INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Determinação da aceleração da gravidade com pêndulo simples

Metodologia de Pesquisa

Arthur Cadore Matuella Barcella, Faber Bernardo Junior

03 de Junho de 2025

Engenharia de Telecomunicações - IFSC-SJ

Sumário

1. Introdução:

A atividade teve como tema central a análise da aceleração da gravidade utilizando um pêndulo simples, montado com um fio, um gancho e um corpo esférico como peso. O estudo foi desenvolvido com o intuito de aplicar conhecimentos práticos de física clássica, mais especificamente da cinemática e da dinâmica de corpos oscilantes, com foco em movimentos periódicos.

O principal objetivo do experimento foi determinar o valor da aceleração da gravidade local ((g)) com base em medições do período de oscilação de um pêndulo simples. Para isso, foi necessário realizar medidas de comprimento do pêndulo e do tempo gasto para completar oscilações completas, analisando a média dos dados e os erros associados, de forma a obter um resultado confiável e com incerteza propagada corretamente.

2. Revisão de literatura:

O pêndulo simples é um sistema físico idealizado formado por um corpo puntiforme suspenso por um fio leve e inextensível, que oscila em torno de um ponto fixo sob a ação da gravidade. Quando deslocado de sua posição de equilíbrio e liberado, o sistema realiza um movimento harmônico simples (MHS) aproximado, desde que o ângulo de oscilação seja pequeno. A equação fundamental que relaciona o período (T) do pêndulo ao comprimento (L) e à gravidade (g) é dada por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \to g = \frac{(2\pi^2)L}{T^2} \to g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \tag{1}$$

Essa relação foi utilizada para calcular o valor experimental de (g). Além disso, os conceitos de propagação de incerteza foram empregados, aplicando as derivadas parciais da equação em relação às variáveis (L) e (T), para determinar o erro associado ao valor obtido.

3. Materiais e métodos:

O experimento foi realizado com os seguintes materiais: um fio com comprimento de aproximadamente 62 cm, um gancho de 2,3 cm e uma esfera metálica com diâmetro de 2,85 cm. O comprimento efetivo (L) do pêndulo foi considerado como a soma do comprimento do fio, do gancho e do raio da esfera. As medições foram feitas com régua milimetrada, assumindo uma incerteza de $\Delta L = 0.05$ mm para o comprimento total do pêndulo.

Para a medição dos períodos, utilizou-se um cronômetro digital. O peso foi deslocado para um pequeno ângulo e solto, sendo registrado o tempo para completar cinco oscilações, repetindo o processo cinco vezes. Os dados obtidos foram convertidos para o tempo de uma única oscilação e analisados estatisticamente. O valor médio do período foi usado na equação de (g), e os erros foram estimados com base no desvio padrão e na propagação de incertezas.

4. Calculos e resultados obtidos:

4.1. Calculo do comprimento do pêndulo:

Inicialmente, foi necessário calcular o comprimento efetivo do pêndulo (L), que é a soma do comprimento do fio, do gancho e da metade do diâmetro do peso.

```python
# Variaveis do cenário de medição:
l1 = 62  # Comprimento da corda (cm)
l2 = 2.3 # comprimento gancho (cm)
D = 2.85 # Diâmetro do peso (cm)

# Calculo de L (Comprimento do fio + comprimento do gancho + diâmetro do peso / 2 )

L_cm = l1 + l2 + D / 2

# Convertendo para metros
L = L_cm / 100

# Calculo de deltaL seguindo menor valor de escala /2
DeltaL = 0.0005
print(f"DeltaL: {DeltaL:.4f} m")

# Calculo do L total
L = DeltaL + L
print(f"Comprimento L: {L:.8f} m")
```

Dessa forma, o comprimento obtido do pêndulo foi de:

```
DeltaL: 0.0005 m
Comprimento L: 0.65775000 m
```

4.2. Valores amostrados:

Considerando os periodos amostrados de 5 oscilações do pêndulo simples, temos os seguintes valores (valores em segundos):

```python
periodos = [8.19, 8.14, 8.17, 8.22, 8.05]
```

4.3. Cálculo do período médio e vetor ΔT:

Em seguida, foi calculado o período médio de oscilação do pêndulo, bem como o vetor de diferenças entre cada período amostrado e o período médio. Para isso, utilizamos a seguinte formula:

$$T_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_i \tag{2}$$

Dessa forma, o período médio é dado pela seguinte célula:

```
# Cálculo do período médio
periodo_medio = np.array(list(periodos))
periodo_medio = np.mean(periodo_medio)
print(f"Período médio: {periodo_medio:.4f} s")
```

