase,wout] = bode(syscl);
mag = squeeze(mag);
phase= squeeze(phase);
magr2 = (mag/max(mag)).^2;
dB3 = interp1(magr2, [wout phase mag], 0.5, 'spline');
figure(1)
subplot(2,1,1)
semilogx(wout, 20*log10(mag), '-b',  dB3(1), 20*log10(dB3(3)), '+r',
    'MarkerSize',10)
grid
subplot(2,1,2)
semilogx(wout, phase, '-b',  dB3(1), dB3(2), '+r', 'MarkerSize',10)
grid
```

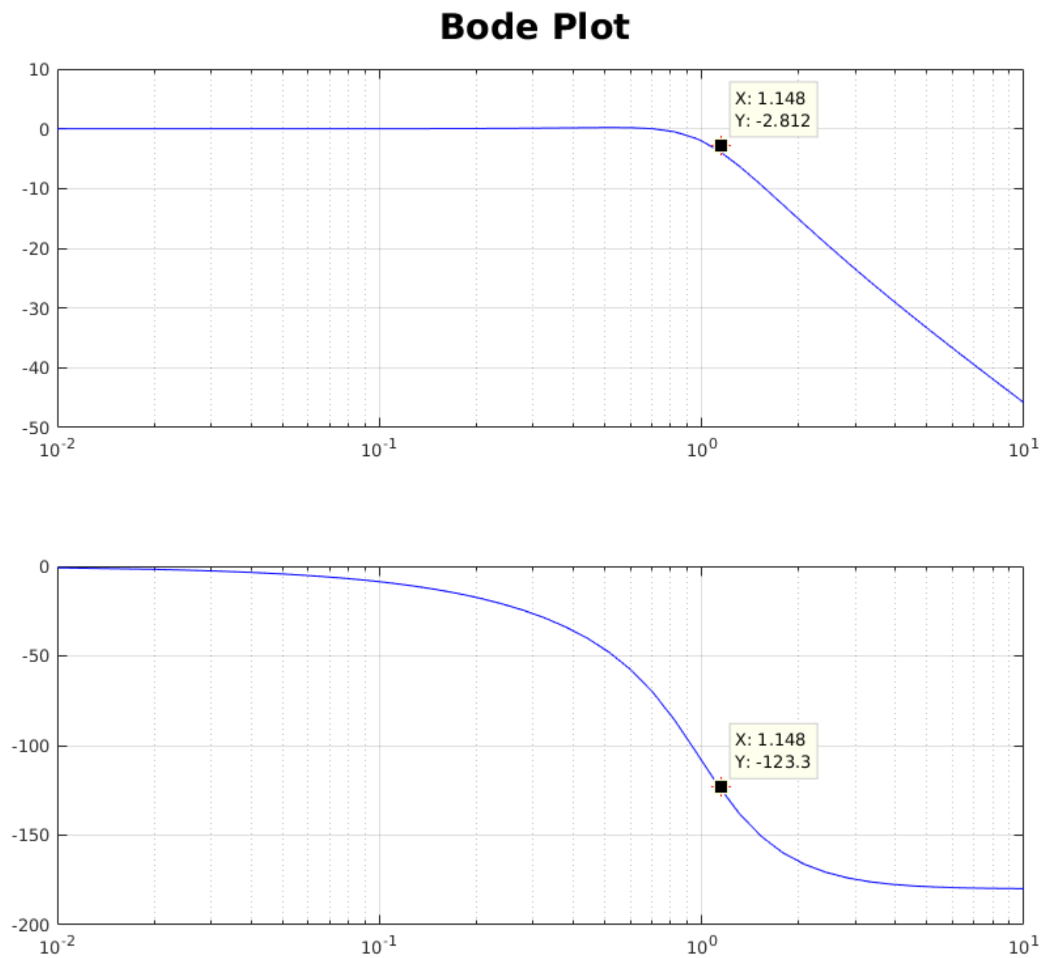

Figura 2: Diagrama de Bode

Assim, temos a frequência de corte $\omega_c \approx 1.148$.

