数值分析 Numerical Analysis

Lecture 15：常微分方程初值问题的数值解法 Ordinary Differential Equations-2

蹇微著

邮箱：wzqian@suda.edu.cn

苏州大学，计算机科学与技术学院

办公室：理工楼543

目 录

6.3 龙格-库塔(Runge-Kutta)公式

根据中值定理有

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = (x_{i+1} - x_i)y'(\xi)$$
$$= hf(\xi, y(\xi)),\ \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

问题本质：对平均斜率$f(\xi, y(\xi))$的近似。

Recall:

改进欧拉公式

$$\begin{cases} K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \end{cases}$$

6.3二阶龙格-库塔公式

二阶龙格-库塔公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + ah, y_i + bhK_1) \end{cases}$$

变形欧拉公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hK_2 \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_1\right) \end{cases}$$

推导

6.3四阶龙格-库塔公式(RK-4)

四阶龙格-库塔公式

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 = f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_2\right) \\
K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)
\end{cases}
$$

四阶龙格-库塔公式的编程形式

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = \left\{\left[\left(y_i + \dfrac{1}{3}A_2K_1\right) + \dfrac{1}{3}A_3K_2\right] + \dfrac{1}{3}A_4K_3\right\} + \dfrac{h}{6}K_4 \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f(x_i + A_1, y_i + A_1K_1) \\
K_3 = f(x_i + A_2, y_i + A_2K_2) \\
K_4 = f(x_i + A_3, y_i + A_2K_3) \\
A_1 = A_2 = \dfrac{h}{2}, A_3 = A_4 = h
\end{cases}
$$

6.1.2 经典龙格-库塔算法

算法 6.2 （经典 R-K 法）

(1)输入步长 h，节点个数 N，初始点 x_0，初值 y_0；

(2)令 $T=x_0, y=y(x_0), A_1=\dfrac{h}{2}, A_2=A_1, A_3=h, A_4=h$；

(3)令 $x=T, z_1=y$；

(4)对 $j=2,3,\cdots,N$ 计算

① $D=f(T,y),\ b=y$；

② 对 $k=1,2,3.$计算

$$y=z_{j-1}+A_kD,\ b=b+A_{k+1}\frac{D}{3},\quad TT=T+A_k,$$

$$D=f(TT,y);$$

③ 令 $y=b+\dfrac{h}{6}D,\ z_j=y,\ T=T+h$；

(5)$T=x$；

(6)输出 $z=(z_1\ z_2\cdots\ z_N)^T$。

龙格-库塔公式的步长自动选择：Richardson外推法

6.1.2 龙格-库塔算法举例

例 6.3 取 $h=0.2$,用经典 R-K 法计算例 6.1 的初值问题。

$$\begin{cases} y' = xe^{-x} - y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

解 这时经典 R-K 公式为

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = x_i e^{-x_i} - y_i \\ K_2 = (x_i + \dfrac{h}{2})e^{-(x_i+\frac{h}{2})} - (y_i + \dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3 = (x_i + \dfrac{h}{2})e^{-(x_i+\frac{h}{2})} - (y_i + \dfrac{h}{2}K_2) \\ K_4 = (x_i + h)e^{-(x_i+h)} - (y_i + hK_3) \end{cases}$$

以 $h=0.2$ 计算,结果见表 6-4。

表 6-3 经典 R-K 公式的计算结果

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\|y(x_i)-y_i\|$
0	1	1	0
0.2	0.835 110	0.835 105	4×10^{-6}
0.4	0.723 952	0.723 946	7×10^{-6}
0.6	0.647 605	0.647 598	7×10^{-6}
0.8	0.593 121	0.593 114	7×10^{-6}
1	0.551 826	0.551 819	7×10^{-6}

6.4向一阶方程组与高阶方程的推广

对于一阶方程组初始值问题

$$\begin{cases} y'_1(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \qquad \vdots \\ y'_n(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \cdots, y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$

向量形式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ \quad y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

分量形式

$$\begin{cases} y_{1i+1}(x) = y_{1i} + hf_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_{2i+1}(x) = y_{1i} + hf_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \qquad \vdots \\ y_{m+1}(x) = y_m + hf_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 0,1,2, \dots, N-1) \\ y_{10} = y_1(x_0), y_{20} = y_2(x_0), \cdots, y_{n0} = y_n(x_0) \end{cases}$$

6.4 向一阶方程组与高阶方程的推广

四阶龙格-库塔公式推广形式

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_2) \\
K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3) \\
y_0 = y(x_0)
\end{cases}
$$

6.4 向一阶方程组与高阶方程的推广

四阶龙格-库塔公式分量形式

$$\begin{cases} y_{mi+1} = y_{mi} + \frac{h}{6}(K_{m1} + 2K_{m2} + 2K_{m3} + K_{m4}) \\ K_{m1} = f_m(x_i, y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}) \\ K_{m2} = f_m(x_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{h}{2}K_{11}, \ldots, y_{ni} + \frac{h}{2}K_{n1}) \\ K_{m3} = f_m(x_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{h}{2}K_{12}, \ldots, y_{ni} + \frac{h}{2}K_{n2}) \\ K_{m4} = f_m(x_i + h, y_{1i} + hK_{13}, \ldots, y_{ni} + hK_{n3})(m = 1,2, \ldots, n; i = 0,1,2, \ldots, N-1) \\ y_{10} = y_1(x_0), y_{20} = y_2(x_0), \cdots, y_{n0} = y_n(x_0) \end{cases}$$

