Sistemas Fuzzy

AULA 03 – Introdução à Lógica Fuzzy

Prof. Ivan Nunes da Silva

1. *Introdução aos Sistemas Fuzzy*

Aspectos de definição e principais características

Aspectos de Definição:

- **Definição 1**: São sistemas que tentam explorar as formas que o cérebro usa para o tratamento de informações qualitativas e incertas.
- **Definição 2**: São sistemas que suportam os modos de raciocínio que são aproximados, ao invés de exatos, como estamos naturalmente acostumados a trabalhar.
- **Definição 3**: São sistemas capazes de tratar informações vagas, aproximadas, as quais são expressas por regras linguísticas.

Principais Características:

- Exploram a riqueza da informação:
  - Informações qualitativas.
  - Redes neurais artificiais só trabalham com informações quantitativas.
- Permitem expressar imprecisões e incertezas (Ex. da Churrascaria).
- O raciocínio é executado de forma aproximada (não exata).
- Independem da modelagem matemática.
- Sistemas baseados em regras linguísticas.

1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

Vantagens dos sistemas fuzzy

- Conceitualmente fácil de ser entendido.
- Flexibilidade explícita pela tolerância à imprecisão de dados.
- Modelagem não-linear de processos com complexidade arbitrária.
- Construído baseando na experiência dos especialistas.
- Pode ser integrado com outras ferramentas convencionais.
- Baseado em linguagem natural.

3

1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

O conceito de inexatidão

- O cérebro humano processa informações inexatas de forma direta:
  - Hoje está **mais ou menos** quente.
  - O show é **meio** caro.
  - Aquele rapaz é **baixinho.**
  - Coloque **um pouco** (uma pitada) de sal.
  - A tensão está **muito alta**.
  - Picanha **bem passada.**
- Mas, paradoxalmente, não há incerteza sobre a eventual quantificação do valor que se quer representar (ou repassar a ideia).
- O problema é como definir “linguisticamente” esse valor.

4

1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

Exemplo do jogo de golfe

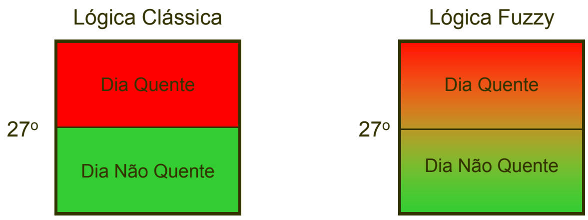
- Se a bola está **longe** do buraco e o terreno está **levemente inclinado** da esquerda para direita, bata na bola **fortemente** e numa direção **um pouco a esquerda** da bandeira.
- Se a bola está **muito perto** do buraco e o terreno é **plano**, bata na bola **suavemente** e **diretamente na direção** do buraco.
- Como se pode definir a distância:
  - **Muito Perto:** menor que 1 metro
  - **Perto:** entre 1 e 3 metros
  - **Médio:** entre 3 e 5 metros
  - **Longe:** entre 5 e 7 metros
  - **Muito Longe:** maior que 7 metros
- Como classificar a distância 4.99m?
- Intuitivamente, sabe-se que 4.99 está mais para “**Longe**” do que para “**Médio**”.

5

1. Introdução aos Sistemas Fuzzy

Lógica clássica e lógica fuzzy

- Na **lógica clássica tradicional** (teoria de conjuntos), as fronteiras dos conjuntos são bem definidas.
- Na **lógica fuzzy** (nebulosa), essas fronteiras não são bem definidas, sendo então flexíveis.

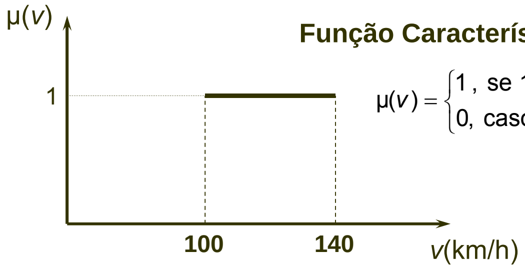


6

2. Conceitos de Lógica Clássica

Resumo da lógica clássica de conjuntos

- Na lógica clássica (booleana, binária, Aristóteles), os objetos **pertencem** ou **não** a uma determinada classe ou a um determinado conjunto.
- A resposta se resume a "Sim" ou "Não", "Verdadeiro" ou "Falso", 0 ou 1, etc.
- **Exemplo**:
  - Seja o seguinte gráfico denotando o conceito de "**Velocidade Alta**".



