

PUC-Rio  
Departamento de Informática  
Prof. Marcus Vinicius S. Poggi de Aragão  
Período: 2019.2  
2 de setembro de 2019  
Horário: 3as-feiras e 5as-feiras de 13 às 15 horas

Entrega: 2 de outubro de 2019

## Estruturas Discretas (INF 1631)

### 1º Trabalho de Implementação

#### Descrição

Este trabalho prático consiste em desenvolver códigos para diferentes algoritmos e estruturas de dados para resolver os problemas descritos abaixo e, principalmente, analisar o desempenho das implementações destes algoritmos com respeito ao tempo de CPU. O desenvolvimento destes códigos e a análise devem seguir os seguintes roteiros:

- Descrever os algoritmos informalmente.
- Demonstrar o entendimento do algoritmo explicando, em detalhe, o resultado que o algoritmo deve obter e justificá-lo.
- Explicar a fundamentação do algoritmo e justificar a sua correteza apresentando a prova por indução matemática que leva ao algoritmo.
- Apresentar as tabelas dos tempos de execução obtidos pelos algoritmos sobre as instâncias testadas.
- Documente o arquivo contendo o código fonte de modo que cada passo do algoritmo esteja devidamente identificado e deixe claro como este passo é executado e sua relação com a prova por indução apresentada.
- Para a medida de tempo de CPU das execuções utilize as funções disponíveis no link correspondente na página do curso, um exemplo de utilização é apresentado. Quando o tempo de CPU for inferior à 5 segundos, faça uma repetição da execução tantas vezes quantas forem necessárias para que o tempo ultrapasse 5 s (faça um while), conte quantas foram as execuções e reporte a média.

A correteza código deverá ser testada sobre um conjunto de instâncias. O trabalho entregue deve conter:

- Um documento contendo o roteiro de desenvolvimento dos algoritmos (e dos códigos), os itens pedidos acima, comentários e análises sobre a implementação e os testes realizados (papel).
- Um e-mail para [poggi@inf.puc-rio.br](mailto:poggi@inf.puc-rio.br) (é obrigatório o uso do ASSUNTO (ou SUBJECT) ED192T1 deve ser enviado contendo os arquivos correspondentes ao trabalho. O NÃO ENVIO DESTE E-MAIL IMPLICA QUE O TRABALHO NÃO SERÁ CONSIDERADO).
- O trabalho pode ser feito em grupo de até 3 alunos.

1. (2.0) Considere o teorema abaixo e a sua prova.

**Teorema 1** :  $x^n - y^n$  é divisível por  $x - y$  para quaisquer  $x$  e  $y$  inteiros e todos o valores de  $n$  inteiros e maiores que zero.

**Prova 1** A prova é feita por indução matemática utilizando  $k$  como parâmetro de indução. O teorema 1 pode ser enunciado:

**Teorema 1** ( $k$ ):  $x^k - y^k$  é divisível por  $x - y$  para quaisquer  $x$  e  $y$  inteiros e todos o valores de  $k$  inteiros e maiores que zero.

**Teorema do Caso Base: 1** Seja  $k = 1$  (o menor valor para o qual  $k$  tem que ser verdade). Nesse caso temos que provar que  $x - y$  é divisível por  $x - y$  para qualquer valor de  $x$  e  $y$ . O que é trivialmente verdade, sendo o quociente,  $q_1$ , igual a 1.

**Teorema do Passo Indutivo: 1** Desejamos provar que se o teorema 1 é verdade para um  $k$  fixo, isto é, podemos assumir que:

$$x^k - y^k = q_k \cdot (x - y)$$

onde  $q_k$  é um inteiro, então é possível mostrar que

$$x^{k+1} - y^{k+1} = q_{k+1} \cdot (x - y)$$

para  $q_{k+1}$  inteiro. Ou seja, temos que mostrar é verdade também para  $k + 1$ . Isto é, que podemos obter  $q_{k+1}$  inteiro a partir de  $q_k$  se o teorema 1 é verdade para  $k$ .

Como:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x^{k+1} - x^k \cdot y + x^k \cdot y - y^{k+1} = x^k(x - y) + y(x^k - y^k)$$

Como, pela hipótese indutiva, temos que  $x^k - y^k = q_k \cdot (x - y)$ , podemos escrever:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = x^k(x - y) + y(x^k - y^k) = x^k(x - y) + y \cdot q_k \cdot (x - y) = (x^k + y \cdot q_k)(x - y)$$

Como  $x$  é inteiro,  $x^k$  é inteiro. Como  $y$  e  $q_k$  são inteiros seu produto também é inteiro. Portanto  $(x^k + y \cdot q_k)$  é inteiro e  $q_{k+1} = (x^k + y \cdot q_k)$  é inteiro, ou seja:

$$x^{k+1} - y^{k+1} = (x^k + y \cdot q_k)(x - y) = q_{k+1} \cdot (x - y)$$

O teorema acima resolve o problema de determinar o quociente entre  $x^k - y^k$  e  $x - y$ . Assim deseja-se um algoritmo que dados  $x$ ,  $y$ , e  $k$  inteiros determine esse quociente.

(a) Escreva o algoritmo resultante da prova acima.

(b) Implemente este algoritmo e teste para vários valores de  $x$ ,  $y$ , e  $k$ .

2. (4.0) Considere o problema de ordenar um conjunto de  $n$  números inteiros  $I^n = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ , e o teorema abaixo.

**Teorema 2** *Sabe-se ordenar um conjunto de  $n$  inteiros  $I^n = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  considerando somente os  $k$  dígitos menos significativos de sua representação em uma base  $b$ .*

- (a) Assuma que os inteiros em  $I^n$  são representados na base 10. Apresente a prova do teorema acima por indução matemática utilizando como parâmetro de indução o número de dígitos máximo na representação dos inteiros.
- (b) Escreva o pseudo-código do algoritmo resultante da prova do item anterior.
- (c) Repita a prova do item (1) assumindo agora que a base  $b$  é arbitrária.
- (d) Modifique o pseudo-código acima para que o algoritmo resultante funcione agora para a representação em bases  $b$  arbitrárias.

Experimentação:

- (a) Programe o algoritmo obtido para bases arbitrárias.
- (b) Execute o algoritmo para ordenar os conjuntos de inteiros nos arquivos de teste (disponíveis na página *web* do curso).

3. (4.0) Seja  $G = (V, E)$  um grafo denso, i.e.,  $\forall v, w \in V, d(v) + d(w) \geq n$ , onde  $d(v) = |\{u \mid (u, v) \in E\}|$  (o grau de  $v$ ) e  $n = |V|$ .

Um ciclo Hamiltoniano em  $G$  é um ciclo que inicia em um vértice  $v$  ( $v = 1$ , por exemplo), passa exatamente um vez em cada um dos demais vértices de  $G$  e retorna ao vértice  $v$ .

Considere o teorema abaixo:

**Teorema 3 :** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo denso. Sabe-se encontrar um ciclo Hamiltoniano em  $G$  onde  $|V| \geq 3$*

- (a) Defina o parâmetro de indução e apresente uma prova para o Teorema 2 por indução matemática.
- (b) Apresente o algoritmo correspondente à prova do Teorema 2 apresentada e a sua respectiva implementação.
- (c) Teste o algoritmo na instâncias disponibilizadas, apresentando o ciclo Hamiltoniano obtido e o tempo de processamento.

Dica: Manber, seção 7.12.2.