Sistemas Fuzzy

AULA 05 – Processo de Inferência

Prof. Ivan Nunes da Silva

1. Introdução à Inferência Fuzzy

Aspectos relevantes

- Sistema de inferência fuzzy permite o tratamento e manipulação de informações incertas e imprecisas, as quais estão representadas por uma família de conjuntos fuzzy.
- Tais sistemas de inferência oferecem uma forma sistemática para a modelagem de sistemas, cujas informações a respeito dos mesmos são fornecidas de forma qualitativa.
- Frente a este contexto, a representação do sistema pode ser realizada por meio de **variáveis linguísticas**, as quais expressam o comportamento do sistema.
- Em suma, em várias situações, torna-se mais simples explicitarmos a dinâmica de um sistema por intermédio de sentenças dos seguintes tipos:
  - A "velocidade" é "alta".
  - A "pressão" é "média".
  - A "temperatura" é "pequena".
  - A "corrente" é "muito baixa".

2. Variáveis Linguísticas

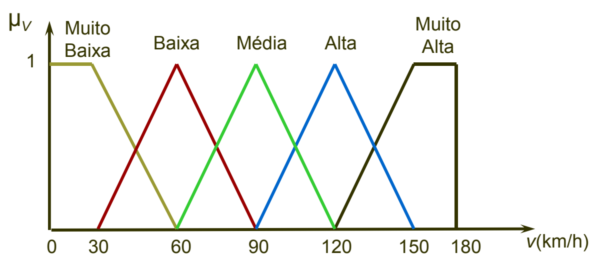
Atributos de caracterização

- **Variáveis linguísticas** são aquelas que permitem a descrição de informações que estão normalmente disponibilizadas de forma qualitativa.
- Estas são caracterizadas pelos seguintes atributos:
  - **Nome da variável (*x*) ➔** É o rótulo associado a uma variável linguística em específico.
  - **Conjunto de termos (T_x) ➔** São os nomes associados aos valores linguísticos da respectiva variável linguística.
  - **Universo de Discurso (U_x) ➔** É o domínio (espaço) em que cada variável linguística está definida.
  - **Funções de Pertinência (μ_x) ➔** São os conjuntos fuzzy que representam cada valor pertencente ao conjunto de termos da variável linguística.

2. Variáveis Linguísticas

Exemplo de especificação de atributos

- Seja a variável linguística representada por:



- Para o exemplo mostrado no gráfico, tem-se:
  - **Nome da variável ➔** ***v*** = {velocidade}.
  - **Conjunto de termos ➔** T_V = {Muito Baixa, Baixa, Média, Alta, Muito Alta}.
  - **Universo de Discurso ➔** $U_v \in [0;180]$
  - **Funções de Pertinência ➔** São dadas pelas funções triangulares e trapezoidais mostradas nos gráficos da figura.

3. Operações c/ Variáveis Linguísticas

Utilização de conectivos

- As principais operações entre variáveis linguísticas é realizada por meio da utilização dos conectivos “**E**”, “**OU**” e “**NÃO**”.
- De fato, os conectivos “**E**” e “**OU**” são empregados para compor os relacionamentos lógicos entre os termos das variáveis linguísticas. Como exemplo, tem-se:
  - **Se velocidade é “alta” E aceleração é “média” Então pressão no freio é “alta”.**
  - **Se velocidade é “média” OU aceleração é “alta” Então pressão no freio é “média”.**
- Esses conectivos “**E**” e “**OU**” são também definidos por meio de operadores de interseção (***T*-norma**) e união (***S*-norma**).

