数值分析 Numerical Analysis
Lecture 7：函数插值Interpolation-1

骞微著

苏州大学，计算机科学与技术学院

邮箱：wzqian@suda.edu.cn
办公室：理工楼543

函数插值

1. **多项式插值**
2. **Lagrange插值**
3. Newton插值
4. 分段低次插值
5. Hermite插值
6. 三次样条插值

插值问题Interpolation

设$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续，并且在$[a,b]$内有n+1个不同的点，

$$a \le x_0 < x_1 \dots < x_n \le b$$

其值分别为$y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$。如果存在一个较简单的函数P$(x)$使得

$$P(x_i) = y_i, (i = 0, \dots, n) \qquad (4-1)$$

则称P(x)是$f(x)$的**插值函数**，区间$[a,b]$为**插值区间**，$x_i(i=0,\dots,n)$为**插值节点**，式（4-1）为**插值条件**。

注意：插值节点可以不按递增排列，但必须确保互不相同！

多项式插值

设$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续，并且在$[a,b]$内有n+1个不同的点，

$$a \le x_0 < x_1 \ldots < x_n \le b$$

其值分别为$y_0=f(x_0),\ldots,y_n=f(x_n)$。

当P(x)为不超过n次的代数多项式时，相应的插值方法称为多项式插值。即寻找

$$P(x)=c_0+c_1x+,\ldots,+c_nx^n,(i=0,\ldots,n)$$

使得

$$P(x_i)=y_i,(i=0,\ldots,n)$$

多项式插值存在性和唯一性

定理4.1 在n+1个互异节点$x_0, x_1 \ldots, x_n$上满足插值条件（4-1）的次数不超过n次的插值多项式$P_n(x)$存在且唯一。

证 记 $P_n(x) = \sum_{k=0} a_k x^k \quad (a_0, a_1, \cdots, a_n \text{ 为实数}) \qquad (4\text{-}2)$

则由插值条件(4-1)得

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

即有 $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{y} \qquad (4\text{-}3)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

其系数行列式为范德蒙(Vandermonde)行列式，即有

$$|\boldsymbol{A}| = V_n(x_0, x_1 \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \neq 0$$

所以，方程组(4-3)的解存在且惟一，这说明由式(4-2)表示的$P_n(x)$存在且惟一，证毕。

多项式插值举例：线性插值

求线性插值函数满足：$P(x_0) = y_0$，$P(x_1) = y_1$。由点斜式得：

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = y_0 - \frac{y_0(x - x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0} = y_0 \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

令$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$， $l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$， 则$P(x)$就可以表示成 $l_0(x)$和 $l_1(x)$的线性组合, 即

$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

并且有

$$l_0(x_0) = 1, l_0(x_0) = 0$$

$$l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1$$

多项式插值举例：抛物线插值

求一个抛物线插值函数满足：$P(x_0) = y_0$，$P(x_1) = y_1$，$P(x_2) = y_2$。

如果能构造出三个二次多项式 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ 满足

$$l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0, l_0(x_2) = 0$$

$$l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1, l_1(x_2) = 0$$

$$l_2(x_0) = 0, l_2(x_1) = 0, l_1(x_2) = 1$$

则由插值条件可知, P(x) 可以表示成

$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

多项式插值举例：抛物线插值

求由于 $l_0(x)$是二次多项式, 且满足 $l_0(x_1) = l_0(x_2) = 0$, 因此 $l_0(x)$可以设为

$$l_0(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

其中α是待定系数。将$l_0(x_0) = y_0$ 代入可得$\alpha = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$, 所以

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

同理可得

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

插值多项式插值的基函数插值法

为什么 P(x) 可以写成 $l_0(x), l_1(x)$ 和 $l_2(x)$ 的线性组合 →成

$l_0(x), l_1(x)$ 和 $l_2(x)$组成了 $\mathbb{H}_2(x) \triangleq$ 次数不超过 2 的多项式的

全体 的一组基, 而 p(x) $\in \mathbb{H}_2(x)$. 这种利用基函数来计算插值

函数的方法就是基函数插值法.