(c) Verifique que a ação de controle pode ser escrita como

$$U(s) = k_C\left(\frac{b}{a}U_C(s) - Y(s) + X(s)\right);$$

$$X(s) = \frac{a-b}{s+a}Y(s).$$

Passando essas equações para o domínio do tempo e fazendo $\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+T)-x(t)}{T}$, onde T é o período de amostragem, mostre que o controlador pode ser discretizado da seguinte forma

$$u[k] = k_C\left(\frac{b}{a}u_c[k] - y[k] + x[k]\right);$$

$$x[k+1] = x[k] + T\left[(a-b)y[k] - ax[k]\right]:$$

$$U(s) = \frac{bk_C}{a}U_c(s) - k_C\frac{s+b}{s+a}Y(s) = k_C\left(\frac{b}{a}U_C(s) - \frac{s+b}{s+a}Y(s)\right) = k_C\left(\frac{b}{a}U_C(s) + \left(\frac{-s-b}{s+a}\right)Y(s)\right)$$

$$U(s) = k_C\left(\frac{b}{a}U_C(s) + \left(\frac{-s-b+a-a}{s+a}\right)Y(s)\right) = k_C\left(\frac{b}{a}U_C(s) + \left(\frac{-s-a}{s+a} + \frac{a-b}{s+a}\right)Y(s)\right)$$

$$U(s) = k_C\left(\frac{b}{a}U_C(s) - Y(s) + \left(\frac{a-b}{s+a}\right)Y(s)\right) = k_C\left(\frac{b}{a}U_C(s) - Y(s) + X(s)\right)$$

$$u[k] = k_C\left(\frac{b}{a}u_C[k] - y[k] + x[k]\right)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+T)-x(t)}{T} \implies \frac{x[k+1]-x[k]}{T} \approx \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(s) = \frac{a-b}{s+a}y(s) = (a-b)y(s)\frac{1}{s+a} \implies \frac{dx(t)}{dt} = (a-b)y[k]-ax[k] \implies \frac{x[k+1]-x[k]}{T} \approx (a-b)y[k]-ax[k]$$

$$x[k+1] = x[k] + T((a-b)y[k] - ax[k])$$

(d) Implemente no Simulink esse sistema com controlador a tempo contínuo e com controlador discretizado com períodos de amostragem $T = 0.2/\omega_0$, $T = 0.5/\omega_0$ e $T = 1.08/\omega_0$:

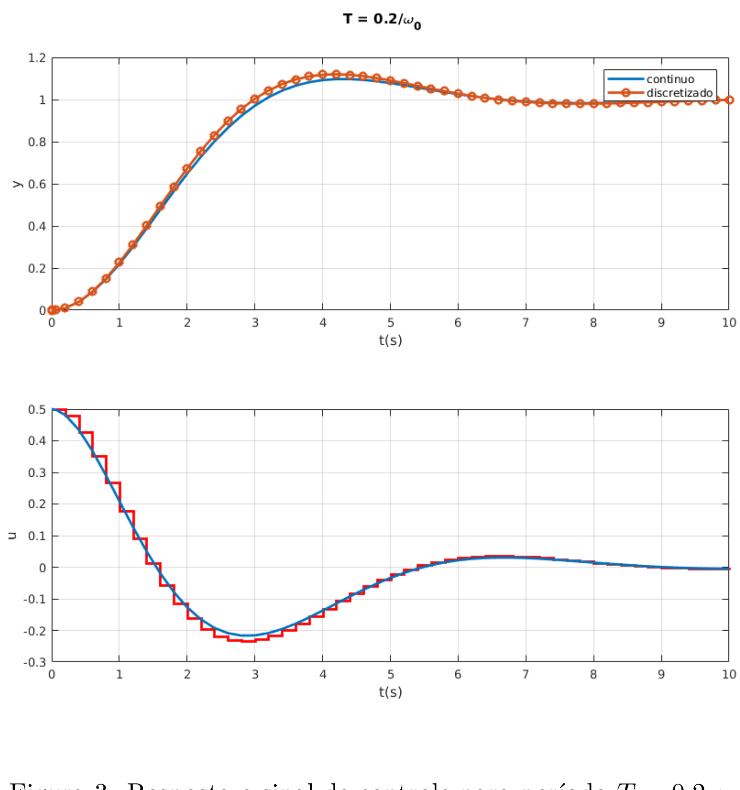

Figura 3: Resposta e sinal de controle para período $T = 0.2\omega_0$.

