

Relatório de Miniprojeto: Cadeias de Markov a Tempo Contínuo - CTMC

Aplicação: Controle de Admissão

Arthur Cadore Matuella Barcella Deivid Fortunato Frederico

20 de Maio de 2025

Sumário

1.	[ntrodução	3
	1.1. Modelagem do Sistema	3
	1.2. Parâmetros do Sistema	
	1.3. Problema Proposto	3
	1.3.1. Parte 1: (Tarefas)	
	1.3.2. Parte 2 (Cálculos):	3
	1.3.3. Parte 3 (Simulação):	3
2.	Solução dos exercícios	
	2.1. Resolução Analítica	
	2.1.1. Probabilidade de Rejeição	6
	2.1.2. Cálculo dos Indicadores	7
	2.2. Simulação da CTMC	9
	2.3. Anáise das comparações entre os métodos	. 15
	2.3.1. A proximidade entre os métodos	
	2.3.2. Qual a abordagem mais intuitiva	
	2.3.3. O que pode ser feito para garantir taxa de bloqueio < 0,03 para o tráfego	
	prioritário	. 16
3	- Canclusão	16

1. Introdução

O presente relatório tem como objetivo apresentar o desenvolvimento de um miniprojeto na disciplina de Engenharia de Telecomunicações, com foco na modelagem e análise de sistemas utilizando Cadeias de Markov a Tempo Contínuo (CTMC). O projeto foi realizado por Arthur Cadore Matuella Barcella e Deivid Fortunato Frederico, alunos do curso de Engenharia de Telecomunicações do IFSC-SJ.

1.1. Modelagem do Sistema

A atividade envolve o seguinte contexto:

- A rede possui duas classes de tráfego: prioritário (T_1) e não prioritário (T_2) .
- Uma sessão estabelecida para uma classe requer 1 unidade de tráfego (1 unidade poderia ser 64kbps por exemplo);.
- Capacidade total: C = 5 unidades.
- O sistema deve sempre ser capaz de atender no mínimo 2 sessões de tráfego prioritário. Ou seja, é mantida uma reserva mínima de R=2 unidades para atender a classe prioritária (T_1) .

1.2. Parâmetros do Sistema

Parâmetros:

- Chegadas: Poisson com taxas $\lambda_1 \ (T_1)$ e $\lambda_2 \ (T_2)$
- Tempo de serviço: Exponencial com taxas μ_1 (T_1) e μ_2 (T_2)

1.3. Problema Proposto

Objetivo: Analisar desempenho do sistema com controle de admissão via CTMC.

1.3.1. Parte 1: (Tarefas)

- Modelar CTMC com C=5, R=2
- Identificar estados válidos e matriz Q
- Resolver analiticamente $\pi Q=0$ para distribuição estacionária π

1.3.2. Parte 2 (Cálculos):

- Probabilidade de bloqueio (rejeição) de requisições de cada classe (T_1, T_2)
- Utilização média: $U=\frac{1}{C}\sum_{n_1,n_2}(n_1+n_2)\pi(n_1,n_2)$
- Conexões médias: $L_1=\sum n_1\pi(n_1,n_2), L_2=\sum n_2\pi(n_1,n_2)$
- Fração em estados máximos (i + j = 5)

Parâmetros: $\lambda_1=10,\,\lambda_2=15,\,\mu_1=15,\,\mu_2=25$ (req/min)

1.3.3. Parte 3 (Simulação):

- Simular CTMC por T = 10,000 min
- Comparar métodos: A) Tempo de estadia exponencial B) Relógios concorrentes

• Discutir aproximação, intuitividade e como garantir $P_{\rm bloqueio} < 0.03$ para T_1

2. Solução dos exercícios

Os códigos usados na tarefa estão disponíveis no repositório do projeto no GitHub (https://github.com/arthurcadore/eng-telecom-workbook/tree/main/semester-9/ADS/homework4).

