INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Filtros Digitais

Processamento de Sinais Digitais

Arthur Cadore Matuella Barcella

05 de Maio de 2024

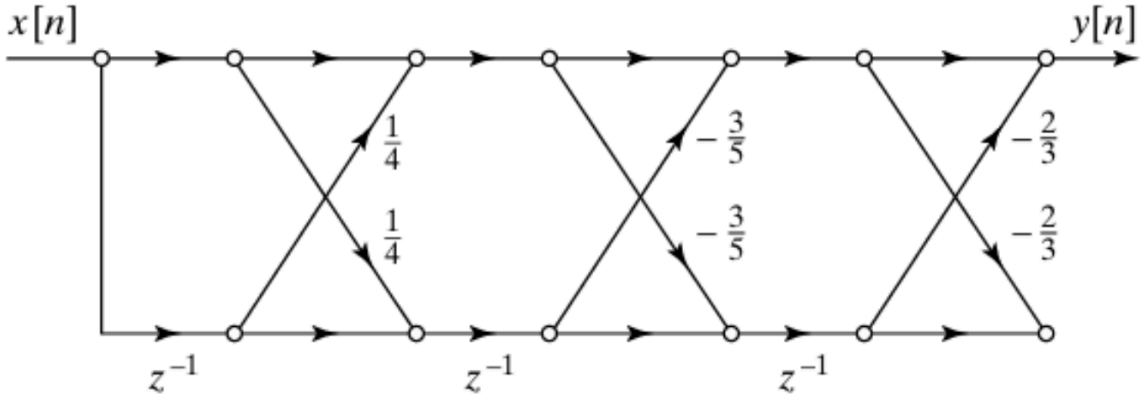
Engenharia de Telecomunicações - IFSC-SJ

Sumário

1. Questão 1:

Considere o diagrama de fluxo de sinais a seguir:

Figura 1: Elaborada pelo Autor



Sinal de entrada no domínio do tempo

1.1. Item A:

Determine a função de transferência $H[z]$ relacionando a entrada $x[n]$ à saída $y[n]$ para o filtro FIR em treliça da figura acima.

Para determinar a função de transferência, é necessário analisar o diagrama de fluxo de sinais e identificar as relações entre as variáveis de entrada e saída.

Assim podemos retirar da figura acima as seguintes expressões:

- $x[n] + \frac{1}{4}x[n-1]$
- $x[n-1] + \frac{1}{4}x[n]$
- $x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{3}{5}[n-2] - 0,15[n-1]$
- $x[n-2] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{3}{5}[n] - 0,15[n-1]$
- $y[n] = x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{3}{5}x[n-2] - \frac{3}{20}x[n-1] - \frac{2}{3}x[n-3] - \frac{1}{6}x[n-2] + \frac{2}{5}x[n-1] + \frac{1}{10}x[n-2]$

Desta forma, solucionando a equação acima no dominio n temos que:

$$y[n] = 1x[n] + 0,5x[n-1] - 0,666x[n-2] - 0,666x[n-3] \quad (1)$$

Agora, podemos passar a função expressada acima para o domino Z, onde temos que:

$$Y[z] = x[Z] + 0,5Z^{\{-1\}}x[Z] - 0,666Z^{\{-2\}}x[Z] - 0,666Z^{\{-3\}}x[Z] \quad (2)$$

Assim, podemos isolar a função de transferência $H[z]$ através de $\frac{Y[z]}{X[z]}$, onde temos que:

$$Y[Z] = X[Z].\left(1 + 0,5Z^{\{-1\}} - 0,666Z^{\{-2\}} - 0,666Z^{\{-3\}}\right) \tag{3}$$

$$H[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]} = 1 + 0,5Z^{\{-1\}} - 0,666Z^{\{-2\}} - 0,666Z^{\{-3\}} \tag{4}$$

Podemos também encontrar os coeficientes α utiliziando o algorimito para conversão de k, e calcular a equação de transferência:

$$k1 = -\frac{1}{4}, k2 = \frac{3}{5}, k3 = \frac{2}{3} \tag{5}$$

Para i = 1:

$$\alpha_1^{\{1\}} = -\frac{1}{4} \tag{6}$$

Para i = 2:

$$\alpha_2^{\{2\}} = \frac{3}{5} \tag{7}$$

Como $i = 2$ entra em $i > 1$, então $(j = 1)$, temos que:

$$\alpha_1^{\{2\}} = \alpha_1^{\{1\}} - \frac{3}{5}\alpha_1^{\{1\}} \tag{8}$$

Para $i = 3$:

$$\alpha_3^{\{3\}} = \frac{2}{3} \tag{9}$$

Como $i = 3$ entra em $i > 1$, então $(j = 1)$, temos que:

$$\alpha_1^{\{3\}} = \alpha_1^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_2^{\{2\}} \tag{10}$$

Para $j = 2$:

$$\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_1^{\{2\}} \tag{11}$$

Podemos encontrar $\alpha_1^{\{3\}}$ substituindo $\alpha_1^{\{2\}}$ em $\alpha_1^{\{3\}} = \alpha_1^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_2^{\{2\}}$:

$$\alpha_1^{\{3\}} = \alpha_1^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_2^{\{2\}} \tag{12}$$