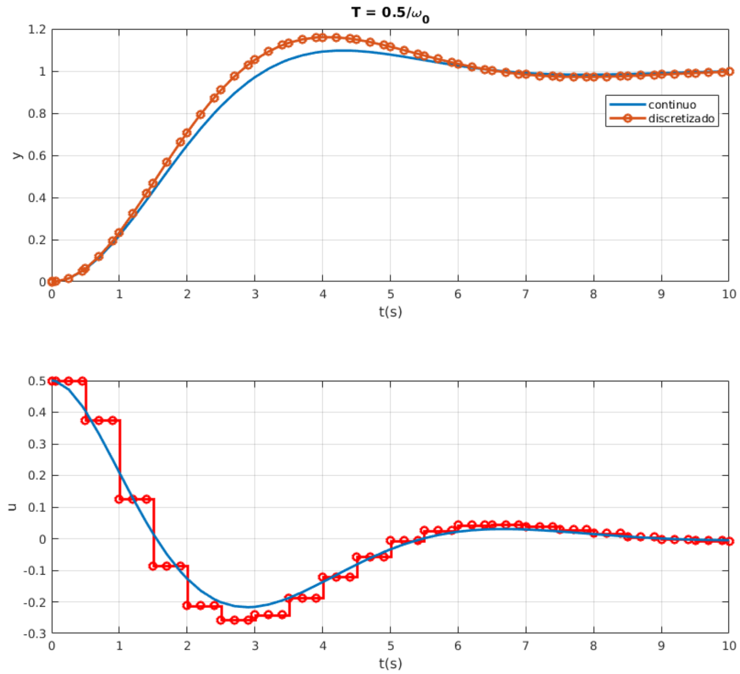

Figura 4: Resposta e sinal de controle para período $T = 0.5\omega_0$.

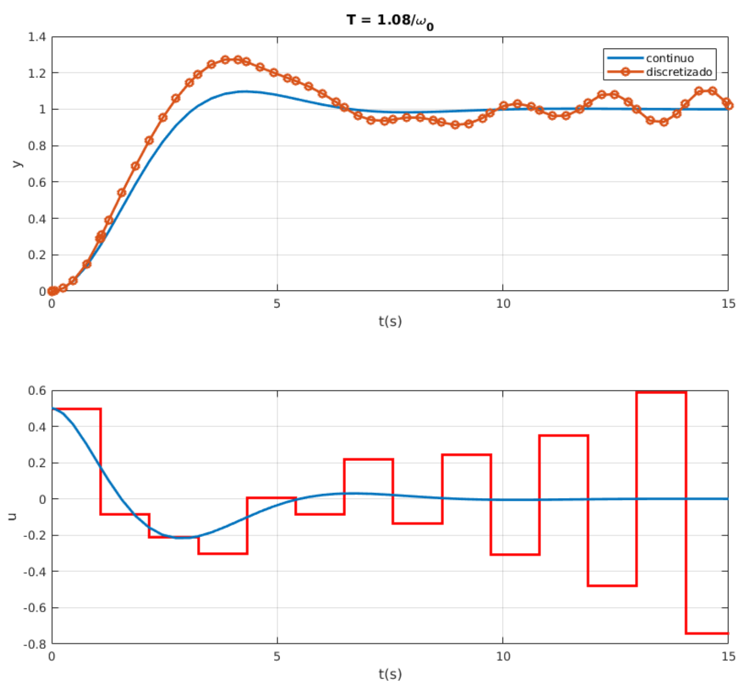

Figura 5: Resposta e sinal de controle para período $T = 1.08\omega_0$.

(e) Para cada período de amostragem, calcule a relação entre a frequência de amostragem e a frequência de corte do sistema a malha fechada ω_s/ω_c:

$$\text{Para } T = 0.2/\omega_0 \implies \frac{\omega_s}{\omega_c} \approx 4.355$$
$$\text{Para } T = 0.5/\omega_0 \implies \frac{\omega_s}{\omega_c} \approx 1.742$$
$$\text{Para } T = 1.08/\omega_0 \implies \frac{\omega_s}{\omega_c} \approx 0.968$$

(f) Para cada período de amostragem, compare a saída do sistema a malha fechada com controlador contínuo com a saída do sistema a malha fechada com controlador discretizado. O que se pode afirmar sobre o tempo de assentamento para os sistemas com controlador discretizado?

De acordo com a simulação, quanto menor o período de amostragem, menor o tempo de assentamento para o sistema dado. Caso o período de amostragem seja grande, o sistema se torna instável, como observado para $T = 1.08/\omega_0$.

(g) Para cada período de amostragem, compare a ação de controle do sistema em malha fechada com controlador contínuo com a saída do sistema em malha fechada com controlador discretizado:

Para $T = 0.2/\omega_0$, a resposta do sistema discreto em malha fechada foi extremamente próxima da resposta a tempo contínuo.

Para $T = 0.5/\omega_0$, a resposta do sistema discreto em malha fechada teve um *overshoot* levemente maior que o da resposta a tempo contínuo.

Para $T = 1.08/\omega_0$, a resposta do sistema discreto em malha fechada é instável.

(h) O que pode ser concluído acerca da seleção da frequência de amostragem para a discretização de controladores a tempo contínuo?

Nessa simulação, frequêcias de amostragem mais altas representaram uma resposta do sistema a tempo discreto mais próximas da resposta a tempo contínuo, e frequências mais baixas tenderam à instabilidade do sistema.