5

3. Operações c/ Variáveis Linguísticas

Especificação de conectivos

Operadores Para Conectivos “E” e “OU”

- O resultado da aplicação do conectivo “**E**” (ou “**OU**”), entre dois termos *A* e *B* de uma determinada variável linguística, ambos pertencentes ao mesmo universo de discurso, é formado por todos os valores de pertinência retornados a partir da aplicação do operador ***T*-norma** (ou ***S*-norma**) sobre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. Formalmente, tem-se:

$$\mu_A(x) \text{ E } \mu_B(x) = \mu_A(x) \; T \; \mu_B(x)$$

$$\mu_A(x) \text{ OU } \mu_B(x) = \mu_A(x) \; S \; \mu_B(x)$$

- Utilizando para ***T*-norma** o operador “mínimo” e para ***S*-norma** o operador “máximo”, tem-se:

$$\mu_A(x) \text{ E } \mu_B(x) = \min\{ \mu_A(x), \; \mu_B(x) \}$$

$$\mu_A(x) \text{ OU } \mu_B(x) = \max\{ \mu_A(x), \; \mu_B(x) \}$$

Operadores Para Conectivo “NÃO”

- Para a operação de complemento {“**NÃO**”}, tem-se:

$$\text{NÃO}(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x)$$

6

3. *Operações c/ Variáveis Linguísticas*

Exemplos de aplicação

Exemplo 1

- Para os termos *A* e *B*, definidos no universo de discurso $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, tem-se os seguintes graus de pertinência:

  $A = 0.1/{-2} + 0.6/{-1} + 0.4/0 + 0.3/1 + 0.9/2$

  $B = 0.4/{-2} + 0.3/{-1} + 0.8/0 + 0.9/1 + 0.0/2$

  Utilizando-se o operadores "min"e "max", calcule as seguintes operações:

  a) $\mu_A(x)$ **E** $\mu_B(x) = 0.1/{-2} + 0.3/{-1} + 0.4/0 + 0.3/1 + 0.0/2$

  b) $\mu_A(x)$ **OU** $\mu_B(x) = 0.4/{-2} + 0.6/{-1} + 0.8/0 + 0.9/1 + 0.9/2$

  c) **NÃO**$(\mu_A(x)) = 0.9/{-2} + 0.4/{-1} + 0.6/0 + 0.7/1 + 0.1/2$

Exemplo 2

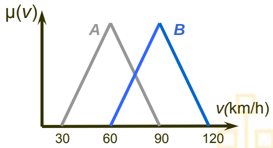
- Sejam os termos *A* e *B*, representados na figura ao lado. Faça as seguintes operações:

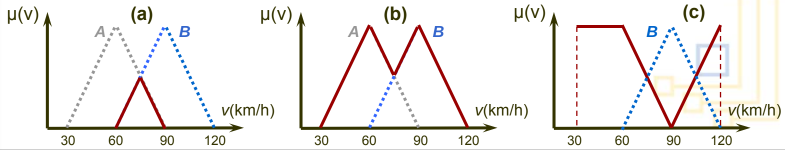
  a) $\mu_A(v)$ **E** $\mu_B(v)$

  b) $\mu_A(v)$ **OU** $\mu_B(v)$

  c) **NÃO**$(\mu_B(v))$

Universo de Discurso
$V \in [30, 120]$





4. *Processo de Inferência Fuzzy*

Aspectos introdutórios

- O processo de inferência fuzzy, também conhecido como <u>raciocínio aproximado</u>, permite mapear o conhecimento de um sistema por meio de regras fuzzy do tipo "Se-então".
- Mediante a análise de um conjunto finito dessas regras, pode-se então determinar, por meio do processo de inferência, o comportamento das variáveis de saída do sistema a ser mapeado.
- Assim, as regras associadas ao processo de inferência fuzzy possuem a seguinte forma:

  Se <condição>

  então <ação>

- Normalmente, os processos de inferência fuzzy são baseados na regra de ***Modus Ponens*** generalizado, que é explicitado por:

  Fato: *x* é *A'*

  Regra: **Se** *x* é *A* **então** *y* é *B*

  - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

  Consequência: *y* é *B'*

4. Processo de Inferência Fuzzy

Interpretação da regra de Modus Ponens (I)