Considerando que $\alpha_1^{\{2\}} = \alpha_1^{\{1\}} - \frac{3}{5}\alpha_1^{\{1\}}$

$$\alpha_1^{\{3\}} = \alpha_1^{\{1\}} - \frac{3}{5}\alpha_1^{\{1\}} - \frac{2}{3}\alpha_2^{\{2\}} \tag{13}$$

$$\alpha_1^{\{3\}} = \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right).\left(\frac{3}{5}\right) = -0,5 \tag{14}$$

Podemos encontrar $\alpha_2^{\{3\}}$ substituindo $\alpha_1^{\{2\}}$ em $\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_1^{\{2\}}$:

$$\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_1^{\{2\}} \tag{15}$$

$$\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\left(\alpha_1^{\{1\}} - \frac{3}{5}\alpha_1^{\{1\}}\right) \tag{16}$$

$$\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_1^{\{1\}} + \frac{2}{5}\alpha_1^{\{1\}} \tag{17}$$

$$\alpha_2^{\{3\}} = \left(\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right).\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{5}\right).\left(-\frac{1}{4}\right) = 0,666 \tag{18}$$

Portanto, temos que:

$$\alpha_1^{\{3\}} = -0,5, \alpha_2^{\{3\}} = 0,666, \alpha_3^{\{3\}} = 0,666 \tag{19}$$

Desta forma, a equação no tempo é dada por:

$$y[n] = 1x[n] + 0,5x[n-1] - 0,666x[n-2] - 0,666x[n-3] \tag{20}$$

Realizando a transformada Z, temos que:

$$Y[Z] = X[Z].\left(1 + 0,5Z^{\{-1\}} - 0,666Z^{\{-2\}} - 0,666Z^{\{-3\}}\right) \tag{21}$$

Rearranjando a equação, temos que:

$$H[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]} = 1 + 0,5Z^{\{-1\}} - 0,666Z^{\{-2\}} - 0,666Z^{\{-3\}} \tag{22}$$

Podemos também encontrar a equação de transferência utilizando a forma recursiva, para isso temos que:

$$k1 = -\frac{1}{4}, k2 = \frac{3}{5}, k3 = \frac{2}{3} \tag{23}$$

$$A^{\{0\}}(Z) = B^{\{0\}}(Z) = 1 \tag{24}$$

$$A^{\{i\}}(Z) = A\{i-1\}(Z) - k\{i\}Z^{\{-1\}}B\{i-1\}(Z) \tag{25}$$

$$B^{\{i\}}(Z) = -k\{i\}A^{\{i-1\}}(Z) + Z^{\{-1\}}B^{\{i-1\}}(Z) \tag{26}$$

Dessa forma, Para $i = 1$ temos que:

$$A^{\{1\}}(Z) = A\{0\}(Z) - k_1Z^{\{-1\}}B\{0\}(Z) \tag{27}$$

$$A^{\{1\}}(Z) = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)Z^{\{-1\}} \tag{28}$$

$$A^{\{1\}}(Z) = 1 + \frac{1}{4}Z^{\{-1\}} \tag{29}$$

$$B^{\{1\}}(Z) = -k_1 A^{\{0\}}(Z) + Z^{\{-1\}}B^{\{0\}}(Z) \tag{30}$$

$$B^{\{1\}}(Z) = -\left(-\frac{1}{4}\right)Z^{\{-1\}} + Z^{\{-1\}} \tag{31}$$

$$B^{\{1\}}(Z) = \frac{1}{4} + Z^{\{-1\}} \tag{32}$$

Para $i = 2$ temos que:

$$A^{\{2\}}(Z) = A\{1\}(Z) - k_2 Z^{\{-1\}}B\{1\}(Z) \tag{33}$$

$$A^{\{2\}}(Z) = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)Z^{\{-1\}} - \left(\frac{3}{20}\right)Z^{\{-1\}} - \frac{3}{5}Z^{\{-2\}} \tag{34}$$

$$A^{\{2\}}(Z) = 1 + \frac{1}{10}Z^{\{-1\}} - \frac{3}{5}Z^{\{-2\}} \tag{35}$$

$$B^{\{2\}}(Z) = -k_2 A^{\{1\}}(Z) + Z^{\{-1\}}B^{\{1\}}(Z) \tag{36}$$

$$B^{\{2\}}(Z) = -\frac{3}{5}\left(1 + \frac{1}{4}Z^{\{-1\}}\right) + Z^{\{-1\}}\left(\frac{1}{4} + Z^{\{-1\}}\right) \tag{37}$$

$$B^{\{2\}}(Z) = -\frac{3}{5} - \frac{3}{20}Z^{\{-1\}} + \frac{1}{4}Z^{\{-1\}} + Z^{\{-2\}} \tag{38}$$

$$B^{\{2\}}(Z) = -\frac{3}{5} + \frac{1}{10}Z^{\{-1\}} + Z^{\{-2\}} \tag{39}$$

Para $i = 3$, temos que:

$$A^{\{3\}}(Z) = A\{2\}(Z) - k_3 Z^{\{-1\}}B\{2\}(Z) \tag{40}$$

$$A^{\{3\}}(Z) = 1 - \left(-\frac{1}{10}\right)Z^{\{-1\}} - \frac{3}{5}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-1\}}\left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{10}Z^{\{-1\}} + Z^{\{-2\}}\right) \tag{41}$$

$$A^{\{3\}}(Z) = 1 + \frac{1}{10}Z^{\{-1\}} - \frac{3}{5}Z^{\{-2\}} + \frac{6}{15}Z^{\{-1\}} - \frac{2}{30}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}} \tag{42}$$

$$A^{\{3\}}(Z) = 1 + \frac{1}{2}Z^{-}1 - \frac{20}{30}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}} \tag{43}$$

Desta forma, temos que

$$A^{\{3\}}(Z) = H[Z] = 1 + \frac{1}{2}Z^{-}1 - \frac{2}{3}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}} \tag{44}$$

1.2. Item B:

Desenhe o diagrama de fluxo de sinais na forma direta I.

O diagrama de fluxo de sinais na forma direta I é apresentado abaixo:

Figura 2: Elaborada pelo Autor

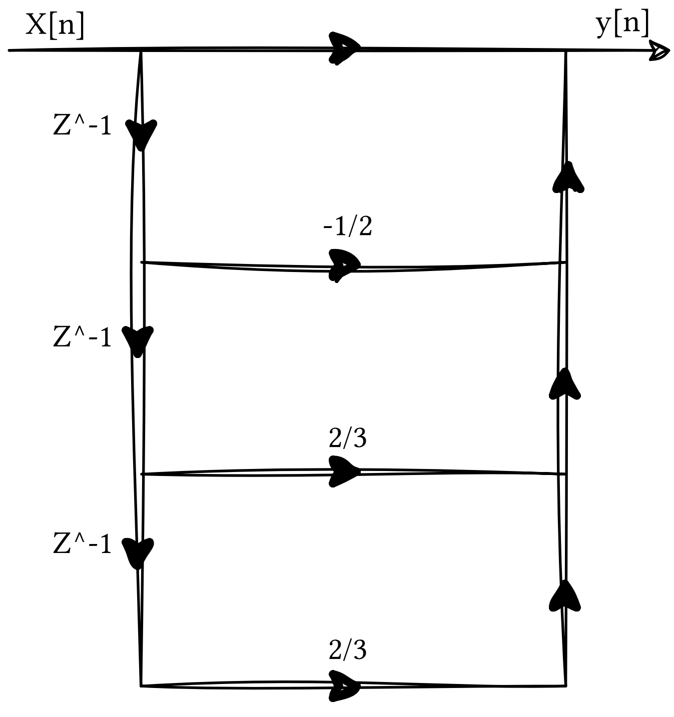


Diagrama de Fluxo de Sinais na Forma Direta I

1.3. Item C:

1.3.1. Desenvolvimento:

Determine e trace o gráfico da resposta ao impulso unitário.

Conforme obtido no Item A, temos que:

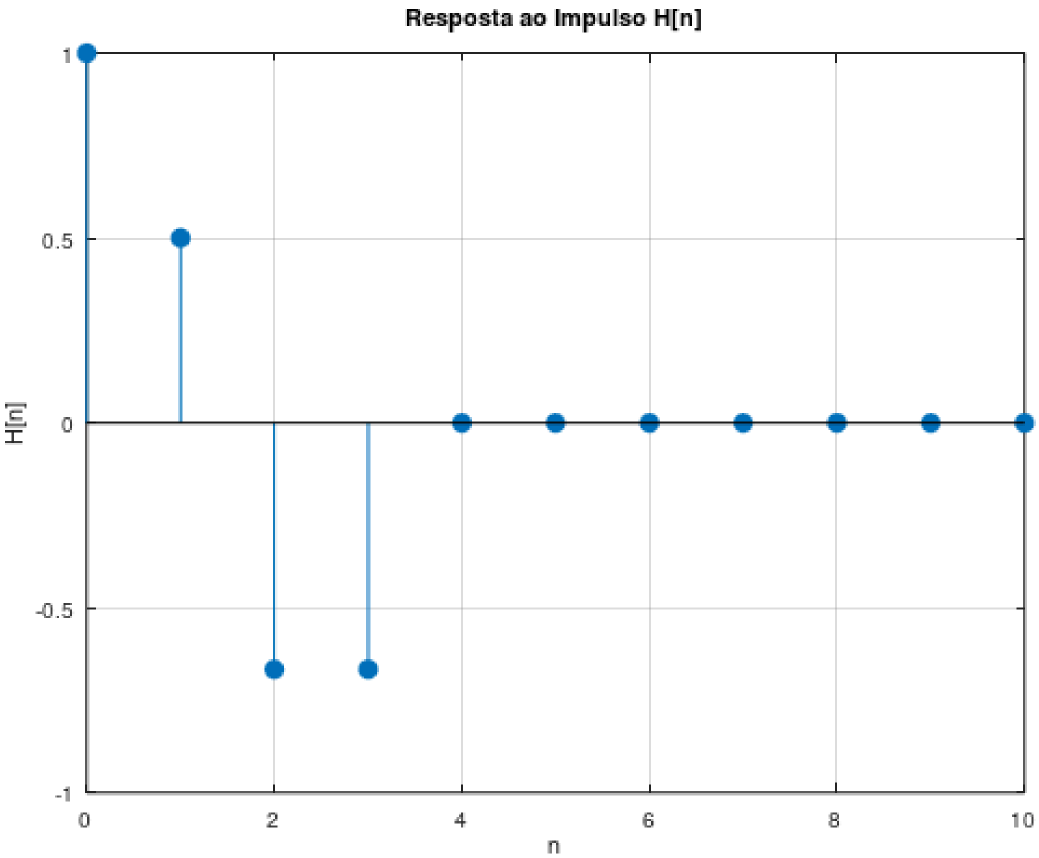
$$H[Z] = 1 + \frac{1}{2}Z^{-}1 - \frac{2}{3}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}} \tag{45}$$