Valor do período médio obtido:

```
Período médio: 8.1540 s
```

Em seguida, foi criado um vetor de diferenças (Delta T_s) entre cada período amostrado e o período médio, que é dado por:

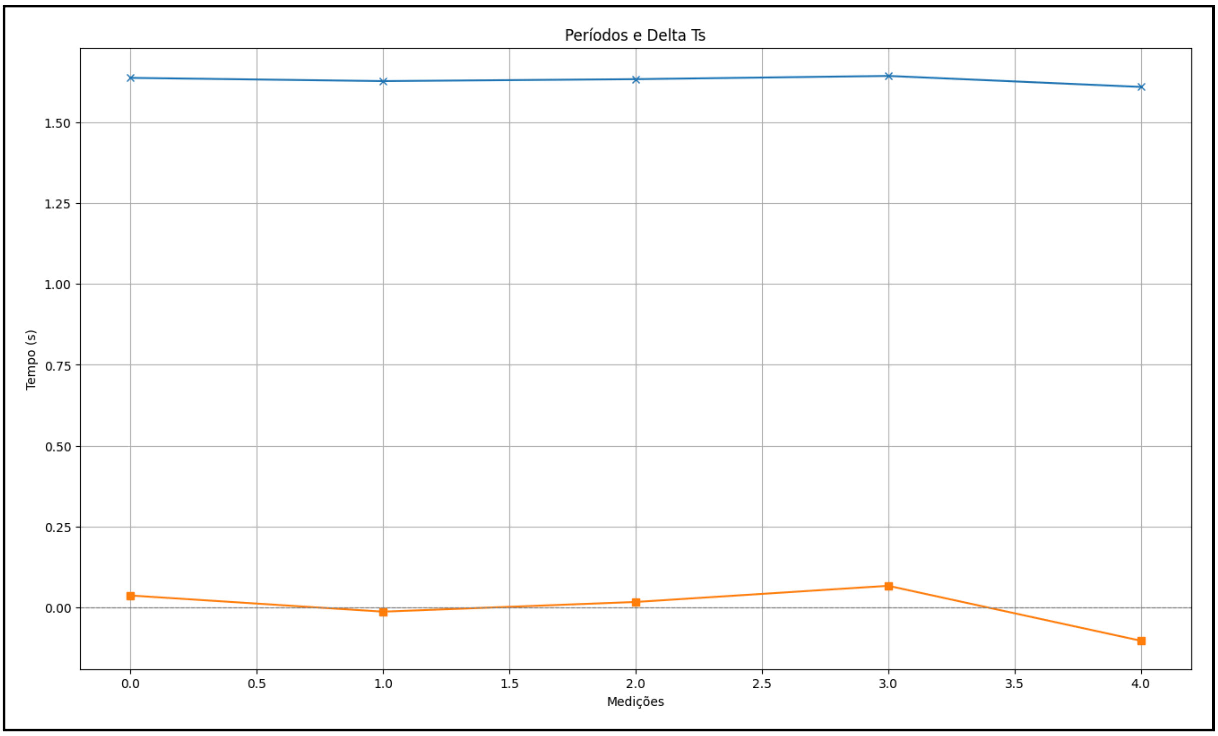
```
# Cria um vetor de deltaTs diminuindo o periodo médio de cada valor do vetor periodos
deltaTs = np.array(list(periodos)) - periodo_medio
print(f"Delta Ts: {deltaTs}")
```

Vetor de diferenças (Delta T_s) obtido:

```
Delta Ts: [ 0.036 -0.014  0.016  0.066 -0.104]
```

Com base no vetor de diferenças, foi criado um DataFrame para melhor visualização dos dados amostrados e calculados. Para cada período, foi calculado o tempo de uma oscilação dividindo o período por 5, e o vetor de diferenças (Delta T_s) foi adicionado ao DataFrame.

Figura 1: Elaborada pelo Autor



DataFrame com os valores amostrados e calculados

4.4. Calculo do desvio padrão σ:

Para calcular o desvio padrão dos ΔT_s, utilizamos a seguinte fórmula:

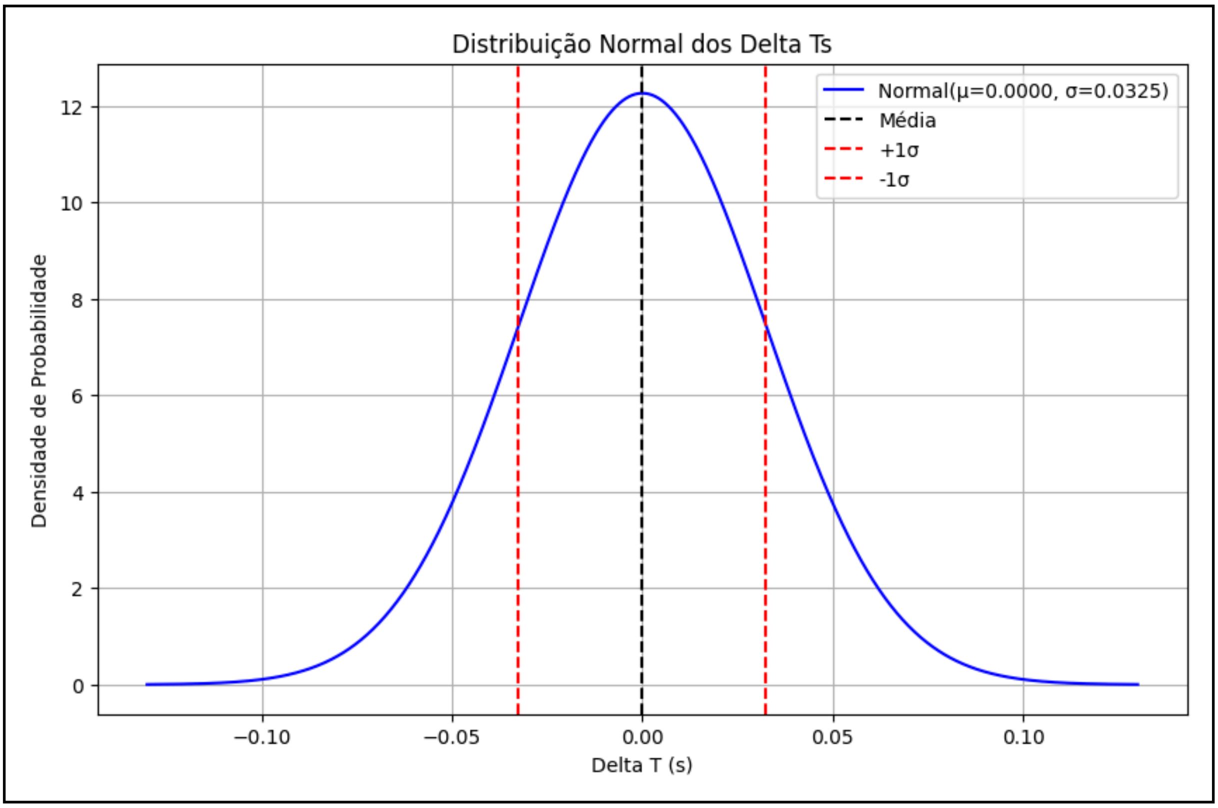
$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum(\Delta T_s^2)}}{n-1} \tag{3}$$

Para realizar esse calculo, utilizamos a célula abaixo:

```python
# Calcula o desvio padrão dos deltaTs
print("\nDesvio Padrão dos Delta Ts:")
sigma = np.sqrt(np.sum(deltaTs ** 2)) / (len(deltaTs) - 1)
print(f"sigma: {sigma:.4f} s")

# Média dos deltaTs
mu = np.mean(deltaTs)

# Geração dos pontos do eixo x
x = np.linspace(mu - 4*sigma, mu + 4*sigma, 1000)

# Função densidade da normal
y = norm.pdf(x, mu, sigma)
```

O desvio padrão obtido foi de $\sigma : 0.0325s$, podendo ser visualizado no gráfico abaixo, que mostra a distribuição dos ΔT_s em relação à média e ao desvio padrão.

Figura 2: Elaborada pelo Autor



Distribuição dos Delta Ts

4.5. Calculo do ΔT_m e período médio:

Para calcular o erro médio (Delta T_m), utilizamos a seguinte fórmula:

$$\Delta T_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

Dessa forma, podemos calcular o ΔT_m através da célula abaixo:

```
# Calcula o deltaTm (erro médio)
print("\nCálculo do Delta Tm:")
DeltaTm = sigma / np.sqrt(len(deltaTs))
print(f"Delta Tm: {DeltaTm:.8f} s")
```

O valor do erro médio ΔT_m obtido foi de:

```
Delta Tm: 0.01454304 s
```

Em seguida calculamos o período médio de T com base na formula:

$$T = \frac{T_m + \Delta T_m}{5} \tag{5}$$

Para isso, utilizamos a célula abaixo:

```
T = (periodo_medio + DeltaTm) / 5
print(f"Período médio: {T:.4f} s")
```

