



Sistemas Fuzzy

AULA 09 – Números Fuzzy

Prof. Ivan Nunes da Silva



1. Introdução aos Números Fuzzy

Aspectos conceituais

- Os números fuzzy são constituídos por conjuntos fuzzy, definidos em universos de discurso discretos ou contínuos, que permitem a quantificação da incerteza e da imprecisão associada a uma dada informação.
- Por meio dos números fuzzy, algumas das declarações que podem ser mapeadas são as seguintes:
 - Em torno de 8.
 - Perto de 50.
 - Aproximadamente 7.
 - Frequentemente 4.
- A partir do conceito de números fuzzy, diversas outras aplicações podem ser definidas, tais como funções fuzzy, programação linear fuzzy, geometria analítica fuzzy, sistemas de equações fuzzy, etc.

2. Definição de Números Fuzzy

Propriedades requeridas

- Um número fuzzy pode ser definido por um conjunto fuzzy A , representado por uma função de pertinência, tendo-se as seguintes propriedades:

➤ **Convexidade**

- ❖ O conjunto fuzzy A deve ser convexo.

$$\mu_A(\lambda \cdot x_1 + (1-\lambda) \cdot x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1); \mu_A(x_2)\}$$

➤ **Normalidade**

- ❖ O conjunto fuzzy A deve ser normal.

$$\mu_A(x) = 1, \text{ para algum } x \in X$$

➤ **Suporte**

- ❖ O suporte do conjunto fuzzy A deve ser limitado.

$$\text{Supp}(A) = \{ x \in X \mid \mu_A(x) > 0 \}$$



3

3. Descrição de Números Fuzzy

Teorema da representação

- A descrição de números fuzzy pode ser efetuada por meio da aplicação do teorema da representação, em que diz que qualquer conjunto fuzzy A pode ser especificado por intermédio de seus α -cortes, ou seja:

$$A = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha \cdot A_\alpha$$

- Onde A_α é o intervalo do universo de discurso onde $\mu_A(x) \geq \alpha$.



4

3. Descrição de Números Fuzzy

Conceito de α -corte

- Um corte α em um conjunto fuzzy A é especificado por um conjunto que contém todos os elementos de A , pertencentes ao universo de discurso X , que possuem grau de pertinência maior ou igual a α , ou seja:

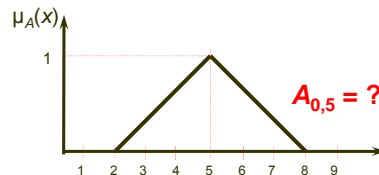
$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

- **Exemplo 1.** Seja o conjunto fuzzy discreto A dado por:

$A = 0,3 / 1 + 0,7 / 2 + 1,0 / 3 + 0,9 / 4 + 0,6 / 5 + 0,2 / 6$, com $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$$A_{0,4} = ?$$

- **Exemplo 2.** Seja o conjunto fuzzy contínuo A dado por:



5

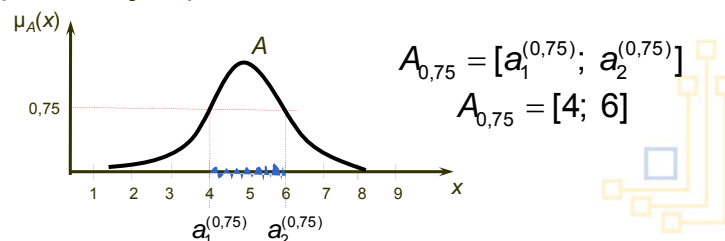
3. Descrição de Números Fuzzy

Representação de α -corte

- Para um número fuzzy A , caracterizado pelas propriedades anteriores, um α -corte em A pode ser representado por um par de valores definidos pela seguinte expressão:

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)}]$$

- A figura seguinte ilustra o conceito relacionado à representação por α -cortes:

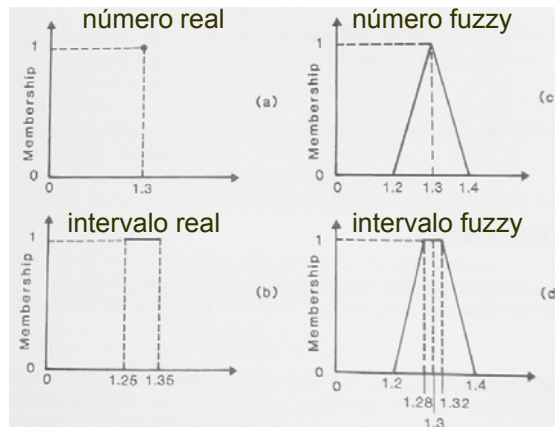


6

3. Descrição de Números Fuzzy

Análise comparativa

- Ilustração comparativa mostrando as diferenças entre **número real** (e intervalo real) e **número fuzzy** (e intervalo fuzzy).