- Seja então a regra de Modus Ponens generalizada explicitada por:

  Fato: *x* é *A'*
  Regra: **Se** *x* é *A* **então** *y* é *B*
  \- -
  Consequência: *y* é *B'*

- Sua interpretação pode ser formulada da seguinte maneira:
  1. O fato observado *A'* é um sinal medido que é assumido ser verdadeiro.
  2. Se o sinal medido *A'* é assumido como verdadeiro, então o antecedente "*x* é *A*" da referida regra que foi ativada é também verdadeiro.
  3. Se o antecedente "*x* é *A*" é verdadeiro e sabendo-se que "*x* é *A*" implica no consequente "*y* é *B*", então este consequente é também verdadeiro.
  4. Se o consequente "*y* é *B*" é verdadeiro, então é bem verdade que o resultado final da implicação é que realmente *y* é *B'*, em que *B'* é o valor de saída.

9

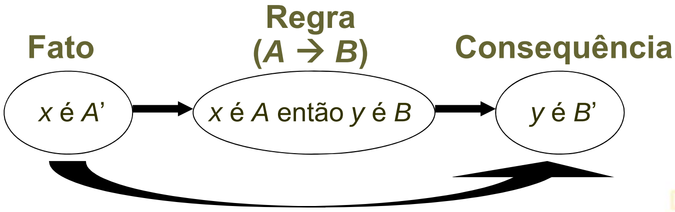
4. Processo de Inferência Fuzzy

Interpretação da regra de Modus Ponens (II)

- Em suma, o conjunto "Fato", "Regra" e "Consequência":

  Fato: *x* é *A'*
  Regra: **Se** *x* é *A* **então** *y* é *B*
  \- -
  Consequência: *y* é *B'*

  pode ser interpretado geometricamente por:



$$B'(y) = A'(x) \circ R_{A \to B}(x,y)$$

Onde: "**o**" indica uma operação de composição (Max-Min, por exemplo) e $R_{A \to B}$ é uma função de implicação.

10

4. Processo de Inferência Fuzzy

Principais operadores de implicação

- A obtenção da função de pertinência relativa à implicação $R_{A \rightarrow B}$ pode ser computada utilizando os próprios valores de pertinência associados às variáveis *A* e *B*.
- Assim, sejam duas variáveis linguísticas *x* e *y*, com termos tendo valores *A* e *B*, respectivamente. A função de pertinência de $\mu_{R_{A \rightarrow B}}$ pode ser obtida por meio dos seguintes operadores:

MAMDANI $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x,y) = \min\{\ \mu_A(x),\ \mu_B(y)\ \}$

Também conhecido como operador "min" de Mamdani.

ZADEH $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x,y) = \max\{1 - \mu_A(x),\ \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(y)\ \}\}$

Também conhecido como operador "max-min" de Zadeh.

LARSEN $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x,y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$

Também conhecido como operador "produto" de Larsen.

ARITMÉTICO $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x,y) = \min\{1,\ 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\}$

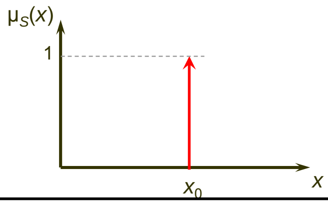
BOOLEANO $\Rightarrow \mu_{R_{A \to B}}(x,y) = \max\{1 - \mu_A(x),\ \mu_B(y)\}$

11

4. Processo de Inferência Fuzzy

Conceito de "Singleton"