Portanto, aplicando um impulso unitário, temos que a resposta ao impulso é dada por:

$$H[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{2}{3}\delta[n-2] - \frac{2}{3}\delta[n-3] \tag{46}$$

Assim, realizando um plot em octave, temos o seguinte gráfico para a resposta ao impulso:

Figura 3: Elaborada pelo Autor



Resposta ao Impulso Unitário

1.3.2. Script Utilizado:

Para o desenvolvimento desta questão, utilizei o seguite script octave:

```
% Definindo a resposta ao impulso H[n]

% Criando um vetor com 10 amostras
n = 0:10;

% Adicionando a resposta ao impulso e algumas amostras com zero para melhor visualização
H = [1, 1/2, -2/3, -2/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];

% Realizando o plot com stem da resposta:
stem(n, H, 'filled');
```

```
xlabel('n');
ylabel('H[n]');
title('Resposta ao Impulso H[n]');
grid on;
```

1.4. Item D:

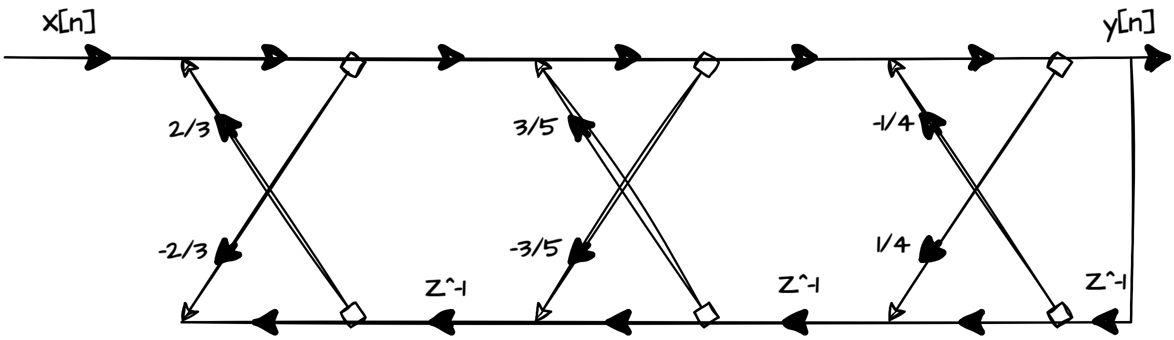
Desenhe a estrutura do filtro em treliça para o filtro só-pólos $\frac{1}{H[z]}$

Para desenhar a estrutura, podemos determinar o filtro só polos $\frac{1}{H[z]}$ utilizando:

$$F(Z) = \frac{1}{H[Z]} = F(Z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}Z^{-}1 - \frac{2}{3}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}}\right)} \tag{47}$$

Desta forma, a estrutura é dada pela seguinte ilustração:

Figura 4: Elaborada pelo Autor

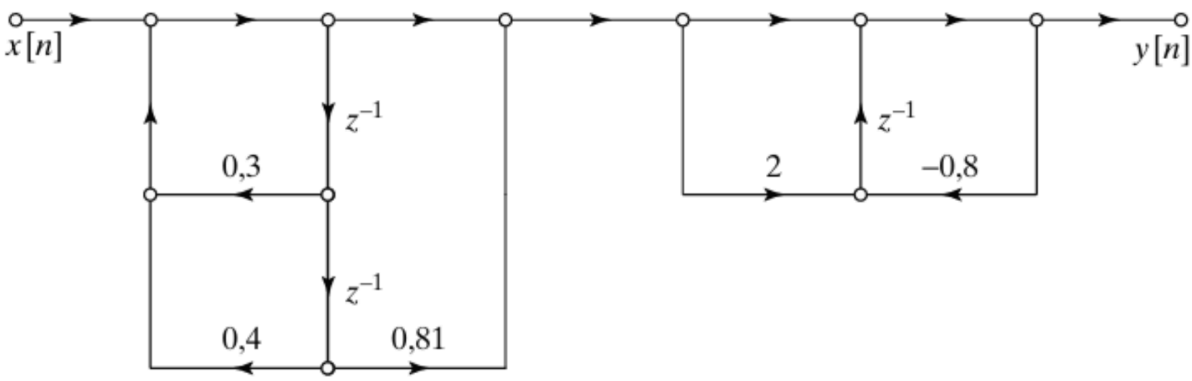


Estrutura do Filtro em Treliça Só-Polos

2. Questão 2:

Um sistema LIT causal é definido pelo diagrama de fluxo de sinais mostrado na Figura a seguir, que representa o sistema como uma cascata de um sistema de segunda ordem com um sistema de primeira ordem.

