TMA4100 Matematikk 1
Løsningsforslag

13. august 2025

1 Det er kjent at

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1,$$

da må spesielt

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1.$$

Siden $f(x)=\sqrt{x}$ er kontinuerlig for $x\geqslant 0$, får vi

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{x+\frac{x^2+\sqrt{x}+e^{x^2}}{8+\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}}=\sqrt{\lim_{x\to 0+}\left(x+\frac{x^2+\sqrt{x}+e^{x^2}}{8+\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}\right)}$$

Videre er $\lim_{x\to 0+}x=0$ og

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2+\sqrt{x}+e^{x^2}}{8+\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}=\frac{\lim_{x\to 0+}\left(x^2+\sqrt{x}+e^{x^2}\right)}{\lim_{x\to 0+}\left(8+\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{0+0+1}{8+1}=\frac{1}{9}.$$

Vi konkluderer derfor med at

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{x+\frac{x^2+\sqrt{x}+e^{x^2}}{8+\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}.$$

2 Generelt er et taylorpolynom av grad 2 om $x=0$ gitt som

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2.$$

Vi trenger derfor å bestemme $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$. Derivasjon og dobbeltderivasjon av $f(x)$ gir:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3},$$
$$f''(x)=-\frac{1}{3}\frac{2}{3}(1+x)^{-5/3}.$$

Altså har vi at $f(0)=1$, $f'(0)=1/3$ og $f''(0)=-2/9$ som gir at

$$P_2(x)=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2.$$

Legg merke til at $f(0.3)=(1+0.3)^{1/3}=\sqrt[3]{1.3}$, en tilnærmet verdi til $\sqrt[3]{1.3}$ er derfor gitt ved

$$P_2(0.3)=1+\frac{1}{3}\cdot 0.3-\frac{1}{9}\cdot 0.3^2=1+\frac{10}{100}-\frac{1}{100}=1.09.$$

3 Legg merke til at $\sin(0)=0$, og derfor er det oppgitte integralet et uegentlig integral. Vi må derfor skrive det om:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx=\lim_{a\to 0-}\int_{-\pi/2}^{a}\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx+\lim_{b\to 0+}\int_{b}^{\pi/2}\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx.$$

Videre har vi med substitusjonen $u = \sin(x)$ at

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx = \int u^{-2} du = -u^{-1} + C.$$

Dette gir

$$\lim_{a\to 0-} \int_{-\pi/2}^{a} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx = \lim_{a\to 0-} \left[-u^{-1} \right]_{-\pi/2}^{a} = \infty,$$
$$\lim_{b\to 0+} \int_{b}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx = \lim_{b\to 0+} \left[-u^{-1} \right]_{b}^{\pi/2} = \infty.$$

Altså får vi at integralet divergerer.

4 Vi ønsker å vise at

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2,$$

der

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(2 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin(x) \right) = 2 + \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin(x).$$

Legg så merke til at siden $-1 \leqslant \cos(1/x) \leqslant 1$, vil

$$-|\sin(x)| \leqslant \cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin(x) \leqslant |\sin(x)|,$$

og dermed sier skviseregelen at

$$0 = -\lim_{x\to 0} |\sin(x)| \leqslant \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin(x) \leqslant \lim_{x\to 0} |\sin(x)| = 0.$$

Dette betyr at $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$, som var det vi skulle vise.

5 La

$$f(x) = \begin{cases} (x-3) + x^4 - 7 = x^4 + x - 10, & \text{for } x > 3, \\ 74, & \text{for } x = 3, \\ -(x-3) + x^4 - 7 = x^4 - x - 4, & \text{for } 0 \leqslant x < 3. \end{cases}$$

Siden $\lim_{x\to 3-} f(x) = 74 = \lim_{x\to 3+} f(x)$, er $f(x)$ kontinuerlig for $x \geqslant 0$. Vi har også at

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 + 1, & \text{for } x > 3, \\ 4x^3 - 1, & \text{for } 0 \leqslant x < 3. \end{cases}$$

Her er $4x^3 - 1 = 0$ når $x = 4^{-1/3} \approx 0.630$, altså er $f'(x) < 0$ for $x \in [0, 4^{-1/3})$ og $f'(x) > 0$ for $x \in (4^{-1/3}, 3) \cup (3, \infty)$.

