TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

2. desember 2024

1 Vi bruker kjente taylorrekker om $x = 0$. Dette gir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4) - \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^4)\right) - 2x}{x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3!} + O(x)}{\frac{1}{3!} + O(x^2)} = 2.$$

2 Legg merke til at det er et uegentlig integral. Vi skriver derfor

$$\int_1^\infty \frac{3}{(x+2)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{3}{(x+2)^2}\,dx.$$

Ved hjelp av substitusjonen $u = x + 2$ får vi

$$\int_1^R \frac{3}{(x+2)^2}\,dx = \int_3^{R+2} \frac{3}{u^2}\,du = \big[-3u^{-1}\big]_{u=3}^{u=R+2} = 1 - \frac{3}{R+2}.$$

Dermed er

$$\int_1^\infty \frac{3}{(x+2)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{3}{(x+2)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(1 - \frac{3}{R+2}\right) = 1.$$

3 En sirkelsektor med vinkel θ har altså areal gitt ved

$$A = \frac{\theta}{2\pi}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\theta}{8}d^2, \qquad \text{hvor } d \text{ er diameteren til sirkelen (eller pizzaen).}$$

En sirkelsektor med vinkel θ har omkrets gitt ved

$$O = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} + \frac{\theta}{2\pi}2\pi\frac{d}{2} = d + \frac{\theta}{2}d.$$

Fra oppgaveteksten vet vi at pizzastykket må ha en omkrets lik 60 cm. Dette gir at

$$\theta = \frac{2(60-d)}{d}.$$

Vi finner da et uttrykk for arealet som en funksjon av bare d:

$$A(d) = \frac{2(60-d)}{8d}d^2 = \frac{1}{4}(60d - d^2).$$

Videre er $A'(d) = (1/4)(60 - 2d)$ og $A''(d) = -1/2 < 0$. Dette gir et globalt maksimumspunkt i $d = 30$.

Altså vil en pizza med diameter lik 30 cm gi det største pizzastykket med omkrets 60 cm.

(Vinkelen er da $\theta = 2$ radianer eller $\theta \approx 115$ grader, og man får $1/\pi$-dels pizza.)

4 Ved implisitt derivasjon får vi

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Her må vi anta at $y \neq 0$. (Stigningstallet eksisterer ikke i punktene $(\pm 1, 0)$.) Stigningstall lik 2 gir derfor at $y = x/2$. Innsatt i ligningen gir dette

$$1 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Totalt gir dette de to punktene $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ og $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Generelt vil en tangent som går gjennom punktet (x_0, y_0) og har stigningstall a være gitt ved

$$y - y_0 = a(x - x_0).$$

Vi får dermed de to tangentene

$$y - \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\Big(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) \qquad \text{og} \qquad y + \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\Big(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\Big).$$

5 Generelt er taylorrekken om $x = 0$ gitt ved

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Vi trenger derfor å bestemme n slik at $4n + 1 = 13$. Det gir $n = 3$ og

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} + \dots.$$

For å sammenligne med den generelle taylorrekka med $k = 13$, skriver vi koeffisienten foran x^{13} som

$$-\frac{1}{7!} = \frac{-13!}{7!}\frac{1}{13!} = \frac{f^{(13)}(0)}{13!}.$$

Altså må $f^{(13)}(0) = -13!/7! = -1235520$.

6 La $g(x) = f(x) - 4$. Ved analysens fundamentalteorem er

$$g'(x) = f'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0,$$

altså er $g(x)$ strengt voksende for $x \in [1, 2]$ og $g(x)$ kan dermed ha maksimalt én rot for $x \in [1, 2]$. Videre er $g(x)$ kontinuerlig (som f. eks. en sammensetning av kjente kontinuerlige funksjoner) og

$$g(1) = -2 < 0, \qquad g(2) = 2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) - 2 > 0.$$

Skjæringssetningen sier da $g(x)$ har minst én rot for $x \in (1, 2)$. Dermed har $g(x)$ nøyaktig én rot for $x \in (1, 2)$.

Iterasjonsskjemaet for Newtons metode er gitt ved

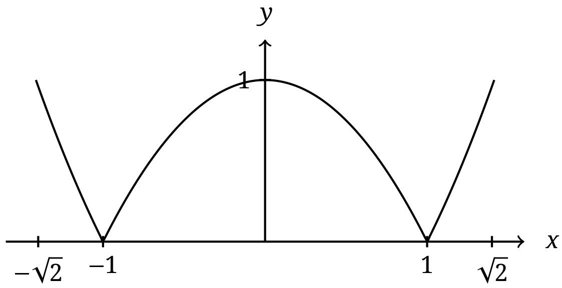
$$x_{n+1} = x_n - \frac{2e^{\sqrt{x_n}}(\sqrt{x_n} - 1) - 2}{e^{\sqrt{x_n}}}.$$

Vi får da $x_0 = 1$, $x_1 \approx 1.7358$ og $x_2 \approx 1.6364$. Vi lar derfor $r^* = 1.636$.

