Métodos de Solução de Sistemas Lineares

Gilberto de Miranda Jr.

01/09/2018

Sistemas Lineares

- Diversos problemas de engenharia recaem sob a forma ou são formulados como sistemas lineares.
- ***Exemplo:*** Cálculo de Estruturas Treliçadas

Considere o problema de determinar as componentes horizontal e vertical das forças que atuam nas junções da treliça abaixo:

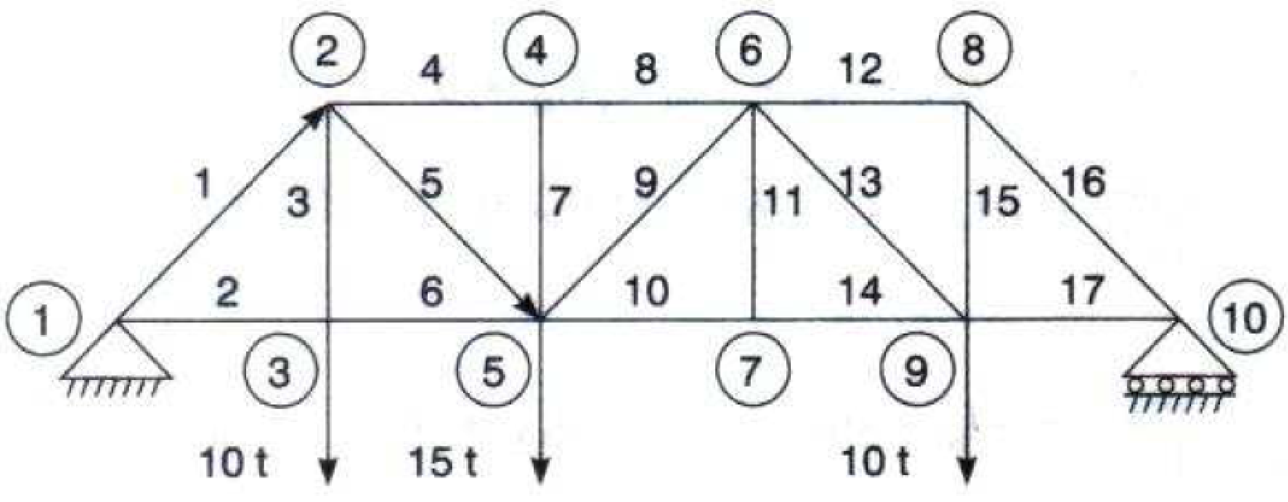


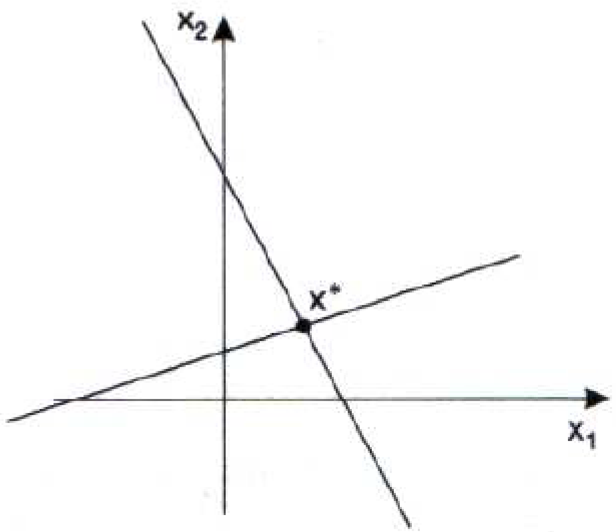
Figura 3.1

Sistemas Lineares

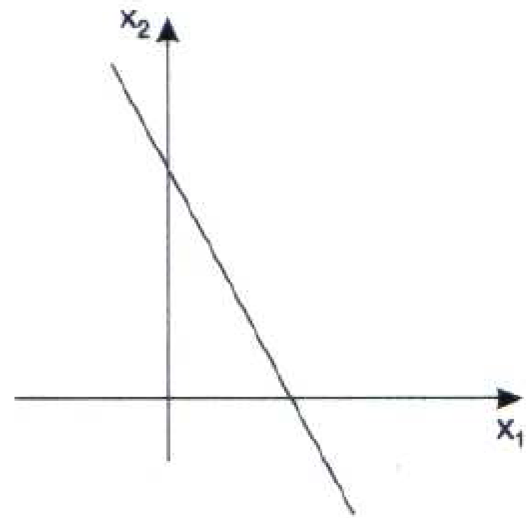
- Há basicamente duas grandes famílias de métodos de resolução de sistemas lineares:
  - Os ***Métodos Diretos***, em que operações artiméticas são implementadas em uma dada sequência de maneira a automatizar a solução de um sistema linear via algoritmo computacional.
  - Os ***Métodos Iterativos***, em que uma dada sequência de passos produz uma estimativa para a solução do sistema. Essa sequência então é repetida até que a estimativa seja considerada boa o bastante pelo usuário (normalmente através de uma métrica de resíduo ou erro).
- Trabalharemos inicialmente com os *Métodos Diretos*.

