



**INSTITUTO  
FEDERAL**

Santa Catarina

---

Câmpus  
São José

## **Exercícios Avaliativos M/M/1 e M/M/c**

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Arthur Cadore Matuella Barcella  
Deivid Fortunato Frederico

3 de Junho de 2025

Engenharia de Telecomunicações - IFSC-SJ

# Sumário

<b>1. Introdução:</b>	<b>3</b>
<b>2. Questão Manualmente:</b>	<b>3</b>
2.1. Cálculo do melhor caso:	3
2.2. Cálculo do tempo de resposta total e na fila e utilização:	4
2.2.1. Primeiro caso:	4
2.2.2. Segundo caso:	4
2.2.3. Terceiro caso:	4
2.3. Calculando o tempo de atendimento:	4
2.3.1. Primeiro caso:	4
2.3.2. Segundo caso:	4
2.3.3. Terceiro caso:	4
2.4. Calculando a utilização:	4
2.4.1. Primeiro caso:	4
2.4.2. Segundo caso:	5
2.4.3. Terceiro caso:	5
2.5. Calculando o tempo total:	5
2.5.1. Primeiro caso:	5
2.5.2. Segundo caso:	5
2.5.3. Terceiro caso:	5
<b>3. Questão Com Auxílio Professor:</b>	<b>5</b>
3.1. Cálculo do melhor caso:	6
<b>4. Questão:</b>	<b>8</b>
4.1. Como poderia ser modelado este sistema?	8
4.1.1. Tipo de Fila	8
4.2. Qual a probabilidade de bloqueio do sistema?	8
4.2.1. Parâmetros	8
4.2.2. Cálculo da Probabilidade de Bloqueio	8
4.2.3. Resultados	9

## 1. Introdução:

## 2. Questão Manualmente:

Um servidor de autenticação central possui um processador que consegue atender em média 120 requisições por minuto. Durante horários de pico, ele recebe em média 100 requisições por minuto. Pergunta-se: **em termos de tempo de espera médio no sistema e na fila, seria melhor manter esta configuração ?** Ou:

- Caso 1: Dividir as requisições entre quatro servidores (cada um com 25 requisições por minuto) e com capacidade de processar 35 requisições por minuto cada um.
- Caso 2: Usar um servidor com quatro processadores e uma fila única (cada um com capacidade de 35 requisições por minuto).

Mostrar o cálculo do tempo de resposta total e dos tempos na fila e no atendimento. Mostrar também a utilização do sistema. Construir uma tabela com estes tempos. Fazer uma conclusão.

Variáveis da questão:

- $\lambda = 100$  requisições por minuto (taxa de chegada)
- $\mu = 120$  requisições por minuto (taxa de serviço do servidor único)
- $c = 1$  (número de servidores no primeiro caso)
- $c = 4$  (número de servidores no segundo caso)
- $\mu_c = 35$  requisições por minuto (taxa de serviço de cada servidor no segundo caso)
- $\mu_p = 35$  requisições por minuto (taxa de serviço de cada processador no terceiro caso)

### 2.1. Cálculo do melhor caso:

Inicialmente, vamos calcular os parâmetros do sistema para o primeiro caso, onde temos um único servidor com capacidade de atender 120 requisições por minuto.

$$E[R] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{120 - 100} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ min} = 3\text{s} \quad (1)$$

Já no segundo caso, onde temos quatro servidores com capacidade de atender 35 requisições por minuto cada, a taxa de serviço total é:

$$E[R] = \frac{1}{c \cdot \mu_c - \lambda} = \frac{1}{35 - 25} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ min} = 6\text{s} \quad (2)$$

Já no terceiro caso, onde temos um servidor com quatro processadores, a taxa de serviço total é:

$$E[R] = \frac{1}{c \cdot \mu_c - \lambda} = \frac{1}{4 \cdot 35 - 100} = \frac{1}{140 - 100} = \frac{1}{40} = 0.025 \text{ min} = 1.5\text{s} \quad (3)$$

Portanto, o tempo de resposta menor é de 0.025 minutos, ou 1.5 segundos, que ocorre no terceiro caso, onde temos um servidor com quatro processadores.

