Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica
Controle Digital

Exercício de Simulação 5

Aluno:
Arthur de Matos Beggs ———————— 12/0111098

Brasília
2º/2020

Considere que a planta do sistema de controle a tempo discreto mostrado na Figura 1 tem função de transferência

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

O período de amostragem é $T = 0.1\,s$.

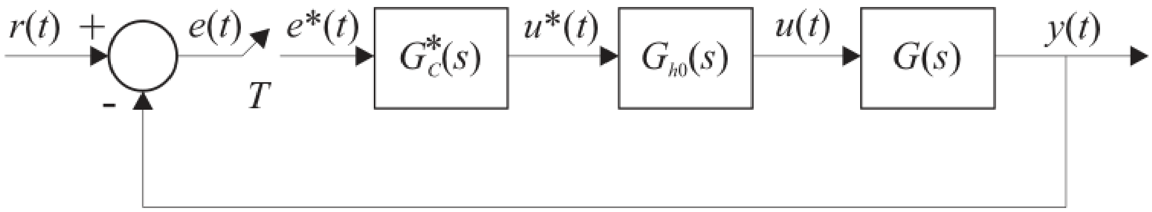

Figura 1: Diagrama do sistema.

1. Projete o controlador $G_c(z)$ de modo que o sistema em malha fechada tenha resposta $y[k]$ ao degrau com erro $e[k]$ nulo para todo k maior que um número finito de instantes de amostragem. O controlador $G_c(z)$ deve cancelar o zero da planta discretizada $G(z)$ que fica dentro do CRU.

Discretizando a planta $G(s)$ com o *ZOH* $G_{h0}(s)$,

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{G_{h0}(s)G(s)\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{10}{s^2(s+2)}\right\}$$

Pelo Matlab,

```
T = 0.1;

s = tf('s');
z = tf('z', T);

G_s = zpk([], [0 -2], [10])
G_z = c2d(G_s, T, 'zoh')
```

$$G(z) = \frac{0.046827(z + 0.9355)}{(z-1)(z-0.8187)}$$

Para um sistema com resposta *deadbeat*,

$$M(z) = \frac{Y(z)}{R(z)};\; G_c(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{M(z)}{1 - M(z)}$$

Onde

$$M(z) = \prod_{i=1}^{I}(1 - z_i z^{-1})(M_k z^{-k} + M_{k+1}z^{-k-1} + \cdots)$$

$$1 - M(z) = \prod_{j=1}^{J}(1 - p_j z^{-1})(1 - z^{-1})^p(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots)$$

sendo $z_i,\ i = 1, 2, \ldots I$ os zeros da planta que não devem ser cancelados e $p_j,\ j = 1, 2, \ldots J$ os polos da planta que não devem ser cancelados.

$$n = n_p[G(z)] - n_z[G(z)] = 2 - 1 = 1$$
$$k = n_p[M(z)] - n_z[M(z)]$$

Para a resposta a tempo mínimo, $k = n = 1$. Considerando a entrada degrau $R(z) = \frac{z}{z-1}$,

$$p = \max\{n_p[R(z)]\,\text{em}\,z = 1,\, n_p[G(z)]\,\text{em}\,z = 1\} = \max\{1,\, 1\} = 1$$

Como o controlador deve cancelar o zero da planta,

$$M(z) = (M_1 z^{-1} + M_2 z^{-2})$$
$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^1(1 + a_1 z^{-1})$$
$$1 - (M_1 z^{-1} + M_2 z^{-2}) = (1 - z^{-1})^1(1 + a_1 z^{-1}) = 1 - (1 - a_1)z^{-1} - a_1 z^{-2}$$

$$\begin{cases} M_1 = 1 - a_1 \\ M_2 = a_1 \end{cases}$$

Escolhendo $a_1 = -1$, temos que $M_1 = 2$ e $M_2 = -1$.

$$M(z) = (2z^{-1} - z^{-2}) = \frac{2(z - 0.5)}{z^2}$$
$$1 - M(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2}$$