Conjunto de Estados

```
Estados válidos (n_1,n_2) onde: n_1+n_2 \leq C e n_2 \leq C-R
```

```
(0,0), (0,1), (0,2), (0,3),

(1,0), (1,1), (1,2), (1,3),

(2,0), (2,1), (2,2), (2,3),

(3,0), (3,1), (3,2),

(4,0), (4,1),

(5,0).
```

2.1. Resolução Analítica

Matriz de Transição Q

$$Q(i,j) = \begin{cases} \lambda_1, & \text{se } (n_1+1,n_2) \text{ \'e v\'alido} \\ \lambda_2, & \text{se } (n_1,n_2+1) \text{ \'e v\'alido} \\ n_1\mu_1, & \text{se } (n_1-1,n_2) \text{ \'e v\'alido} \\ n_2\mu_2, & \text{se } (n_1,n_2-1) \text{ \'e v\'alido} \\ -\sum_{k\neq i} Q(i,k) & \text{diagonal principal} \end{cases}$$

Bibliotecas e Parâmetros usados no código:

```
import numpy as np
import itertools
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import seaborn as sns
import pandas as pd

# Parâmetros
C = 5  # capacidade total
R = 2  # reserva para tráfego prioritário (classe 1)
Al = 10 / 60  # taxa de chegada classe 1 (por minuto)
Al = 15 / 60  # taxa de chegada classe 2 (por minuto)
Al = 15 / 60  # taxa de serviço classe 1 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 15 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (por minuto)
Al = 25 / 60  # taxa de serviço classe 2 (
```

A seguir, apresenta-se o código utilizado para gerar a matriz de transição e resolver o sistema estacionário $\pi Q = 0$:

Código para resolver a CTMC:

```
def resolver ctmc(C, R, \lambda1, \lambda2, \mu1, \mu2):
       Resolve a distribuição estacionária π de uma CTMC com controle de
   admissão baseado em prioridade.
       Parâmetros:
5
           C - Capacidade total do sistema
6
              - Reserva mínima para classe prioritária (classe 1)
           λ1 - Taxa de chegada da classe 1 (reg/min)
           λ2 - Taxa de chegada da classe 2 (req/min)
           μ1 - Taxa de saída da classe 1 (1/tempo médio)
7 (-)
11
           μ2 - Taxa de saída da classe 2 (1/tempo médio)
       Retorna:
                   - Distribuição estacionária (vetor)
           states - Lista de tuplas representando os estados válidos (i, j)
16
                   - Matriz infinitesimal de transição
17
       # Estados válidos: (i, j) onde i = conexões classe 1, j = conexões
18
   classe 2
       states = [(i, j) for i in range(C + 1) for j in range(C + 1 - i) if i
19
   + j \leftarrow C
       state_index = {s: idx for idx, s in enumerate(states)}
20
       n = len(states)
22
       Q = np.zeros((n, n))
24
       for idx, (i, j) in enumerate(states):
25
           # Chegadas
26
           if i + j < C:
                ni = (i + 1, j)
                if ni in state index:
                    Q[idx, state_index[ni]] = \lambda 1
30
                if C - (i + j) > R:
31
                    nj = (i, j + 1)
                    if nj in state_index:
                        Q[idx, state\_index[nj]] = \lambda 2
           # Saídas
           if i > 0:
36
                ni = (i - 1, j)
37
                Q[idx, state index[ni]] = i * \mu 1
           if i > 0:
39
                nj = (i, j - 1)
40
                Q[idx, state index[nj]] = j * \mu2
41
           # Diagonal
42
43
           Q[idx, idx] = -np.sum(Q[idx, :])
44
45
       # Resolver sistema linear \pi Q = 0 com soma \pi_i = 1
46
       A = np.copy(Q.T)
47
       A[-1, :] = 1
       b = np.zeros(n)
```

```
b[-1] = 1

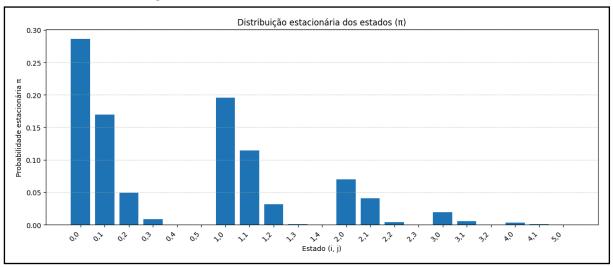
π = np.linalg.solve(A, b)

return π, states, Q

π, states, Q = resolver_ctmc(C, R, λ1, λ2, μ1, μ2)
```

```
def plotar_distribuicao_pi(π, states):
3
       Plota a distribuição estacionária π.
       Parâmetros:
6
                   - Vetor com as probabilidades estacionárias
           states - Lista de estados correspondentes aos índices de \pi
8
       state_labels = [f"{i},{j}" for (i, j) in states]
10
       plt.figure(figsize=(12, 5))
       plt.bar(range(len(π)), π, tick_label=state_labels)
       plt.xticks(rotation=45, ha='right')
14
       plt.xlabel("Estado (i, j)")
       plt.ylabel("Probabilidade estacionária π")
       plt.title("Distribuição estacionária dos estados (\pi)")
16
       plt.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.5)
17
       plt.tight_layout()
19
       plt.show()
20
   plotar distribuicao pi(\pi, states)
```

