

Lab 7: Derivação e Integração Numéricas

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

1. Escreva um módulo com as seguintes funções de derivação e integração:

- (a) A fórmula do método de segunda ordem para avaliação numérica da derivada de uma função $f(x)$ é dada por:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Implemente uma função que retorne o valor da derivada numérica de segunda ordem de uma função no ponto x . O protótipo deve ser:

```
double derivada (double (*f) (double x), double x, double h);
```

- (b) O erro numérico acrescido do erro de arredondamento deste método é dado por:

$$E(h) = \frac{h^2}{6} f'''(c) + \frac{\epsilon_{maq}}{h}$$

Portanto, para $h < 1$, o erro decresce em ordem quadrática mas cresce em ordem linear em relação a h . Existe portanto um valor de h ótimo para cada situação. Implemente uma função que recebe uma função (a ser derivada numericamente usando a implementação do item anterior), uma função que representa a derivada analítica da primeira (usada para avaliação do erro) e um ponto x . Variando os valores de h em $10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-12}$ para avaliação da derivada numérica, retorne o valor de h que apresenta o menor erro, comparando o valor da derivada numérica com o valor da derivada analítica.

```
double h_otimo (double (*f) (double x), double (*fl) (double x), double x);
```

- (c) A integração com a regra de Simpson no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ pode ser expressa por:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_i) + 4f(x_{i+0.5}) + f(x_{i+1})]$$

onde:

$$h = x_{i+1} - x_i$$

Implemente uma função que calcule a **integral composta** do intervalo de a a b considerando n passos de integração, isto é, considerando $h = (b-a)/n$. O protótipo da função deve ser:

```
double simpson (double (*f) (double), double a, double b, int n);
```

- (d) A integração com a regra do ponto médio, no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, é dada por:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h f(w_i)$$

onde $h (= x_{i+1} - x_i)$ é o passo e $w_i (= \frac{x_i + x_{i+1}}{2})$ é o ponto médio do intervalo.

Implemente uma função que calcule a **integral composta** de a a b com n passos de integração, isto é, considerando $h = (b - a)/n$. O protótipo da função deve ser:

```
double pontomedio (double (*f) (double), double a, double b, int n);
```

2. Escreva um módulo de testes com as seguintes implementações:

- (a) Para avaliar o h ótimo da derivação numérica, considere a função $f(x) = \cos x - 2 \sin x$, cuja derivada analítica é $f'(x) = -\sin x - 2 \cos x$. Qual valor de h minimiza o erro? Qual o valor de h teórico que minimiza o erro? Os valores conferem?
- (b) Escreva um teste que use a regra de Simpson (S) e a regra do ponto médio (M) compostas com $n = 16$ e $n = 32$ para achar uma solução das integrais abaixo. Para cada integral, exiba os valores encontrados: $S_{n=16}$, $S_{n=32}$, $M_{n=16}$ e $M_{n=32}$.

$$\int_0^4 \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 9}} \quad \int_1^3 x^2 \ln x \, dx \quad \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$$

Para verificação, os valores destas integrais são, respectivamente, 2.0, 6.9986217091241 e 5.8696044010894. Qual método apresenta melhor precisão? O número de passos influencia na precisão do resultado?

Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo “integral.h” e as implementações em um módulo “integral.c”. Escreva o teste em outro módulo “main.c”.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos “integral.c”, “integral.h” e “main.c”) devem ser enviados via página da disciplina no EAD. O prazo final para envio é **sexta-feira, dia 12 de outubro**.