Sistemas Fuzzy

AULA 04 – Relações Fuzzy

Prof. Ivan Nunes da Silva

1. *Aspectos de Relações Fuzzy*

Fundamentos introdutórios

- Uma relação matemática indica como estão associados os elementos de um conjunto em relação aos elementos de um outro conjunto.
- Nas relações fuzzy, o nível de associação entre dois conjuntos fuzzy é também fornecida por meio de graus de pertinência que possuem valores entre 0 e 1.
- Assim, este relacionamento podem ser definidos no subespaço constituído pelo produto cartesiano dos respectivos elementos dos universos de discurso, os quais são representados por:

$$R(x,y) = \sum_{(x,y)\in X_x Y} \mu_R(x,y)/(x,y)$$

Exemplo: Seja a relação fuzzy definida pela regra "*x* está em torno de *y*", onde $x \in X$ e $y \in Y$, cujos universos de discurso discretos são especificados por $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Esboçar a forma de representação matricial desta relação.

$$R(x,y) = 0.8/(x_1,y_1) + 0.3/(x_1,y_2) + 0.7/(x_1,y_3) +$$
$$+ 0.4/(x_2,y_1) + 0.9/(x_2,y_2) + 0.6/(x_2,y_3) +$$
$$+ 0.1/(x_3,y_1) + 1.0/(x_3,y_2) + 0.4/(x_3,y_3)$$

1. Aspectos de Relações Fuzzy

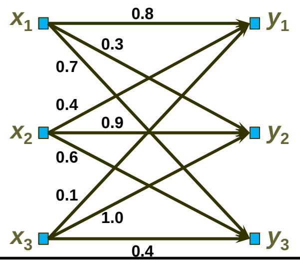
Formas de representação

$R(x,y) = 0.8/(x_1,y_1) + 0.3/(x_1,y_2) + 0.7/(x_1,y_3) +$
$+ 0.4/(x_2,y_1) + 0.9/(x_2,y_2) + 0.6/(x_2,y_3) +$
$+ 0.1/(x_3,y_1) + 1.0/(x_3,y_2) + 0.4/(x_3,y_3)$

- **Representação via Matriz Relacional:**

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.9 & 0.6 \\ 0.1 & 1.0 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **Representação via Grafo Direcionado:**



3

2. Conceitos de Relações Fuzzy

Domínio de relação fuzzy

- O conjunto que define o **DOMÍNIO** da relação $R(x,y)$, onde $x \in X$ e $y \in Y$, é formado pelos valores máximos $\mu_{R(x,y)} \in X$, relativos a cada elemento $y \in Y$. Formalmente, tem-se:

$$\text{Dom}(R(x,y)) = \max_{y \in Y}\{\mu_{R(x,y)}\},\ \text{onde } x \in X.$$

- **Exemplo:** Determine o domínio da relação fuzzy $R(x,y)$, representada pela expressão seguinte.

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 1.0 & 0.9 & 0.0 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.3 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 1.0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Dom}(R(x,y)) = \{1.0\ ;\ 0.7\ ;\ 0.9\ ;\ 1.0\}$$

4

2. Conceitos de Relações Fuzzy

Contradomínio de relação fuzzy

- O conjunto que define o **CONTRADOMÍNIO** da relação $R(x,y)$, com $x \in X$ e $y \in Y$, é formado pelos valores máximos $\mu_{R(x,y)} \in Y$, relativos a cada elemento $x \in X$. Formalmente, tem-se:

$$\text{C-Dom}(R(x,y)) = \max_{x \in X}\{\mu_{R(x,y)}\}, \text{ onde } y \in Y.$$

- **Exemplo:** Determine o contradomínio da relação fuzzy $R(x,y)$, representada pela expressão seguinte.