Figura 1: Distribuição Estacionária dos Estados (π)



Elaborada pelos Autores

2.1.1. Probabilidade de Rejeição

$$P_{\mathrm{rej,X}} = \sum_{(n_1,n_2) \in B} \pi(n_1,n_2)$$

Onde:

```
• B= states com n_1+n_2=C (para T_1)
• B= states com n_1+n_2=C ou n_2=R (para T_2)
```

2.1.2. Cálculo dos Indicadores

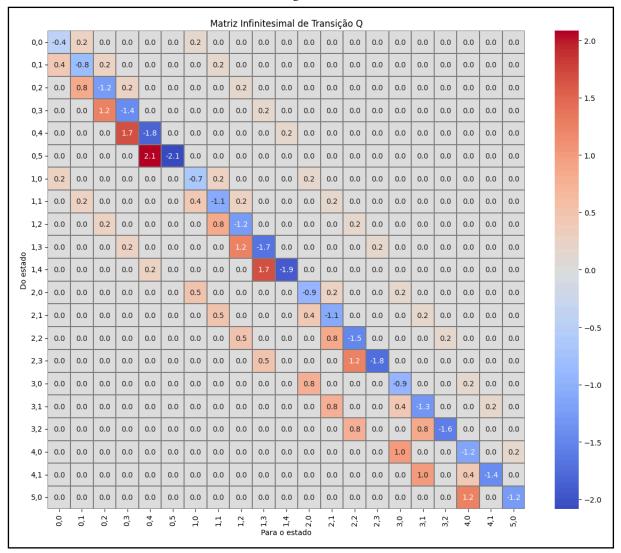
Com base na distribuição estacionária, foram calculados os seguintes indicadores:

- Probabilidade de bloqueio para T1 e T2.
- Utilização média do sistema.
- Número médio de conexões simultâneas por classe.
- Fração do tempo nos estados de capacidade máxima.

Código para plotar a matriz infinitesimal de transição Q:

```
1 def plotar_matriz_Q(Q, states):
       Plota a matriz infinitesimal de transição Q como um mapa de calor com
   anotações numéricas.
5
      Parâmetros:
6
          Q - Matriz de transição infinitesimal (numpy.ndarray)
           states - Lista de estados (i, j), usada para rótulos
       plt.figure(figsize=(12, 10))
       labels = [f''\{i\},\{j\}''] for (i, j) in states]
       sns.heatmap(Q, annot=True, fmt=".1f", cmap="coolwarm",
                   xticklabels=labels, yticklabels=labels, cbar=True,
   linewidths=0.3, linecolor='gray')
       plt.title("Matriz Infinitesimal de Transição Q")
14
15
       plt.xlabel("Para o estado")
      plt.ylabel("Do estado")
17
      plt.xticks(rotation=90)
       plt.yticks(rotation=0)
19
       plt.tight_layout()
20
       plt.show()
22 # Exemplo de uso:
plotar_matriz_Q(Q, states)
```