Videre har vi at $f(4^{-1/3}) < 0$ og $f(2) > 0$, og $f(x) = 0$ må derfor ha minst én løsning for $x \in (4^{-1/3}, 2)$ ved hjelp av skjæresetningen. I det aktuelle intervallet er $f'(x) > 0$ som betyr at det maksimalt er én løsning der, og dermed nøyaktig én løsning for $x \in (4^{-1/3}, 2)$. For $x > 2$, er $f(x)$ strengt voksende, og vi har ingen flere løsninger av $f(x) = 0$ her. For $0 \leqslant x < 4^{-1/3}$, har vi at $f(0) < 0$ og $f(x)$ er strengt avtagende, og det kan derfor ikke finnes noen x slik at $f(x) = 0$ her heller.

6 Ved analysens fundamentalteorem finner vi at:

$$F'(x) = \cos(x^2).$$

Vi finner så de kritiske punktene ved å løse $F'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} F'(x) = \cos(x^2) = 0 \quad &\iff \quad x^2 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \text{der } n = 0, 1, 2, \ldots. \\ &\iff \quad x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi n}, \quad \text{der } n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Siden $F(x)$ er definert for $-2 \leqslant x \leqslant 2$, er de kritiske punktene gitt ved $x = \pm\sqrt{\pi/2} \approx \pm 1.253$. Funksjonen $F(x)$ kan også ha ekstremalverdier i endepunktene $x = \pm 2$.

Vi skal nå studere fortegnet på den deriverte for å angi x-verdiene som gir minimums- og maksimumsverdi.

Vi har at $F'(x) = \cos(x^2) < 0$ for $-2 < x < -\sqrt{\pi/2}$, $F'(x) > 0$ for $-\sqrt{\pi/2} < x < \sqrt{\pi/2}$ og $F'(x) < 0$ for $\sqrt{\pi/2} < x < 2$.

Totalt gir dette at $0 > F(-2) > F(-\sqrt{\pi/2})$, $F(-\sqrt{\pi/2}) < F(\sqrt{\pi/2})$ og $F(\sqrt{\pi/2}) > F(2) > 0$. Minimumsverdien til $F(x)$ er derfor gitt i punktet $x = -\sqrt{\pi/2}$ og maksimumsverdien er gitt i $x = \sqrt{\pi/2}$.

7 For å finne arealet til rotasjonsflaten integrerer vi følgende infinitesmale del fra $x = 0$ til $x = 1$:

$$2\pi r ds,$$

der r er avstanden fra rotasjonslinjen til grafen og ds er buelengdedifferensialet. I vårt tilfelle er $r = 1 + x^2$ og $ds = \sqrt{1 + (2x)^2}dx$. Dette gir følgende integral

$$I = 2\pi \int_0^1 (1 + x^2)\sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

La $f(x) = 2\pi(1 + x^2)\sqrt{1 + 4x^2}$. Siden $n = 3$ i trapesmetoden, får vi $h = (1 - 0)/3 = 1/3$ og $y_i = f(0 + ih) = f(ih)$ for $i = 0, 1, 2, 3$. Dvs.,

$$\begin{aligned} I \approx T_3 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}f(0) + f(1/3) + f(2/3) + \frac{1}{2}f(1)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi + 2\cdot\pi\cdot\frac{10}{9}\cdot\sqrt{\frac{13}{9}} + 2\cdot\pi\cdot\frac{13}{9}\cdot\sqrt{\frac{25}{9}} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2\cdot\sqrt{5}\right) \approx 13.57. \end{aligned}$$

8 Dette er en separabel differensialligning slik at vi får

$$y'(x) = \frac{y(x)}{3(1+x)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{3(1+x)}.$$

Integrasjon av begge sidene gir da

$$\ln|y(x)| = \frac{1}{3}\ln(1+x) + C.$$

Vi anvender så eksponentialfunksjonen på begge sider og får

$$|y(x)| = C(1+x)^{1/3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(x) = \pm C(1+x)^{1/3}$$

Initialbetingelsen $y(0) = 1$ fører da til at $\pm C = 1$, og løsningen er gitt ved

$$y(x) = (1+x)^{1/3}.$$

9 Vi skriver ut noen verdier av følgen:

$$a_1 = 8, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 5.5, \quad \ldots$$

Følgen ser derfor ut til å være avtagende, $a_{n+1} \leqslant a_n$ for alle $n \geqslant 1$. La oss derfor vise dette ved å se på

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{a_n} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1.$$