## 2.2. Cálculo do tempo de resposta total e na fila e utilização:

### 2.2.1. Primeiro caso:

$$E[R_q] = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{100}{120(120 - 100)} = \frac{100}{120 \cdot 20} = \frac{100}{2400} = 0.04167 \text{ min} = 2.5\text{s} \quad (4)$$

### 2.2.2. Segundo caso:

$$E[R_q] = \frac{\lambda}{c \cdot \mu_c (c \cdot \mu_c - \lambda)} = \frac{25}{35(35 - 25)} = \frac{25}{35 \cdot 10} = \frac{25}{350} = 0.07143 \text{ min} = 4.29\text{s} \quad (5)$$

### 2.2.3. Terceiro caso:

$$E[R_q] = \frac{\lambda}{c \cdot \mu_p (c \cdot \mu_p - \lambda)} = \frac{100}{4.35(4.35 - 100)} \quad (6)$$

Assim temos:

$$E[R_q] = \frac{100}{140(140 - 100)} = \frac{100}{140 \cdot 40} = \frac{100}{5600} = 0.01786 \text{ min} = 1.07\text{s} \quad (7)$$

## 2.3. Calculando o tempo de atendimento:

### 2.3.1. Primeiro caso:

$$E[R_s] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{120} = 0.00833 \text{ min} = 0.5\text{s} \quad (8)$$

### 2.3.2. Segundo caso:

$$E[R_s] = \frac{1}{\mu_c} = \frac{1}{35} = 0.02857 \text{ min} = 1.71\text{s} \quad (9)$$

### 2.3.3. Terceiro caso:

$$E[R_s] = \frac{1}{\mu_p} = \frac{1}{35} = 0.02857 \text{ min} = 1.71\text{s} \quad (10)$$

## 2.4. Calculando a utilização:

### 2.4.1. Primeiro caso:

$$U = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100}{120} = 0.8333 \quad (11)$$

#### 2.4.2. Segundo caso:

$$U = \frac{\lambda}{c \cdot \mu_c} = \frac{25}{35} = 0.7143 \quad (12)$$

#### 2.4.3. Terceiro caso:

$$U = \frac{\lambda}{c \cdot \mu_p} = \frac{100}{4 \cdot 35} = \frac{100}{140} = 0.7143 \quad (13)$$

### 2.5. Calculando o tempo total:

#### 2.5.1. Primeiro caso:

$$E[R] = E[R_q] + E[R_s] = 2.5 + 0.5 = 3s \quad (14)$$

#### 2.5.2. Segundo caso:

$$E[R] = E[R_q] + E[R_s] = 4.29 + 1.71 = 6s \quad (15)$$

#### 2.5.3. Terceiro caso:

$$E[R] = E[R_q] + E[R_s] = 1.07 + 1.71 = 2.78s \quad (16)$$

Tabela comparativa:

1	Config.	Utilização	Tempo Fila (s)	T Aten. (s)	T Total (s)
2	-----	-----	-----	-----	-----
3	1 Caso	0,833	2,5	0,5	3,0
4	2 Caso	0,714	4,3	1,7	6,0
5	3 Caso	0,714	0,675	1,7	2,7

## 3. Questão Com Auxilio Professor:

Um servidor de autenticação central possui um processador que consegue atender em média 120 requisições por minuto. Durante horários de pico, ele recebe em média 100 requisições por minuto. Pergunta-se: **em termos de tempo de espera médio no sistema e na fila, seria melhor manter esta configuração ?** Ou:

- Caso 1: Dividir as requisições entre quatro servidores (cada um com 25 requisições por minuto) e com capacidade de processar 35 requisições por minuto cada um.
- Caso 2: Usar um servidor com quatro processadores e uma fila única (cada um com capacidade de 35 requisições por minuto).

