



# 数值分析 Numerical Analysis

## Lecture 6: 解线性方程组的迭代法

骞微著

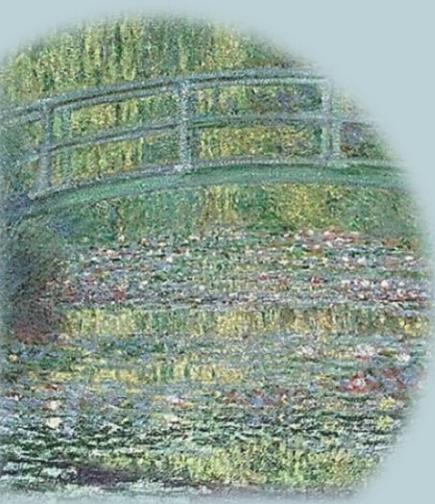
苏州大学，计算机科学与技术学院

邮箱：wzqian@suda.edu.cn

办公室：理工楼543

# 解线性方程组的迭代法

- 1) 解线性方程组的消去法
- 2) 解线性方程组的矩阵分解法
- 3) 解线性方程组的迭代法
  - a. Jacobi方法
  - b. Gauss Seidel方法
  - c. SOR方法



# Jacobi方法

Jacobi 方法是求解方程组的不动点迭代的一种形式。Jacobi 方法的第一步按下列标准方式进行:求解第*i*个方程以得到第*i*个未知量;然后如不动点迭代一样,从某一初始估计开始进行迭代。  
例1: 考虑如下线性方程组

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解得:

$$\begin{cases} u = \frac{5 - v}{3} \\ v = \frac{5 - u}{2} \end{cases}$$

选初始值进行迭代:

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Jacobi方法

选初始值进行迭代:  $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_0}{3} \\ \frac{5 - u_0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - 0}{3} \\ \frac{5 - 0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_1}{3} \\ \frac{5 - u_1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - 5/2}{3} \\ \frac{5 - 5/3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_2}{3} \\ \frac{5 - u_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{25}{12} \end{bmatrix}$$

继续迭代, 收敛到精确解  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

# Jacobi方法

例2：将例1中的方程组按以下顺序给出

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解得：

$$\begin{cases} u = 5 - 2v \\ v = 5 - 3u \end{cases}$$

选初始值进行迭代：

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 2v_0 \\ 5 - 3u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 2v_1 \\ 5 - 3u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 2v_2 \\ 5 - 3u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix}$$

此时迭代发散， Jacobi法无法收敛。

# Gauss-Seidel 迭代法

与 Jacobi 方法密切相关的一种迭代叫做 Gauss-Seidel 方法, Gauss-Seidel 方法与 Jacobi 方法之间仅有的差别是, 前者在每一步用到最新校正过的未知量的值, 即校正发生在当前步。

解例1中的方程组, 选初始值进行迭代:  $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_0}{3} \\ \frac{5 - u_1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - 0}{3} \\ \frac{5 - 5/3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_1}{3} \\ \frac{5 - u_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - 5/3}{3} \\ \frac{5 - 10/9}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{35}{18} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 - v_2}{3} \\ \frac{5 - u_3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{55}{54} \\ \frac{215}{108} \end{bmatrix}$$

继续迭代, 收敛到精确解  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

# Gauss-Seidel迭代法

2) 高斯赛得尔(Gauss-Seidel)迭代法:

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.3 + 0.2x_2 + 0.1x_3 \\ x_2 = 1.5 + 0.2x_1 + 0.1x_3 \\ x_3 = 2 + 0.2x_1 + 0.4x_2 \end{cases}$$

由此构造迭代高斯赛得尔(Gauss-Seidel)公式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.3 + 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1.5 + 0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2 + 0.2x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

任选初值, 进行迭代( $\varepsilon = 10^{-3}$ ):

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1.56 \\ 2.684 \end{bmatrix} \quad \dots \quad x^{(6)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{bmatrix}$$

# 迭代法的公式及矩阵形式

雅可比迭代法与高斯-塞德尔迭代法的公式及矩阵形式

对

$$Ax = b \quad (3-23)$$

以分量表示即

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3-23)'$$

约化便得  $x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n a_{ij}x_j) \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots)$

从而可建立迭代格式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n a_{ij}x_j^{(k)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3-24)$$