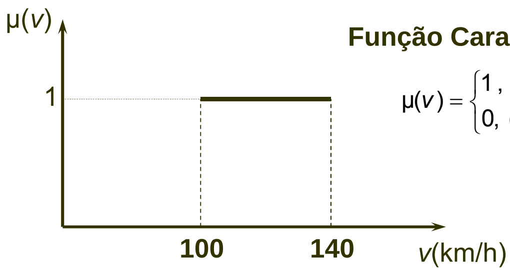
Função Característica (Inclusão):

$$\mu(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } 100 \le v \le 140 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

7

2. Conceitos de Lógica Clássica

Aspectos de seleção dos limiares



Função Característica (Inclusão):

$$\mu(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } 100 \le v \le 140 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

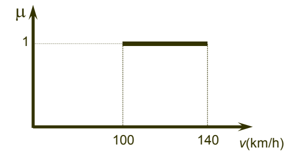
- Qual a resposta da função característica para uma velocidade de 99,9999 km/h?
- A imprecisão e a incerteza do mundo real acaba restringindo a aplicação da lógica clássica em problemas do dia-a-dia.
- **Princípio da Incompatibilidade de Zadeh ➔** À medida que a complexidade de um sistema aumenta, a habilidade para se fazer afirmações precisas e que sejam significativas também diminui.

8

2. Conceitos de Lógica Clássica

Aspectos comparativos

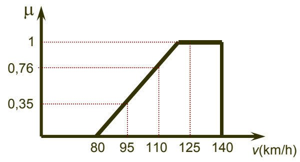
- Representação gráfica do conceito de **“Velocidade Alta”:**



Lógica Clássica

objetos pertencem ou não a uma determinada classe

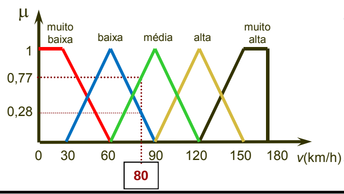
(como tratar paradoxos?)



Lógica Fuzzy

objetos podem pertencer mais (ou menos) a uma determinada classe

(não é probabilidade!)



Sistema Fuzzy

Variáveis representadas por funções de pertinência

9

3. Conceitos de Lógica Fuzzy

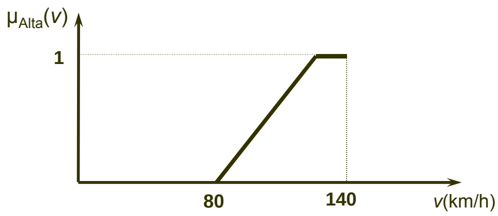
Função de pertinência na lógica fuzzy

- Na lógica fuzzy, a ideia da função de inclusão é então flexibilizada, indicando que os objetos podem pertencer mais, ou menos, a um determinado conjunto.
- Neste caso, a função de inclusão ao conjunto fuzzy, ou **função de pertinência**, é dada pela seguinte expressão:

$$\mu_A(x):\ x \rightarrow [0,\ 1]\ ;\ \text{onde } x \in X$$

  - onde $\mu_A(x)$ retorna o **grau de pertinência** do elemento x, pertencente ao **universo de discurso** X, em relação ao **conjunto fuzzy** A.

- Como exemplo, considera-se aqui na figura um conjunto fuzzy que define o conceito de velocidade alta.



10

3. Conceitos de Lógica Fuzzy

Terminologia para representar conjuntos fuzzy

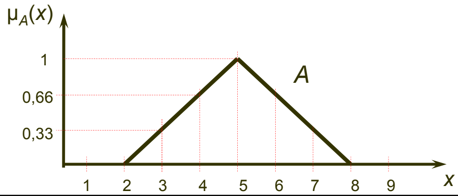
- Em termos de implementação computacional, os conjuntos fuzzy são normalmente representados de maneira discreta.
- Para um conjunto fuzzy *A*, discreto e finito, tendo elementos definidos em um universo de discurso *X*, o mesmo conjunto pode ser denotado da seguinte forma:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \mu_A(x_3)/x_3 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n$$

  - Onde o sinal de adição indica a composição de todos elementos do conjunto *A*, e *n* especifica a quantidade de elementos de discretização.
  - Então, cada termo $\mu_A(x_i)/x_i$ fornece o grau de pertinência $\mu_A(x_i)$ do elemento x_i em relação ao conjunto fuzzy *A*.

