INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Filtros Digitais

Processamento de Sinais Digitais

Arthur Cadore Matuella Barcella

05 de Maio de 2024

Engenharia de Telecomunicações - IFSC-SJ

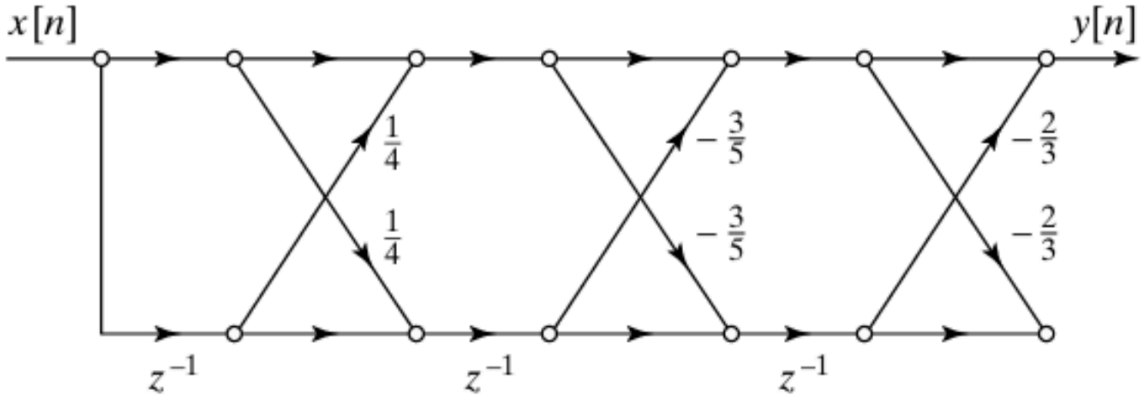
Sumário

1. Questão 1:

1.1. Solucionando a questão:

Considere o diagrama de fluxo de sinais a seguir:

Figura 1: Elaborada pelo Autor



Sinal de entrada no domínio do tempo

1.1.1. Item A:

Determine a função de transferência $H[z]$ relacionando a entrada $x[n]$ à saída $y[n]$ para o filtro FIR em treliça da figura acima.

Para determinar a função de transferência, é necessário analisar o diagrama de fluxo de sinais e identificar as relações entre as variáveis de entrada e saída.

Assim podemos retirar da figura acima as seguintes expressões:

- $x[n] + \frac{1}{4}x[n-1]$
- $x[n-1] + \frac{1}{4}x[n]$
- $x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{3}{5}[n-2] - 0,15[n-1]$
- $x[n-2] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{3}{5}[n] - 0,15[n-1]$
- $y[n] = x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{3}{5}x[n-2] - \frac{3}{20}x[n-1] - \frac{2}{3}x[n-3] - \frac{1}{6}x[n-2] + \frac{2}{5}x[n-1] + \frac{1}{10}x[n-2]$

Desta forma, solucionando a equação acima no dominio n temos que:

$$y[n] = 1x[n] + 0,5x[n-1] - 0,666x[n-2] - 0,666x[n-3] \tag{1}$$

Agora, podemos passar a função expressada acima para o domino Z, onde temos que:

$$Y[z] = x[Z] + 0,5Z^{\{-1\}}x[Z] - 0,666Z^{\{-2\}}x[Z] - 0,666Z^{\{-3\}}x[Z] \tag{2}$$

Assim, podemos isolar a função de transferência $H[z]$ através de $\frac{Y[z]}{X[z]}$, onde temos que:

$$Y[Z] = X[Z].\left(1 + 0,5Z^{\{-1\}} - 0,666Z^{\{-2\}} - 0,666Z^{\{-3\}}\right) \tag{3}$$

$$H[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]} = 1 + 0,5Z^{\{-1\}} - 0,666Z^{\{-2\}} - 0,666Z^{\{-3\}} \tag{4}$$

