# EA721 - Princípios de Controle e Servomecanismos

Lista de Exercícios 02
Resposta Dinâmica

Prof. Matheus Souza (Sala 216)
msouza@fee.unicamp.br

## Exercícios

▶ **Exercício 1:** As funções de transferência a seguir são estáveis e possuem um polo dominante real. Para cada uma das funções, determine este polo dominante e use uma aproximação de primeira ordem para estimar o seu tempo de estabilização e esboçar a sua resposta ao degrau. Use o MATLAB para comparar os resultados fornecidos pelas aproximações com a resposta do sistema original.

(a) $G_1(s) = \dfrac{6}{s^2 + 5s + 6}$;

(b) $G_2(s) = \dfrac{20}{(s+1)(s+20)}$;

(c) $G_3(s) = \dfrac{0.2s + 1}{(0.5s+1)(2s+1)}$;

(d) $G_4(s) = \dfrac{8}{s^3 + 5s^2 + 12s + 8}$.

▶ **Exercício 2:** As funções de transferência a seguir são estáveis e possuem um par de polos dominantes imaginários. Para cada uma das funções a seguir, determine este par de polos e use uma aproximação de segunda ordem para estimar o seu tempo de estabilização, o seu tempo de subida e o seu valor de pico para uma entrada do tipo degrau unitário. Use o MATLAB para comparar os resultados fornecidos pelas aproximações com a resposta do sistema original.

(a) $G_1(s) = \dfrac{10}{(s^2 + 2s + 2)(s+5)}$;

(b) $G_2(s) = \dfrac{16}{(s^2 + s + 2)(s^2 + 4s + 8)}$;

(c) $G_3(s) = 2\dfrac{(0.1s+1)}{(s^2 + 0.5s + 2)(0.2s+1)}$;

(d) $G_4(s) = \dfrac{s+5}{(s^2 + s + 1)(s+5)}$.

▶ **Exercício 3:** Para cada uma das funções de transferência abaixo, proponha aproximações de segunda ordem, com base em seus polos dominantes. Para obter estas aproximações, considere as respostas destas funções às entradas degrau e rampa unitários. Indique casos em que uma aproximação de primeira ordem poderia ser adotada. Indique os casos em que não é possível obter nem mesmo uma aproximação de segunda ordem.

(a) $G_1(s) = \dfrac{s^2 + 3s + 10}{(s+1)(s+2)(s^2 + 6s + 25)}$;

(b) $G_2(s) = \dfrac{s + 30}{(s^2 + s + 1)(s+1)(s+10)}$;

(c) $G_3(s) = \dfrac{2s + 6}{(s^2 + 2s + 2)(s+1)}$;

(d) $G_4(s) = \dfrac{3s + 10}{(s+1)(s+2)(s+5)}$.

▶ **Exercício 4:** As três funções de transferência abaixo podem ser aproximadas pela mesma função de transferência de segunda ordem sem zeros, pois possuem o mesmo par de polos dominantes. Determine esta aproximação e avalie os efeitos dos outros polos e zeros na qualidade da aproximação.

(a) $G_1(s) = \dfrac{6}{(s^2 + 2s + 2)(s+3)}$;

(b) $G_2(s) = \dfrac{s + 20}{(s^2 + 2s + 2)(s+10)}$;

(c) $G_3(s) = 20\dfrac{s + 1}{(s^2 + 2s + 2)(s+10)}$;

## Problemas

► **Problema 1: (Franklin et al., 7a. Ed., cap. 3)** Considere o circuito RLC da Figura 1.

(a) Obtenha a sua função de transferência $\frac{\hat{v}_2(s)}{\hat{v}_1(s)}$ e calcule o fator de amortecimento $\xi$ de seus polos e a sua frequência natural de oscilação $\omega_n$.

(b) Para $L = 10\text{mH}$ e $C = 4\mu\text{F}$, determine os valores de $R$ que asseguram um sobressinal máximo de 25% para uma entrada $v_1$ do tipo degrau unitário.

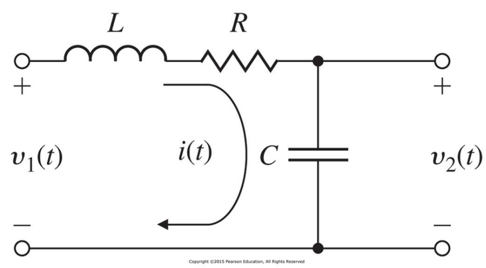


Figura 1: Circuito RLC.

► **Problema 2: (Franklin et al., 7a. Ed., cap. 3)** Considere o sistema com realimentação dado pela Figura 2. Especifique o ganho $K$ do controlador proporcional a fim de assegurar um sobressinal de, no máximo, 10% na sua resposta ao degrau unitário.

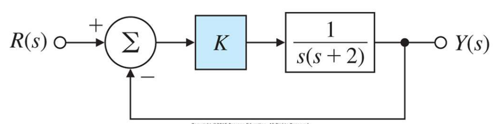


Figura 2: Sistema com realimentação unitária.

► **Problema 3: (Franklin et al., 7a. Ed., cap. 3)** Considere o sistema com realimentação dado pela Figura 3. Especifique o ganho $K$ e o polo $a$ do controlador para que a resposta deste sistema a um degrau unitário tenha um sobressinal de, no máximo, 25% e um tempo de estabilização de, no máximo, 0.1s para uma precisão de 2%.