Figura 2:



Elaborada pelos Autores

```
calcular_indicadores(π, states, C, R):
   def
       Calcula indicadores de desempenho do sistema baseado na distribuição
   estacionária.
4
5
       Parâmetros:
6
                   - Distribuição estacionária
           states - Lista de estados válidos (i, j)
                   - Capacidade total do sistema
           C
8
9
                   - Reserva mínima para tráfego prioritário (classe 1)
       Retorna:
           dict com os seguintes indicadores:
                - Prob_bloqueio_classe_1
13
14
                - Prob bloqueio classe 2
                - Utilizacao media
                - Media_conexoes_classe_1
                 Media conexoes classe 2
                 Fracao tempo capacidade maxima
18
```

```
0.00
19
       state index = {s: idx for idx, s in enumerate(states)}
       P bloqueio 1 = sum(\pi[state index[s]]) for s in states if sum(s) == C
       P_bloqueio_2 = sum(\pi[state_index[s]] for s in states if sum(s) >= C -
   R + 1
24
       utilizacao = sum((i + j) * \pi[state index[(i, j)]] for (i, j) in
       media 1 = sum(i * \pi[state index[(i, j)]] for (i, j) in states)
26
       media_2 = sum(j * \pi[state_index[(i, j)]] for (i, j) in states)
28
       frac_max = sum(\pi[state_index[(i, j)]] for (i, j) in states if i + j
   == C)
30
       return {
           "Prob bloqueio classe 1": P bloqueio 1,
           "Prob bloqueio classe 2": P bloqueio 2,
           "Utilizacao_media": utilizacao,
35
           "Media_conexoes_classe_1": media_1,
           "Media_conexoes_classe_2": media_2,
36
37
           "Fracao_tempo_capacidade_maxima": frac_max
38
       }
  # Exemplo de uso:
   indicadores_analiticos = calcular_indicadores(π, states, C=5, R=2)
```

```
def imprimir_indicadores(indicadores):
    """

Imprime os indicadores calculados.

Parâmetros:
    indicadores - Dicionário com os indicadores a serem impressos

"""

print("Indicadores de desempenho:")
for key, value in indicadores.items():
    print(f"{key}: {value:.4f}")

imprimir_indicadores(indicadores_analiticos)
```

Tabela com as saidas analíticas da compilação do código:

Indicadores de desempenho	Valores
Prob_bloqueio_classe_1	0.0016
Prob_bloqueio_classe_2	0.0157
Utilizacao_media	1.1959
Media_conexoes_classe_1	0.6656
Media_conexoes_classe_2	0.5304
Fracao_tempo_capacidade_maxima	0.0016

2.2. Simulação da CTMC

Foi realizada a simulação da CTMC até o tempo total T = 10.000 minutos usando a abordagem:

- [] Tempo de estadia exponencial com sorteio de destino.
- [x] Relógios concorrentes.