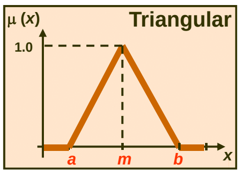
- Como exemplo, o conjunto fuzzy *A*, dado pela função de pertinência ilustrada no gráfico, poderia ser representado por:

$$A = 0{,}0/1 + 0{,}0/2 + 0{,}33/3 + 0{,}66/4 + 1{,}0/5 + 0{,}66/6 + 0{,}33/7 + 0{,}0/8 + 0{,}0/9$$

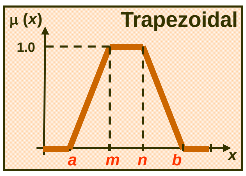


3. Conceitos de Lógica Fuzzy

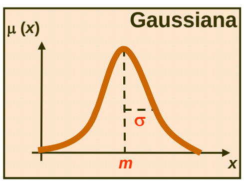
Principais tipos de funções de pertinência



$$\mu(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \le a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, \text{ se } x \in [a,\ m] \\ \dfrac{b-x}{b-m}, \text{ se } x \in [m,\ b] \\ 0, \text{ se } x \ge b \end{cases}$$



$$\mu(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \le a \\ \dfrac{x-a}{m-a}, \text{ se } x \in [a,\ m] \\ 1, \text{ se } x \in [m,\ n] \\ \dfrac{b-x}{b-n}, \text{ se } x \in [n,\ b] \\ 0, \text{ se } x \ge b \end{cases}$$

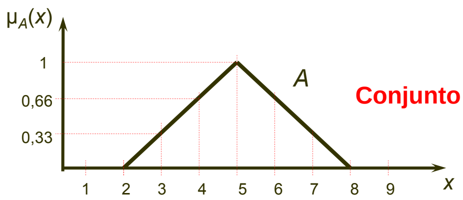


$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

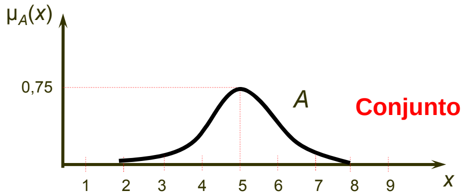
4. Definições da Lógica Fuzzy

Conjunto fuzzy normalizado

- **DEFINIÇÃO 1. Conjunto Fuzzy Normalizado**
  - Um conjunto fuzzy *A* é normalizado se pelo menos um de seus elementos possui grau de pertinência igual a 1, ou seja, $\mu_A(x_i)=1$.
  - Exemplificando, têm-se:



Conjunto Normalizado



Conjunto Não Normalizado

13

4. Definições da Lógica Fuzzy

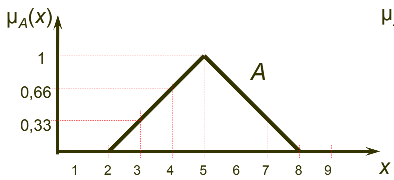
Altura de conjunto fuzzy

- **DEFINIÇÃO 2. Altura de Conjunto Fuzzy**
  - A altura de um conjunto fuzzy *A* corresponde ao maior grau de pertinência assumido por um de seus elementos, isto é:

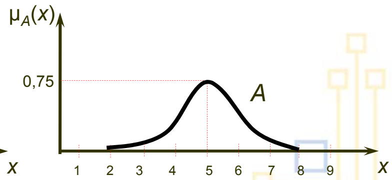
$$Altura(A) = \max_{x_i \in X} \mu_A(x_i)$$