Figura 5: Elaborada pelo Autor



Sinal de entrada no domínio do tempo

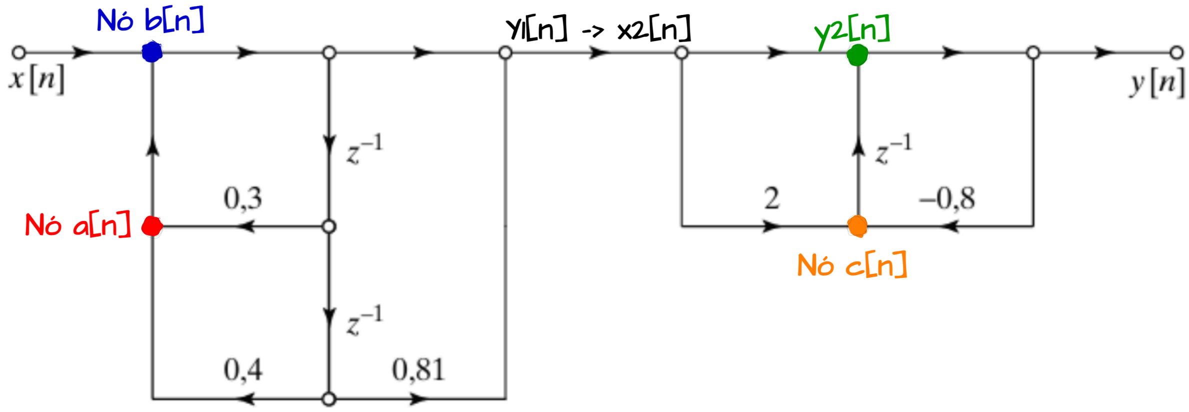
2.1. Item A:

2.1.1. Desenvolvimento:

Qual é a função de transferência do sistema em cascata global?

Para encontrarmos a função de transferência do sistema em cascata global, primeiramente, os nós somadores foram identificados e o sistema foi dividido em duas partes, onde o $y_1[n]$ do primeiro sistema é o $x_2[n]$ do segundo sistema:

Figura 6: Elaborada pelo Autor



Nós somadores identificados

Desta forma, podemos obter as expressões abaixo:

$$a[n] = 0,3b[n-1] + 0,4b[n-2] \tag{48}$$

$$b[n] = x[n] + a[n] \tag{49}$$

$$y1[n] = b[n] + 0,81b[n-2] \tag{50}$$

Passando as expressões para o dominio Z, tem os que:

$$A[Z] = 0,3Z^{\{-1\}}B[Z] + 0,4Z^{\{-2\}}B[Z] \tag{51}$$

$$B[Z] = X[Z] + A[Z] \tag{52}$$

$$Y1[Z] = B[Z] + 0,81Z^{\{-2\}}B[Z] \tag{53}$$

Isolando $B[Z]$ nas expressões, temos que:

$$B[Z] = X[Z] + 0,3Z^{\{-1\}}B[Z] + 0,4Z^{\{-2\}}B[Z] \tag{54}$$

$$X[Z] = B[Z]\left(1 - 0,3Z^{\{-1\}} - 0,4Z^{\{-2\}}\right) \tag{55}$$

$$Y[Z] = B[Z]\left(1 + 0,81Z^{\{-2\}}\right) \tag{56}$$

Portanto, podemos calcular a função de transferência $H1$ do primeiro sistema:

$$H1[Z] = Y1\frac{[Z]}{X[Z]} = \frac{B[Z]\left(1 + 0,81Z^{\{-2\}}\right)}{B[Z]\left(1 - 0,3Z^{\{-1\}} - 0,4Z^{\{-2\}}\right)} \tag{57}$$

$$H1[Z] = \frac{1 + 0,81Z^{\{-2\}}}{1 - 0,3Z^{\{-1\}} - 0,4Z^{\{-2\}}} \tag{58}$$

Para o segundo sistema, temos as seguintes equações:

$$c[n] = 2x[n] - 0,8y[n] \tag{59}$$

$$y[n] = x[n] + c[n-1] \tag{60}$$

Passando para o dominio Z, temos as seguintes expressões:

$$C[Z] = 2X[Z] - 0,8Y[Z] \tag{61}$$

$$Y[Z] = X[Z] + C[Z]Z^{\{-1\}} \tag{62}$$

Aplicando C[Z] em Y[Z], temos que:

$$Y[Z] = X[Z] + 2Z^{\{-1\}}X[Z] - 0,8Z^{\{-1\}}Y[Z] \tag{63}$$

Isolando Y[Z], temos que:

$$Y[Z] + 0,8Z^{\{-1\}}Y[Z] = X[Z] + 2Z^{\{-1\}}X[Z] \tag{64}$$

$$Y[Z]\left(1 + 0,8Z^{\{-1\}}\right) = X[Z]\left(1 + 2Z^{\{-1\}}\right) \tag{65}$$