Podemos também encontrar os coeficientes α utiliziando o algorimito para conversão de k, e calcular a equação de transferência:

$$k1 = -\frac{1}{4}, k2 = \frac{3}{5}, k3 = \frac{2}{3} \tag{5}$$

Para i = 1:

$$\alpha_1^{\{1\}} = -\frac{1}{4} \tag{6}$$

Para i = 2:

$$\alpha_2^{\{2\}} = \frac{3}{5} \tag{7}$$

Como $i = 2$ entra em $i > 1$, então $(j = 1)$, temos que:

$$\alpha_1^{\{2\}} = \alpha_1^{\{1\}} - \frac{3}{5}\alpha_1^{\{1\}} \tag{8}$$

Para $i = 3$:

$$\alpha_3^{\{3\}} = \frac{2}{3} \tag{9}$$

Como $i = 3$ entra em $i > 1$, então $(j = 1)$, temos que:

$$\alpha_1^{\{3\}} = \alpha_1^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_2^{\{2\}} \tag{10}$$

Para $j = 2$:

$$\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_1^{\{2\}} \tag{11}$$

Podemos encontrar $\alpha_1^{\{3\}}$ substituindo $\alpha_1^{\{2\}}$ em $\alpha_1^{\{3\}} = \alpha_1^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_2^{\{2\}}$:

$$\alpha_1^{\{3\}} = \alpha_1^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_2^{\{2\}} \tag{12}$$

Considerando que $\alpha_1^{\{2\}} = \alpha_1^{\{1\}} - \frac{3}{5}\alpha_1^{\{1\}}$

$$\alpha_1^{\{3\}} = \alpha_1^{\{1\}} - \frac{3}{5}\alpha_1^{\{1\}} - \frac{2}{3}\alpha_2^{\{2\}} \tag{13}$$

$$\alpha_1^{\{3\}} = \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right).\left(\frac{3}{5}\right) = -0,5 \tag{14}$$

Podemos encontrar $\alpha_2^{\{3\}}$ substituindo $\alpha_1^{\{2\}}$ em $\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_1^{\{2\}}$:

$$\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_1^{\{2\}} \tag{15}$$

$$\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\left(\alpha_1^{\{1\}} - \frac{3}{5}\alpha_1^{\{1\}}\right) \tag{16}$$

$$\alpha_2^{\{3\}} = \alpha_2^{\{2\}} - \frac{2}{3}\alpha_1^{\{1\}} + \frac{2}{5}\alpha_1^{\{1\}} \tag{17}$$

$$\alpha_2^{\{3\}} = \left(\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right).\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{5}\right).\left(-\frac{1}{4}\right) = 0,666 \tag{18}$$

Portanto, temos que:

$$\alpha_1^{\{3\}} = -0,5, \alpha_2^{\{3\}} = 0,666, \alpha_3^{\{3\}} = 0,666 \tag{19}$$

Desta forma, a equação no tempo é dada por:

$$y[n] = 1x[n] + 0,5x[n-1] - 0,666x[n-2] - 0,666x[n-3] \tag{20}$$

Realizando a transformada Z, temos que:

$$Y[Z] = X[Z].\left(1 + 0,5Z^{\{-1\}} - 0,666Z^{\{-2\}} - 0,666Z^{\{-3\}}\right) \tag{21}$$

Rearranjando a equação, temos que:

$$H[Z] = \frac{Y[Z]}{X[Z]} = 1 + 0,5Z^{\{-1\}} - 0,666Z^{\{-2\}} - 0,666Z^{\{-3\}} \tag{22}$$

Podemos também encontrar a equação de transferência utilizando a forma recursiva, para isso temos que:

$$k1 = -\frac{1}{4}, k2 = \frac{3}{5}, k3 = \frac{2}{3} \tag{23}$$

$$A^{\{0\}}(Z) = B^{\{0\}}(Z) = 1 \tag{24}$$

$$A^{\{i\}}(Z) = A\{i-1\}(Z) - k\{i\}Z^{\{-1\}}B\{i-1\}(Z) \tag{25}$$

$$B^{\{i\}}(Z) = -k\{i\}A^{\{i-1\}}(Z) + Z^{\{-1\}}B^{\{i-1\}}(Z) \tag{26}$$

Dessa forma, Para $i = 1$ temos que:

$$A^{\{1\}}(Z) = A\{0\}(Z) - k_1 Z^{\{-1\}}B\{0\}(Z) \tag{27}$$

$$A^{\{1\}}(Z) = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)Z^{\{-1\}} \tag{28}$$

