INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus São José

Exercicios Avaliativos M/M/1 e M/M/c

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Arthur Cadore Matuella Barcella
Deivid Fortunato Frederico

3 de Junho de 2025

Engenharia de Telecomunicações - IFSC-SJ

Sumário

1. Introdução:

2. Questão Manualmente:

Um servidor de autenticacão central possui um processador que consegue atender em média 120 requisicões por minuto. Durante horários de pico, ele recebe em média 100 requisições por minuto. Pergunta-se: **em termos de tempo de espera médio no sistema e na fila, seria melhor manter esta configuração** ? Ou:

- Caso 1: Dividir as requisições entre quatro servidores (cada um com 25 requisições por minuto) e com capacidade de processar 35 requisições por minuto cada um.

- Caso 2: Usar um servidor com quatro processadores e uma fila única (cada um com capacidade de 35 requisições por minuto).

Mostrar o cálculo do tempo de resposta total e dos tempos na fila e no atendimento. Mostrar também a utilização do sisteme. Construir uma tabela com estes tempos. Fazer uma conclusão.

Variáveis da questão:

- $\lambda = 100$ requisições por minuto (taxa de chegada)
- $\mu = 120$ requisições por minuto (taxa de serviço do servidor único)
- $c = 1$ (número de servidores no primeiro caso)
- $c = 4$ (número de servidores no segundo caso)
- $\mu_c = 35$ requisições por minuto (taxa de serviço de cada servidor no segundo caso)
- $\mu_p = 35$ requisições por minuto (taxa de serviço de cada processador no terceiro caso)

2.1. Calculo do melhor caso:

Inicialmente, vamos calcular os parâmetros do sistema para o primeiro caso, onde temos um único servidor com capacidade de atender 120 requisições por minuto.

$$E[R] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{120 - 100} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ min} = 3\text{s} \tag{1}$$

Já no segundo caso, onde temos quatro servidores com capacidade de atender 35 requisições por minuto cada, a taxa de serviço total é:

$$E[R] = \frac{1}{c.\mu_c - \lambda} = \frac{1}{35 - 25} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ min} = 6\text{s} \tag{2}$$

JÁ no terceiro caso, onde temos um servidor com quatro processadores, a taxa de serviço total é:

$$E[R] = \frac{1}{c.\mu_c - \lambda} = \frac{1}{4.35 - 100} = \frac{1}{140 - 100} = \frac{1}{40} = 0.025 \text{ min} = 1.5\text{s} \tag{3}$$

Portanto, o tempo de resposta menor é de 0.025 minutos, ou 1.5 segundos, que ocorre no terceiro caso, onde temos um servidor com quatro processadores.

2.2. Cálculo do tempo de resposta total e na fila e utilização:

2.2.1. Primeiro caso:

$$E\left[R_q\right] = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{100}{120(120 - 100)} = \frac{100}{120.20} = \frac{100}{2400} = 0.04167 \text{ min} = 2.5\text{s} \quad (4)$$

2.2.2. Segundo caso:

$$E\left[R_q\right] = \frac{\lambda}{c.\mu_c(c.\mu_c - \lambda)} = \frac{25}{35}(35 - 25) = \frac{25}{35.10} = \frac{25}{350} = 0.07143 \text{ min} = 4.29\text{s} \quad (5)$$

2.2.3. Terceiro caso:

$$E\left[R_q\right] = \frac{\lambda}{c.\mu_p\left(c.\mu_p - \lambda\right)} = \frac{100}{4.35(4.35 - 100)} \quad (6)$$

Assim temos:

$$E\left[R_q\right] = \frac{100}{140(140 - 100)} = \frac{100}{140.40} = \frac{100}{5600} = 0.01786 \text{ min} = 1.07\text{s} \quad (7)$$

2.3. Calculando o tempo de atendimento:

2.3.1. Primeiro caso:

$$E[R_s] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{120} = 0.00833 \text{ min} = 0.5\text{s} \quad (8)$$

2.3.2. Segundo caso:

$$E[R_s] = \frac{1}{\mu_c} = \frac{1}{35} = 0.02857 \text{ min} = 1.71\text{s} \quad (9)$$

2.3.3. Terceiro caso:

$$E[R_s] = \frac{1}{\mu_p} = \frac{1}{35} = 0.02857 \text{ min} = 1.71\text{s} \quad (10)$$

2.4. Calculando a utilização:

2.4.1. Primeiro caso:

$$U = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{100}{120} = 0.8333 \quad (11)$$

2.4.2. Segundo caso:

$$U = \frac{\lambda}{c.\mu_c} = \frac{25}{35} = 0.7143 \tag{12}$$

2.4.3. Terceiro caso:

$$U = \frac{\lambda}{c.\mu_p} = \frac{100}{4.35} = \frac{100}{140} = 0.7143 \tag{13}$$

2.5. Calculando o tempo total:

2.5.1. Primeiro caso:

$$E[R] = E\left[R_q\right] + E[R_s] = 2.5 + 0.5 = 3\text{s} \tag{14}$$

2.5.2. Segundo caso:

$$E[R] = E\left[R_q\right] + E[R_s] = 4.29 + 1.71 = 6\text{s} \tag{15}$$

2.5.3. Terceiro caso:

$$E[R] = E\left[R_q\right] + E[R_s] = 1.07 + 1.71 = 2.78\text{s} \tag{16}$$

Tabela comparatviva:

```
| Config. | Utilização  | Tempo Fila (s) | T Aten. (s) | T Total (s) |
| ------- | ----------- | ---------------| ------------| ------------|
| 1 Caso  | 0,833       | 2,5            | 0,5         | 3,0         |
| 2 Caso  | 0,714       | 4,3            | 1,7         | 6,0         |
| 3 Caso  | 0,714       | 0,675          | 1,7         | 2,7         |
```