插值多项式插值的基函数插值法

令$\mathbb{H}_n(x) \triangleq$ {所有次数不超过 n 的实系数多项式组成的集合} → n +1维线性空间

n 次多项式插值就是在 $\mathbb{H}_n$ 中寻找一个多项式 P(x), 使得插值条件成立. 设 $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$ 是 $\mathbb{H}_n$的一组基, 则 P(x) 可以表示成

$$P(x) = \alpha_0\phi_0(x) + \alpha_1\phi_1(x) + \cdots + \alpha_n\phi_n(x)$$

多项式插值的两个关键问题:

1) 寻找合适的基函数;
2) 确定插值多项式在这组基下的线性表出系数.

Lagrange插值

定义 设$l_k(x)$是n次多项式，且在插值节点$x_i(i=0,\ldots,n)$上满足

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1, i=k\\0, i\neq k\end{cases}, i,k=0,1,2,\ldots,n$$

则称$l_k(x_i)$为节点$x_i(i=0,\ldots,n)$上的n次Lagrange基函数。

由于$x_0,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n$为$l_k(x)$的零点，所以设

$$l_k(x_i)=\alpha(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$$

将$l_k(x_k)=1$带入可得$\alpha=\dfrac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

Lagrange插值

将$l_k(x_k)=1$带入可得$\alpha=\frac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

故

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

1)可证明$l_0(x), l_1(x),\dots, l_n(x)$线性无关，因此构成$\mathbb{H}_n(x)$的一组基。

2) $l_0(x), l_1(x),\dots, l_n(x)$与插值节点有关但与f(x)无关。

基于Lagrange基函数的插值多项式

插值多项式可以写成

$$P(x)=a_0l_0(x)+a_1l_1(x)+\cdots+a_nl_n(x)$$

将插值条件$P(x_i)=y_i$代入可得

$$a_i=y_i, \mathrm{i}=0,1,2,\ldots,\mathrm{n}$$

因此$P(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)$。

这个多项式记为Lagrange多项式：

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

Lagrange插值举例

已知函数$f(x) = \ln(x)$的函数值如下：

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
f(x)	−0.9163	−0.6931	−0.5108	−0.3567	−0.2231

试分别用线性插值和抛物线插值计算 ln(0.54) 的近似值.

线性插值: 取 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$, 根据 Lagrange 插值公式, 可得 f(x) 在区间 [0.5, 0.6] 上的线性插值为

$$L_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \approx 0.1823x - 1.6046$$

得 ln(0.54) ≈ −0.6202

Lagrange插值举例

已知函数$f(x) = \ln(x)$的函数值如下：

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
f(x)	−0.9163	−0.6931	−0.5108	−0.3567	−0.2231

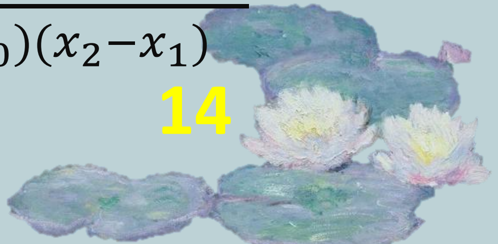
试分别用线性插值和抛物线插值计算 ln(0.54) 的近似值.