$$A^{\{1\}}(Z) = 1 + \frac{1}{4}Z^{\{-1\}} \tag{29}$$

$$B^{\{1\}}(Z) = -k_1 A^{\{0\}}(Z) + Z^{\{-1\}}B^{\{0\}}(Z) \tag{30}$$

$$B^{\{1\}}(Z) = -\left(-\frac{1}{4}\right)Z^{\{-1\}} + Z^{\{-1\}} \tag{31}$$

$$B^{\{1\}}(Z) = \frac{1}{4} + Z^{\{-1\}} \tag{32}$$

Para $i = 2$ temos que:

$$A^{\{2\}}(Z) = A\{1\}(Z) - k_2 Z^{\{-1\}}B\{1\}(Z) \tag{33}$$

$$A^{\{2\}}(Z) = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)Z^{\{-1\}} - \left(\frac{3}{20}\right)Z^{\{-1\}} - \frac{3}{5}Z^{\{-2\}} \tag{34}$$

$$A^{\{2\}}(Z) = 1 + \frac{1}{10}Z^{\{-1\}} - \frac{3}{5}Z^{\{-2\}} \tag{35}$$

$$B^{\{2\}}(Z) = -k_2 A^{\{1\}}(Z) + Z^{\{-1\}}B^{\{1\}}(Z) \tag{36}$$

$$B^{\{2\}}(Z) = -\frac{3}{5}\left(1 + \frac{1}{4}Z^{\{-1\}}\right) + Z^{\{-1\}}\left(\frac{1}{4} + Z^{\{-1\}}\right) \tag{37}$$

$$B^{\{2\}}(Z) = -\frac{3}{5} - \frac{3}{20}Z^{\{-1\}} + \frac{1}{4}Z^{\{-1\}} + Z^{\{-2\}} \tag{38}$$

$$B^{\{2\}}(Z) = -\frac{3}{5} + \frac{1}{10}Z^{\{-1\}} + Z^{\{-2\}} \tag{39}$$

Para $i = 3$, temos que:

$$A^{\{3\}}(Z) = A\{2\}(Z) - k_3 Z^{\{-1\}}B\{2\}(Z) \tag{40}$$

$$A^{\{3\}}(Z) = 1 - \left(-\frac{1}{10}\right)Z^{\{-1\}} - \frac{3}{5}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-1\}}\left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{10}Z^{\{-1\}} + Z^{\{-2\}}\right) \tag{41}$$

$$A^{\{3\}}(Z) = 1 + \frac{1}{10}Z^{\{-1\}} - \frac{3}{5}Z^{\{-2\}} + \frac{6}{15}Z^{\{-1\}} - \frac{2}{30}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}} \quad (42)$$

$$A^{\{3\}}(Z) = 1 + \frac{1}{2}Z^{-}1 - \frac{20}{30}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}} \quad (43)$$

Desta forma, temos que

$$A^{\{3\}}(Z) = H[Z] = 1 + \frac{1}{2}Z^{-}1 - \frac{2}{3}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}} \quad (44)$$

1.1.2. Item B:

Desenhe o diagrama de fluxo de sinais na forma direta I.

1.1.3. Item C:

1.1.3.1. Desenvolvimento:

Determine e trace o gráfico da resposta ao impulso unitário.

Conforme obtido no Item A, temos que:

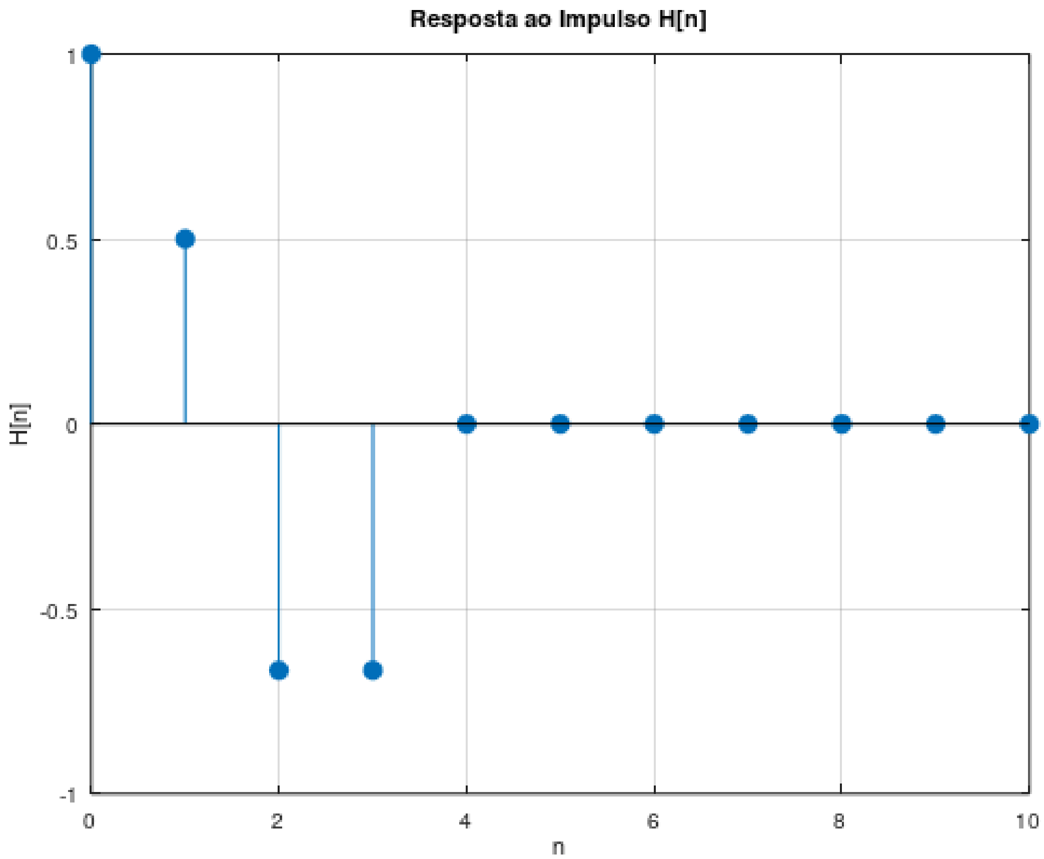
$$H[Z] = 1 + \frac{1}{2}Z^{-}1 - \frac{2}{3}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}} \quad (45)$$

Portanto, aplicando um impulso unitário, temos que a resposta ao impulso é dada por:

$$H[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{2}{3}\delta[n-2] - \frac{2}{3}\delta[n-3] \quad (46)$$

Assim, realizando um plot em octave, temos o seguinte gráfico para a resposta ao impulso:

Figura 2: Elaborada pelo Autor



Resposta ao Impulso Unitário

1.1.3.2. Script Utilizado:

Para o desenvolvimento desta questão, utilizei o seguite script octave:

```
% Definindo a resposta ao impulso H[n]

% Criando um vetor com 10 amostras
n = 0:10;

% Adicionando a resposta ao impulso e algumas amostras com zero para melhor visualização
H = [1, 1/2, -2/3, -2/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0];

% Realizando o plot com stem da resposta:
stem(n, H, 'filled');
xlabel('n');
ylabel('H[n]');
title('Resposta ao Impulso H[n]');
grid on;
```

1.1.4. Item D:

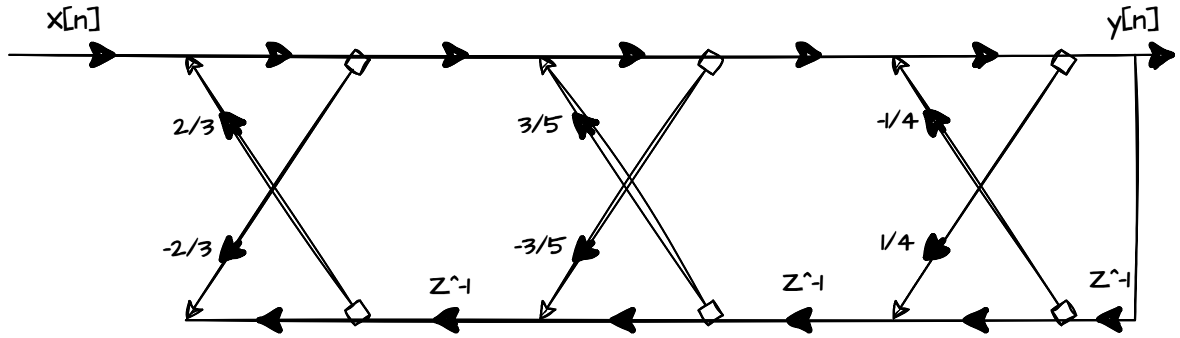
Desenhe a estrutura do filtro em treliça para o filtro só-pólos $\frac{1}{H[z]}$