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 1.0 & 0.9 & 0.0 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.3 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 1.0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{C-Dom}(R(x,y)) = \{0.9\ ;\ 1.0\ ;\ 1.0\ ;\ 0.6\}$$

5

2. Conceitos de Relações Fuzzy

Inversa de relação fuzzy

- A inversa $R^{-1}(x,y)$ de uma relação fuzzy $R(x,y)$ é especificada por meio dos valores de pertinência $\mu_{R(x,y)}$ transpostos da matriz representativa de $R(x,y)$, ou seja:

$$\mu_{R^{-1}(x,y)} = \mu_{R(y,x)}\ , \text{ onde } (x,y) \in X_X Y.$$

- **Exemplo:** Determine a inversa da relação fuzzy $R(x,y)$, representada pela matriz seguinte.

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 1.0 & 0.9 & 0.0 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.9 & 0.3 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 & 1.0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$R^{-1}(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.9 & 0.2 \\ 1.0 & 0.7 & 0.3 & 0.8 \\ 0.9 & 0.4 & 0.1 & 1.0 \\ 0.0 & 0.6 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6

3. Propriedades de Relações Fuzzy

Reflexiva, Simétrica e Transitiva

- **Propriedade REFLEXIVA:**

$$\mu_{R(x,x)} = 1 \,, \quad \text{para todo } x \in X$$

Portanto, se todos os elementos da diagonal principal da matriz representando $R(x,y)$ for igual a 1, então a relação é classificada como **REFLEXIVA**; caso contrário, esta poderá ser **IRREFLEXIVA** (existe algum $\mu_{R(x,x)} = 1$) ou ***ANTIREFLEXIVA*** (todo $\mu_{R(x,x)} \neq 1$).

- **Propriedade SIMÉTRICA:**

$$\mu_{R(x,y)} = \mu_{R(y,x)} \,, \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } y \in Y$$

Portanto, a relação $R(x,y)$ será **SIMÉTRICA** sempre quando for igual à sua respectiva transposta; caso contrário, a relação $R(x,y)$ será considerada **ASSIMÉTRICA**.

- **Propriedade TRANSITIVA:**

$$\mu_{R(x,z)} \geq \max_{y \in Y}\{\min\{\mu_{R(x,y)}; \mu_{R(y,z)}\}\}, \text{ para cada } (x,z) \in X_x Z$$

7

4. Operações com Relações Fuzzy

União, Interseção, Complemento

Sejam duas relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(x,y)$, onde $x \in X$ e $y \in Y$.

- **Operação de UNIÃO:**

$$\mu_{R(x,y) \cup S(x,y)} = \max\{\mu_{R(x,y)};\ \mu_{S(x,y)}\}$$

- **Operação de INTERSEÇÃO:**

$$\mu_{R(x,y) \cap S(x,y)} = \min\{\mu_{R(x,y)};\ \mu_{S(x,y)}\}$$

- **Operação de COMPLEMENTO:**

$$\mu_{\bar{R}(x,y)} = 1 - \mu_{R(x,y)}$$

Observação ➔ Nas operações acima, os operadores **max** e **min** podem ser substituídos (sem perda de generalidade) por qualquer operador ***S*-norma** e ***T*-norma**, respectivamente.

8

4. Operações com Relações Fuzzy

Exemplo de União, Interseção, Complemento

Sejam as relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(x,y)$, onde $x \in X$ e $y \in Y$, representadas pelas seguintes matrizes:

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.6 \\ 1.0 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad S(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 & 0.1 \\ 1.0 & 0.9 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **Operação de UNIÃO ➔** $R \cup S = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.9 & 0.6 \\ 1.0 & 0.7 & 0.2 \\ 1.0 & 0.9 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$

- **Operação de INTERSEÇÃO ➔** $R \cap S = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$

5. Composição de Relações Fuzzy

Combinação de relações fuzzy

- A combinação de duas ou mais relações fuzzy, definidas em espaços distintos (produtos cartesianos diferentes), pode ser feitas por meio de operadores que permitem a composição das respectivas relações.
- Deve-se ressaltar que a composição de relações fuzzy possui um papel fundamental nos procedimentos envolvendo computação baseada em regras fuzzy e, principalmente, nos processos de implementação de estimadores e controladores fuzzy.
- As principais técnicas de composição de relações fuzzy são as seguintes:
  - **Composição "Max-Min"**
  - **Composição "Max-Prod"**
  - **Composição "Max-Média"**

5. Composição de Relações Fuzzy

Composição Max-Min (Aspectos conceituais)

- Sejam duas relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente nos produtos cartesianos discretos X_xY e Y_xZ. A composição do tipo Max-Min efetuadas sobre as matrizes representando $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida por:

$$RoS(x,z) = \max_{y \in Y}\{\min\{\mu_R(x,y);\ \mu_S(y,z)\}\}$$

onde a matriz resultante RoS está agora definida no produto cartesiano X_xZ.

