INF1608 – Análise Numérica
Lab 10: Movimento de um Pêndulo

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

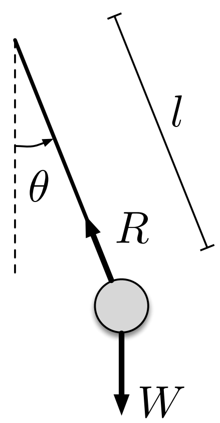
Considere a solução de equações diferenciais ordinárias expressas por:

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

O método de Runge-Kutta de ordem 4, considerando passos h constantes, é dado por:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t, x(t)) \\ k_2 &= hf(t + h/2, x(t) + k_1/2) \\ k_3 &= hf(t + h/2, x(t) + k_2/2) \\ k_4 &= hf(t + h, x(t) + k_3) \\ x(t+h) &= x(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Considere agora um pêndulo simples como o mostrado na figura. O corpo de peso W está preso a uma haste sem peso de comprimento l. As únicas forças atuantes no corpo são seu peso e a tensão R na haste. A posição do corpo em qualquer instante é expresso pelo ângulo θ. A equação diferencial de segunda ordem que rege o movimento do pêndulo é:



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

onde g representa a aceleração da gravidade. A solução desta equação exige o uso de um método numérico.

Se considerarmos que θ é pequeno, podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$, e então ficamos com a equação diferencial:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Esta equação simplificada tem solução analítica simples:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Neste caso, o período (tempo necessário para o pêndulo completar um ciclo) é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

O objetivo deste trabalho é usar o método Runge-Kutta de ordem 4 para resolver a *equação diferencial original* (não simplificada) e comparar os valores dos períodos com os obtidos através da simplificação de linearização da expressão. O aluno pode usar passo de integração constante $h = 10^{-3}$, ou experimentar outros valores.

Para calcular numericamente o valor do período, pode-se monitorar a mudança de sinal da velocidade. Por exemplo, se no tempo t_1 a velocidade angular for w_1 e no tempo t_2 a velocidade for w_2 com $w_1 \cdot w_2 < 0$, então o período pode ser estimado por interpolação linear:

$$T = 2[t_1 + \frac{|w_1|}{|w_1| + |w_2|}(t_2 - t_1)]$$

Pede-se:

1. Implemente uma função que receba o tempo corrente t, o passo de integração h, o endereço da posição angular corrente θ e o endereço da velocidade angular corrente w. A função deve evoluir o sistema usando Runge-Kutta de ordem 4 para o tempo $t+h$, o qual deve ser retornado, e atualizar a posição e a velocidade. Assuma $g = 9.8\,m/s^2$ e $l = 10\,m$. Deve-se seguir o protótipo:

```
double pendulo (double t, double h, double* theta, double* w);
```

2. Fazendo uso da função do item anterior, implemente uma função que receba como parâmetro a posição angular inicial θ_0 e retorne o período do movimento do pêndulo T calculado numericamente. Para aumentar a precisão, deve-se medir o tempo da, por exemplo, décima inversão da velocidade, e calcular o tempo de cinco períodos, e então achar o tempo de um período. Deve-se seguir o protótipo:

```
double periodo (double theta_0);
```

3. Implemente uma função que receba como parâmetro a posição angular inicial θ_0 e retorne o período do movimento do pêndulo T, usando a fórmula simplificada da linearização. Assuma $g = 9.8\,m/s^2$ e $l = 10\,m$. Deve-se seguir o protótipo:

```
double periodo_simplificado (double theta0);
```

Para testar seu código, compare o valor do período T usando a solução numérica e a fórmula linearizada. Exiba na tela os períodos calculados para os seguintes valores de θ_0: $1^o, 3^o, 5^o, 10^o, 30^o, 60^o, 90^o$. Verifique se, de fato, a fórmula simplificada retorna valores próximos para ângulos pequenos.

Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo "pendulo.h" e as implementações em um módulo "pendulo.c". Escreva o teste em outro módulo "main.c".

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos "pendulo.c", "pendulo.h" e "main.c") devem ser enviados via página disciplina no EAD. O prazo final para envio é **sexta-feira, dia 2 de novembro**.