Para desenhar a estrutura, podemos determinar o filtro só polos $\frac{1}{H[z]}$ utilizando:

$$F(Z) = \frac{1}{H[Z]} = F(Z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}Z^{-}1 - \frac{2}{3}Z^{\{-2\}} - \frac{2}{3}Z^{\{-3\}}\right)} \tag{47}$$

Desta forma, a estrutura é dada pela seguinte ilustração:

Figura 3: Elaborada pelo Autor



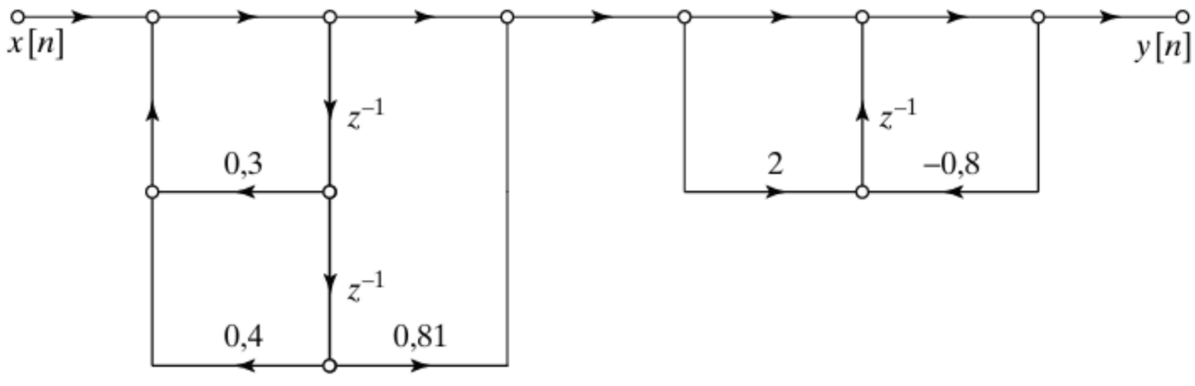
Estrutura do Filtro em Treliça Só-Polos

2. Questão 2:

2.1. Solucionando a questão:

Um sistema LIT causal é definido pelo diagrama de fluxo de sinais mostrado na Figura a seguir, que representa o sistema como uma cascata de um sistema de segunda ordem com um sistema de primeira ordem.

Figura 4: Elaborada pelo Autor



Sinal de entrada no domínio do tempo

Determine:

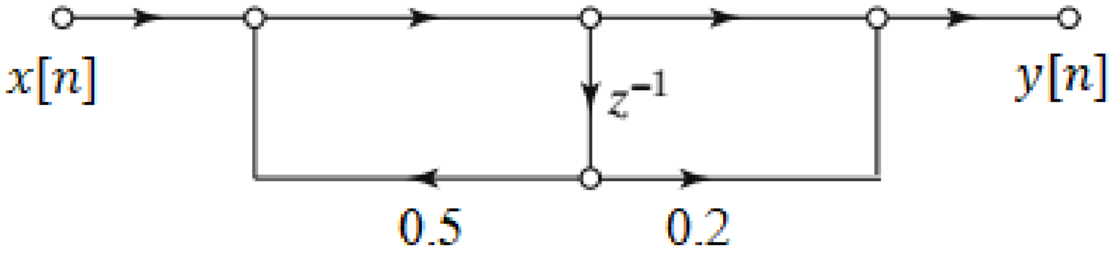
- Qual é a função de transferência do sistema em cascata global?
- O sistema global é estável? Explique resumidamente.
- Desenhe o diagrama de fluxo de sinais de uma implementação na forma direta II transposta desse sistema.

3. Questão 3:

3.1. Solucionando a questão:

A figura a seguir mostra uma implementação em forma direta II de um sistema:

Figura 5: Elaborada pelo Autor



Sinal de entrada no domínio do tempo

Determine:

- Determine a função de transferência $H[z]$.
- Determine a resposta ao impulso.
- Assumindo que o sistema seja implementado em aritmética de ponto fixo de 8 bits, e que todos os produtos sejam arredondados para 8 bits antes que uma soma qualquer tenha sido realizada. Usando o modelo linear para ruído de arredondamento, encontre a variância do ruído de arredondamento na saída do filtro. (Faça passa a passo)