Métodos de Determinação de Raízes de Equações

Gilberto de Miranda Jr.

10/08/2018

***(Extraído de Ruggiero e Lopes)**

Isolamento de raízes

- A primeira parte do esforço consiste em isolar a raíz através de estudo técnico e teórico.
- Para garantir que exista pelo menos uma raíz no intervalo é preciso observar o resultado:

Teorema 3.1: Se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a, b]$, isto é $f(a) \cdot f(b) < 0$, então o intervalo conterá, no mínimo, uma raiz da equação $f(x) = 0$, em outras palavras haverá, no mínimo, um número $\mathcal{E} \in (a, b)$ tal que $f(\mathcal{E}) = 0$ (Figura 3.1).

Refinamento das raízes

- Há diversos métodos de isolamento, todos eles de perfomances diferentes, mas similares.
- Trabalharemos do mais elementar para os mais requintados.
- Alguns remontam à antiguidade.
- Começaremos pelo método da bisseção, o mais elementar, cujo raciocínio é sempre subdividir o intervalo que contém a raíz ao meio.
- Não é, obviamente, o mais eficiente, mas é muito simples de implantar.

Método da bisseção

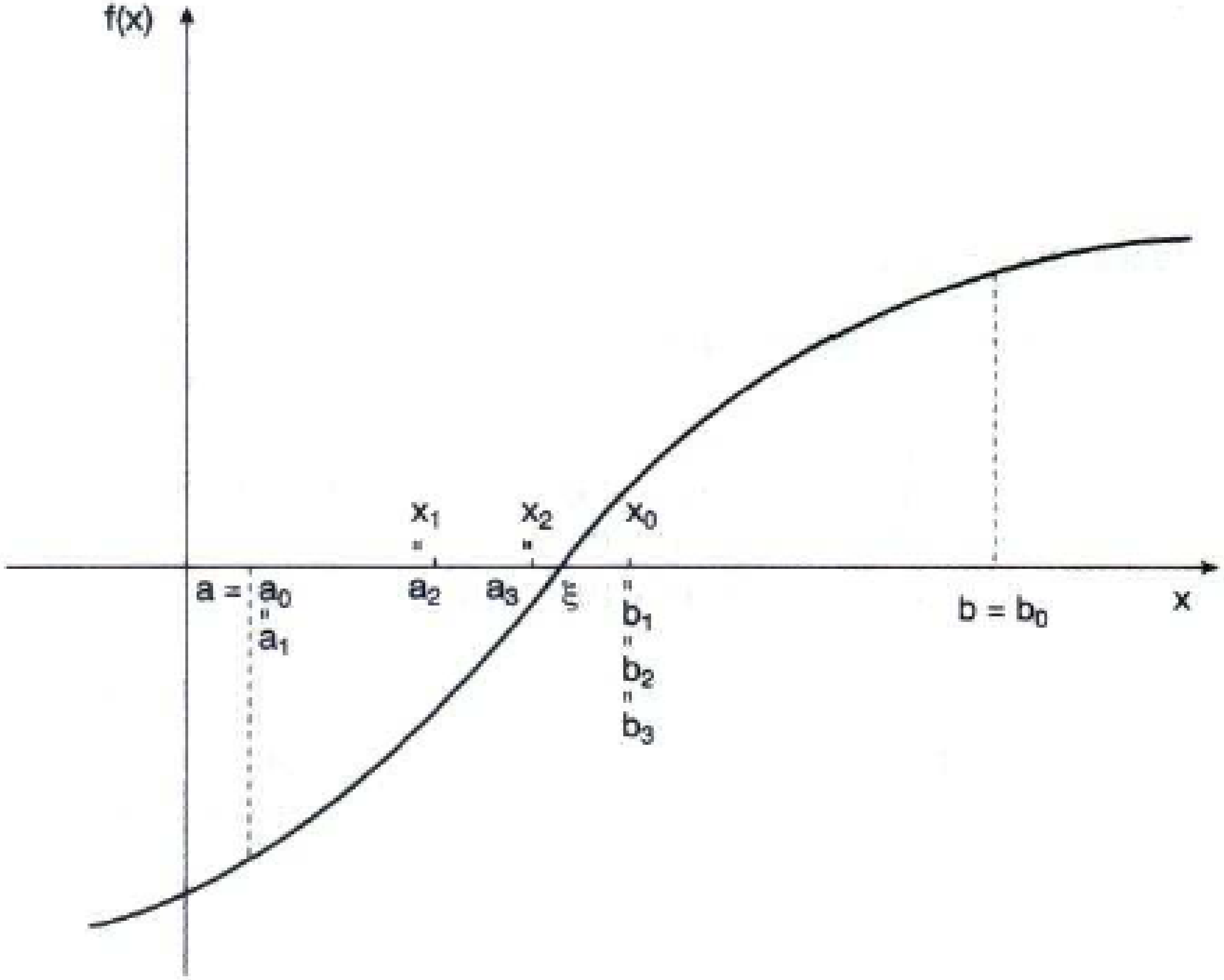


Figura 2.13

Pseudo-código (Algoritmo)

ALGORITMO 1

Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$.