Mostrar o cálculo do tempo de resposta total e dos tempos na fila e no atendimento. Mostrar também a utilização do sistema. Construir uma tabela com estes tempos. Fazer uma conclusão.

Variáveis da questão:

- $\lambda = 100$  requisições por minuto (taxa de chegada)
- $\mu = 120$  requisições por minuto (taxa de serviço do servidor único)
- $c = 1$  (número de servidores no primeiro caso)
- $c = 4$  (número de servidores no segundo caso)
- $\mu_c = 35$  requisições por minuto (taxa de serviço de cada servidor no segundo caso)
- $\mu_p = 35$  requisições por minuto (taxa de serviço de cada processador no terceiro caso)

### 3.1. Cálculo do melhor caso:

Inicialmente, vamos calcular os parâmetros do sistema para o primeiro caso, onde temos um único servidor com capacidade de atender 120 requisições por minuto.

$$E[R] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{120 - 100} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ min} = 3\text{s} \quad (17)$$

Já no segundo caso, onde temos quatro servidores com capacidade de atender 35 requisições por minuto cada, a taxa de serviço total é:

$$E[R] = \frac{1}{c \cdot \mu_c - \lambda} = \frac{1}{35 - 25} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ min} = 6\text{s} \quad (18)$$

Já no terceiro caso, onde temos um servidor com quatro processadores, primeiro precisamos calcular o valor esperado:

$$E[N_q] = \frac{\frac{(\rho c)^c + 1}{c! (1 - \rho)^2} p_0}{c! (1 - \rho)^2} \quad (19)$$

onde:

- $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ : É a taxa de utilização do sistema.
- $c$ : Número de servidores ou processadores.
- $p_0$ : Probabilidade de não haver clientes no sistema, que pode ser calculada como:

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1 - \rho} \right]^{-1} \quad (20)$$

Agora, vamos calcular o valor de  $p_0$  para o terceiro caso:

```

1  lambd = 100          # taxa de chegada (λ)
2  mu = 35              # taxa de serviço por servidor (μ)
3  c = 4                # número de servidores
4
5  rho = lambd / (c * mu)
6  a = c * rho          # tráfego total (λ/μ)
7
8  # Soma dos termos de 0 a c-1: (a^n)/n!
9  sum_terms = sum((a**n) / math.factorial(n) for n in range(c))
10
11 # Último termo: (a^c / c!) * (1 / (1 - ρ))
12 last_term = (a**c) / math.factorial(c) * (1 / (1 - rho))
13

```

```

14 # Probabilidade do sistema estar vazio (P0)
15 P0 = 1 / (sum_terms + last_term)
16
17 print(f"rho = {rho:.4f}")
18 print(f"P0 = {P0:.4f}")

```

Resultando em:

```

1 rho = 0.7143
2 P0 = 0.0464

```

Agora aplicando na formula, temos:

$$E[N_q] = \frac{\frac{(\rho c)^c + 1}{c}}{c!(1 - \rho)^2} p_0 \rightarrow E[N_q] = \frac{\frac{(0,7143 \cdot 4)^4 + 1}{4}}{4!(1 - 0,7143)^2} \cdot (0,0464) \quad (21)$$

```

1 # Utilização
2 rho = lambd / (c * mu)
3 a = c * rho
4
5 # Soma dos termos de 0 a c-1: (a^n)/n!
6 sum_terms = sum((a**n) / math.factorial(n) for n in range(c))
7
8 # Último termo: (a^c / c!) * (1 / (1 - rho))
9 last_term = (a**c) / math.factorial(c) * (1 / (1 - rho))
10
11 # Probabilidade do sistema estar vazio (P0)
12 P0 = 1 / (sum_terms + last_term)
13
14 # Cálculo de E[Nq] - número médio na fila
15 numerador = (a**(c + 1)) / c
16 denominador = math.factorial(c) * ((1 - rho)**2)
17 ENq = (numerador / denominador) * P0
18
19 print(f"E[Nq] = {ENq:.4f}")

```

Resultando em:

```

1 E[Nq] = 1.1277 -> 1.13 "min" -> 67 "s"

