UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS-UNICAMP
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
DISCIPLINA: MODELOS E MÉTODOS MATEMÁTICOS
PROFESSOR: RICARDO M. MARTINS

MODELO PRESA PREDADOR
LOTKA - VOLTERRA

DANILO FALCAO - RA: 154171
JORGE MENOR - RA: 154372
RAIMUNDO MARCOLINO - RA: 154170

CAMPINAS-SP
MAIO/2015

INTRODUÇÃO

O modelo presa – predador ou Lotka – Volterra trata da interação entre duas espécies, onde uma delas (presa) dispõe de alimentos em abundância e a outra espécie (predador) tem como suprimento alimentar a população de presa

Alfred J. Lotka (1880-1949)
Fonte: http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Alfred_Lotka

Alfred J. Lotka (1880-1949).

No ano de 1925 estudou a interação predador-presa e publicou um livro chamado “Elements of Physical Biology” . Famoso pelo seu trabalho em dinâmica populacioonal.

Vito **Volterra (1860 – 1940)**
Fonte: http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Vito_Volterra

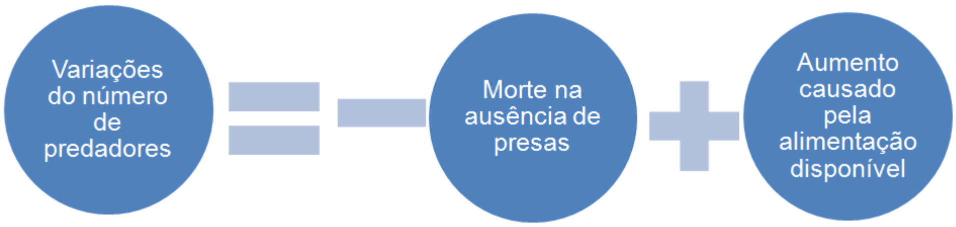
Vito **Volterra (1860 – 1940).**
Matemático e físico italiano. A essência de seu trabalho está resumida em seu livro *Theory of functionals and of Integral and Integro-Differential Equations* (1930).

MODELAGEM

Sejam:

x = x(t) a densidade populacional das presas em um instante t;

y = y(t) a densidade populacional dos predadores em um instante t



Se modelarmos os encontros possíveis entre presa e predador pelo termo bilinear xy, o sistema fica:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \qquad \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x).$$

(1)

onde a, α, c e γ são constantes positivas.

As equações (1) são chamadas equações de Lotka - Volterra em referência ao matemático americano Alfred J Lotka (1980 - 1949) e ao italiano Vito Volterra (1860 - 1940)

O sistema presa – predador é não linear, mas pode ser analisado qualitativamente. Fazendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c+\gamma x).}{x(a-\alpha y)}$$

(2)

A equação (2) é separável, podemos resolver do seguinte modo:

$$\int \frac{(a - \alpha y)}{y} \, dy = \int \frac{(-c + \gamma x)}{x} \, dx$$

$$-c\ln x + \gamma x = \ln y - \alpha y + k \qquad (3)$$

onde k é uma constate de integração.

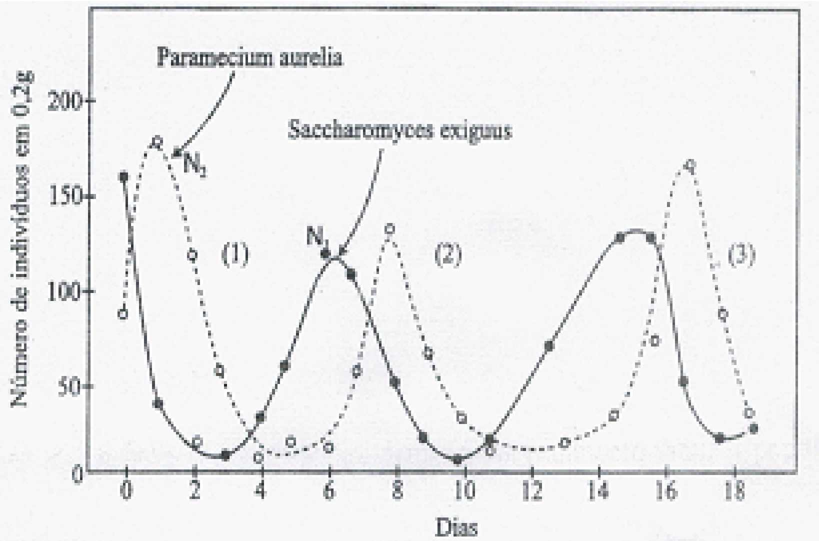
Para representar as trajetórias usamos o método gráfico de Volterra:

$$z = f(x) = -c \ln x + \gamma x$$

$$w = g(y) = a \ln y - \alpha y$$

$$z = w + k$$

Modelo clássico presa – predador obtido por Gause em testes de laboratórios em 1934



Flutuação no tamanho da população de Paramecium aurelia que se alimenta de Saccharomyces exiguus. Esperiência foi feita por G. F. Guase. Figura reproduzida de Bassanezi (2006,p.365)

SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO

Uma análise qualitativa é feita através dos pontos de equilíbrio.
O sistema presa – predador está em equilíbrio quando sua variação é nula.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{\alpha} \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \text{ ou } x = \frac{c}{\gamma} \end{cases}$$

Os pontos críticos são:

$$(0,\ 0) \text{ e } \left(\frac{c}{\gamma},\ \frac{a}{\alpha}\right)$$

Análise do sistema linear correspondente próximo do ponto (0,0), desprezando os termos não lineares

$$X' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} X, \quad X' = AX \text{ e } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Os autovalores e autovetores do sistema linear (4), são respectivamente,

$$r_1 = a, \quad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(5)$$

$$r_2 = -c, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solução geral é da forma:

$$X = C_1\, \xi^1\, e^{r_1 t} + C_2\, \xi^2\, e^{r_2 t}$$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct} \qquad (6)$$

Os autovalores têm sinais contrários, neste caso (0,0) é um ponto de sela, logo, instável

Vamos analisar agora o ponto $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$ para encontrar o sistema linear correspondente ao sistema não linear (1), fazemos uma mudança de variável:

$$x = u + \frac{c}{\gamma} \quad e \quad y = v + \frac{a}{\alpha} \qquad (7)$$

substituindo as Eqs. (7) no sistema (1) e despresando os termos não lineares encontramos o sistema linear correspondente.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\alpha c}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\alpha c}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Os autovalores do sistema (8) são

$$\det\begin{pmatrix} 0 - r & \frac{-\alpha c}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & 0 - r \end{pmatrix} = 0$$

$$r^2 + ac = 0$$

$$r = -i\sqrt{ac} \quad e \quad r = i\sqrt{ac} \qquad (9)$$

As soluções reais do sistema (8) são periódicas de período $\frac{2\tau}{\sqrt{ac}}$

$$\begin{cases} u(t) = k\,\frac{c}{\gamma}\,\mathrm{Cos}\,\sqrt{ac}\,t \\ v(t) = k\,\frac{a}{\alpha}\,\sqrt{\frac{c}{a}}\,\mathrm{Sin}\,\sqrt{ac}\,t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c}{\gamma} + k\,\frac{c}{\gamma}\,\mathrm{Cos}\,\sqrt{ac}\,t \\ y(t) = \frac{a}{\alpha} + k\,\frac{a}{\alpha}\,\sqrt{\frac{c}{a}}\,\mathrm{Sin}\,\sqrt{ac}\,t \end{cases} \qquad (10)$$

As trajetórias do sistema (8) podem ser encontradas fazendo:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\frac{\alpha c}{\gamma}\,v}{\frac{\gamma a}{\alpha}\,u}$$

$$\gamma^2\,au\,\frac{du}{dv} = -\alpha^2\,cv$$

$$\int \gamma^2\,au\,du = -\int \alpha^2\,cv\,dv$$

$$\gamma^2\,au^2 + \alpha^2\,cv^2 = k$$

$$\frac{u^2}{\frac{k}{\gamma^2 a}} + \frac{v^2}{\frac{k}{\alpha^2 c}} = 1 \qquad (11)$$

onde k é uma constante de integração. Portanto, a Eqs. (11) são elipses em torno do ponto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$, que é um ponto de equilíbrio chamado de centro, pois fica no centro das trajetórias elípticas, logo é estável.