1) Dados iniciais:

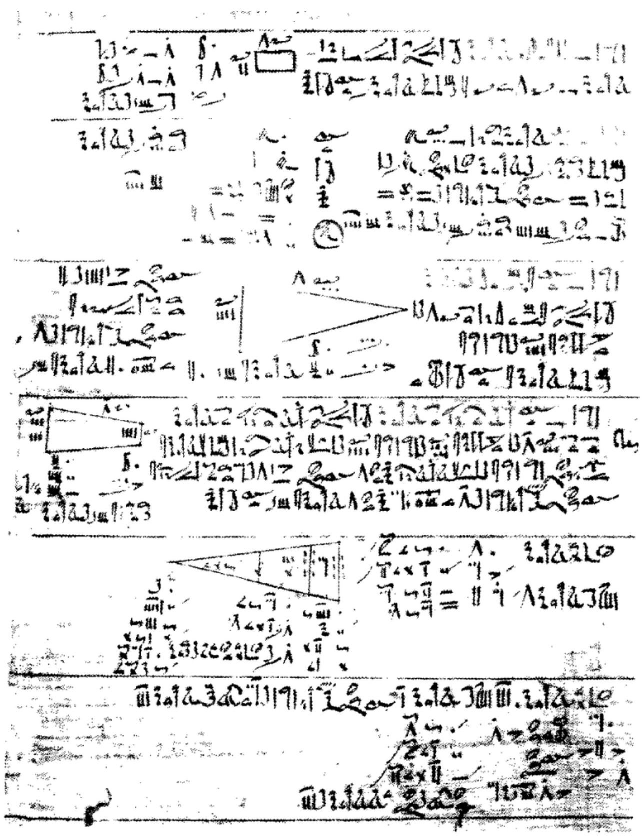
   a) intervalo inicial $[a, b]$

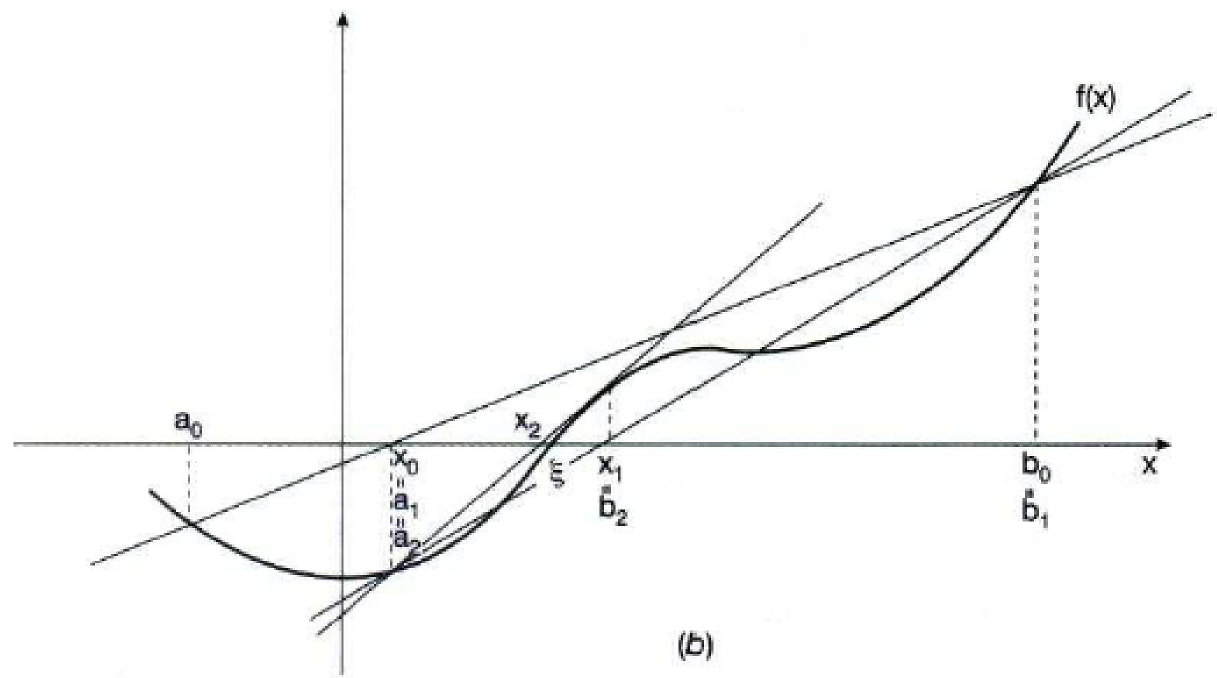
   b) precisão ε

2) Se $(b - a) < \varepsilon$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \in [a, b]$. FIM.
3) $k = 1$
4) $M = f(a)$
5) $x = \dfrac{a + b}{2}$
6) Se $Mf(x) > 0$, faça $a = x$. Vá para o passo 8.
7) $b = x$
8) Se $(b - a) < \varepsilon$, escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \in [a, b]$. FIM.
9) $k = k + 1$. Volte para o passo 5.