4. Operações com Números Fuzzy

Operação de ADIÇÃO

- Sejam dois números fuzzy A e B , definidos num universo de discurso X , representados respectivamente pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. A operação de **ADIÇÃO** entre A e B pode ser definida em função de seus respectivos α -cortes, ou seja:

$$A + B = [a_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)}] + [b_1^{(\alpha)}; b_2^{(\alpha)}]$$

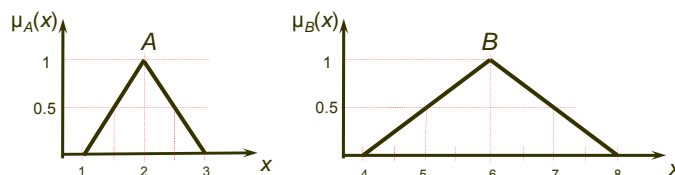
- Assim, o resultado desta operação de **ADIÇÃO** é então dada por:

$$A + B = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}], \text{ para } \alpha \in [0; 1].$$

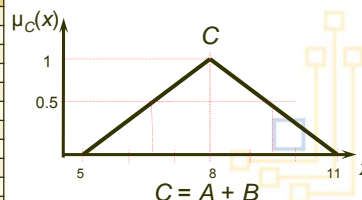
4. Operações com Números Fuzzy

Operação de ADIÇÃO (Exemplo 1)

- Sejam os números fuzzy 2 e 6, definidos em um mesmo universo de discurso X , representados pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, conforme ilustra a figura abaixo. Obtenha o conjunto C correspondente à **SOMA** de ambos.



α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	5.0	11.0
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	5.3	10.7
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	5.6	10.4
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	5.9	10.1
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	6.2	9.8
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	6.5	9.5
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	6.8	9.2
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	7.1	8.9
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	7.4	8.6
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	7.7	8.3
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	8.0	8.0



4. Operações com Números Fuzzy

Operação de SUBTRAÇÃO

- Sejam dois números fuzzy A e B , definidos num universo de discurso X , representados respectivamente pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. A operação de **SUBTRAÇÃO** entre A e B pode ser definida em função de seus respectivos α -cortes, ou seja:

$$A - B = [a_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)}] - [b_1^{(\alpha)}; b_2^{(\alpha)}]$$

$$B - A = [b_1^{(\alpha)}; b_2^{(\alpha)}] - [a_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)}]$$

- Assim, o resultado desta operação de **SUBTRAÇÃO** é então dada por:

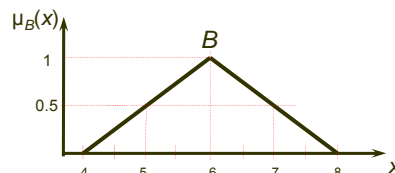
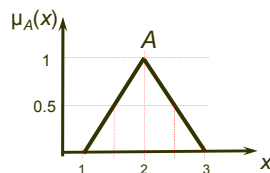
$$A - B = [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}], \text{ para } \alpha \in [0;1]$$

$$B - A = [b_1^{(\alpha)} - a_2^{(\alpha)}; b_2^{(\alpha)} - a_1^{(\alpha)}], \text{ para } \alpha \in [0;1]$$

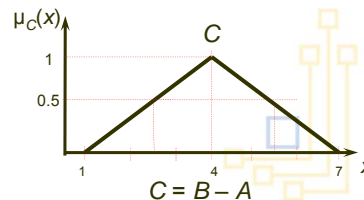
4. Operações com Números Fuzzy

Operação de SUBTRAÇÃO (Exemplo 1)

- Sejam os números fuzzy 2 e 6, definidos no mesmo universo de discurso X , representados pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, conforme ilustra a figura abaixo. Obtenha o conjunto C correspondente à **SUBTRAÇÃO** de B menos A .