抛物线线插值: 取 $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.6$, 根据 Lagrange 插值公式, 可得 f(x) 在区间 0.54上的近似值为

$$f(0.54) \approx L_2(0.54)$$

$$= y_0 \frac{(0.54-x_1)(0.54-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(0.54-x_0)(0.54-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(0.54-x_0)(0.54-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\approx -0.6153$$



插值余项

记 Lagrange 插值多项式的余项为

$$R_n(x) \triangleq f(x) - L_n(x)$$

定理： 设$f(x) \in C^n[a,b]$（n阶连续可导）且$f^n(x)$在(a,b)内存在，则对$\forall x \in [a,b]$,都存在$\xi_x \in (a,b)$使得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\cdots(x - x_n)$，$\xi_x$与x相关。

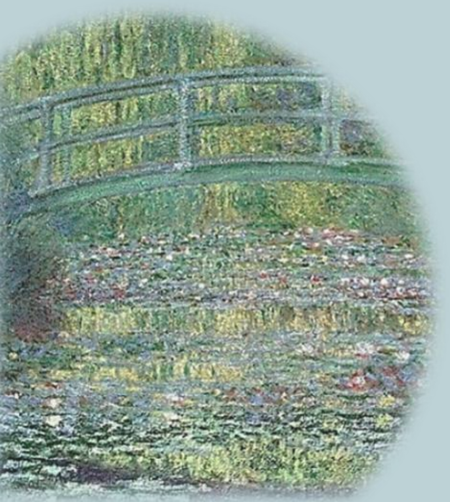
线性插值与抛物线插值的余项

线性插值的余项（假设$x_0 < x_1$）：

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x - x_0)\,(x - x_1), \xi_x \in (x_0, x_1)$$

抛物线插值的余项（假设$x_0 < x_1 < x_2$）：

$$R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi_x)(x - x_0)\,(x - x_1)(x - x_2), \xi_x \in (x_0, x_2)$$



计算插值余项时的注意项

1) 余项公式只有当 f(x) 的高阶导数存在时才能使用;

2) ξ_x与x有关, 通常无法确定, 因此在实际应用中, 通常是估计其上界, 即

$$\text{如果有} \max_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}\text{，则} |R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|.$$

3) 在利用插值方法计算插值点 x 上的近似值时, 应尽量选取与 x 相近的插值节点.

4) 如果 f(x) 是一个次数不超过 n 的多项式, 则 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, 因此 $R_n(x) \equiv 0$.

推论 当 f(x) 为一个次数不超过 n 的多项式时, 其 n 次插值多项式是精确的.

插值余项计算举例

已知函数$f(x) = \ln(x)$的函数值如下：

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
f(x)	−0.9163	−0.6931	−0.5108	−0.3567	−0.2231

试分别计算x=0.54时线性插值和抛物线插值的插值余项.

线性插值: 取 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$, 则插值余项为

$$R_1(x) = \left|f''^{(\xi_x)}(x - x_0)\,(x - x_1)\right| = \frac{1}{2}|\xi_x^{-2}(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)| \leq 2 \times 0.04 \times 0.06 = 0.048$$

插值余项计算举例

已知函数$f(x) = \ln(x)$的函数值如下：

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
f(x)	−0.9163	−0.6931	−0.5108	−0.3567	−0.2231

试分别计算x=0.54时线性插值和抛物线插值的插值余项.