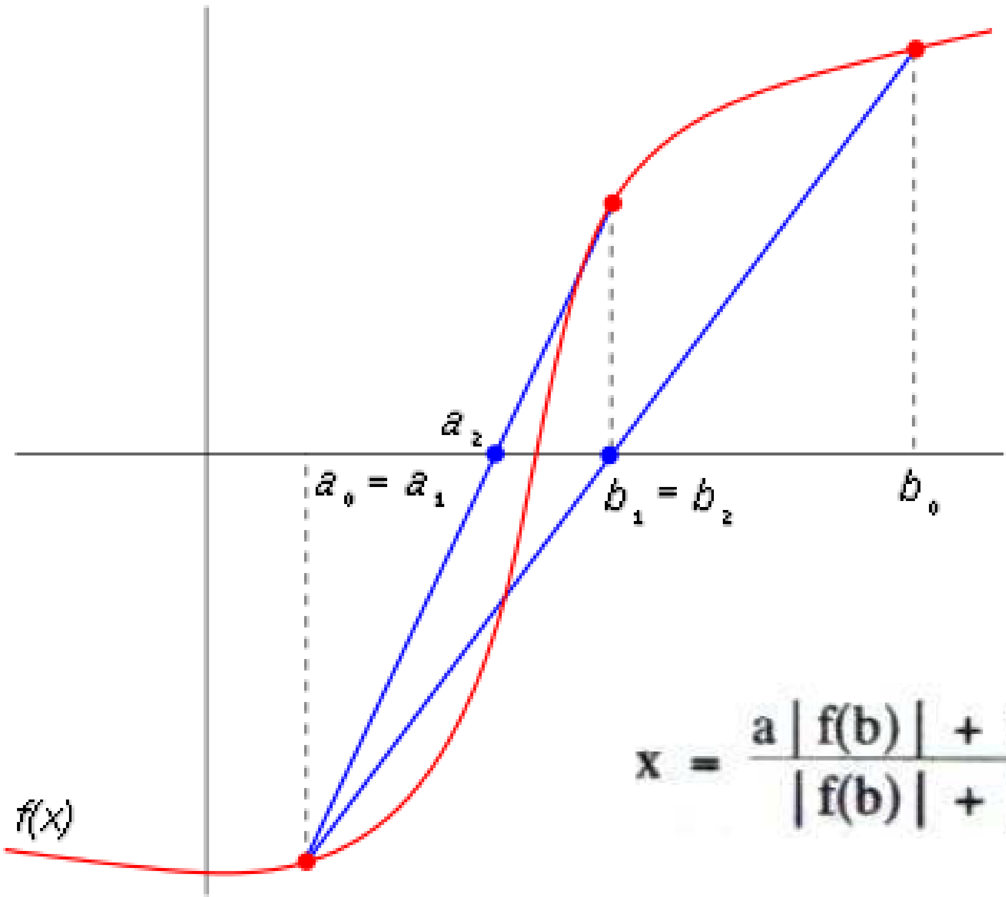
Método regula-falsi

- Encontrado no ***Papiro de Rhind*** que data de 1650 a.c.





Método regula-falsi



$$x = \frac{a\,|f(b)| + b\,|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Pseudo-código (Algoritmo)

Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$.

1) Dados iniciais

   a) intervalo inicial $[a, b]$

   b) precisões ε_1 e ε_2

2) Se $(b - a) < \varepsilon_1$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \in [a, b]$. FIM.

   $$\left.\begin{array}{l} \text{se } |f(a)| < \varepsilon_2 \\ \\ \text{ou se } |f(b)| < \varepsilon_2 \end{array}\right] \text{escolha a ou b como } \bar{x}\text{. FIM.}$$

3) $k = 1$

4) $M = f(a)$

5) $$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

6) Se $|f(x)| < \varepsilon_2$, escolha $\bar{x} = x$. FIM.

7) Se $Mf(x) > 0$, faça $a = x$. Vá para o passo 9.

8) $b = x$

9) Se $b - a < \varepsilon_1$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \in (a, b)$. FIM.

10) $k = k + 1$. Volte ao passo 5.

Exercícios

- Testar os códigos para:

  (a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$, [-1,1]

  (b) $f(x) = \cos(x) - x$, [0,1]

- Solução: ***Método de Illinois***

$$c_k = \frac{\frac{1}{2} f(b_k) a_k - f(a_k) b_k}{\frac{1}{2} f(b_k) - f(a_k)}$$

$$c_k = \frac{f(b_k) a_k - \frac{1}{2} f(a_k) b_k}{f(b_k) - \frac{1}{2} f(a_k)}$$