A transferência das características dos pontos de equilíbrio dos sistemas linearizados (4) e (8) correspondentes aos pontos críticos do sistema quase linear (1) é dada através do Teorema de Linearização de Lyaponov-Poincaré.

As trajetórias fechadas em torno do ponto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \ \frac{a}{\alpha}\right)$ descreve o ciclo ecológico.

A questão fundamental que deu origem ao modelo presa - predador foi a observação do biológo italiano D'Ancona, que constatou um aumento relativo da população de tubarões no Mar Mediterrâneo no período da I Guerra Mundial quando o perigo de bombardeios reduziu a pesca na região.

EXEMPLO

O sistema abaixo pode ser interpretado como sendo a interação entre duas espécies com densidades populacionais x(t) e y(t)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1.5\,x - 0.5\,xy \\ \frac{dy}{dt} = -0.5\,y + xy \end{cases} \tag{12}$$

onde $a = 1.5$, $\alpha = 0.5$, $c = 0.5$ e $\gamma = 1$

Os pontos críticos são as soluções do sistema algébrico, onde o sistema está em equilíbrio:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1.5\,x - 0.5\,xy = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -0.5\,y + xy = 0 \end{cases} \tag{13}$$

```
Solve[1.5 x - 0.5 x y == 0 && -0.5 y + x y == 0, {x, y}]
```

```
{{x → 0., y → 0.}, {x → 0.5, y → 3.}}
```

Logo, os pontos críticos são (0,0) e (0.5,3)

Para encontrar o sistema linear correspondente ao sistema não linear (12) próximo da origem, basta desprezar os termos não lineares, logo:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } X' = Ax \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Precisamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz do sistema linear (14)

```
A = (1.5   0
     0   -0.5);
```

```
Eigenvalues[A]
```

```
{1.5, -0.5}
```

```
Eigenvectors[A]
```

```
{{-1., 0.}, {0., -1.}}
```

A solução geral é da forma:

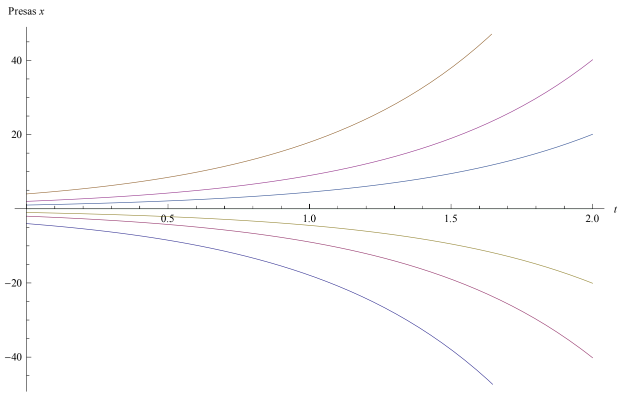
$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{1.5\,t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.5\,t},$$

$$x(t) = c_1\, e^{1.5\,t} \text{ e } y(t) = c_2\, e^{-0.5\,t} \qquad (15)$$

Assim, a origem é um ponto de sela para o sistema linear (14) e o não - linear (12), e portanto, instável.

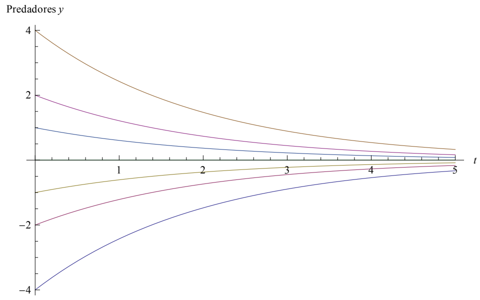
Soluções $x(t) = c_1 e^{1.5 t}$ população de presas, para diferentes valores de c_1.

```
Plot[{-4 Exp[1.5 t], -2 Exp[1.5 t], -1 Exp[1.5 t], 0, 1 Exp[1.5 t],
  2 Exp[1.5 t], 4 Exp[1.5 t]}, {t, 0, 2}, AxesLabel -> {t, x Presas}]
```