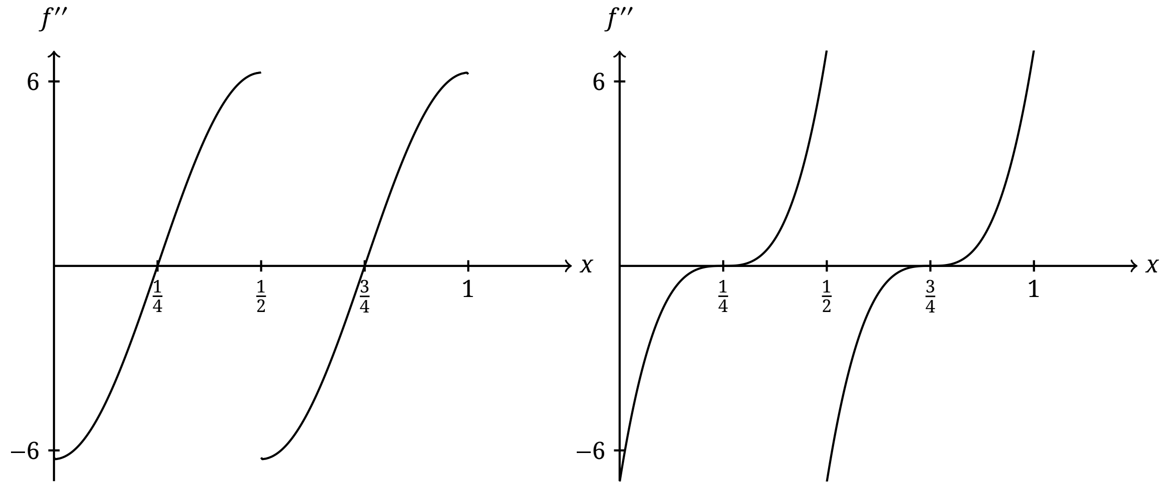
Her brukte vi at $a_n \geqslant 4$ for alle $n \geqslant 1$.

Den aktuelle følgen er altså avtagende og nedad begrenset. Dermed konvergerer følgen og grenseverdien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ eksisterer. For å finne grenseverdien, lar vi $n \to \infty$ på begge sider av likhetstegnet:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_n + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{1}{2}a + 2.$$

Grenseverdien a må derfor være lik 4.

$\boxed{10}$ Vi begynner med en skisse av $f''(x)$ som er den deriverte av funksjonen til den oppgitte grafen. Legg merke til at $f'(x)$ har lik graf for $x \in [0, 1/2)$ og $x \in (1/2, 1]$. La oss derfor bare diskutere hva som skjer for $x \in [0, 1/2)$. Når $x = 1/2$, vil $f''(x)$ være diskontinuerlig. I $x = 1/4$ skal den dobbeltderiverte være lik 0. For $x \in [0, 1/4)$ skal den dobbeltderiverte være negativ, og for $x \in (1/4, 1]$ skal den være positiv. Vi ser videre at $f'(x)$ avtar saktest nærme $x = 0+$, avtar raskest nærme $x = 1/4-$, vokser raskest nærme $x = 1/4+$, og vokser saktest nærme $x = 1/2-$. Selve krumningen er likevel vanskelig å konkludere entydig fra grafen som er oppgitt i oppgaveteksten. Vi får derfor to mulige grafer for $f''(x)$:



Vi skal nå skissere $f(x)$. For å få en intuisjon, kan vi bruke at $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$ ved analysens fundamentalteorem. Legg igjen merke til at $f'(x)$ har lik graf for $x \in [0, 1/2)$ og $x \in (1/2, 1]$. La oss derfor bare diskutere hva som skjer for $x \in [0, 1/2)$. Vi gjør et grovt estimat på arealet under grafen fra $x = 0$ til $x = 1/4$: Arealet er mindre enn trekanten med hjørner i $(0, 0)$, $(0, 1)$ og $(1/4, 0)$. Denne har areal likt med $1/8$. Altså er $f(1/4) \approx 1/8$ og $f(1/2) \approx 2/8 = 1/4$. Videre er $f'(x) \geqslant 0$, som betyr at $f(x)$ alltid skal vokse. Siden $f'(x) = 0$ når $x = 1/4$, må $f(x)$ ha et vendepunkt der. Ut i fra arealtolkningen vår, vil det være stadig mindre areal under grafen til $f'(x)$ når vi nærmer oss $x = 1/4-$, noe som betyr at $f(x)$ raskt får høye funksjonsverdier, men at den nærme $x = 1/4-$ vil avta i vekst. Alt dette gir grafen under.