- Como exemplo, sejam as relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente em X_xY e Y_xZ, representadas pelas seguintes matrizes:

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. Composição de Relações Fuzzy

Composição Max-Min (Exemplo numérico)

- A matriz representando a composição Max-Min de $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida pelos seguintes elementos:

$$RoS(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_{RoS}(x_1,z_1) & \mu_{RoS}(x_1,z_2) & \mu_{RoS}(x_1,z_3) \\ \mu_{RoS}(x_2,z_1) & \mu_{RoS}(x_2,z_2) & \mu_{RoS}(x_2,z_3) \\ \mu_{RoS}(x_3,z_1) & \mu_{RoS}(x_3,z_2) & \mu_{RoS}(x_3,z_3) \end{bmatrix} \end{array}$$

- Aplicando a regra de composição Max-Min, obtêm-se os elementos da matriz $RoS(x,z)$, dados por:

$\mu_{RoS}(x_1,z_1)$ = max{min(0.1,0.2); min(0,6,0.4); min(0.4,1.0); min(0.9,0.9)} = 0.9

$\mu_{RoS}(x_1,z_2)$ = max{min(0.1,0.8); min(0,6,0.3); min(0.4,0.0); min(0.9,0.7)} = 0.7

$\mu_{RoS}(x_1,z_3)$ = max{min(0.1,0.6); min(0,6,0.1); min(0.4,0.7); min(0.9,0.2)} = 0.4

- De maneira similar, obter-se-iam os demais elementos, dados por:

$\mu_{RoS}(x_2,z_1) = 0.8$; $\mu_{RoS}(x_2,z_2) = 0.8$; $\mu_{RoS}(x_2,z_3) = 0.7$

$\mu_{RoS}(x_3,z_1) = 0.4$; $\mu_{RoS}(x_3,z_2) = 0.5$; $\mu_{RoS}(x_3,z_3) = 0.5$

5. Composição de Relações Fuzzy

Composição Max-Prod (Aspectos conceituais)

- Sejam duas relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente nos produtos cartesianos discretos $X_x Y$ e $Y_x Z$. A composição do tipo Max-Prod efetuadas sobre as matrizes representando $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida por:

$$R \bullet S(x,z) = \max_{y \in Y}\{\mu_R(x,y) * \mu_S(y,z)\}$$

onde a matriz resultante $R \bullet S$ está agora definida no produto cartesiano $X_x Z$.

- Como exemplo, sejam as relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente em $X_x Y$ e $Y_x Z$, representadas pelas seguintes matrizes:

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

13

5. Composição de Relações Fuzzy

Composição Max-Prod (Exemplo numérico)

- A matriz representando a composição Max-Prod de $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida pelos seguintes elementos:

$$R \bullet S(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_{R\bullet S}(x_1,z_1) & \mu_{R\bullet S}(x_1,z_2) & \mu_{R\bullet S}(x_1,z_3) \\ \mu_{R\bullet S}(x_2,z_1) & \mu_{R\bullet S}(x_2,z_2) & \mu_{R\bullet S}(x_2,z_3) \\ \mu_{R\bullet S}(x_3,z_1) & \mu_{R\bullet S}(x_3,z_2) & \mu_{R\bullet S}(x_3,z_3) \end{bmatrix} \end{array}$$

- Aplicando a regra de composição Max-Prod, obtêm-se os elementos da matriz $R \bullet S(x,z)$, dados por:

$\mu_{R\bullet S}(x_1,z_1)$ = max{ (0.1*0.2); (0.6*0.4); (0.4*1.0); (0.9*0.9)} = 0.81