  - Um conjunto *A* não normalizado pode ser normalizado por meio da seguinte relação:

$$A_{Normal} = \frac{A}{altura(A)}$$



$Altura(A) = 1$



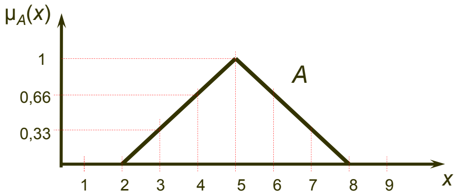
$Altura(A) = 0{,}75$

4. Definições da Lógica Fuzzy

Suporte de conjunto fuzzy

- **DEFINIÇÃO 3. Suporte de Conjunto Fuzzy**
  - O suporte de um conjunto fuzzy *A* é o conjunto de todos os elementos de *A* que possuem graus de pertinência maior que zero, ou seja:

$$Supp(A) = \{ x \in X \mid \mu_A(x) > 0 \}$$



$$Supp(A) = \{ x \in X \mid 2 < x < 8 \}$$

15

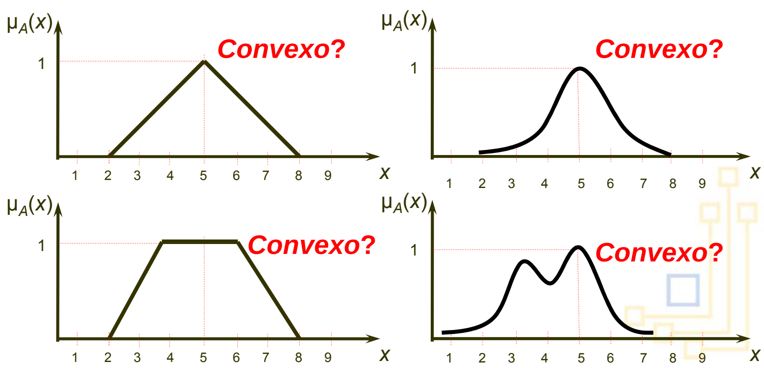
4. Definições da Lógica Fuzzy

Conjunto fuzzy convexo

- **DEFINIÇÃO 4. Conjunto Fuzzy Convexo**
  - Um conjunto fuzzy *A* é convexo (ou unimodal) se, e somente se, for observado a seguinte desigualdade:

$$\mu_A(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda)\cdot x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

onde $x_1, x_2 \in X$; $\lambda \in [0;1]$.



16

4. Definições da Lógica Fuzzy

Cardinalidade de conjunto fuzzy

- **DEFINIÇÃO 5. Cardinalidade de Conjunto Fuzzy**
  - A cardinalidade de um conjunto fuzzy *A* é a soma dos graus de pertinência de todos os elementos de *A*, os quais pertencem a universo de discurso *X*, ou seja:

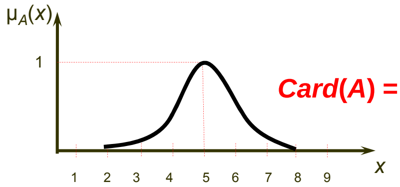
$$Card(A) = \sum_{x \in X} \mu_A(x)$$

  - **Exemplo 1.** Seja o conjunto fuzzy discreto *A* dado por:

$$A = 0{,}1/1 + 0{,}3/2 + 0{,}6/3 + 1{,}0/4 + 0{,}6/5 + 0{,}2/6, \text{ com } X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Card(A) = ?

  - **Exemplo 2.** Seja o conjunto fuzzy contínuo *A* dado por:



Card(A) = ?

17

4. Definições da Lógica Fuzzy

Cortes em conjunto fuzzy

- **DEFINIÇÃO 6. Cortes em Conjunto Fuzzy**
  - Um corte α em um conjunto fuzzy *A* é especificado por um conjunto crisp que contem todos os elementos de *A*, pertencentes ao universo de discurso *X*, que possuem grau de pertinência maior ou igual a α, ou seja:

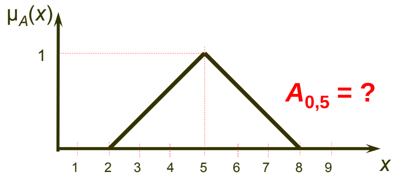
$$A_\alpha = \{ x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha \}$$

  - **Exemplo 1.** Seja o conjunto fuzzy discreto *A* dado por:

$$A = 0{,}3/1 + 0{,}7/2 + 1{,}0/3 + 0{,}9/4 + 0{,}6/5 + 0{,}2/6, \text{ com } X = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$A_{0,4}$ **= ?**

  - **Exemplo 2.** Seja o conjunto fuzzy contínuo *A* dado por:



$A_{0,5}$ **= ?**

18

5. Operações com Conjuntos Fuzzy

União entre conjuntos fuzzy

Conjunto UNIÃO

- O conjunto **UNIÃO**, entre dois conjuntos fuzzy *A* e *B*, pertencentes a um mesmo universo de discurso *X*, é formado por todos os valores **máximos** entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. Formalmente, tem-se:

$$\mu_A(x) \cup \mu_B(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

- Generalizando, para uma coleção de *m* conjuntos fuzzy, todos definidos num mesmo universo de discurso *X*, tem-se:

$$\bigcup_{i=1}^{m} \mu_{A_i}(x) = \max\{\mu_{A_1}(x),\ \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_m}(x)\}$$

- Outros operadores de **UNIÃO**:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Soma Algébrica} \Rightarrow & \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \\ \text{Soma Limitada} \Rightarrow & \min\{1,\ \mu_A(x) + \mu_B(x)\} \\ \text{Soma Drástica} \Rightarrow & \begin{cases} \mu_A(x), \text{ se } \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x), \text{ se } \mu_A(x) = 0 \\ 1 \text{, caso contrário} \end{cases} \end{array}\right\} \textit{S-normas}$$

Qual a vantagem de se utilizar o operador "Máximo" na União?

19

5. Operações com Conjuntos Fuzzy

Interseção entre conjuntos fuzzy

Conjunto INTERSEÇÃO

- O conjunto **INTERSEÇÃO**, entre dois conjuntos fuzzy *A* e *B*, pertencente a um universo de discurso *X*, é formado por todos os valores **mínimos** entre $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. Formalmente, tem-se:

$$\mu_A(x) \cap \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}$$

- Generalizando, para uma coleção de *m* conjuntos fuzzy, todos definidos num mesmo universo de discurso *X*, tem-se:

$$\bigcap_{i=1}^{m} \mu_{A_i}(x) = \min\{\mu_{A_1}(x),\ \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_m}(x)\}$$

- Outros operadores de **INTERSEÇÃO**:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Produto Algébrico} \Rightarrow & \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \\ \text{Produto Limitado} \Rightarrow & \max\{0,\ \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\} \\ \text{Produto Drástico} \Rightarrow & \begin{cases} \mu_A(x), \text{ se } \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x), \text{ se } \mu_A(x) = 1 \\ 0 \text{, caso contrário} \end{cases} \end{array}\right\} \textit{T-normas}$$

Qual a vantagem de se utilizar o operador "Mínimo" na Interseção?

20

5. Operações com Conjuntos Fuzzy

Conjunto complemento, S-Norma e T-Norma

Conjunto COMPLEMENTO

- O conjunto **COMPLEMENTO** de um conjunto nebuloso *A*, pertencente a um universo de discurso *X*, é formado pela subtração de $\mu_A(x)$ do valor unitário 1. Formalmente, tem-se:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A$$

Operador *S*-Norma

- Uma ***S***-norma (co-norma triangular) é uma operação matemática binária, ***S***: [0,1] x [0,1]→ [0,1], que deve satisfazer as seguintes propriedades:
  1. x ***S*** 1 = 1, sendo que x ***S*** 0 = x **(Condição de contorno)**
  2. x ***S*** y = y ***S*** x **(Propriedade Comutativa)**
  3. x **S** (y **S** z) = (x ***S*** y) ***S*** z **(Propriedade Associativa)**
  4. Se "$x \le y$" e "$w \le z$", então "x ***S*** w" ≤ "y ***S*** z" **(Monotonicidade)**

Operador *T*-Norma

- Uma ***T***-norma (norma triangular) é uma operação matemática binária, ***T***: [0,1] x [0,1]→ [0,1]; que deve satisfazer as seguintes propriedades:
  1. x ***T*** 1 = x, sendo que x ***T*** 0 = 0 **(Condição de contorno)**
  2. x ***T*** y = y ***T*** x **(Propriedade Comutativa)**
  3. x ***T*** (y ***T*** z) = (x ***T*** y) ***T*** z **(Propriedade Associativa)**
  4. Se "$x \le y$" e "$w \le z$", então x ***T*** $w \le y$ ***T*** z **(Monotonicidade)**

Constata-se então que o Max é uma *S*-norma e o Min é uma *T*-norma.