Soluções $y(t) = c_2 e^{-0.5 t}$ população de predadores para diferentes valores de c_2.

```
Plot[{-4 Exp[-0.5 t], -2 Exp[-0.5 t], -1 Exp[-0.5 t], 0, 1 Exp[-0.5 t],
  2 Exp[-0.5 t], 4 Exp[-0.5 t]}, {t, 0, 5}, AxesLabel -> {t, y Predadores}]
```

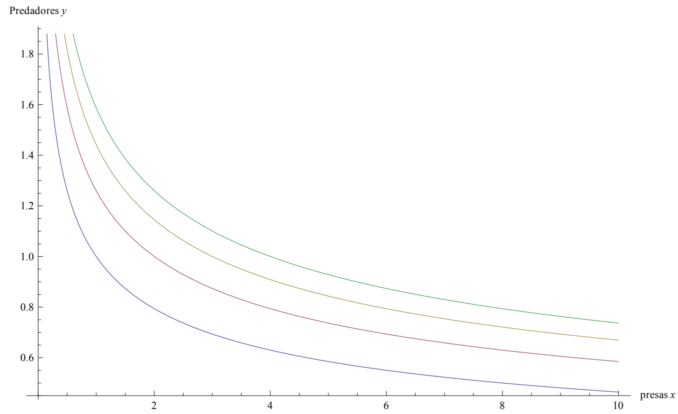


As trajetórias do sistema (14) são encontradas fazendo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1.5\,x}{-0.5\,y} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{-3}{y}\,dy \Rightarrow \ln x + 3\ln y = k \Rightarrow e^{\ln x + 3\ln y} = e^{k}$$

$xy^3 = k \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{k}{x}}$ onde k é uma constante de integração.

```
Plot[{(1/x)^(1/3), (2/x)^(1/3), (3/x)^(1/3), (4/x)^(1/3)}, {x, 0, 10}, AxesLabel -> {x presas, y Predadores}]
```



Para encontrarmos o sistema linear correspondente próximo ao ponto crítico (0.5,3) fazemos uma mudança de variável:

$$x = u + 0.5 \quad e \quad y = v + 3 \qquad (16)$$

Substituindo as Eqs.(16) no sistema não linear (12) encontramos o sistema

$$\frac{du}{dt} = -0.25\, v - 0.5\, uv$$

$$\frac{dv}{dt} = 3\, u + uv$$

Desprezando os termos não lineares, encontramos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ ou } U' = BU \text{ onde } B = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (17)$$

Os autovalores e autovetores da matriz B do sistema (17) são

```
B = ( 0  -0.25 )
    ( 3    0   )
```

```
{{0, -0.25}, {3, 0}}
```

```
Eigenvalues[B]
```

```
{0. + 0.866025 i, 0. - 0.866025 i}
```

```
Eigenvectors[B]
```

```
{{0. - 0.27735 i, -0.960769 + 0. i}, {0. + 0.27735 i, -0.960769 + 0. i}}
```

Como os autovalores são imaginários puros o ponto crítico (0.5 , 3) é um centro do sistema linear (17) e, portanto, um ponto crítico estável para esse sistema. Representa um ponto de equilíbrio estável para as populações de presas e predadores.

As trajetórias são encontradas fazendo

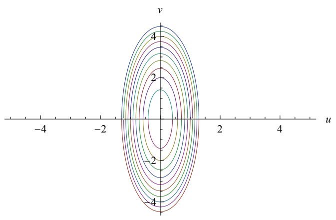
$$\frac{dv}{du} = \frac{3\,u}{-0.25\,v}$$