Assim,

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{M(z)}{1 - M(z)} = \frac{(z-1)(z-0.8187)}{0.046827(z+0.9355)}\frac{2(z-0.5)}{z^2}\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{42.7104(z-0.5)(z-0.8187)}{(z-1)(z+0.9355)}$$

2. Simule o sistema em malha fechada com o controlador projetado no item anterior conforme o diagrama da Figura 1 para entrada degrau unitário. Faça os gráficos da saída $y(t)$ em tempo contínuo da planta $G(s)$, do sinal de erro $e[k]$ que entra no controlador a tempo discreto $G_c(z)$ e do sinal de controle $u(t)$ que sai do segurador de ordem zero $G_{h0}(z)$.

Declarando o controlador $G_c(z)$ encontrado no *workspace* do Matlab, o sistema da Figura 2 pode ser simulado.

```
[Z_g, P_g, K_g] = zpkdata(G_z, 'v')
Gc1_z = zpk([0.5 P_g(2)], [1 Z_g(1)], [2/K_g], T)
```

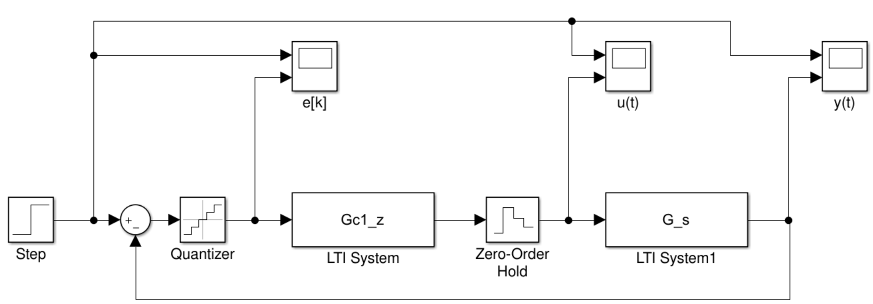

Figura 2: Sistema simulado.

O sinal de saída $y(t)$ é mostrado na Figura 3. Aparentemente o sinal chega no valor de referência em dois instantes de tempo e permanece no valor de referência. Porém, a Figura 4 com *zoom* mostra que existem pequenas oscilações no sinal entre os momentos onde o sinal é amostrado.

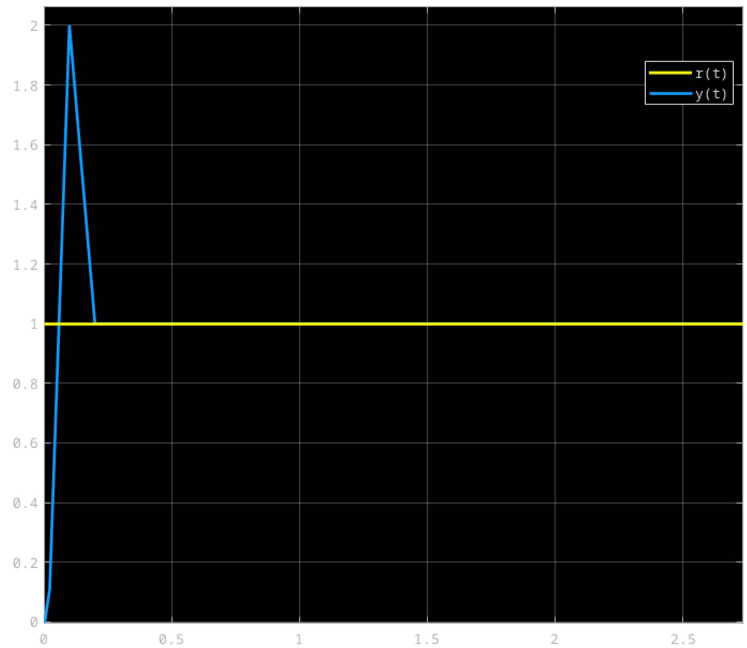

Figura 3: Gráfico da resposta y(t).

