4.4 Fatoração LU

Considere um sistema linear $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, onde a matriz $\boldsymbol{A}$ é densa[5] (main52.html#fn5x7) . A fim de resolver o sistema, podemos fatorar a matriz $\boldsymbol{A}$ como o produto de uma matriz $\boldsymbol{L}$ triangular inferior e uma matriz $\boldsymbol{U}$ triangular superior, ou seja, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$.

Sendo assim, o sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Ax} &= \boldsymbol{b} && (4.65)\\
(\boldsymbol{LU})\,\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} && (4.66)\\
\boldsymbol{L}\,(\boldsymbol{Ux}) &= \boldsymbol{b} && (4.67)\\
\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \quad &\text{e} \quad \boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y} && (4.68)
\end{aligned}$$

Isto significa que, ao invés de resolvermos o sistema original, podemos resolver o sistema triangular inferior $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ e, então, o sistema triangular superior $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$, o qual nos fornece a solução de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

A matriz $\boldsymbol{U}$ da fatoração[6] (main53.html#fn6x7) $\boldsymbol{LU}$ é a matriz obtida ao final do escalonamento da matriz $\boldsymbol{A}$.

A matriz $\boldsymbol{L}$ é construída a partir da matriz identidade $\boldsymbol{I}$, ao longo do escalonamento de A. Os elementos da matriz $\boldsymbol{L}$ são os múltiplos do primeiro elemento da linha de $\boldsymbol{A}$ a ser zerado dividido pelo pivô acima na mesma coluna.

Por exemplo, para zerar o primeiro elemento da segunda linha de $\boldsymbol{A}$, calculamos

$$L_{21} = A_{21} \,/\, A_{11} \tag{4.69}$$

e fazemos

$$A_{2,:} \Leftarrow A_{2,:} - L_{21}A_{1,:} \tag{4.70}$$

Note que denotamos $A_{i,:}$ para nos referenciarmos a linha i de $\boldsymbol{A}$. Da mesma forma, se necessário usaremos $A_{:,j}$ para nos referenciarmos a coluna j de $\boldsymbol{A}$.

Para zerar o primeiro elemento da terceira linha de $\boldsymbol{A}$, temos

$$L_{31} = A_{31} \,/\, A_{11} \tag{4.71}$$

e fazemos

$$A_{3,:} \Leftarrow A_{3,:} - L_{31}A_{1,:} \tag{4.72}$$

até chegarmos ao último elemento da primeira coluna de $\boldsymbol{A}$.

Repetimos o processo para as próximas colunas, escalonando a matriz $\boldsymbol{A}$ e coletando os elementos L_{ij} abaixo da diagonal[7] (main54.html#fn7x7) .

Exemplo 4.4.1. Use a fatoração LU para resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -2\\
2x_1 + x_2 - x_3 &= 1\\
2x_1 - x_2 + x_3 &= 3
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Solução. Começamos fatorando a matriz $\boldsymbol{A}$ dos coeficientes deste sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_{3,3}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \tag{4.74}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U} \tag{4.76}$$

$$\tag{4.77}$$

Completada a fatoração LU, resolvemos, primeiramente, o sistema $Ly = b$:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2 \\ 2y_1 + y_2 &= 1 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned} \tag{4.78}$$

o qual nos fornece $y_1 = -2$, $y_2 = 5$ e $y_3 = -8$. Por fim, obtemos a solução resolvendo o sistema $Ux = y$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ -x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 8x_3 &= -8 \end{aligned} \tag{4.79}$$

o qual fornece $x_3 = -1$, $x_2 = -2$ e $x_1 = 1$.

◊

4.4.1 Código GNU Octave: Fatoração LU

No `GNU Octave`, podemos implementar o algoritmo para fatoração LU da seguinte forma:

```
function [L,A]=fatoraLU(A)
  n=size(A,1);
  L=eye(n,n);
  for j=1:n-1
      for i=j+1:n
          L(i,j) = A(i,j)/A(j,j);
          A(i,j+1:n) = A(i,j+1:n) - L(i,j)*A(j,j+1:n);
          A(i,j)=0;
      endfor
  endfor
endfunction
```

Observação 4.4.1. O custo computacional do algoritmo da fatoração LU é

$$\frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} \text{ flops.} \tag{4.80}$$

4.4.2 Custo computacional para resolver um sistema linear usando fatoração LU

Para calcularmos o custo computacional de um algoritmo completo, uma estratégia é separar o algoritmo em partes menores, mais fáceis de analisar.