Sistemas Lineares

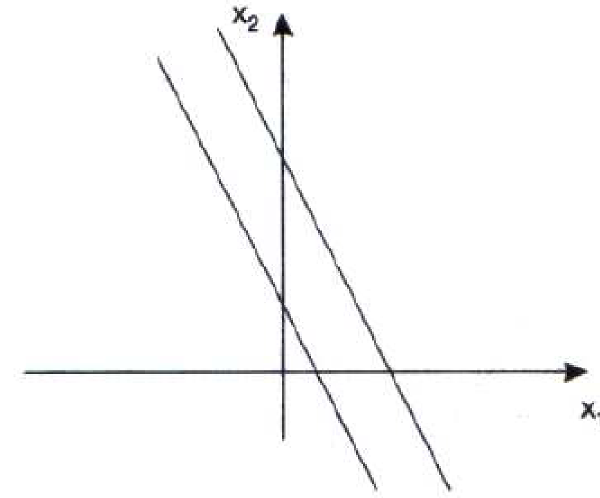
- Com relação à existência e unicidade da solução, os Sistemas Lineares podem ser classificados em trêsm grandes grupos:
  - ***Sistemas Determinados***, aqueles em que há solução única para o conjunto de equações proposto.
  - ***Sistemas Indeterminados***, aqueles que admitem infinitas soluções.
  - ***Sistemas Impossíveis***, aqueles que não admitem nenhuma solução.



(1) retas concorrentes



(2) retas coincidentes



(3) retas paralelas

Sistemas Lineares

- Em geral os sistemas lineares são representados utilizando-se de notação matricial:

$$Ax = b$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ é a matriz dos coeficientes,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$ é o vetor das variáveis

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$ é o vetor constante.

Sistemas Lineares

- No caso do sistema associado às condições de equilíbrio nodal da estrutura treliçada na lâmina 2, temos:

$$
A = \begin{bmatrix}
-\alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha & 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -1 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & -1
\end{bmatrix}
$$

$$
b = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 15 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0]^T
$$

$$
x = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_8 \quad f_9 \quad f_{10} \quad f_{11} \quad f_{12} \quad f_{13} \quad f_{14} \quad f_{15} \quad f_{16} \quad f_{17}]^T
$$

Sistemas Lineares

- Em geral utilizar métodos de solução tais como a ***Regra de Cramer*** ou ainda determinar a matriz inversa de A de forma direta é *computacionalmente impraticável*.
- Quando se generaliza as ideias envolvidas no cálculo de soluções de equilíbrio para sistemas treliçados para outras aplicações, acaba-se por desenvolver as primeiras versões do ***Método dos Elementos Finitos***, que para produzir soluções úteis eventualmente implica na solução de sistemas lineares de milhares ou até mesmo de milhões de equações.
- O ***Método de Eliminação de Gauss*** consiste em transformar o sistema original num sistema equivalente cuja matriz A é do tipo ***triangular superior***.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad\;\; a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ddots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Sistemas Lineares

ALGORITMO 1: Resolução de um Sistema Triangular Superior

Dado um sistema triangular superior $n \times n$ com elementos da diagonal da matriz A não nulos, as variáveis $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots x_2, x_1$ são assim obtidas:

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

Para $k = (n - 1), \dots, 1$

$$\left[\begin{array}{l} s = 0 \\ \text{Para } j = (k + 1), \dots, n \\ s = s + a_{kj} x_j \\ x_k = (b_k - s) / a_{kk} \end{array}\right.$$

Sistemas Lineares

Eliminação

Para $k = 1, \ldots, n-1$

  Para $i = k+1, \ldots, n$

$$m = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

$a_{ik} = 0$

Para $j = k+1, \ldots n$

$a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$

$b_i = b_i - m b_k$

Resolução do sistema:

$x_n = b_n / a_{nn}$

Para $k = (n-1), \ldots 2,1$

  $s = 0$

  Para $j = (k+1), \ldots, n$

  [$s = s + a_{kj} x_j$

  $x_k = (b_k - s) / a_{kk}$

Sistemas Lineares

- ***Exercícios:***

  (a) Substiuições Retroativas:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \quad 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ \quad\quad - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é o vetor $x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  (b) Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$