```

Calculamos o tempo médio de espera na fila com:

$$E[R_q] = \frac{E[N_q]}{\lambda} = \frac{1.13}{100} = 0.0113 \text{ min} = 0.678\text{s} \quad (22)$$

Calculamos também o tempo médio de espera no sistema, com:

$$E[R] = E[R_q] + \frac{1}{\mu_p} = 0.678 + \frac{1}{35} = 0.678 + 0.02857 = 0.70657 \text{ min} = 42.4\text{s} \quad (23)$$

## 4. Questão:

Quando um estação base em uma rede celular possui **9 canais** que serão disputados por terminais móveis que chegam na **taxa média de 5 estações por minuto**. O tempo de **estadia na célula é de 1 minuto na média**.

### 4.1. Como poderia ser modelado este sistema?

#### 4.1.1. Tipo de Fila

O sistema descrito pode ser modelado como um sistema de filas **M/M/k/k**, também conhecido como **Erlang-B**, apropriado para sistemas onde:

- As **chegadas são Poisson** (aleatórias e independentes),
- Os **tempos de serviço são exponenciais**,
- Há **k servidores** (canais),
- **Não há fila**: chamadas são **bloqueadas** se todos os canais estiverem ocupados.

### 4.2. Qual a probabilidade de bloqueio do sistema?

#### 4.2.1. Parâmetros

- **Número de canais (servidores)**:  $k = 9$
- **Taxa de chegada**:  $\lambda = 5$  chamadas por minuto
- **Taxa de serviço**:  $\mu = 1$  chamada por minuto (já que o tempo médio de serviço é de 1 minuto)

```
1 import math
2
3 # Parâmetros
4 lambda_chegada = 5 # taxa de chegada (chegadas por minuto)
5 k = 9             # número de canais
6 mu = 1            # taxa de serviço (serviços por minuto)
```

#### 4.2.2. Cálculo da Probabilidade de Bloqueio

Carga Oferecida (em Erlangs):

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{1} = 5 \text{ Erlangs} \quad (24)$$

```
1 # Calcular a intensidade de tráfego (A) em Erlangs
2 A = lambda_chegada / mu
```

Fórmula de Erlang-B

$$B(k, A) = \frac{\frac{A^k}{k!}}{\sum_{i=0}^k \left[ \frac{A^i}{i!} \right]} \quad (25)$$



```

1 # Função Erlang-B
2 def erlang_b(k, A):
3     numerator = (A**k) / math.factorial(k)
4     denominator = sum((A**i) / math.factorial(i) for i in range(k + 1))
5     return (numerator / denominator)

```

```

1 # Calcular a probabilidade de bloqueio
2 prob_bloqueio = erlang_b(k, A)

```

```

1 # --- Exibição dos Resultados ---
2 print("--- Análise do Sistema de Telefonia Celular (M/M/k/k) ---")
3 print(f"Taxa de Chegada ( $\lambda$ ): {lambda_chegada} chamadas/minuto")
4 print(f"Taxa de Serviço ( $\mu$ ): {mu} chamadas/minuto")
5 print(f"Número de Canais (k): {k}")
6 print(f"Intensidade de Tráfego (A): {A:.2f} Erlangs")
7 print("-" * 20)
8 print(f"Probabilidade de Bloqueio: {prob_bloqueio:.6f}")
9 print(f"Probabilidade de Bloqueio em porcentagem: {prob_bloqueio:.2%}")

```

#### 4.2.3. Resultados

Exibição dos parâmetros e resultados:

```

--- Análise do Sistema de Telefonia Celular (M/M/k/k) ---
Taxa de Chegada ( $\lambda$ ): 5 chamadas/minuto
Taxa de Serviço ( $\mu$ ): 1 chamadas/minuto
Número de Canais (k): 9
Intensidade de Tráfego (A): 5.00 Erlangs
-----
Probabilidade de Bloqueio: 0.037458
Probabilidade de Bloqueio em porcentagem: 3.75%

```