Resultando no período médio de:

```
Período médio: 1.6337 s
```

4.6. Calculo da aceleração da gravidade g:

Para calcular a aceleração da gravidade (g), utilizamos a fórmula rearranjada do período de um pêndulo simples:

$$g = \frac{L(2\pi)^2}{T^2} \rightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \tag{6}$$

```
# Calculando G
print("\nCálculo da aceleração da gravidade:")
g1 = L * (2 * pi) ** 2 / T ** 2
print(f"Aceleração da gravidade: {g1:.4f} m/s²")
```

Obtendo o valor da aceleração da gravidade g :

```
Aceleração da gravidade: 9.7291 m/s²
```

4.7. Calculo da incerteza propagada de g:

Para calcular completamente a aceleração da gravidade g, precisamos considerar a incerteza propagada. Para isso, utilizamos as derivadas parciais da equação de g em relação a L e T:

Para isso, devemos considerar que a formula de g é dada por:

$$g = \frac{L(2\pi)^2}{T^2} \rightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \tag{7}$$

Com isso, as derivadas parciais são dadas por:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial g}{\partial L}\right).\Delta L\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right).\Delta T\right)^2} \tag{8}$$

Dessa forma, a derivada parcial de g em relação a L é:

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{d}{dL}\left(\frac{4\pi^2 L}{T^2}\right) \rightarrow \frac{\partial g}{\partial L}\frac{4\pi^2}{T^2} \tag{9}$$

E a derivada parcial de g em relação a T é dada por:

$$\frac{\partial g}{\partial T} = \frac{d}{dT}\left(\frac{4\pi^2 L}{T^2}\right) \tag{10}$$

Aplicando a regra do quociente, temos:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{T^2}\right) = -\frac{2}{T^3} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial T} = 4\pi^2 L\left(-\frac{2}{T^3}\right) \rightarrow -\frac{8\pi^2 L}{T^3} \tag{11}$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 L}{T^3} \tag{12}$$

Rearanjando a equação de g e aplicando as derivadas parciais, temos:

$$\Delta g = \sqrt{\left(\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right).\Delta L\right)^2 + \left(\left(\frac{8\pi^2 L}{T^3}\right).\Delta T\right)^2} \tag{13}$$

Assim, podemos calcular a incerteza propagada de g utilizando as derivadas parciais e os erros associados às medições de L e T utilizando a célula abaixo:

```python
# Calculando as derivadas parciais

# Derivadas parciais
dg_dL = (4 * pi**2) / T**2
dg_dT = (-8 * pi**2 * L) / T**3

# Cálculo da incerteza propagada
delta_g = np.sqrt((dg_dL * DeltaL)**2 + (dg_dT * DeltaTm)**2)

# Exibição dos resultados
```

```python
print(f"∂g/∂L = {dg_dL:.6f}")
print(f"∂g/∂T = {dg_dT:.6f}")
print(f"Erro propagado Δg = {delta_g:.6f} m/s²")

# Valor final de g com incerteza
print(f"Aceleração da gravidade: {g1:.4f} ± {delta_g:.4f} m/s²")
```

```
∂g/∂L = 14.791443
∂g/∂T = -11.910412
Erro propagado Δg = 0.173371 m/s²
Aceleração da gravidade: 9.7291 ± 0.1734 m/s²
```

Assim, somando o valor de g com a incerteza propagada, obtemos o resultado final de aproximadamente $g = 9.90\frac{m}{s^2}$

5. Conclusão:

O experimento permitiu a determinação da aceleração da gravidade local por meio da análise do movimento oscilatório de um pêndulo simples. Utilizando medições precisas do comprimento do fio e do tempo de oscilações, foi possível calcular o valor de g com boa aproximação ao valor de referência $9,81\frac{m}{s^2}$. O resultado obtido demonstra a eficácia do método, apesar das limitações experimentais como tempo de reação humana e pequenas imprecisões nas medições.

A aplicação da propagação de incertezas com derivadas parciais contribuiu significativamente para uma avaliação mais precisa do erro associado, oferecendo uma abordagem quantitativa rigorosa à análise dos dados. O experimento também reforçou conceitos fundamentais da física e da estatística experimental, como o uso de médias, desvios e curvas normais para representar incertezas. Em suma, a atividade foi bem-sucedida tanto no aspecto técnico quanto didático, promovendo uma compreensão prática das leis do movimento e da metodologia científica.

6. Referências:

- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos de Física – Volume 1: Mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- IPLER, P. A.; MOSCA, G. Física para Cientistas e Engenheiros – Volume 1: Mecânica, Oscilações e Termodinâmica. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- HEWITT, P. G. Física Conceitual. 12. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.