5. Operações com Conjuntos Fuzzy

Exemplos de operações

Exemplo 1:

- Sejam os conjuntos fuzzy *A* e *B*, definidos no universo de discurso X = {1, 2, 3, 4, 5}, com graus de pertinência dados por:

  A = 0.2/1 + 0.5/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.1/5

  B = 0.1/1 + 1.0/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.3/5

  Calcule as seguintes operações:

  a) $\mu_A \cup \mu_B$ = 0.2/1 + 1.0/2 + 1.0/3 + 0.8/4 + 0.3/5

  b) $\mu_A \cap \mu_B$ = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.9/3 + 0.4/4 + 0.1/5

  c) $\mu_{\bar{A}}$ = 0.8/1 + 0.5/2 + 0.0/3 + 0.2/4 + 0.9/5

Exemplo 2:

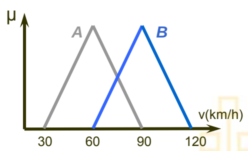
- Sejam os conjuntos fuzzy *A* e *B*, representados na figura ao lado. Faça as seguintes operações:

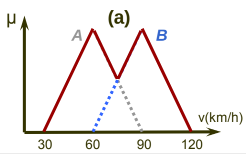
  a) $\mu_A \cup \mu_B$

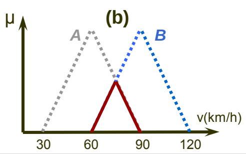
  b) $\mu_A \cap \mu_B$

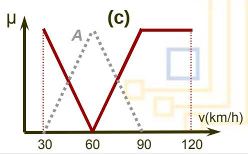
  c) $\mu_{\bar{A}}$

Universo de Discurso $V \in$ [30, 120]









5. Operações com Conjuntos Fuzzy

Algoritmo computacional

- O algoritmo computacional da operação de **União**, utilizando o operador Max, pode ser implementado da seguinte maneira:

Algoritmo UNIÃO

N: inteiro *{Quantidade de elementos de discretização}*
X: vetor[1..*N*] de reais *{Valores dos elementos do universo de discurso X}*
A: Vetor[1..*N*] de reais *{Valores dos graus de pertinência de A}*
B: Vetor[1..*N*] de reais *{Valores dos graus de pertinência de B}*
Z: Vetor[1..*N*] de reais *{Valores dos graus de pertinência de A∪B}*
Início
  {Atribuir os valores discretizados em X, A e B}
  Para *i* de 1 até *N* faça
    Z[*i*] = Max(*A*[*i*],*B*[*i*])
  Fim_Para
  Para *i* de 1 até *N* faça
    Imprima("Quando *x* = ", *X*[*i*])
    Imprima("Valor da união é: ",*Z*[*i*])
  Fim_Para
Fim

23

6. Aspectos de Projeto

Discussões sobre utilização de sistemas fuzzy

Aspectos de Projeto

- Todos os conjuntos fuzzy relacionados à uma variável específica devem ser sempre compostos pelos mesmos elementos do respectivo universo de discurso.
- A representação discreta dos conjuntos fuzzy é aquela normalmente utilizada para aplicações práticas.
- As expressões analíticas das funções de pertinência são utilizadas apenas para produzir os vetores que serão utilizados para representar a forma discreta dos números fuzzy.

Quando Usar Sistemas Fuzzy

- Em situações em que se dispõe de pouca informação quantitativa a respeito do processo a ser mapeado.
  - Se dispuser de um conjunto de informações quantitativas (medições) relacionando entradas/saídas, as redes neurais pode ser também uma alternativa de uso.
- Em situações em que as variáveis do processo estão imersas em ambientes de incerteza e imprecisão.
- Em situações em que o processo é melhor definido tendo-se como base o conhecimento especialista sobre o processo.
  - **Especialista (*Expert*) ➔** É aquele indivíduo que possui a capacidade elaborar diagnósticos ou recomendações sobre o processo, por meio da utilização de termos incertos/imprecisos.

24

Fim da Apresentação

EPC-1

(Data de Entrega ➔ 09/09/2019)

SEMANA DA PÁTRIA

(Não Haverá Aula em 02/09/2019)

#Reservada P/ Prospecção de Projeto#

Núcleo de Pesquisa em
AUTOMAÇÃO INTELIGENTE
de Processos e Sistemas