$$\int -0.25\,v\,dv = \int 3\,u\,du$$

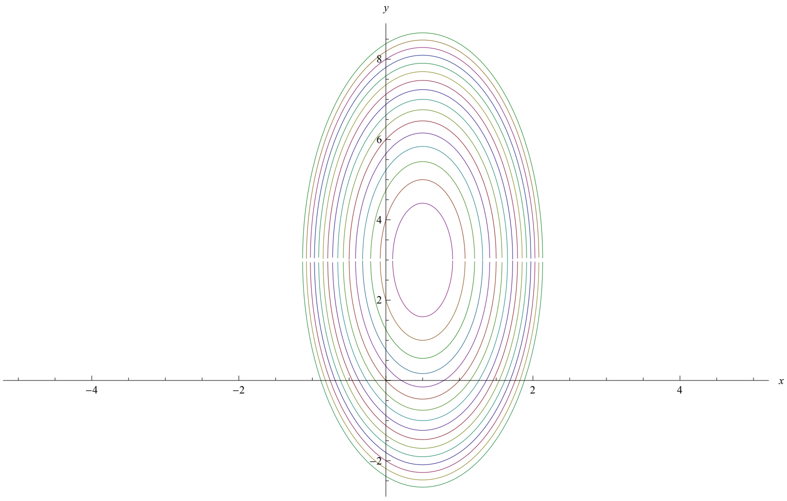
$$3\,u^2 + 0.25\,v^2 = K$$

Onde é uma constante de integração. As trajetórias do sistema (17) são elipses centradas no ponto crítico (0.5,3)

```
s = DSolve[v'[u] == 3 u / (-0.25 v[u]), v, u];
Plot[Evaluate[v[u] /. s /. C[1] → Range[0, 10]], {u, -5, 5}, AxesLabel → {u, v}]
```



```
s1 = DSolve[y'[x] == 3 (x - 0.5) / (-0.25 (y[x] - 3)), y, x];
Plot[Evaluate[y[x] /. s1 /. C[1] → Range[-10, 10]], {x, -5, 5}, AxesLabel → {x, y}]
```



Tajetórias do sistema (17) nas variáveis x(t) e y(t) em torno do ponto de equilíbrio (0.5,3).

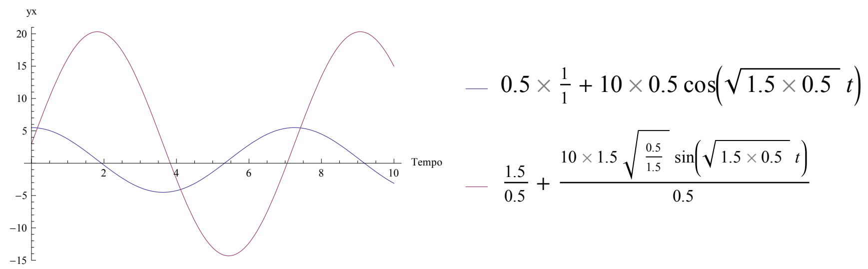
Usando as Eqs. (10), podemos encontrar soluções para o sistema linear (12)

$$x\,(t) = \frac{c}{\gamma} + k\,\frac{c}{\gamma}\,\mathrm{Cos}\,\sqrt{ac}\;t \quad \text{e} \quad y\,(t) = \frac{a}{\alpha} + k\,\frac{a}{\alpha}\,\sqrt{\frac{c}{a}}\;\mathrm{Sin}\,\sqrt{ac}\;t$$

```
a = 1.5;  α = 0.5; c = 0.5; γ = 1;
k = 10;
```

$$\texttt{Plot}\left[\left\{\frac{c}{\gamma} + k\,\frac{c}{\gamma}\,\texttt{Cos}\left[\sqrt{a\,c}\;t\right],\ \frac{a}{\alpha} + k\,\frac{a}{\alpha}\,\sqrt{\frac{c}{a}}\;\texttt{Sin}\left[\sqrt{a\,c}\;t\right]\right\},\right.$$

$$\left.\{t, 0, 10\},\ \texttt{PlotLegends} \to \texttt{"Expressions"},\ \texttt{AxesLabel} \to \{\texttt{Tempo}, \texttt{yx}\}\right]$$



BIBLIOGRAFIA

BOYCE, William E. & DI PRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8º ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de e NEVES, Aloísio Ferreira. Equações Diferenciais Aplicadas. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (CMU) e CNPq,1997.

Rodney, Carlos Bassanezi. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 3ª edição - São Paulo - SP: Contexto, 2006.