



# 数值分析 Numerical Analysis

## Lecture 11: 插值型数值微分

### Numerical Differentiation

蹇微著

苏州大学，计算机科学与技术学院

邮箱: [wzqian@suda.edu.cn](mailto:wzqian@suda.edu.cn)

办公室: 理工楼543



# 目录

1 插值型数值微分公式

2 插值型数值积分

1) 牛顿柯特斯公式

2) 复合求积公式

3) 误差分析与步长减半算法



# 1 插值型数值微分公式

$$\text{由 } f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (5-1)$$

$$\text{得 } f'(x) - L'_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x) + \frac{1}{(n+1)!} \frac{df^{(n+1)}(\xi)}{dx} \omega_{n+1}(x)$$

当  $x$  为插值节点  $x_i$  时, 上式简化为

$$f'(x_i) - L'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega'_{n+1}(x) \Big|_{x=x_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad (5-2)$$

故一般限于对节点上的导数值采用插值多项式的相应导数值进行近似计算, 以便估计误差。

$$\text{一般地 } L_n^{(k)}(x_i) \approx f^{(k)}(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots)$$

这类公式称为**插值型数值微分公式**。



# 1.1 常用的数值微分公式：两点公式

给定两点上的函数值  $f(x_0), f(x_1)$ ,

$$\because L_1'(x) = \left[ \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right]' = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\because \begin{cases} f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{cases} \quad (5-3a)$$

$$\because \begin{cases} f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \end{cases} \quad (5-3b)$$

这称为**两点公式**。



# 1.1 常用的数值微分公式：三点公式

若给定三点上的函数值  $y_i = f(x_i)$ ,  $x_i = x_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, 2$ , 则由

$$\begin{aligned} L_2'(x) &= \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 \right]' \\ &= \frac{(x-x_1)+(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)+(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)+(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 \end{aligned}$$

得：

$$\begin{cases} f'(x_0) \approx L_2'(x_0) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} & (5-4a) \\ f'(x_1) \approx L_2'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{2h} = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} & (5-4b) \\ f'(x_2) \approx L_2'(x_2) = \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h} & (5-4c) \end{cases}$$

这称为**三点公式**，其中（5—4b）又称为**中点公式**。



# 1.1常用的数值微分公式：三点公式

进一步由  $L_2''(x) = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}$  可得计算公式

$$f''(x_i) \approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \quad (i = 0, 1, 2)$$



## 1.2 数值微分公式的误差分析

两点公式的截断误差为

$$\begin{aligned} f'(x_i) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} &= \frac{f''(\xi(x))}{2} [(x - x_0) + (x - x_1)]_{x=x_i} \\ &= \begin{cases} -\frac{f''(\xi_1)}{2} h & (i=0) \\ \frac{f''(\xi_2)}{2} h & (i=1) \end{cases} \quad (5-6) \end{aligned}$$

这里  $\xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_1)$



# 1.3 数值微分公式的误差分析

三点公式的截断误差为

$$f'(x_i) - L'_2(x_i) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!} [(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)]'_{x=x_i}$$
$$= \begin{cases} \frac{f'''(\xi_1)}{3} h^2 & (i=0) \\ -\frac{f'''(\xi_2)}{6} h^2 & (i=1) \\ \frac{f'''(\xi_3)}{3} h^2 & (i=2) \end{cases} \quad (5-7)$$

这里  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (x_0, x_2)$



# 1.3 数值微分公式的误差分析

为估计二阶导数数值微分公式的误差，可设  $f(x)$  四阶连续可微，故得

$$y_2 = f(x_1 + h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_1) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_1)$$

$$y_0 = f(x_1 - h) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) - \frac{h^3}{3!} f'''(x_1) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_2)$$

这里  $x_1 < \xi_1 < x_2$  ,  $x_0 < \xi_2 < x_1$

$$\begin{aligned} \text{相加得 } y_2 + y_0 &= 2y_1 + h^2 f''(x_1) + \frac{h^4}{4!} [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)] \\ &= 2y_1 + h^2 f''(x_1) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(\xi) \quad (x_0 < \xi < x_2) \end{aligned}$$

从而得到误差估计式

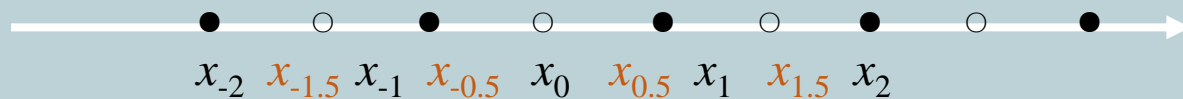
$$f''(x_1) - \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \quad (5-8)$$

# 1.3 数值微分公式的误差分析



$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f'(x_1) - f'(x_{-1}))}{2h} = \frac{f(x_2) - 2f(x_0) + f(x_{-2}))}{4h^2}$$



$$f'(x_0) = \frac{f(x_{0.5}) - f(x_{-0.5})}{h}$$

$$f''(x_0) = \frac{f'(x_{0.5}) - f'(x_{-0.5}))}{h} = \frac{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1}))}{h^2}$$



# 1.4 数值微分举例

**例 5.1** 为计算  $f(x)=\sqrt{x}$  在  $x=2$  处的一阶导数值，我们可选用中点公式

$$G(h) = \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2-h}}{2h}$$

当计算保留四位小数时。

表 5-1 中点公式的计算结果

$h$	$G(h)$	$h$	$G(h)$
1.0	0.366 0	0.005	0.350 0
0.5	0.356 4	0.001	0.350 0
0.1	0.353 5	0.000 5	0.300 0
0.05	0.353 0	0.000 1	0.300 0
0.01	0.353 0		

而精确值为  $f'(2) = 0.353553\dots\dots$ ，可见当  $h=0.1$  时近似结果最好，步长太大或太小计算效果均不好。（为什么？）

# 作业11

1. 对以下数据表

$x$	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2.937 6	6.963 2	13.6	23.500 8	37.318 4	55.705 6

分别用两点公式和三点公式求  $f'(5)$  的近似值, 并与精确值  $f'(5)=8.16$  比较。

3. 利用以下数据表求  $f''(0.4)$  的近似值。

$x$	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55
$f(x)$	0.291 3	0.336 4	0.380 0	0.421 9	0.462 1	0.500 5

作业以word格式将推导, 代码, (可视化) 运行结果等 (控制文件大小, 不要粘贴代码图片, 文件名: 学号\_姓名\_作业11) 发到助教 (小沈) 邮箱: 20245227049@stu.suda.edu.cn 。

Thanks