α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	1.0	7.0
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	1.3	6.7
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	1.6	6.4
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	1.9	6.1
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	2.2	5.8
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	2.5	5.5
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	2.8	5.2
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	3.1	4.9
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	3.4	4.6
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	3.7	4.3
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	4.0	4.0



11

4. Operações com Números Fuzzy

Operação de MULTIPLICAÇÃO

- Sejam dois números fuzzy A e B , definidos num universo de discurso X , representados respectivamente pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. A operação de **MULTIPLICAÇÃO** entre A e B pode ser definida em função de seus respectivos α -cortes, ou seja:

$$A \times B = [a_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)}] \times [b_1^{(\alpha)}; b_2^{(\alpha)}]$$

- Assim, o resultado desta operação de **MULTIPLICAÇÃO** é então dada por:

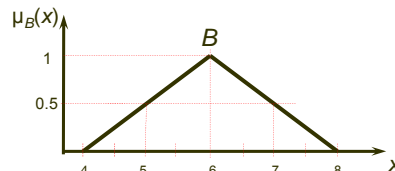
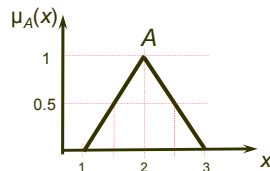
$$A \times B = [a_1^{(\alpha)} \times b_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)} \times b_2^{(\alpha)}], \text{ para } \alpha \in [0;1]$$

12

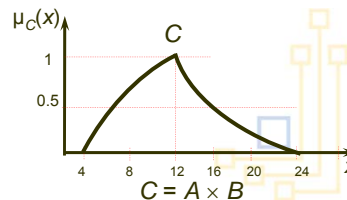
4. Operações com Números Fuzzy

Operação de MULTIPLICAÇÃO (Exemplo 1)

- Sejam os números fuzzy 2 e 6, definidos em um mesmo universo de discurso X , representados pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, conforme ilustra a figura abaixo. Obtenha o conjunto C correspondente à **MULTIPLICAÇÃO** de A por B .



α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	4.00	24.00
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	4.62	22.62
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	5.28	21.28
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	5.98	19.98
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	6.72	18.72
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	7.50	17.50
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	8.32	16.32
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	9.18	15.18
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	10.08	14.08
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	11.02	13.02
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	12.00	12.00



13

4. Operações com Números Fuzzy

Operação de DIVISÃO

- Sejam dois números fuzzy A e B , definidos num universo de discurso X , representados respectivamente pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. A operação de **DIVISÃO** entre A e B pode ser definida em função de seus respectivos α -cortes, ou seja:

$$A \div B = [a_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)}] \div [b_1^{(\alpha)}; b_2^{(\alpha)}]$$

- Assim, o resultado desta operação de **DIVISÃO** é então dada por:

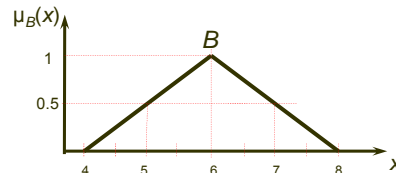
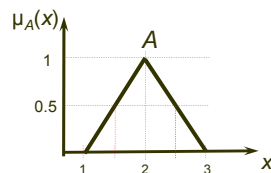
$$A \div B = \left[\frac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}}, \frac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}} \right], \text{ para } \alpha \in [0;1]$$

14

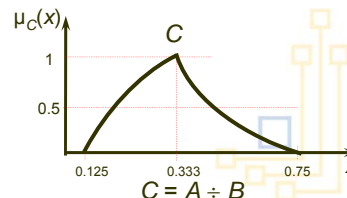
4. Operações com Números Fuzzy

Operação de DIVISÃO (Exemplo 1)

- Sejam os números fuzzy 2 e 6, definidos em um mesmo universo de discurso X , representados pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, conforme ilustra a figura abaixo. Obtenha o conjunto C correspondente à **DIVISÃO** de A por B .



α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	0.125	0.750
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	0.141	0.690
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	0.158	0.636
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	0.176	0.587
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	0.194	0.542
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	0.214	0.500
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	0.235	0.461
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	0.258	0.426
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	0.281	0.393
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	0.306	0.362
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	0.333	0.333



15

4. Operações com Números Fuzzy

Operação de MÍNIMO

- Sejam dois números fuzzy A e B , definidos num universo de discurso X , representados respectivamente pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. A operação de **MÍNIMO** entre A e B pode ser definida em função de seus respectivos α -cortes, ou seja:

$$\text{Min}(A, B) = \text{Min}\{[a_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)}], [b_1^{(\alpha)}; b_2^{(\alpha)}]\}$$

- Assim, o resultado desta operação de MÍNIMO é então dada por:

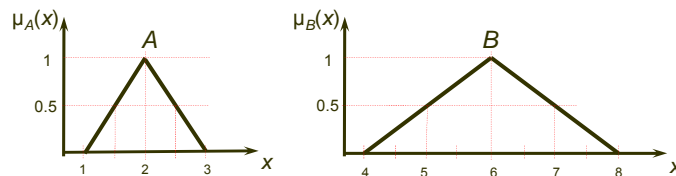
$$\text{Min}(A, B) = [\text{Min}\{a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}\}; \text{Min}\{a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\}]$$

16

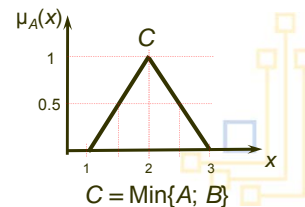
4. Operações com Números Fuzzy

Operação de MÍNIMO (Exemplo)

- Sejam os números fuzzy 2 e 6, definidos em um mesmo universo de discurso X , representados pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, conforme ilustra a figura abaixo. Obtenha o conjunto C correspondente ao **MÍNIMO** de ambos.