雅可比 (Jacobi) 迭代

# 解线性方程组的迭代法

记  $A = D - L - U$ , 这里  $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$  可逆

$$-L = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad -U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n} & \\ \dots & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

则雅可比迭代格式 (3-24) 可用矩阵表示为

$$x^{(k+1)} = \boxed{D^{-1}(L+U)} x^{(k)} + \boxed{D^{-1}b}$$

$M_J$                        $f_J$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 10x_1 = 3 + 2x_2 + x_3 \\ 10x_2 = 15 + 2x_1 + x_3 \\ 5x_3 = 10 + x_1 + 2x_2 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x_1 = 0.3 + 0.2x_2 + 0.1x_3 \\ x_2 = 1.5 + 0.2x_1 + 0.1x_3 \\ x_3 = 2 + 0.2x_1 + 0.4x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

# 解线性方程组的迭代法

对雅可比迭代格式修改得

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3-25)$$

用矩阵表示为

高斯-塞德尔 (G-S) 迭代

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U x^{(k)} + (D - L)^{-1} b$$

$M_{G-S}$

$f_{G-S}$

9

# 解线性方程组的迭代法

$$x^{(k+1)} = \boxed{(D - L)^{-1}U} x^{(k)} + \boxed{(D - L)^{-1}b}$$

$M_{G-S}$

$f_{G-S}$

Jacobi迭代:  $x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U) x^{(k)} + D^{-1}b$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}Lx^{(k)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b$$

Gauss-Seidel迭代:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}Lx^{(k+1)} + D^{-1}Ux^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\Rightarrow Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b$$

$$\Rightarrow (D - L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

# 迭代法的收敛性

**定义 3.2** 设  $n$  阶线性方程组  $Ax=b$  的精确解为  $x^*$

相应的一阶定常迭代格式为

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + f \quad (3-26)$$

( $x = Mx + f$  等价于  $Ax = b$ )

如果其迭代解  $x^{(k)}$  收敛于精确解  $x^*$ ，即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i^{(k)} - x_i^*| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

则称迭代格式 (3-26) 收敛

**命题 3.2** 记  $e_k = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^*| \quad (3-27)$

则  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i^{(k)} - x_i^*| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$  的充分必要条件为  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$

# 迭代法的收敛性

定理 3.5 若一阶定常迭代格式 (3-26) 的迭代矩阵  $M = (m_{ij})_{n \times n}$  满足条件

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}| = \mu < 1 \quad (3-28)$$

则该迭代格式对任何初始向量  $x^{(0)}$  均收敛。

定理 3.6 若一阶定常迭代格式 (3-26) 的迭代矩阵  $M = (m_{ij})_{n \times n}$  满足条件

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}| = \nu < 1 \quad (3-29)$$

则该迭代格式对任何初始向量  $x^{(0)}$  均收敛。

例:  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$

定理 3.7 若雅可比迭代法的迭代矩阵  $M_J = (m_{ij}^J)_{n \times n}$  满足条件 (3-28) 或 (3-29)，则雅可比迭代法与相应的高斯-塞德尔迭代法对任何初始向量  $x^{(0)}$  均收敛。

# 迭代法的收敛性

推论 如果线性代数方程组  $Ax = b$  的系数矩阵  $A$  为严格对角占优矩阵, 即

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n \left|a_{ij}\right| \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3-30)$$

则相应的雅可比迭代法与高斯-塞德尔迭代法对任何初始向量  $x^{(0)}$  均收敛。

例:

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

# 迭代法的收敛性

定理 3.8 一阶定常迭代格式  $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + f$  对任何初始向量均收敛的充分必要条件为其迭代矩阵的谱半径小于1，即

$$\rho(M) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1 \quad (3-31)$$

这里  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  为  $M$  的特征值

# Successive Over-Relaxation (SOR) 迭代法

超松弛(SOR)迭代法的基本思想：将 Gauss-Seidel 迭代法的  $x^{(k+1)}$  与  $x^{(k)}$  加权平均，以获得更好的近似解。

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega_p) x_i^{(k)} + \omega_p \left( \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} \right)$$