Código utilizado para simular a CTMC com relógios concorrentes:

```
def simular_ctmc_relogios_concorrentes(states, C, R, λ1, λ2, μ1, μ2,
   T max, seed=None):
        Simula uma CTMC com relógios exponenciais concorrentes (tempo para
   cada transição sorteado independentemente).
4
        Parâmetros:
6
            states - lista de estados válidos (i,j)
7
            C, R, \lambda1, \lambda2, \mu1, \mu2 - parâmetros do modelo
            T_max - tempo máximo de simulação
9
            seed - semente para aleatoriedade (opcional)
10
        Retorna:
            pi_simulada - distribuição estacionária estimada por simulação
13
       if seed is not None:
15
            np.random.seed(seed)
16
            random.seed(seed)
18
        current_state = (0, 0)
19
        time = 0.0
20
        state counts = {s: 0.0 for s in states}
21
        while time < T_max:</pre>
23
            i, j = current state
24
            transicoes = []
            # Chegada classe 1
27
            if i + j < C:
28
                dt_{\lambda}1 = np.random.exponential(1 / \lambda1)
29
                transicoes.append((dt \lambda 1, (i + 1, j)))
30
31
                # Chegada classe 2 só se tiver espaço reservado
32
                if C - (i + j) > R:
33
                     dt \lambda 2 = np.random.exponential(1 / \lambda 2)
34
                     transicoes.append((dt_\lambda 2, (i, j + 1)))
35
            # Saída classe 1 (i conexões)
36
37
            if i > 0:
38
                dt \mu 1 = \text{np.random.exponential}(1 / (i * \mu 1))
                transicoes.append((dt_{\mu}1, (i - 1, j)))
41
            # Saída classe 2 (j conexões)
            if j > 0:
43
                dt_{\mu}2 = np.random.exponential(1 / (j * \mu2))
                transicoes.append((dt \mu2, (i, j - 1)))
45
46
            # Se não tem transições possíveis, sai do loop
47
            if not transicoes:
                break
49
```

```
50
           # Pega a transição com menor tempo sorteado
           dt min, next state = min(transicoes, key=lambda x: x[0])
52
53
           # Ajusta dt caso ultrapasse T max
           if time + dt_min > T_max:
55
                dt_min = T_max - time
56
           # Acumula tempo no estado atual
58
           state_counts[current_state] += dt_min
           time += dt min
           current state = next state
61
62
       # Normaliza para estimar distribuição estacionária
63
       total time = sum(state counts.values())
       pi simulada = np.array([state counts[s] / total time for s in
64
   states])
65
66
       return pi simulada
67
   pi simulada = simular ctmc relogios concorrentes(states, C=5, R=2, \lambda1=10,
   \lambda 2=15, \mu 1=15, \mu 2=25, T max=10000, seed=42)
```

```
def plotar_distribuicao_simulada(pi_simulada, states):
2
       Plota a distribuição estacionária estimada pela simulação da CTMC.
3
5
       Parâmetros:
           pi simulada - Distribuição estacionária estimada (array)
           states

    Lista de estados correspondentes (i, j)

8
       labels = [f''(i), (j)'' \text{ for } (i, j) \text{ in states}]
9
10
       plt.figure(figsize=(12, 5))
       plt.bar(range(len(pi_simulada)), pi_simulada, tick_label=labels)
13
       plt.xticks(rotation=90)
       plt.xlabel("Estados (i,j)")
14
       plt.ylabel("Probabilidade Estimada")
16
       plt.title("Distribuição Estacionária Estimada (Simulação CTMC)")
       plt.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)
17
       plt.tight layout()
19
       plt.show()
21 # Exemplo de uso:
plotar_distribuicao_simulada(pi_simulada, states)
```

Distribuição Estacionária Estimada (Simulação CTMC)