α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	1.0	3.0
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	1.1	2.9
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	1.2	2.8
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	1.3	2.7
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	1.4	2.6
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	1.5	2.5
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	1.6	2.4
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	1.7	2.3
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	1.8	2.2
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	1.9	2.1
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	2.0	2.0



17

4. Operações com Números Fuzzy

Operação de MÁXIMO

- Sejam dois números fuzzy A e B , definidos num universo de discurso X , representados respectivamente pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$. A operação de **MÁXIMO** entre A e B pode ser definida em função de seus respectivos α -cortes, ou seja:

$$\text{Max}(A, B) = \text{Max}\{[a_1^{(\alpha)}; a_2^{(\alpha)}], [b_1^{(\alpha)}; b_2^{(\alpha)}]\}$$

- Assim, o resultado desta operação de MÁXIMO é então dada por:

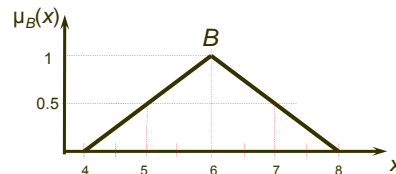
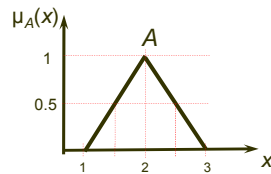
$$\text{Max}(A, B) = [\text{Max}\{a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}\}; \text{Max}\{a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}\}]$$

18

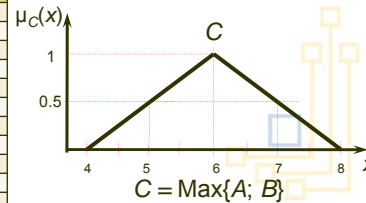
4. Operações com Números Fuzzy

Operação de MÁXIMO (Exemplo)

- Sejam os números fuzzy 2 e 6, definidos em um mesmo universo de discurso X , representados pelas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$, conforme ilustra a figura abaixo. Obtenha o conjunto C correspondente ao **MÁXIMO** de ambos.



α	$a_1^{(\alpha)}$	$a_2^{(\alpha)}$	$b_1^{(\alpha)}$	$b_2^{(\alpha)}$	$c_1^{(\alpha)}$	$c_2^{(\alpha)}$
0.0	1.0	3.0	4.0	8.0	4.0	8.0
0.1	1.1	2.9	4.2	7.8	4.2	7.8
0.2	1.2	2.8	4.4	7.6	4.4	7.6
0.3	1.3	2.7	4.6	7.4	4.6	7.4
0.4	1.4	2.6	4.8	7.2	4.8	7.2
0.5	1.5	2.5	5.0	7.0	5.0	7.0
0.6	1.6	2.4	5.2	6.8	5.2	6.8
0.7	1.7	2.3	5.4	6.6	5.4	6.6
0.8	1.8	2.2	5.6	6.4	5.6	6.4
0.9	1.9	2.1	5.8	6.2	5.8	6.2
1.0	2.0	2.0	6.0	6.0	6.0	6.0

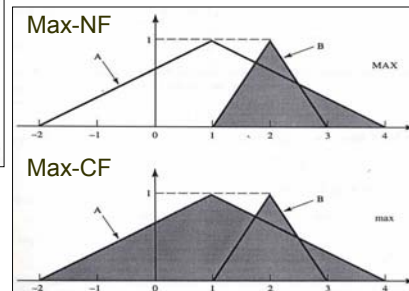
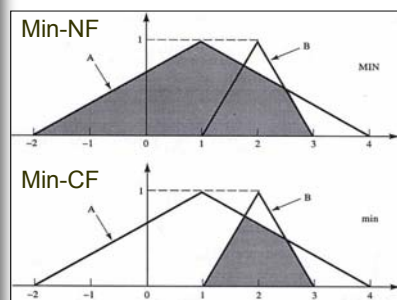


19

4. Operações com Números Fuzzy

Comparação entre operações Min e Max

- A aplicação das operações de Min e Max entre números fuzzy (NF) podem produzir resultados diferentes daquelas aplicadas se forem considerados como conjuntos fuzzy (CF).



20

Fim da Apresentação

EPC-7

(Data de Entrega → 03/12/2019)