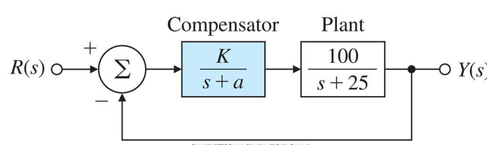


Figura 3: Sistema com realimentação unitária.

► **Problema 4: (Franklin et al., 7a. Ed., cap. 3)** Um sistema de segunda ordem, cuja função de transferência não possui zeros, deve ser projetado de acordo com as seguintes especificações:

- Tempo de subida: $t_r \leqslant 0.6$ s;
- Sobressinal máximo: $M_p \leqslant 15\%$;
- Tempo de estabilização: $t_s \leqslant 8$ s.

(a) Esboce a região no plano complexo formada por polos que satisfazem a todas as três especificações.

(b) Escolha um par de polos que minimize o tempo de subida da resposta do sistema ao degrau mas que ainda respeite a especificação do tempo de estabilização.

▶ **Problema 5: (Franklin et al., 7a. Ed., cap. 3)** Um sistema dinâmico com realimentação deve satisfazer os seguintes requisitos de projeto:

- Tempo de subida: $t_r \leqslant 1.8$ s;
- Sobressinal máximo: $M_p \leqslant 15\%$;
- Tempo de estabilização: $t_s \leqslant 6$ s.

(a) Usando as aproximações de segunda ordem, esboce a região do plano formada por todos os polos aceitáveis para a função de transferência de malha fechada.

(b) Qual é o valor do sobressinal esperado se as especificações de tempo de subida e de tempo de estabilização forem satisfeitas exatamente?

▶ **Problema 6: (Franklin et al., 7a. Ed., cap. 3)** Considere o sistema com realimentação da Figura 4, formado por uma planta de primeira ordem e um controlador do tipo proporcional-integral. Um engenheiro deseja projetar

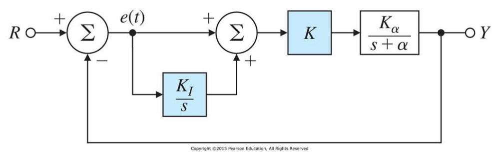


Figura 4: Sistema com realimentação unitária.

os parâmetros $K$ e $K_I$ de forma a alocar os polos do sistema em malha fechada dentro das regiões sombreadas mostradas na Figura 5.

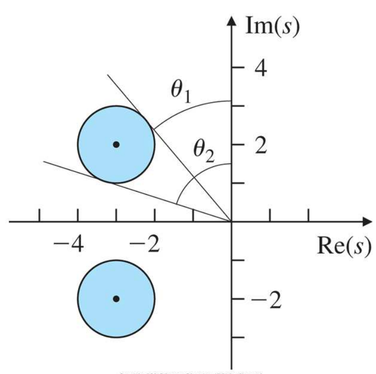


Figura 5: Região de alocação.

(a) Estime, a partir da Figura 5, a faixa de valores de $\xi$ e $\omega_n$ dos polos contidos nestas regiões.

(b) Suponha que $K_\alpha = \alpha = 2$. Encontre valores de $K$ e $K_I$ que posicionem os polos em malha fechada dentro da região desejada.

(c) Mostre que, para quaisquer valores de $K_\alpha$ e $\alpha$, sempre podemos posicionar os polos do sistema em qualquer lugar do plano complexo (em particular, sempre podemos alocá-los na região desejada).

▶ **Problema 7: (Franklin et al., 7a. Ed., cap. 3)** Neste exercício, exploraremos o conceito de *decremento logarítmico*, que pode ser usado para prever o decaimento de sistemas de segunda ordem. Para tanto, consideremos o sistema de segunda ordem descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = 0,$$

sujeita às condições iniciais $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = 0$.

(a) Mostre que a resposta deste sistema pode ser escrita como

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \cos^{-1}\xi).$$

(b) Mostre que, se $\xi \in (0,1)$, a resposta oscilatória decai com uma taxa previsível $\delta$ (ver Figura 6), chamada de decremento logarítmico

$$\ln \frac{\Delta y_i}{y_i} \approx \delta = \ln \frac{y_0}{y_1} = \ln e^{-\xi\omega_n \tau_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

sendo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ o período de oscilação amortecida do sistema.

(c) Com base nas relações acima, conclua que o fator de amortecimento dos polos de um sistema pode ser obtido calculando-se

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}.$$

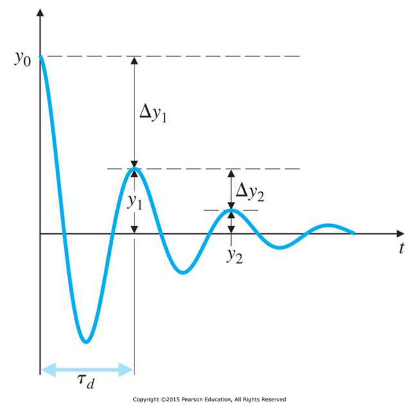


Figura 6: Decaimento de um sistema de segunda ordem.