Eliminação de Gauss com Pivoteamento Parcial

Prof$a$. Cynthia de O. Laga Ferreira

Métodos Numéricos e Computacionais I - SME0305

Considere o exemplo abaixo:

Exemplo

Use o método de Gauss para resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}.$$

Resolvendo este sistema pelo método de Gauss, temos

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

e

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & 1-10^4 & 2-10^4 \end{array}\right)$$

Supondo que trabalhamos com três algarismos significativos, a solução deste sistema é

$$x \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entretanto, a solução "exata" deste sistema é

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 0.9999 \end{pmatrix}.$$

A propagação de erros acontece quando multiplicamos números grandes por outros que já contém erros de arredondamento. No método de Eliminação de Gauss vários produtos são efetuados. Para amenizar esta propagação de erros, devemos tomar os multiplicadores $m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ menores do que 1, em valor absoluto. Podemos, então, em cada passo, escolher na coluna correspondente o elemento de maior valor absoluto, da diagonal (inclusive) para baixo, e fazer uma permutação nas equações do sistema, de modo que esse elemento venha a ocupar a posição do pivô. A este procedimento chamamos Método de Eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial.

Descrição do Algoritmo

$$Encontrar\ piv\hat{o}:\ |a_{pk}^{(k)}| = max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

$$Trocar\ linhas\ L_k \longleftrightarrow L_p$$

$$Fazer\ Eliminação\ de\ Gauss$$

Exercício: resolva o sistema do exemplo anterior pelo método de Gauss com pivotemento e compare os resultados obtidos.

De fato, uma permutação das duas equações no dará um resultado mais satisfatório, mesmo considerando apenas três algarismos significativos

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{10^{-4}}{1} = 10^{-4}$$

e

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-4} & 1 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 - 10^{-4} & 1 - 2.10^{-4} \end{array} \right),$$

isto é,

$$x \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício: Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Use o método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial para resolver este sistema, trabalhando com dois algarismos significativos em todas as operações.

Função Matlab `x = eliminacao_gauss_pivo(A,b)`

```
function x = eliminacao_gauss_pivo(A,b)
 [m,n] = size(A);
 Ab = [A b];
   for k=1:n-1
     %parte do pivoteamento
     [~,p] = max(abs(Ab(k:n,k)));
     p = p+k-1;
     if p ~ = k
       % pivoteamento das linhas
       Ab([k,p],:)  = Ab([p,k],:)
   end
   for i=k+1:n
       m = Ab(i,k)/Ab(k,k);
       Ab(i,k:end) = Ab(i,k:end)-m*Ab(k,k:end);
   end
 end
 x = backsub(Ab(:,1:n),Ab(:,end));
```