Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica
Controle Digital

Exercício de Simulação 2

Aluno:
Arthur de Matos Beggs —————————— 12/0111098

Brasília
2º/2020

Discretize a função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

usando os métodos a seguir.

Para cada caso, calcule a solução para $u(t) = 0 \;\forall\, t \geq 0$, $y(0) = 100$, $\dot{y}(0) = 0$, $T = 0.1s$ e compare no Matlab a solução exata a tempo contínuo com os resultados obtidos.

1^a Transformada de $G(s)$ com segurador de ordem zero em série:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+2)(s+5)}\right]$$

Expandindo em frações parciais:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{6s} + \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{2(s+2)}\right] = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{1}{6}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-e^{-3T}} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-2T}}\right)$$

$$G(z) = \frac{0.0042z + 0.0035}{z^2 - 1.5595z + 0.6065}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](z^2 - 1.5595z + 0.6065) = u[k](0.0042z + 0.0035), u[k] = 0\,\forall k \geq 0 \implies y[k](z^2 - 1.5595z + 0.6065) = 0$$

$$y[k] = 1.5595y[k-1] - 0.6065y[k-2]$$

$$\begin{cases} y[0] = 100 \\ y[1] - y[2] = 0 \implies y[1] = y[2] \end{cases}$$

2^a Regra retangular para frente:

$$G(z) = \left. G(s)\right|_{s=\frac{z-1}{T}}; T = 0.1$$

$$G(z) = \frac{1}{\left(\left(\frac{z-1}{0.1}\right)+2\right)\left(\left(\frac{z-1}{0.1}\right)+3\right)} = \frac{0.001}{z^2 - 1.5z + 0.56}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](z^2 - 1.5z + 0.56) = 0.01u[k], u[k] = 0\,\forall k \geq 0 \implies y[k](z^2 - 1.5z + 0.56) = 0$$

$$y[k] = 1.5y[k-1] - 0.56y[k-2]$$

$$\begin{cases} y[0] = 100 \\ y[1] - y[2] = 0 \implies y[1] = y[2] \end{cases}$$

3^a Regra retangular para trás:

$$G(z) = G(s)|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \,; T = 0.1$$

$$G(z) = \frac{1}{\left(\left(\frac{z-1}{0.1z}\right)+2\right)\left(\left(\frac{z-1}{0.1z}\right)+3\right)} = \frac{0.0064z^2}{z^2-1.6025z+0.641}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](z^2-1.6025z+0.641) = 0.0064z^2u[k], u[k]=0\,\forall k\geq 0 \implies y[k](z^2-1.6025z+0.641)=0$$

$$y[k] = 1.6025y[k-1]-0.641y[k-2]$$

$$\begin{cases} y[0]=100 \\ y[1]-y[2]=0 \implies y[1]=y[2] \end{cases}$$

4^a Regra trapeizodal:

$$G(z) = G(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \,; T = 0.1$$

$$G(z) = \frac{1}{\left(\left(\frac{2}{0.1}\frac{z-1}{z+1}\right)+2\right)\left(\left(\frac{2}{0.1}\frac{z-1}{z+1}\right)+3\right)} = \frac{z^2+2z+1}{506z^2-788z+306}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](506z^2-788z+306) = z^2+2z+1u[k], u[k]=0\,\forall k\geq 0 \implies y[k](506z^2-788z+306)=0$$

$$y[k] = \frac{788y[k-1]-306y[k-2]}{506}$$

$$\begin{cases} y[0]=100 \\ y[1]-y[2]=0 \implies y[1]=y[2] \end{cases}$$

5^a Mapeamento exato de pólos e zeros:

Para pólos e zeros finitos, $z=e^{sT}$; para zeros infinitos, $z=-1$. Assim,

$$G(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-e^{-2T})(z-e^{-3T})} = \frac{(z+1)^2}{(z-0.8187)(z-0.7408)} = \frac{z^2+2z+1}{z^2-1.5595z+0.6065}$$

Equação de diferenças:

$$y[k](z^2-1.5595z+0.6065) = z^2+2z+1u[k], u[k]=0\,\forall k\geq 0 \implies y[k](z^2-1.5595z+0.6065)=0$$

$$y[k] = 1.5595y[k-1]-0.6065y[k-2]$$

$$\begin{cases} y[0]=100 \\ y[1]-y[2]=0 \implies y[1]=y[2] \end{cases}$$

Tempo contínuo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right] = Ae^{-2t} - Be^{-3t}$$

Dadas as condições iniciais $u(t) = 0 \ \forall\, t \geq 0$, $y(0) = 100$, $\dot{y}(0) = 0$,

$$y(t) = 300e^{-2t} - 200e^{-3t}$$

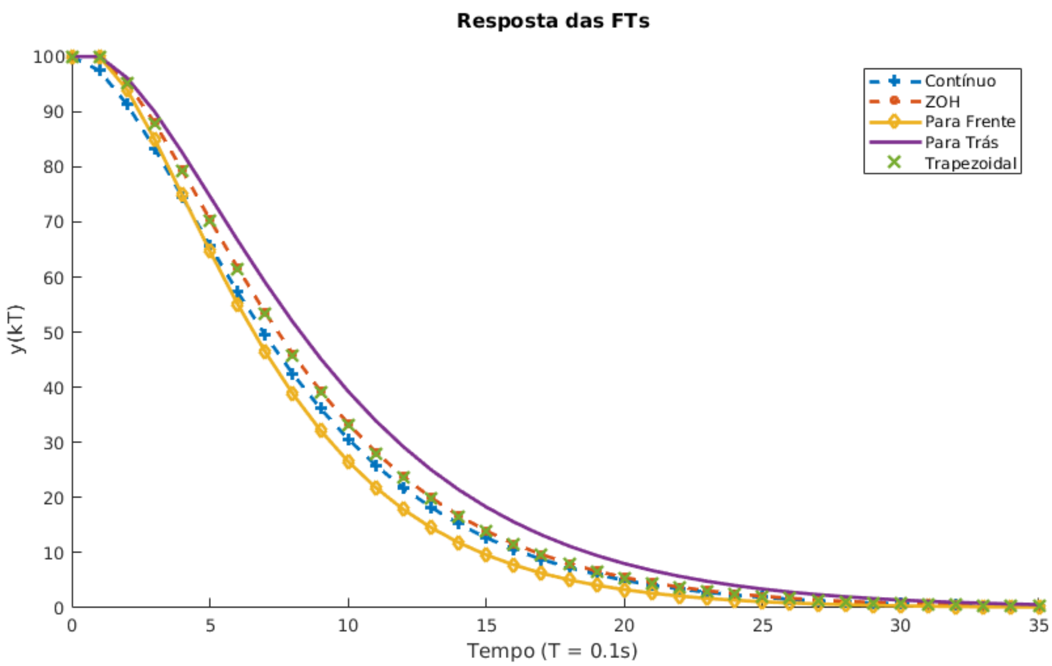

Figura 1: Gráfico de G(s) discretizado