- Um "**Singleton**" é um caso particular de conjunto fuzzy normalizado, cujo suporte é um único ponto x_0 (número crisp), pertencente a *X*, com $\mu(x_0) = 1$.
- São especialmente utilizados para mapear os sinais de entrada do sistema fuzzy, os quais são geralmente representados por valores pontuais advindos do meio externo.
  - Exemplos: valores pontuais de temperatura, velocidade, corrente elétrica, vazão, pressão, etc.
- De fato, o valor medido é considerado como sendo verdadeiro, estando, assim, totalmente incluído dentro do conjunto fuzzy associado com a sua respectiva variável.
- Portanto, um conjunto fuzzy "Singleton" *S*, associado ao ponto x_0, pode ser representado por:



$$\mu_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

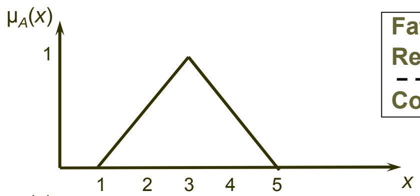
12

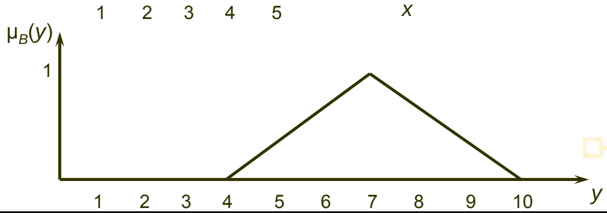
5. Exemplo de Inferência Fuzzy

Definição de variáveis

- Sejam os conjuntos *A* e *B*, definidos respectivamente nos universos de discurso *X* = {2, 3, 4} e *Y* = {5, 6, 7, 8, 9}, os quais são representados pelos gráficos a seguir.
- Utilizando o operador de implicação de **Mamdani**, assim como a regra de composição **Max-Min**, calcule então o valor do conjunto fuzzy de saída *B'* inferido a partir de um sinal *A'* igual a 4.

Fato: *x* é *A'*
Regra: **Se** *x* é *A* **então** *y* é *B*
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -
Consequência: *y* é *B'*

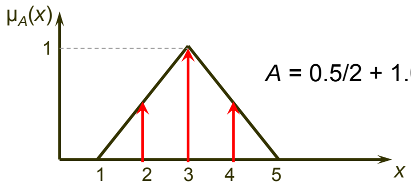




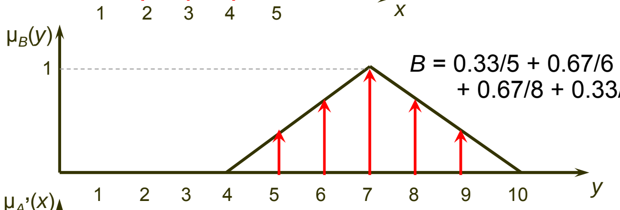
5. Exemplo de Inferência Fuzzy

Discretização de variáveis

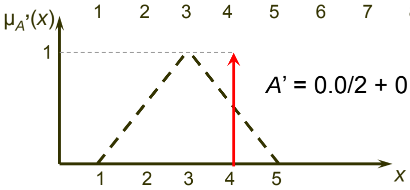
- Utilizando a representação discreta para todas as variáveis, tem-se:



A = 0.5/2 + 1.0/3 + 0.5/4



B = 0.33/5 + 0.67/6 + 1.0/7 + + 0.67/8 + 0.33/9



A' = 0.0/2 + 0.0/3 + 1.0/4

5. Exemplo de Inferência Fuzzy

Obtenção de valores da implicação

- Obtendo o valor de $\mu_{R_{A\rightarrow B}}(x,y)$

$$\mu_{R_{A\rightarrow B}}(x,y) = 0.33/(2,5) + 0.50/(2,6) + 0.50/(2,7) + 0.50/(2,8) + 0.33/(2,9) + $$
$$+ 0.33/(3,5) + 0.67/(3,6) + 1.00/(3,7) + 0.67/(3,8) + 0.33/(3,9) + $$
$$+ 0.33/(4,5) + 0.50/(4,6) + 0.50/(4,7) + 0.50/(4,8) + 0.33/(4,9)$$