Desta forma, podemos calcular a função de transferência $H2$ do segundo sistema:

$$H2[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]} = \frac{1 + 2Z^{\{-1\}}}{1 + 0,8Z^{\{-1\}}} \tag{66}$$

$$H2[Z] = \frac{1 + 2Z^{\{-1\}}}{1 + 0,8Z^{\{-1\}}} \tag{67}$$

Assim, podemos calcular a função de transferência global do sistema em cascata, realizando a multiplicação de $H1[Z]$ por $H2[Z]$:

$$H[Z] = \frac{\left(1 + 0,81Z^{\{-2\}}\right)}{\left(1 - 0,3Z^{\{-1\}} - 0,4Z^{\{-2\}}\right)}.\frac{\left(1 + 2Z^{\{-1\}}\right)}{\left(1 + 0,8Z^{\{-1\}}\right)} \tag{68}$$

Desta forma, a equação de transferência do sistema em cascata(calculada através do script ocateve) é dada por:

$$H[Z] = \frac{1 + 2Z^{\{-1\}} + 0,81Z^{\{-2\}} + 1,62Z^{\{-3\}}}{1 + 0,5Z^{\{-1\}} - 0,64Z^{\{-2\}} - 0,32Z^{\{-3\}}} \tag{69}$$

2.1.2. Script Utilizado:

Para o desenvolvimento desta questão, utilizei o seguinte script em octave:

```
clear all; close all; clc;
pkg load signal

% Definindo as variáveis de entrada dadas pelo calculo de H1 e H2
y1 = roots([1 0 0.81]);
x1 = roots([1 -0.3 -0.4]);
y2 = roots([1 2]);
x2 = roots([1 0.8]);

% Calculando os polos e zeros da função de transferência:
polos_H = poly([0+0.9000i 0-0.9000i -2])
zeros_H = poly([0.8000 -0.5000 -0.8000])
```

2.2. Item B:

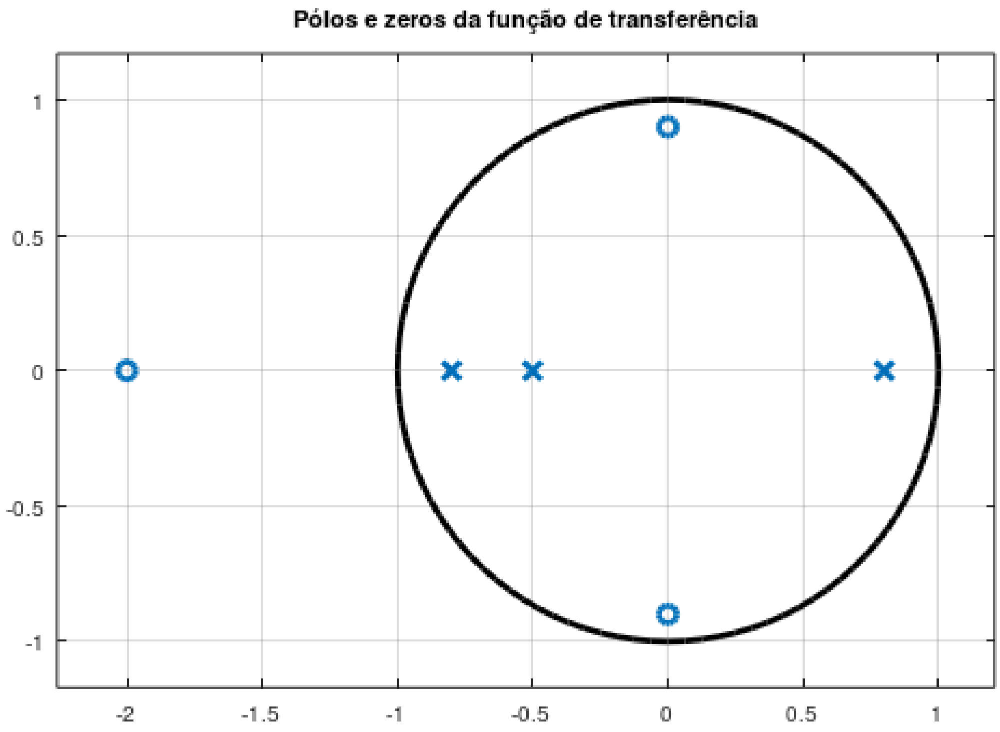
2.2.1. Desenvolvimento:

O sistema global é estável? Explique resumidamente.

Sim, o sistema é estável. Para determinar a estabilidade do sistema, é necessário analisar os polos da função de transferência.