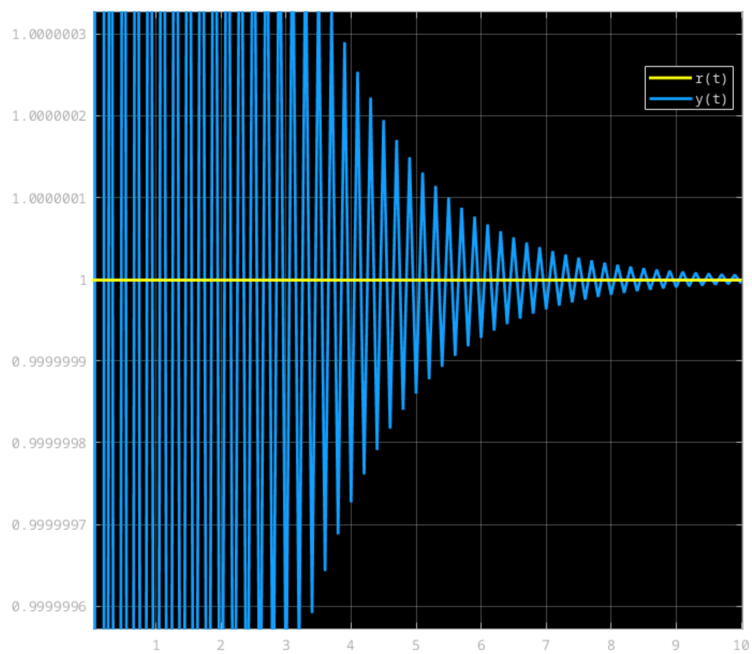

Figura 4: Gráfico da resposta y(t) ampliado.

A Figura 5 mostra o sinal de erro $e[k] = 0$ em dois instantes de tempo.

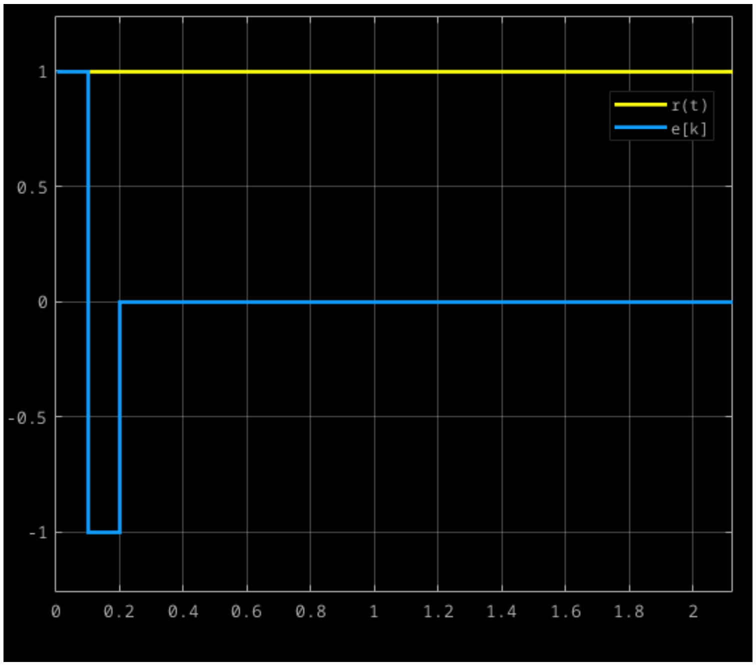

Figura 5: Gráfico do sinal e[k].

A Figura 6 mostra o sinal de controle $u(t)$.