- Obtendo o valor de $B'(y)$ ➔ $B'(y) = A'(x) \circ R_{A\rightarrow B}(x,y)$

$$B'(y) = \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \hline [\,0 & 0 & 1\,] \end{array} \circ \begin{array}{c|ccccc} & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \\ 3 & 0.33 & 0.67 & 1.00 & 0.67 & 0.33 \\ 4 & 0.33 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.33 \end{array}$$

$\mu_{B'}(5) = \max\{\min(0,0.33);\ \min(0,0.33);\ \min(1,0.33)\} = 0.33$

$\mu_{B'}(6) = \max\{\min(0,0.50);\ \min(0,0.67);\ \min(1,0.50)\} = 0.50$

$\mu_{B'}(7) = \max\{\min(0,0.50);\ \min(0,1.00);\ \min(1,0.50)\} = 0.50$

$\mu_{B'}(8) = \max\{\min(0,0.50);\ \min(0,0.67);\ \min(1,0.50)\} = 0.50$

$\mu_{B'}(9) = \max\{\min(0,0.33);\ \min(0,0.33);\ \min(1,0.33)\} = 0.33$

15

5. Exemplo de Inferência Fuzzy

Representação gráfica do resultado da inferência

- A partir dos valores obtidos para *B*', tem-se a representação gráfica de sua saída, ou seja:

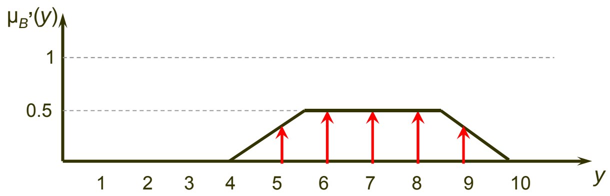
$\mu_{B'}(5) = \max\{\min(0,0.33);\ \min(0,0.33);\ \min(1,0.33)\} = 0.33$

$\mu_{B'}(6) = \max\{\min(0,0.50);\ \min(0,0.67);\ \min(1,0.50)\} = 0.50$

$\mu_{B'}(7) = \max\{\min(0,0.50);\ \min(0,1.00);\ \min(1,0.50)\} = 0.50$

$\mu_{B'}(8) = \max\{\min(0,0.50);\ \min(0,0.67);\ \min(1,0.50)\} = 0.50$

$\mu_{B'}(9) = \max\{\min(0,0.33);\ \min(0,0.33);\ \min(1,0.33)\} = 0.33$

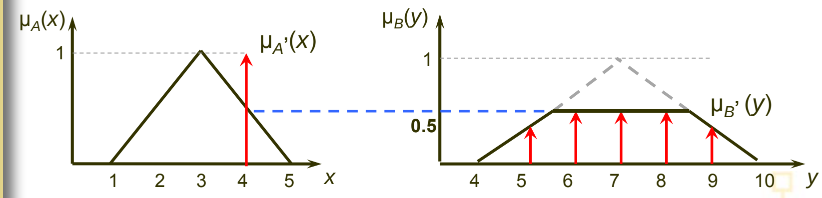


16

5. Exemplo de Inferência Fuzzy

Interpretação geométrica

- Quando muitos pontos de discretização são utilizados no processo de inferência, tem-se então um elevado esforço computacional para a obtenção da saída.
- A fim de evitar este elevado esforço computacional, o resultado da implicação de Mamdani pode ser também alcançado a partir de sua interpretação geométrica.



- Passos para obter *B*'(*y*):
  1. Assim, para obter o valor de *B*', basta-se então verificar o grau de pertinência ativado por *A*' frente ao conjunto *A*.
  2. Em seguida, o resultado de *B*'(*y*) será a respectiva região fuzzy obtida pelo corte no conjunto *B* frente àquele valor de pertinência obtido no passo anterior.

17

Fim da Apresentação

EPC-3

(Data de Entrega ➔ 07/10/2019)

Núcleo de Pesquisa em
AUTOMAÇÃO INTELIGENTE
de Processos e Sistemas

18