3. Questão Com Auxilio Professor:

Um servidor de autenticacão central possui um processador que consegue atender em média 120 requisicões por minuto. Durante horários de pico, ele recebe em média 100 requisições por minuto. Pergunta-se: **em termos de tempo de espera médio no sistema e na fila, seria melhor manter esta configuração** ? Ou:

- Caso 1: Dividir as requisições entre quatro servidores (cada um com 25 requisições por minuto) e com capacidade de processar 35 requisições por minuto cada um.
- Caso 2: Usar um servidor com quatro processadores e uma fila única (cada um com capacidade de 35 requisições por minuto).

Mostrar o cálculo do tempo de resposta total e dos tempos na fila e no atendimento. Mostrar também a utilização do sisteme. Construir uma tabela com estes tempos. Fazer uma conclusão.

Variáveis da questão:

- $\lambda = 100$ requisições por minuto (taxa de chegada)
- $\mu = 120$ requisições por minuto (taxa de serviço do servidor único)
- $c = 1$ (número de servidores no primeiro caso)
- $c = 4$ (número de servidores no segundo caso)
- $\mu_c = 35$ requisições por minuto (taxa de serviço de cada servidor no segundo caso)
- $\mu_p = 35$ requisições por minuto (taxa de serviço de cada processador no terceiro caso)

3.1. Calculo do melhor caso:

Inicialmente, vamos calcular os parâmetros do sistema para o primeiro caso, onde temos um único servidor com capacidade de atender 120 requisições por minuto.

$$E[R] = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{120 - 100} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ min} = 3\text{s} \tag{17}$$

Já no segundo caso, onde temos quatro servidores com capacidade de atender 35 requisições por minuto cada, a taxa de serviço total é:

$$E[R] = \frac{1}{c.\mu_c - \lambda} = \frac{1}{35 - 25} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ min} = 6\text{s} \tag{18}$$

Já no terceiro caso, onde temos um servidor com quatro processadores, primeiro precisamos calcular o valor esperado:

$$E[N_q] = \frac{\frac{(\rho c)^{c+1}}{c}}{c!(1-\rho)^2} p_0 \tag{19}$$

onde:

- ρ: $\frac{\lambda}{c\mu}$: É a taxa de utilização do sistema.
- c: Número de servidores ou processadores.
- p_0: Probabilidade de não haver clientes no sistema, que pode ser calculada como:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}\right]^{\{-1\}} \tag{20}$$

Agora, vamos calcular o valor de p_0 para o terceiro caso:

```python
lambd = 100          # taxa de chegada (λ)
mu = 35              # taxa de serviço por servidor (μ)
c = 4                # número de servidores

rho = lambd / (c * mu)
a = c * rho  # tráfego total (λ/μ)

# Soma dos termos de 0 a c-1: (a^n)/n!
sum_terms = sum((a**n) / math.factorial(n) for n in range(c))

# Último termo: (a^c / c!) * (1 / (1 - ρ))
last_term = (a**c) / math.factorial(c) * (1 / (1 - rho))

```

```
# Probabilidade do sistema estar vazio (P0)
P0 = 1 / (sum_terms + last_term)

print(f"rho = {rho:.4f}")
print(f"P0 = {P0:.4f}")
```

Resultando em:

```
rho = 0.7143
P0 = 0.0464
```

Agora aplicando na formul, temos:

$$E[N_q] = \frac{\frac{(\rho c)^{c+1}}{c}}{c!(1-\rho)^2} p_0 \to E[N_q] = \frac{\frac{(0{,}7143.4)^{4+1}}{4}}{4!(1-0{,}7143)^2}.(0{,}0464) \tag{21}$$

```
# Utilização
rho = lambd / (c * mu)
a = c * rho

# Soma dos termos de 0 a c-1: (a^n)/n!
sum_terms = sum((a**n) / math.factorial(n) for n in range(c))

# Último termo: (a^c / c!) * (1 / (1 - ρ))
last_term = (a**c) / math.factorial(c) * (1 / (1 - rho))

# Probabilidade do sistema estar vazio (P0)
P0 = 1 / (sum_terms + last_term)

# Cálculo de E[Nq] - número médio na fila
numerador = (a**(c + 1)) / c
denominador = math.factorial(c) * ((1 - rho)**2)
ENq = (numerador / denominador) * P0

print(f"E[Nq] = {ENq:.4f}")
```

Resultando em:

```
E[Nq] = 1.1277 -> 1.13 "min" -> 67 "s"
```

Calculamos o tempo médio de espera na fila com:

$$E[R_q] = \frac{E[N_q]}{\lambda} = \frac{1.13}{100} = 0.0113 \text{ min} = 0.678\text{s} \tag{22}$$

Calculamos também o tempo médio de espera no sistema, com:

$$E[R] = E[R_q] + \frac{1}{\mu_p} = 0.678 + \frac{1}{35} = 0.678 + 0.02857 = 0.70657 \text{ min} = 42.4\text{s} \tag{23}$$