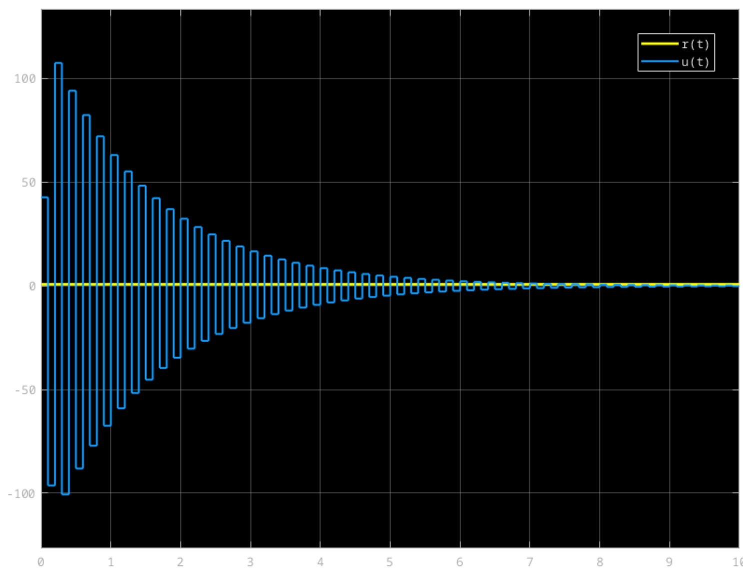

Figura 6: Gráfico do sinal u(t).

3. Projete o controlador $G_c(z)$ de modo que o sistema em malha fechada tenha resposta $y(t)$ ao degrau com erro $e(t)$ nulo para todo t maior que um número finito de instantes de amostragem. O controlador $G_c(z)$ não deve cancelar o zero da planta discretizada $G(z)$ que fica dentro do CRU.

Discretizando a planta $G(s)$ com o *ZOH* $G_{h0}(s)$,

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{G_{h0}(s)G(s)\right\} = (1 - z^{-}1)\mathcal{Z}\left\{\frac{10}{s^2(s+2)}\right\}$$

Pelo Matlab,

```
T = 0.1;

s = tf('s');
z = tf('z', T);

G_s = zpk([], [0 -2], [10])
G_z = c2d(G_s, T, 'zoh')
```

$$G(z) = \frac{0.046827(z + 0.9355)}{(z-1)(z-0.8187)}$$

Para um sistema com resposta *deadbeat*,

$$M(z) = \frac{Y(z)}{R(z)};\ G_c(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{M(z)}{1 - M(z)}$$

Onde

$$M(z) = \prod_{i=1}^{I}(1 - z_i z^{-1})(M_k z^{-k} + M_{k+1}z^{-k-1} + \cdots)$$

$$1 - M(z) = \prod_{j=1}^{J}(1 - p_j z^{-1})(1 - z^{-1})^p(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots)$$

sendo $z_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots I$ os zeros da planta que não devem ser cancelados e $p_j,\ j = 1,\ 2,\ \ldots J$ os polos da planta que não devem ser cancelados.

$$n = n_p[G(z)] - n_z[G(z)] = 2 - 1 = 1$$

$$k = n_p[M(z)] - n_z[M(z)]$$

Para a resposta a tempo mínimo, $k = n = 1$. Considerando a entrada degrau $R(z) = \frac{z}{z-1}$,

$$p = \max\left\{n_p[R(z)]\,\text{em}\,z = 1,\ n_p[G(z)]\,\text{em}\,z = 1\right\} = \max\left\{1,\ 1\right\} = 1$$

Como o controlador não deve cancelar o zero da planta,

$$M(z) = (1 + 0.9355z^{-1})(M_1 z^{-1})$$

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^1(1 + a_1 z^{-1})$$

$$1 - ((1 + 0.9355z^{-1})(M_1 z^{-1})) = (1 - z^{-1})^1(1 + a_1 z^{-1}) = 1 - (1 - a_1)z^{-1} - a_1 z^{-2}$$

$$\begin{cases} M_1 = 1 - a_1 & \Longrightarrow\ M_1 = \frac{1}{1.9355} = 0.5167 \\ a_1 = 0.9355M_1 & \Longrightarrow\ a_1 = \frac{0.9355}{1.9355} = 0.4833 \end{cases}$$

$$M(z) = (1 + 0.9355z^{-1})(0.5167z^{-1}) = \frac{0.5167(z + 0.9355)}{z^2}$$

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^1(1 + 0.4833z^{-1}) = \frac{(z-1)(z+0.4833)}{z^2}$$