6.4 举例

例 6.4 分别应用推广的欧拉公式和经典 R-K 公式求解一阶常微分方程组初值问题

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1 \end{cases}$$

并与精确解 $y_1 = e^x \sin x, y_2 = e^x \cos x$ 比较。

解 应用式(6-17)和式(6-18)，取步长 $h=0.2$ 计算，结果见表 6-5。

表 6-5 欧拉法与经典 R-K 法求解一阶常微分方程组初值问题的计算结果比较

x	欧拉法	经典 R-K 法	精确解
0.2	(0.2 1.2)	(0.246 27 1.197 07)	(0.242 66 1.197 06)
0.4	(0.48 1.4)	(0.580 98 1.374 08)	(0.580 94 1.374 06)
0.6	(0.856 1.584)	(1.028 91 1.503 88)	(1.028 85 1.503 86)
0.8	(1.344 1.729 6)	(1.596 62 1.550 57)	(1.596 51 1.550 55)
1.0	(1.953 72 1.806 72)	(2.287 53 1.468 69)	(2.287 36 1.468 69)

例 6.5 对于以下三阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''' - y' - 10e^x \sin x = 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = -4, y''(0) = -6 \end{cases}$$

试分别以欧拉法和四阶经典 R-K 法求解之，并与精确解 $y(2) = -e^x(\cos x + 3\sin x)$ 比较。

解 应用式(6-18)和式(6-19)，取步长 $h=0.1$ 计算，结果见表 6-6。

表 6-6 欧拉法和经典 R-K 法求解三阶常微分方程初值问题的计算结果比较

x	欧拉法	经典 R-K 法	精确解
0.1	−1.4	−1.430 65	−1.430 65
0.2	−1.86	−1.925 02	−1.925 02
0.3	−2.384	−2.486 30	−2.486 30
0.4	−2.975 5	−3.116 89	−3.116 89
0.5	−3.637 30	−3.818 20	−3.818 21

作业15

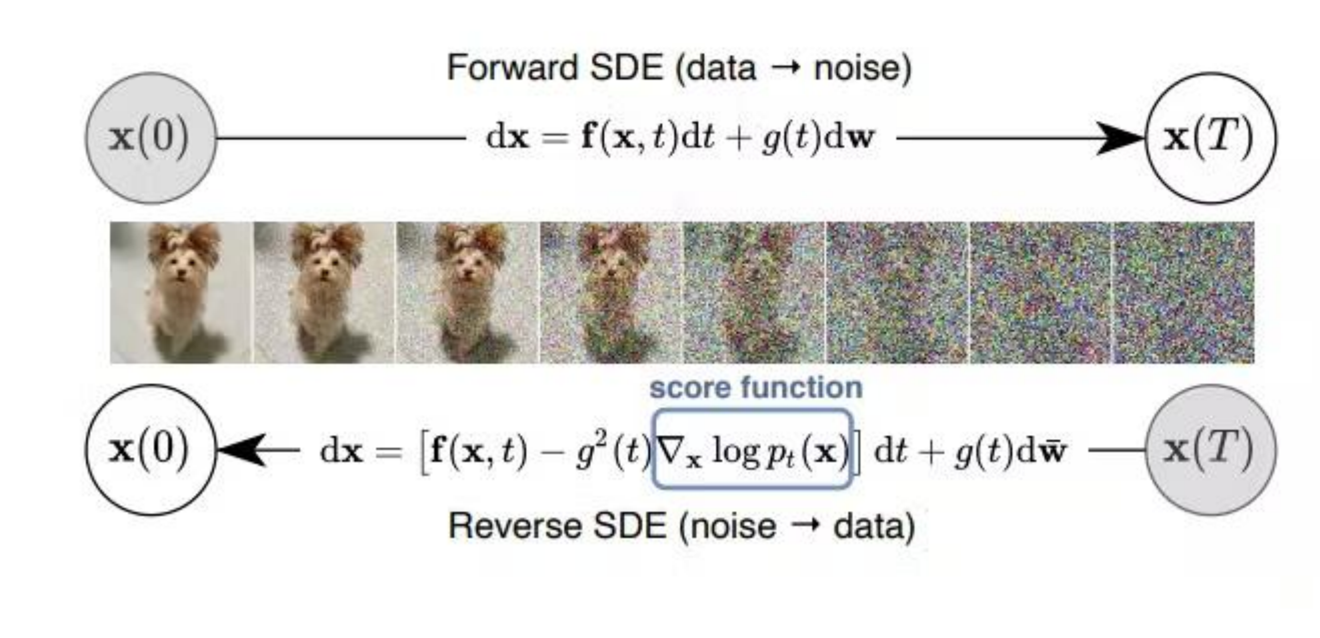
11. 取步长 $h=0.2$，用四阶 R-K 公式求常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = x^2 + x^3 y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

在 $x=2$ 处的近似解（保留四位小数）。

作业以word格式将**推导**，**代码**，（可视化）**运行结果**等（控制文件大小，不要粘贴代码图片，文件名：学号_姓名_作业15）发到助教（小沈）邮箱：20245227049@stu.suda.edu.cn。

Appendix



Forward SDE (data → noise)
$\mathbf{x}(0)$
$\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}\mathbf{w}$
$\mathbf{x}(T)$
score function
$\mathbf{x}(0)$
$\mathrm{d}\mathbf{x} = \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - g^2(t)\boxed{\nabla_{\mathbf{x}} \log p_t(\mathbf{x})}\right] \mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}\bar{\mathbf{w}}$
$\mathbf{x}(T)$
Reverse SDE (noise → data)


Thanks