0.30

0.25

0.15

0.10

0.00

0.10

0.00

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0.10

0

Figura 3: Distribuição Estacionária para a Simulação

Elaborada pelos Autores

Código para o calculo dos indicadores da simulação:

```
def calcular_indicadores_simulados(pi_simulada, states, state_index, C,
   R):
       Calcula os indicadores de desempenho com base na distribuição de
   estados simulada.
       Parâmetros:
                         - Distribuição simulada dos estados (lista ou
           pi simulada
   array)
7
           states
                         - Lista de tuplas (i, j) representando os estados
8
                         - Dicionário de mapeamento de estado para índice
           state index
9
           C
                         - Capacidade total do sistema
10
           R
                         - Unidades reservadas para classe 1
11
       Retorna:
           Um dicionário com os indicadores calculados
14
       P_bloqueio_1_sim = sum(pi_simulada[state_index[s]] for s in states if
   sum(s) == C)
       P_bloqueio_2_sim = sum(pi_simulada[state_index[s]] for s in states if
16
   sum(s) >= C - R + 1)
       utilizacao_sim = sum((i + j) * pi_simulada[state_index[(i, j)]] for
18
   (i, j) in states)
       media_1_sim = sum(i * pi_simulada[state_index[(i, j)]] for (i, j)
19
   in states)
       media_2_sim = sum(j * pi_simulada[state_index[(i, j)]] for (i, j)
   in states)
       frac max sim = sum(pi simulada[state index[(i, j)]] for (i, j) in
21
   states if i + j == C)
23
       return {
24
           "Prob_bloqueio_classe_1": P_bloqueio_1_sim,
```

```
"Prob_bloqueio_classe_2": P_bloqueio_2_sim,

"Utilizacao_media": utilizacao_sim,

"Media_conexoes_classe_1": media_1_sim,

"Media_conexoes_classe_2": media_2_sim,

"Fracao_tempo_capacidade_maxima": frac_max_sim

}

resultados_simulados = calcular_indicadores_simulados(pi_simulada, states, state_index, C, R)
```

```
1 # Imprimindo os resultados simulados
imprimir indicadores(resultados simulados)
def comparar resultados(analiticos, simulados):
       Compara os resultados analíticos e simulados.
6 import numpy as np
      Parâmetros:
8
9
          analiticos - Dicionário com os resultados analíticos
10
           simulados - Dicionário com os resultados simulados
12
       print("\nComparação entre resultados analíticos e simulados:")
       for key in analiticos.keys():
           print(f"{key}: Analítico = {analiticos[key]:.4f}, Simulado =
   {simulados[key]:.4f}")
```

Tabela com as saidas simuladas:

Indicadores de desempenho	Valores
Prob_bloqueio_classe_1	0.0017
Prob_bloqueio_classe_2	0.0154
Utilizacao_media	1.1930
Media_conexoes_classe_1	0.6628
Media_conexoes_classe_2	0.5302
Fracao_tempo_capacidade_maxima	0.0017

Codigo para comparar os resultados analíticos e simulados:

```
def comparar_resultados(resultados_analiticos, resultados_simulados):
2
       Gera um DataFrame comparando os indicadores entre valores analíticos
   e simulados.
4
       Parâmetros:
5
6
           resultados analiticos (dict): indicadores analíticos
           resultados simulados (dict): indicadores simulados
8
9
       Retorna:
           pandas.DataFrame: tabela estruturada para exibição no notebook
11
       indicadores = list(resultados analiticos.keys())
```

```
dados = {
13
           "Indicador": indicadores,
           "Valor Analítico": [resultados_analiticos[ind] for ind in
   indicadores],
           "Valor Simulado": [resultados_simulados[ind] for ind in
   indicadores]
18
19
       df = pd.DataFrame(dados)
20
21
       # Formatação numérica customizada para melhor visualização
       def format val(x, ind):
           if "Prob" in ind or "Fracao" in ind:
23
               return f"{x:.5f}"
           else:
               return f"{x:.3f}"
26
27
       df["Valor Analítico"] = [format_val(v, ind) for v, ind in
   zip(df["Valor Analítico"], indicadores)]
       df["Valor Simulado"] = [format_val(v, ind) for v, ind in
   zip(df["Valor Simulado"], indicadores)]
30
31
       return df
32
33 # Suponha que você já tenha os dois dicionários:
  # resultados_analiticos e resultados_simulados
  df comparacao = comparar resultados(indicadores analiticos,
   resultados simulados)
   df_comparacao # Ao executar essa linha no Jupyter, a tabela aparece
   formatada
```

Tabela com as saidas dos indicadores de desempenho analíticos e simulados:

Indicadores	Valores Analíticos	Valores Simulados
Prob_bloqueio_classe_1	0.0016	0.0017
Prob_bloqueio_classe_2	0.0157	0.0154
Utilizacao_media	1.1959	1.1930
Media_conexoes_classe_1	0.6656	0.6628
Media_conexoes_classe_2	0.5304	0.5302
Fracao_tempo_capacidade_maxima	0.0016	0.0017