$\mu_{R\bullet S}(x_1,z_2)$ = max{ (0.1*0.8); (0.6*0.3); (0.4*0.0); (0.9*0.7)} = 0.63

$\mu_{R\bullet S}(x_1,z_3)$ = max{ (0.1*0.6); (0.6*0.1); (0.4*0.7); (0.9*0.2)} = 0.28

- De maneira similar, obter-se-iam os demais elementos, dados por:

$\mu_{R\bullet S}(x_2,z_1) = 0.80$; $\mu_{R\bullet S}(x_2,z_2) = 0.64$; $\mu_{R\bullet S}(x_2,z_3) = 0.56$

$\mu_{R\bullet S}(x_3,z_1) = 0.28$; $\mu_{R\bullet S}(x_3,z_2) = 0.40$; $\mu_{R\bullet S}(x_3,z_3) = 0.30$

14

5. Composição de Relações Fuzzy

Composição Max-Média (Aspectos conceituais)

- Sejam duas relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente nos produtos cartesianos discretos $X_x Y$ e $Y_x Z$. A composição do tipo Max-Média efetuadas sobre as matrizes representando $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida por:

$$R \oplus S(x,z) = \max_{y \in Y}\{\frac{1}{2}(\mu_R(x,y) + \mu_S(y,z))\}$$

onde a matriz resultante $R \oplus S$ está agora definida no produto cartesiano $X_x Z$.

- Como exemplo, sejam as relações fuzzy $R(x,y)$ e $S(y,z)$, definidas respectivamente em $X_x Y$ e $Y_x Z$, representadas pelas seguintes matrizes:

$$R(x,y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 & 0.9 \\ 0.8 & 1.0 & 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S(y,z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \\ 0.9 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

15

5. Composição de Relações Fuzzy

Composição Max-Média (Exemplo numérico)

- A matriz representando a composição Max-Média de $R(x,y)$ e $S(y,z)$ é definida pelos seguintes elementos:

$$R \oplus S(x,z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_{R\oplus S}(x_1,z_1) & \mu_{R\oplus S}(x_1,z_2) & \mu_{R\oplus S}(x_1,z_3) \\ \mu_{R\oplus S}(x_2,z_1) & \mu_{R\oplus S}(x_2,z_2) & \mu_{R\oplus S}(x_2,z_3) \\ \mu_{R\oplus S}(x_3,z_1) & \mu_{R\oplus S}(x_3,z_2) & \mu_{R\oplus S}(x_3,z_3) \end{bmatrix} \end{array}$$

- Aplicando a regra de composição Max-Média, obtêm-se os elementos da matriz $R \oplus S(x,z)$, dados por:

$\mu_{R\oplus S}(x_1,z_1) = \max\{½(0.1+0.2);\ ½(0.6+0.4);\ ½(0.4+1.0);\ ½(0.9+0.9)\} = 0.90$

$\mu_{R\oplus S}(x_1,z_2) = \max\{½(0.1+0.8);\ ½(0.6+0.3);\ ½(0.4+0.0);\ ½(0.9+0.7)\} = 0.80$

$\mu_{R\oplus S}(x_1,z_3) = \max\{½(0.1+0.6);\ ½(0.6+0.1);\ ½(0.4+0.7);\ ½(0.9+0.2)\} = 0.55$

- De maneira similar, obter-se-iam os demais elementos, dados por:

$\mu_{R\oplus S}(x_2,z_1) = 0.90$; $\mu_{R\oplus S}(x_2,z_2) = 0.80$; $\mu_{R\oplus S}(x_2,z_3) = 0.75$

$\mu_{R\oplus S}(x_3,z_1) = 0.60$; $\mu_{R\oplus S}(x_3,z_2) = 0.65$; $\mu_{R\oplus S}(x_3,z_3) = 0.55$

16

Fim da Apresentação

EPC-2

(Data de Entrega ➔ 16/09/2019)

Núcleo de Pesquisa em
AUTOMAÇÃO INTELIGENTE
de Processos e Sistemas

17