Ved direkte utregning får vi at $g(r^*) = 0.0055 > 0$, og siden $g(x)$ er strengt voksende for $x \in [1, 2]$, må $r^* > r$. (Alternativt vil $g''(x) = 2^{-1}x^{-1/2}e^{\sqrt{x}} > 0$ for alle $x \in [1, 2]$, og funksjonen er konveks. Alle tangentlinjer ligger derfor under grafen til $g(x)$, og følgelig må $r^* > r$.)

7 La $g(x) = x^2 - 1$. Da er $g(0) = -1$, $g'(x) = 2x$ og $g''(x) = 2$. Altså er $g(x)$ en parabel med globalt minimum i $(0, -1)$. Videre gir $g(x) = 0$ at $x = \pm 1$.

Vi ser at $f(x) = |g(x)|$, dermed vil de negative delene av grafen til $g(x)$ bli positive deler for $f(x)$. $f(x)$ får derfor to lokale minimumsverdier i $x = \pm 1$, hvor $f(\pm 1) = 0$, og en lokal maksimumsverdi i $x = 0$, hvor $f(0) = 1$. I endepunktene er $f(\pm\sqrt{2}) = 1$. $f(x)$ har faktisk derfor to globale minimumsverdier i $x = \pm 1$, og tre globale maksimumsverdier i $x = 0, \pm\sqrt{2}$.



Fra skissen ser vi at $f(x)$ muligens ikke er deriverbar i punktene $x = \pm 1$. Vi sjekker dette for $x = 1$ (regningen er tilsvarende for $x = -1$). Ved definisjonen av den deriverte har vi at

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h}.$$

Videre har vi at

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2, \qquad \lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-(1+h)^2 + 1}{h} = -2,$$

og dermed eksisterer ikke $f'(1)$. Funksjonen $f(x)$ er altså deriverbar overalt unntatt i $x = \pm 1$.

8 Vi legger merke til at $f(x) \geqslant 0$ for $0 \leqslant x \leqslant \ln(2)$ og $f'(x) = \sinh(x) \geqslant 0$ for $0 \leqslant x \leqslant \ln(2)$. For å finne arealet til rotasjonsflaten integrerer vi følgende infinitesmale del fra $x = 0$ til $x = \ln(2)$:

$$2\pi r ds,$$

hvor r er avstanden fra rotasjonslinjen til grafen og hvor ds er buelengdedifferensialet. I vårt tilfelle blir $r = 1 + f(x)$ og $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Vi får derfor

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} I &= \int_0^{\ln(2)} (1 + \cosh(x)) \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx = \int_0^{\ln(2)} (1 + \cosh(x)) \cosh(x) dx \\ &= \int_0^{\ln(2)} \big(\cosh(x) + \cosh^2(x)\big) dx = \int_0^{\ln(2)} \Big(\cosh(x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh(2x)\Big) dx.\end{aligned}$$

Her brukte vi først at $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$ og så at $2\cosh^2(x) = 1 + \cosh(2x)$. Det gjenstår å regne ut integralet:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \Big[\sinh(x)\Big]_0^{\ln(2)} + \frac{2\pi}{2}\Big[x\Big]_0^{\ln(2)} + \frac{2\pi}{4}\Big[\sinh(2x)\Big]_0^{\ln(2)} \\ &= \frac{6\pi}{4} + \frac{2\pi}{2}\ln(2) + \frac{2\pi}{4}\frac{15}{8} = \Big(\frac{39}{16} + \ln(2)\Big)\pi. \end{aligned}$$

9 Forholdstesten gir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{5^n}\right|}{\left|\frac{n(x+2)^n}{5^{n-1}}\right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{5} |x+2| = \frac{1}{5}|x+2| < 1.$$

Dvs., at $-5 < x + 2 < 5$ eller $-7 < x < 3$. Potensrekken konvergerer dermed for $x \in (-7, 3)$. Forholdstesten sier derimot ingenting om tilfellene $x = -7$ og $x = 3$, og disse må sjekkes separat.

$x = -7$ gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n 5^n}{5^{n-1}} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n.$$

Dette er en rekke hvor leddene ikke går mot null, dermed divergerer den.

$x = 3$ gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{5^{n-1}} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} n.$$

Dette er en rekke hvor leddene ikke går mot null, dermed divergerer den.

Den oppgitte potensrekken konvergerer derfor absolutt for $x \in (-7, 3)$ og divergerer for $x = (-\infty, -7] \cup [3, \infty)$.

$\boxed{10}$ Ved analysens fundamentalteorem får vi

$$y'(x) = e^{x+y(x)} = e^x e^{y(x)}.$$

I tillegg er $y(0) = 0$. Dette gir et initialverdiproblem. Ved litt omskriving får vi

$$(-e^{-y(x)})' = e^{-y(x)} y'(x) = e^x.$$

Vi integrerer begge sider med hensyn på x for å få

$$-e^{-y(x)} = e^x + K \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(x) = -\ln|C - e^x|,$$

hvor K og C er konstanter. Initialbetingelsen gir da at $0 = y(0) = -\ln(C - 1)$, dermed er $C = 2$. Dette gir

$$y(x) = -\ln(2 - e^x), \qquad \text{for } x \in [0, \ln(2)).$$