Assim,

$$G_c(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{M(z)}{1-M(z)} = \frac{(z-1)(z-0.8187)}{0.046827(z+0.9355)}\frac{0.5167(z+0.9355)}{z^2}\frac{z^2}{(z-1)(z+0.4833)} = \frac{11.033(z-0.8187)}{(z+0.4833)}$$

4. Simule o sistema em malha fechada com o controlador projetado no item anterior conforme o diagrama da Figura 1 para entrada degrau unitário. Faça os gráficos da saída $y(t)$ em tempo contínuo da planta $G(s)$, do sinal de erro $e[k]$ que entra no controlador a tempo discreto $G_c(z)$ e do sinal de controle $u(t)$ que sai do segurador de ordem zero $G_{h0}(z)$.

Declarando o controlador $G_c(z)$ encontrado no *workspace* do Matlab, o sistema da Figura 7 pode ser simulado.

```
[Z_g, P_g, K_g] = zpkdata(G_z, 'v')
a1 = -Z_g(1)/(1-Z_g(1))
M1 = 1/(1-Z_g(1))
Gc2_z = zpk([P_g(2)], [-a1], [M1/K_g], T)
```

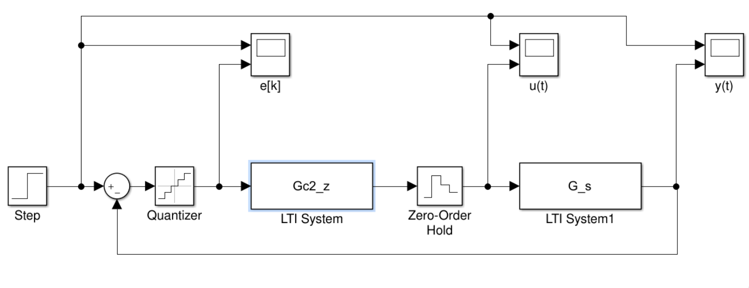

Figura 7: Sistema simulado.

O sinal de saída $y(t)$ é mostrado na Figura 8. O sinal chega próximo ao valor de referência em dois instantes de amostragem.

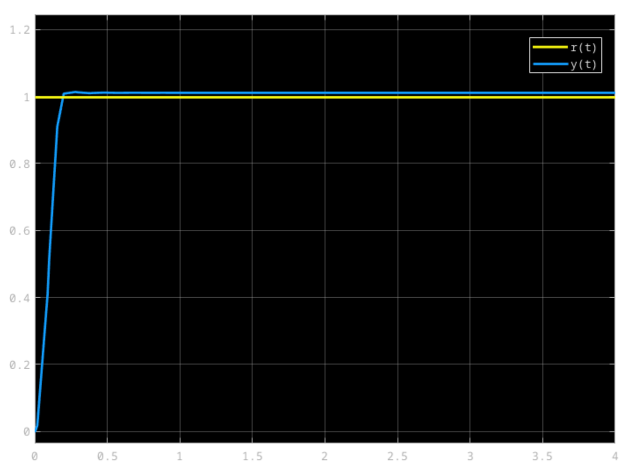

Figura 8: Gráfico da resposta y(t).

O erro pode ser proveniente de problemas na simulação ou na resposta em tempo contínuo. A Figura 9 mostra a resposta da planta discretizada a uma entrada degrau unitário com erro nulo obtida por

```
step(feedback(G_z*Gc2_z, 1))
grid on
```