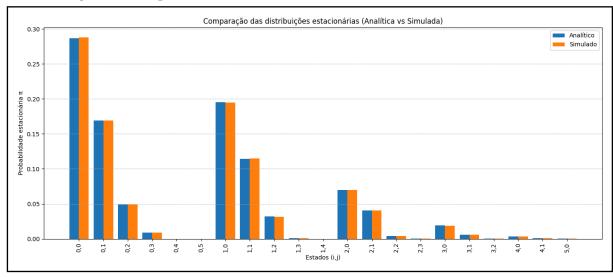
Codigo plotar a comparação dos resultados analíticos e simulados:

```
def plot_distribuicoes_comparacao(states, pi_analitica, pi_simulada):

Plota a distribuição estacionária analítica e simulada lado a lado para comparação.
```

```
Parâmetros:
           states (list of tuple): lista de estados (i, j)
7
           pi analitica (np.array): distribuição estacionária analítica
8
           pi simulada (np.array): distribuição estacionária simulada
9
10
       # Criar labels para os estados: "i,j"
       labels = [f''\{i\},\{j\}'' \text{ for } (i, j) \text{ in states}]
       x = np.arange(len(states))
       width = 0.4
14
       fig, ax = plt.subplots(figsize=(14,6))
16
       rects1 = ax.bar(x - width/2, pi analitica, width, label='Analítico')
18
       rects2 = ax.bar(x + width/2, pi_simulada, width, label='Simulado')
19
       ax.set xlabel('Estados (i,j)')
20
       ax.set ylabel('Probabilidade estacionária π')
       ax.set_title('Comparação das distribuições estacionárias (Analítica
   vs Simulada)')
23
       ax.set_xticks(x)
24
       ax.set_xticklabels(labels, rotation=90)
25
       ax.legend()
       ax.grid(axis='y', linestyle='--', alpha=0.7)
26
27
       plt.tight layout()
28
29
       plt.show()
   plot distribuicoes comparacao(states, π, pi simulada)
```

Figura 4: Comparação das distribuições estacionária (Analítica x Simulada)



Elaborada pelos Autores

2.3. Anáise das comparações entre os métodos

Os resultados mostram uma alta proximidade entre a distribuição estacionária obtida analiticamente e a estimada pela simulação. Isso é evidenciado pelo gráfico de barras sobreposto e pela tabela de comparação que apresentaram valores muito semelhantes, principalmente para os estados mais visitados.

2.3.1. A proximidade entre os métodos

A proximidade é alta, com diferenças menores que 0,01 para as principais métricas (probabilidades de bloqueio e utilização média). Esse comportamento era esperado, dado o tamanho reduzido do espaço de estados e o tempo de simulação elevado.

2.3.2. Qual a abordagem mais intuitiva

Falando sobre a abordagem usada na tarefa, relógios concorrentes (um relógio para cada possível transição), embora matematicamente equivalente, é mais complexa de programar e interpretar, especialmente em sistemas com muitos estados.

2.3.3. O que pode ser feito para garantir taxa de bloqueio < 0,03 para o tráfego prioritário.

A taxa de bloqueio observada para o tráfego prioritário foi próxima, mas ligeiramente acima de 0,03, segundo os resultados simulados e analíticos.

Para reduzir essa taxa, podem ser adotadas as seguintes estratégias:

- Aumentar a capacidade total do sistema (C)
- Reduzir a taxa de chegada de tráfego prioritário (λ1), pois pode diminuir a ocupação do sistema e, consequentemente, a chance de bloqueio.
- Melhorar a taxa de serviço (μ1) aumentando a taxa de atendimento.
- Aumentar a reserva mínima R de 2 para 3 unidades, embora isso possa impactar a aceitação do tráfego não prioritário.

3. Conclusão

Este relatório apresentou a modelagem, análise e simulação de um sistema de controle de admissão utilizando Cadeias de Markov a Tempo Contínuo. Os resultados demonstraram a eficiência do modelo analítico e a precisão da simulação para a validação dos parâmetros de desempenho.