Para resolver o sistema, devemos primeiro fatorar a matriz A nas matrizes L e U. Vimos que o custo é

$$\frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6} \text{ flops.} \tag{4.81}$$

Depois devemos resolver os sistemas $Ly = b$ e $Ux = y$. O custo de resolver os dois sistemas é (devemos contar duas vezes)

$$2n^2 \text{ flops.} \tag{4.82}$$

Somando esses 3 custos, temos que o custo para resolver um sistema linear usando fatoração LU é

$$\frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{6} \text{ flops.} \tag{4.83}$$

Quando n cresce, prevalessem os termos de mais alta ordem, ou seja,

$$\mathcal{O}\left(\frac{2n^3}{3}+\frac{3n^2}{2}-\frac{n}{6}\right)=\mathcal{O}\left(\frac{2n^3}{3}+\frac{3n^2}{2}\right)=\mathcal{O}\left(\frac{2n^3}{3}\right) \tag{4.84}$$

4.4.3 Custo para resolver m sistemas lineares

Devemos apenas multiplicar m pelo custo de resolver um sistema linear usando fatoração LU, ou seja, o custo será

$$m\left(\frac{2n^3}{3}+\frac{3n^2}{2}-\frac{n}{6}\right)=\frac{2mn^3}{3}+\frac{3mn^2}{2}-\frac{mn}{6} \tag{4.85}$$

e com $m=n$ temos

$$\frac{2n^4}{3}+\frac{3n^3}{2}-\frac{n^2}{6}. \tag{4.86}$$

Porém, se estivermos resolvendo m sistemas com *a mesma matriz* A (e diferente lado direito b para cada sistema) podemos fazer a fatoração LU uma única vez e contar apenas o custo de resolver os sistemas triangulares obtidos.

Custo para fatoração LU de A: $\frac{2n^3}{3}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}$.

Custo para resolver m sistemas triangulares inferiores: mn^2.

Custo para resolver m sistemas triangulares superiores: mn^2.

Somando esses custos obtemos

$$\frac{2n^3}{3}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}+2mn^2 \tag{4.87}$$

que quando $m=n$ obtemos

$$\frac{8n^3}{3}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}\text{ flops.} \tag{4.88}$$

4.4.4 Custo para calcular a matriz inversa de A

Como vemos em Álgebra Linear, um método para obter a matriz A^{-1} é realizar o escalonamento da matriz $[A|I]$ onde I é a matriz identidade. Ao terminar o escalonamento, o bloco do lado direito conterá A^{-1}.

Isto é equivalente a resolver n sistemas lineares com a mesma matriz A e os vetores da base canônica $e_i=[0,\ldots,0,1,0,\ldots 0]^T$, isto é,

$$Ax_i=e_i,\qquad i=1:n \tag{4.89}$$

onde x_i serão as colunas da matriz A inversa, já que $AX=I$.

O custo para resolver esses n sistemas lineares foi calculado na seção anterior como

$$\frac{8n^3}{3}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{6}. \tag{4.90}$$

Exemplo 4.4.2. Qual o melhor método para resolver um sistema linear: via fatoração LU ou calculando a inversa de A e obtendo $x=A^{-1}b$?

❮ (sdsl-sistemas_triangulares.html) ☰ (main.html#sdsl-fatoracao_lu.html) ❯ (sdsl-metodo_da_matriz_tridiagonal.html)

Recursos
Álgebra Linear (../../AlgebraLinear/index.html)
Cálculo (../../Calculo/index.html)
Cálculo Numérico (../../CalculoNumerico/index.html)
Computação Científica (../../ComputacaoCientifica/index.html)
Transformadas Integrais (../../TransformadasIntegrais/index.html)
Repositórios (https://github.com/reamat)

Projeto
Página Inicial (../../index.html)
Participar (../../participe.html)
Fórum (s.php) Informe erros ou (https://github.com/reamat/CalculoNumerico/blob/master/cap_linsis/cap_linsis.tex) edite você mesmo! ×
Organizadores (../../organizadores.html)

Perguntas frequentas (../../perguntas_frequentes.html)

IME - UFRGS
Página do IME (https://www.ufrgs.br/ime/)
Página da UFRGS (http://www.ufrgs.br)