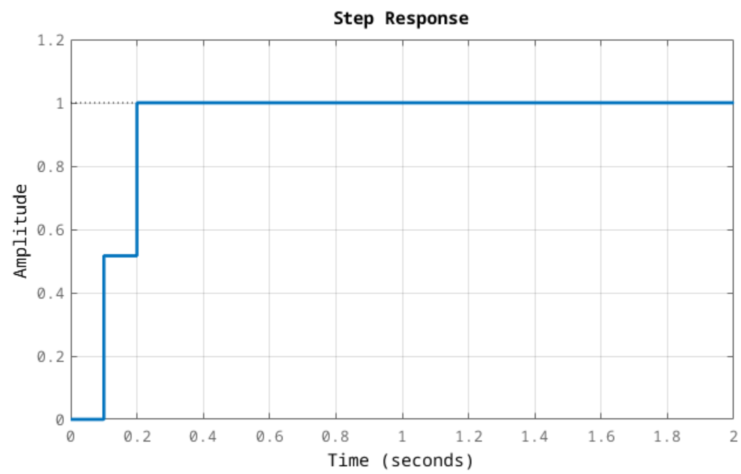

Figura 9: Gráfico da resposta y(t) obtida com a planta discretizada.

A Figura 10 mostra o sinal de erro $e[k] = 0$ em dois instantes de tempo.

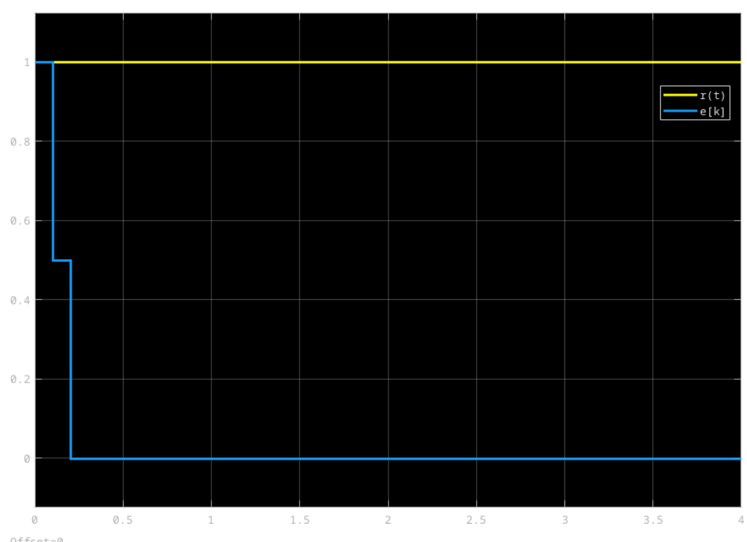

Figura 10: Gráfico do sinal e[k].

A Figura 11 mostra o sinal de controle $u(t)$.

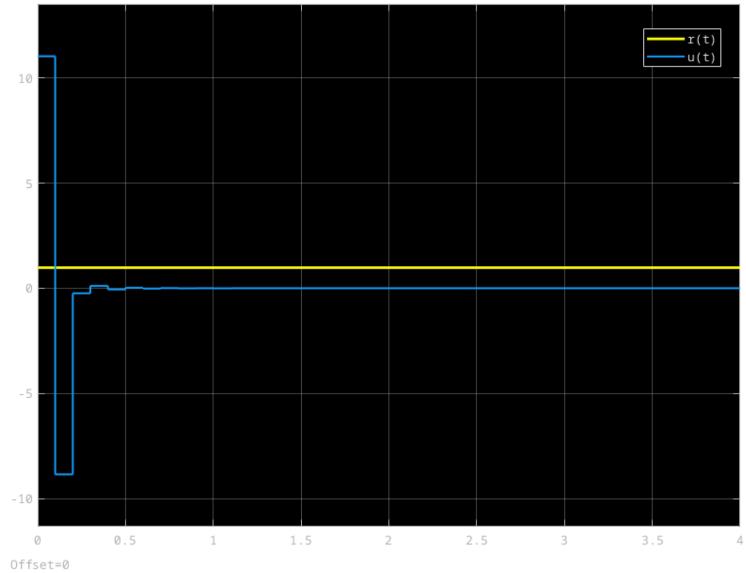

Figura 11: Gráfico do sinal u(t).