其中  $\omega_p$  称为松弛参数。

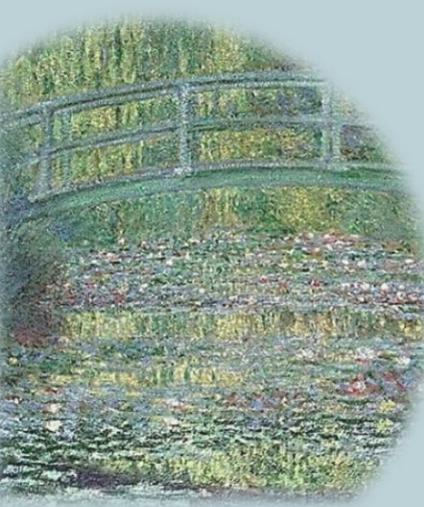
$$x^{(k+1)} = (1 - \omega_p) x^{(k)} + \omega_p D^{-1} (L x^{(k+1)} + U x^{(k)} + b)$$

$$x^{(k+1)} = (D - \omega_p L)^{-1} \left( (1 - \omega_p) D + \omega_p U \right) x^{(k)} + \omega_p (D - \omega_p L)^{-1} b$$

当  $\omega = 1$  时，SOR 即为 G-S 方法，当  $\omega < 1$  时，称为低松弛方法，当  $\omega > 1$  时，称为超松弛方法。在大多数情况下，当  $\omega > 1$  时会取得比较好的收敛效果。

# Conjugate Gradient 共轭梯度法

In mathematics, the **conjugate gradient** method is an algorithm for the numerical solution of particular systems of linear equations, namely those **whose matrix is positive-semidefinite**. The conjugate gradient method is often implemented as an iterative algorithm, applicable to sparse systems that are too large to be handled by a direct implementation or other direct methods such as the Cholesky decomposition. Large sparse systems often arise when numerically solving partial differential equations or optimization problems.



$$\mathbf{r}_0 := \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$$

if  $\mathbf{r}_0$  is sufficiently small, then return  $\mathbf{x}_0$  as the result

$$\mathbf{p}_0 := \mathbf{r}_0$$

$$k := 0$$

repeat

$$\alpha_k := \frac{\mathbf{r}_k^\top \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{A} \mathbf{p}_k}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{r}_{k+1} := \mathbf{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \mathbf{p}_k$$

if  $\mathbf{r}_{k+1}$  is sufficiently small, then exit loop

$$\beta_k := \frac{\mathbf{r}_{k+1}^\top \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^\top \mathbf{r}_k}$$

$$\mathbf{p}_{k+1} := \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k$$

$$k := k + 1$$

end repeat

return  $\mathbf{x}_{k+1}$  as the result



# Generalized Minimal Residual Method

In mathematics, the [generalized minimal residual method \(GMRES\)](#) is an iterative method for the numerical solution of an indefinite [nonsymmetric system of linear equations](#). The method approximates the solution by the vector in a Krylov subspace with minimal residual. The Arnoldi iteration is used to find this vector.

## Generalized Minimum Residual Method (GMRES)

```
x0 = initial guess
r = b - Ax0
q1 = r/||r||2
for k = 1, 2, ..., m
    y = Aqk
    for j = 1, 2, ..., k
        hjk = qjT y
        y = y - hjkqj
    end
    hk+1,k = ||y||2 (If hk+1,k = 0, skip next line and terminate at bottom.)
    qk+1 = y/hk+1,k
    Minimize ||Hck - [|r|2 0 0 ... 0]T||2 for ck
    xk = Qkck + x0
end
```

# Homework 6

11. 取初值  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0.0$ , 分别用雅可比迭代法与高斯-塞德尔迭代法解线性方程组(精度要求为  $\epsilon=10^{-3}$ )。

$$\begin{pmatrix} 3.0 & 0.15 & -0.09 \\ 0.08 & 4.0 & -0.16 \\ 0.05 & -0.3 & 5.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.09 \\ 11.52 \\ 19.20 \end{pmatrix}$$

12. 利用定理 3.8 对以下线性方程组讨论雅可比迭代法与高斯-塞德尔迭代法的收敛性。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

作业以word格式将推导, 代码, (可视化) 运行结果等(控制文件大小, 不要粘贴代码图片, 文件名: 学号\_姓名\_作业6) 发到助教(小王) 邮箱: 20245227027@stu.suda.edu.cn。

Thanks