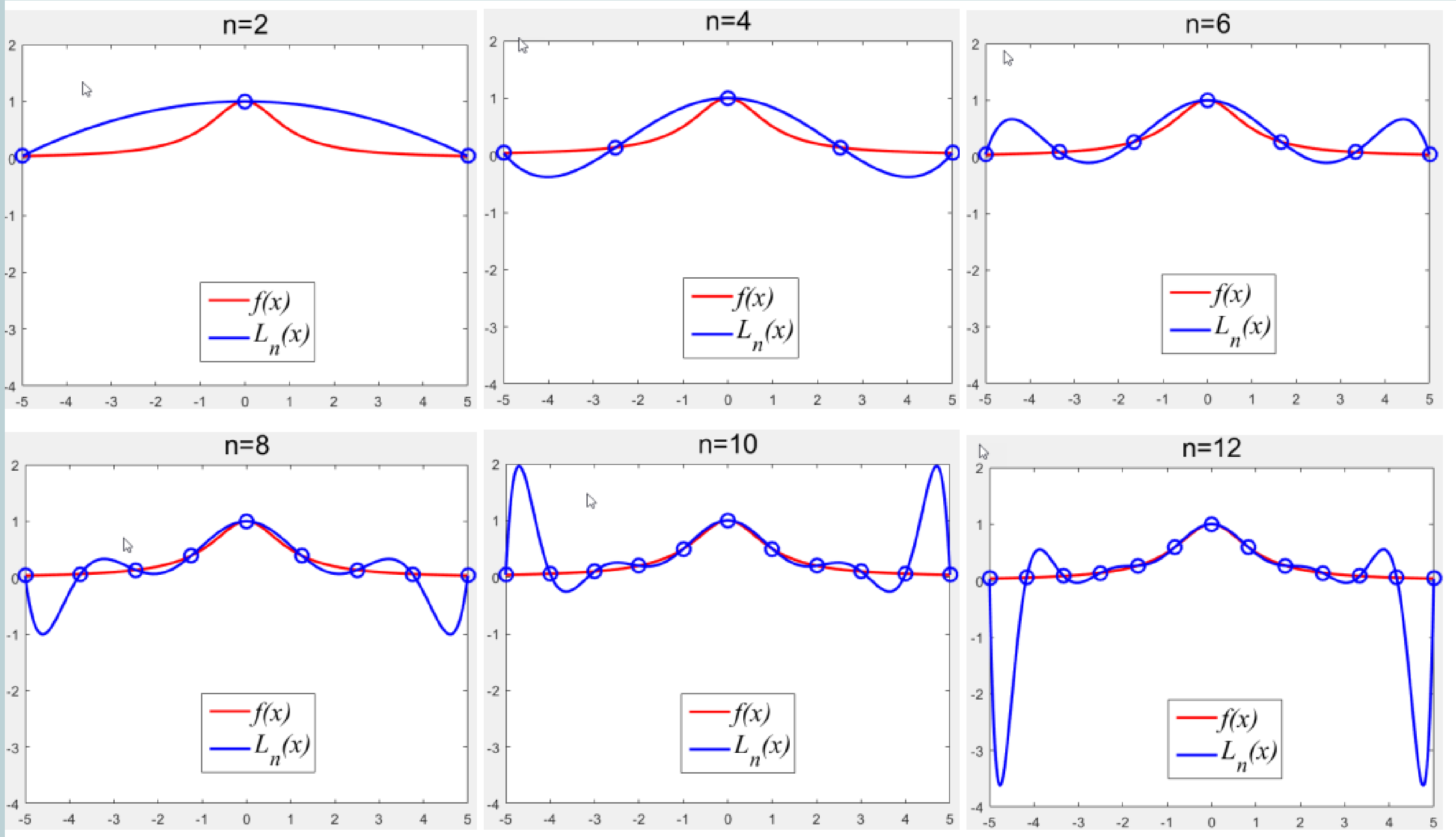
抛物线插值:取 $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.6$,则插值余项为

$$R_2(x) = \left|\frac{1}{6} f'''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\right| = \frac{2}{6}|\xi_x^{-3}(0.54 - 0.4)(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6|$$

$$\leq \frac{125}{8} \times 0.14 \times 0.04 \times 0.06 = 0.00175.$$

插值多项式次数与插值精度

思考：是不是插值多项式次数越高，插值精度就越好？



作业7

1. 对以下数据表

x	-0.1	0.1	0.2	0.4	0.9
y	-2	1	2	7	14

分别用线性和二次拉格朗日插值多项式求 $y(0.3)$ 的近似值。

并计算相应的误差余项。

作业以word格式将推导，代码，（可视化）运行结果等（控制文件大小，不要粘贴代码图片， 文件名：姓名_学号_作业7）发到助教（小沈）邮箱： 20245227049@stu.suda.edu.cn 。


Thanks