Para isso, a função de transferência calculada no item anterior teve seus polos e zeros plotados, conforme apresentado abaixo. Note que como **todos os polos encontram-se dentro do circulo de raio unitário, o sistema é considerado estável**

Figura 7: Elaborada pelo Autor



Polos e Zeros da Função de Transferência

2.2.2. Script Utilizado:

Para o desenvolvimento desta questão, utilizei o seguinte script em octave:

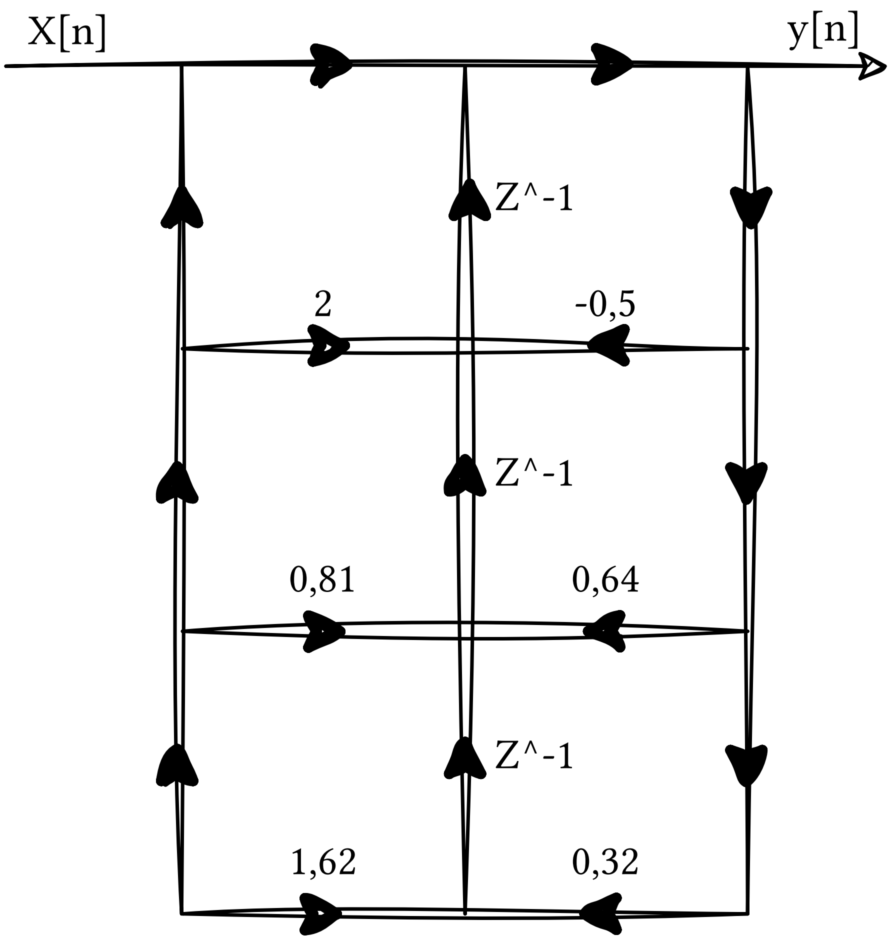
```
clear all; close all; clc;
pkg load signal

% Definindo as variáveis de entrada dadas pelo calculo de H1 e H2
y1 = roots([1 0 0.81]);
x1 = roots([1 -0.3 -0.4]);
y2 = roots([1 2]);
x2 = roots([1 0.8]);

% Calculando os polos e zeros da função de transferência:
polos_H = poly([0+0.9000i 0-0.9000i -2])
zeros_H = poly([0.8000 -0.5000 -0.8000])

% Plotar o gráfico de polos e zeros
figure(1)
zplane([polos_H],[zeros_H]);
title('Pólos e zeros da função de transferência');
set(findall(gcf, 'type', 'line'), 'linewidth', 2);
```

2.3. Item C:

Desenhe o diagrama de fluxo de sinais de uma implementação na forma direta II transposta desse sistema.

A partir da função de transferência obtida no item A, podemos desenhar o diagrama de fluxo de sinais de uma implementação na forma direta II transposta do sistema.

Figura 8: Elaborada pelo Autor

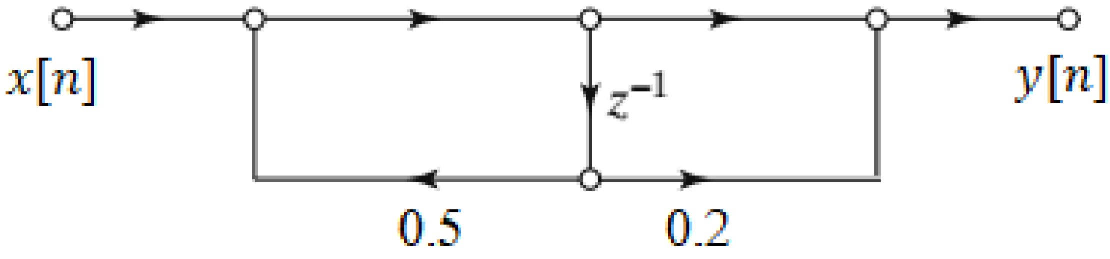


Implementação na Forma Direta II Transposta

3. Questão 3:

A figura a seguir mostra uma implementação em forma direta II de um sistema:

Figura 9: Elaborada pelo Autor



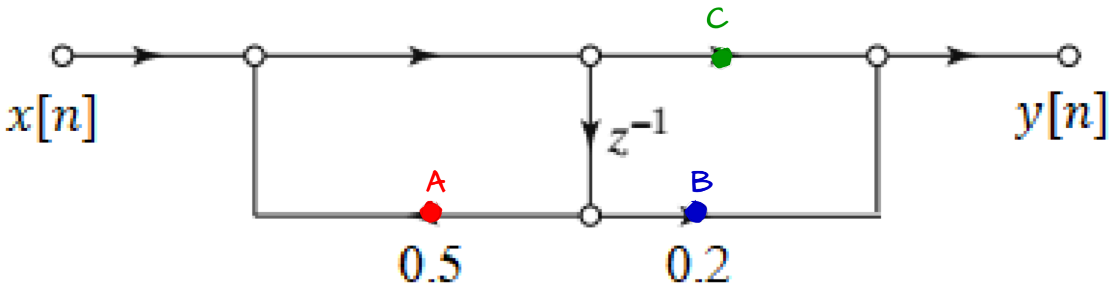
Sinal de entrada no domínio do tempo

3.1. Item A:

Determine a função de transferência $H[z]$.

A função de transferência do sistema pode ser obtida analisando diretamente o diagrama conforme apresentado abaixo:

Figura 10: Elaborada pelo Autor



Coeficientes do Sistema

Sendo:

$$A = 0,5 \tag{70}$$

$$B = 0,2 \tag{71}$$

$$C = 1 \tag{72}$$

A função de transferência do sistema é dada por:

$$H[Z] = \frac{C + BZ^{\{-1\}}}{1 - AZ\{-1\}} = \frac{1 + 0,2Z^{\{-1\}}}{1 - 0,5Z^{\{-1\}}} \tag{73}$$

3.2. Item B:

Determine a resposta ao impulso.

A resposta ao impulso até o primeiro nó é dada por:

$$h1[n] = 0,5^{\{n-1\}}u[n] \quad (74)$$

Para o segundo nó, a resposta ao impulso é dada pela seguinte expressão (baseada na resposa ao impulso até o primeiro nó):

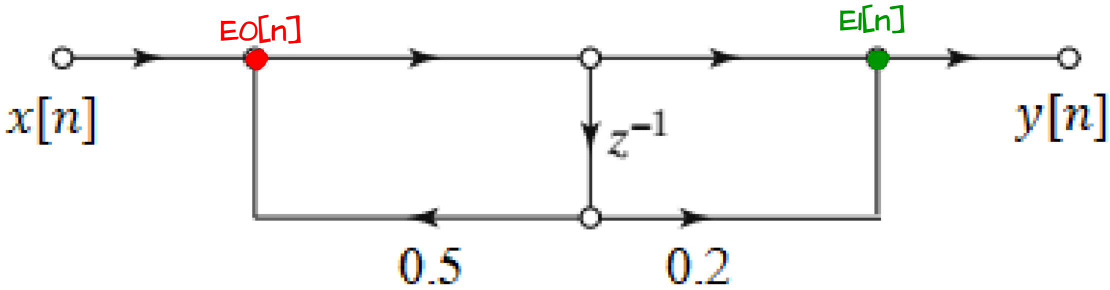
$$h2[n] = (0,5^{\{n-1\}}u[n]) + \left(0,2(0,5)^{\{n-1\}}u[n-1]\right) \quad (75)$$

3.3. Item C:

Assumindo que o sistema seja implementado em aritmética de ponto fixo de 8 bits, e que todos os produtos sejam arredondados para 8 bits antes que uma soma qualquer tenha sido realizada. Usando o modelo linear para ruído de arredondamento, encontre a variância do ruído de arredondamento na saída do filtro. (Faça passa a passo)

Para encontrar a variância do ruido de arredondamento, considero o modelo linear do ruído de arredondamento exibido abaixo:

Figura 11: Elaborada pelo Autor



Modelo Linear do Ruído de Arredondamento

Pela definição temos que a quantidade de bits é dada por:

$$B + 1 = 8 \quad (76)$$

Portanto, B = 7

Desta forma, podemos calcular a variância do ruído do ponto dada por σ_e^2. Tal que:

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{\{-2B\}}}{12} \quad (77)$$

Assim, temos que:

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{\{-2.7\}}}{12} = \frac{2^{\{-14\}}}{12} = \left(0, \frac{00006103515625}{12}\right) = 0,00000508626302 \quad (78)$$

Agora, para calcular a variância do ruído de saida do sistema, temos que:

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 + \sigma_e^2 \frac{C^2 + B^2 + 2A.B.C}{1 - A^2} \tag{79}$$

$$\sigma_f^2 = 0,00000508626302 + 0,\frac{00000508626((1^2 + 0,2^2 + 2.0,5.1.2))}{1 - 0,5^2} \tag{80}$$

$$\sigma_f^2 = 0,00000508626302 + 0,00000840928 \tag{81}$$

$$\sigma_f^2 = 0,00001349554302 \tag{82}$$