

# 算法设计与分析

主讲人：吴庭芳

Email: tfwu@suda.edu.cn

苏州大学

计算机科学与技术学院



# 第五讲 快速排序算法

## 内容提要：

- 快速排序算法的描述
- 快速排序算法的性能
- 快速排序算法的随机化版本
- 排序算法的下界



# 快速排序算法的描述

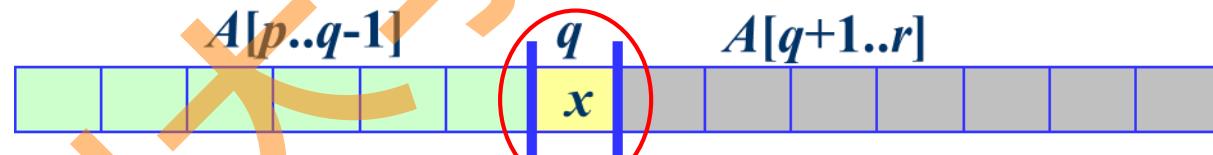
- 快速排序是 C.R.A. Hoare 于 1962 年提出的一种原址排序算法
- 对于包含  $n$  个数的输入数组，快速排序算法在最坏情况下运行时间为  $\Theta(n^2)$
- 但快速排序通常是实际排序应用中最好的选择，因为其平均性能非常好：期望运行时间为  $\Theta(n \lg n)$ ，且其常数因子较小



# 快速排序算法的描述

- 快速排序算法基本思想：采用**分治策略**，将未排序数组分为两部分，然后分别递归调用自身进行排序

- **分解：**数组  $A[p \dots r]$  根据主元  $A[q]$  被**划分**为两个（某个可能为空）子数组  $A[p \dots q-1]$  和  $A[q+1 \dots r]$ ，使得左子数组  $A[p \dots q-1]$  中每个元素都**小于或等于  $A[q]$** ，右子数组  $A[q+1 \dots r]$  中的每个元素**大于  $A[q]$** 。下标  $q$  在这个划分过程中进行计算



- **解决：**递归调用**快速排序算法**，对子数组  $A[p \dots q-1]$  和  $A[q+1 \dots r]$  排序
- **合并：**因为子数组都是原址排序的，不需要进行合并操作



# 快速排序算法的描述

## □ 快速排序伪代码：

```
QUICKSORT( $A, p, r$ )
```

```
1  if  $p < r$ 
2      then  $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$  // 划分过程
3          QUICKSORT( $A, p, q-1$ ) // 对子数组  $A[p...q-1]$  递归调用
4          QUICKSORT( $A, q+1, r$ ) // 对子数组  $A[q+1...r]$  递归调用
```

## □ 数组划分过程 **PARTITION** 是 **QUICKSORT** 算法的关键



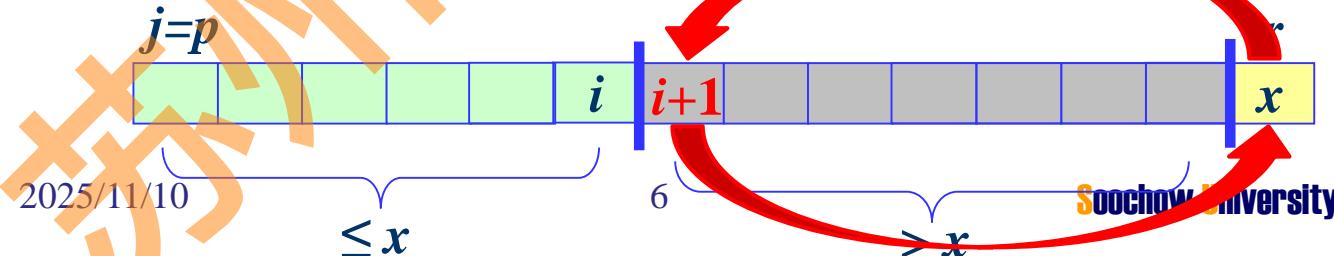
# 快速排序算法的描述

## □ 数组划分过程 PARTITION:

PARTITION( $A, p, r$ )

```
1   $x = A[r]$                                 //  $x$  为主元，围绕  $x$  划分子数组  
2   $i = p - 1$                             //  $i$  记录存储比主元  $x$  小的元素左子数组的最大下标  
3  for  $j = p$  to  $r - 1$   
4    if  $A[j] \leq x$   
5       $i = i + 1$                           //  $i$  往后移动一位，给要换过来的  $A[j]$  空出个位置  
6      exchange  $A[i]$  with  $A[j]$            // 把  $A[j]$  换到新位置，原位置比  $x$  大的元素换到  $j$  位置  
7  exchange  $A[i + 1]$  with  $A[r]$          // 将  $x$  与大于  $x$  部分的第一个元素进行交换  
8  return  $i + 1$                          // 返回主元  $x$  的新下标
```

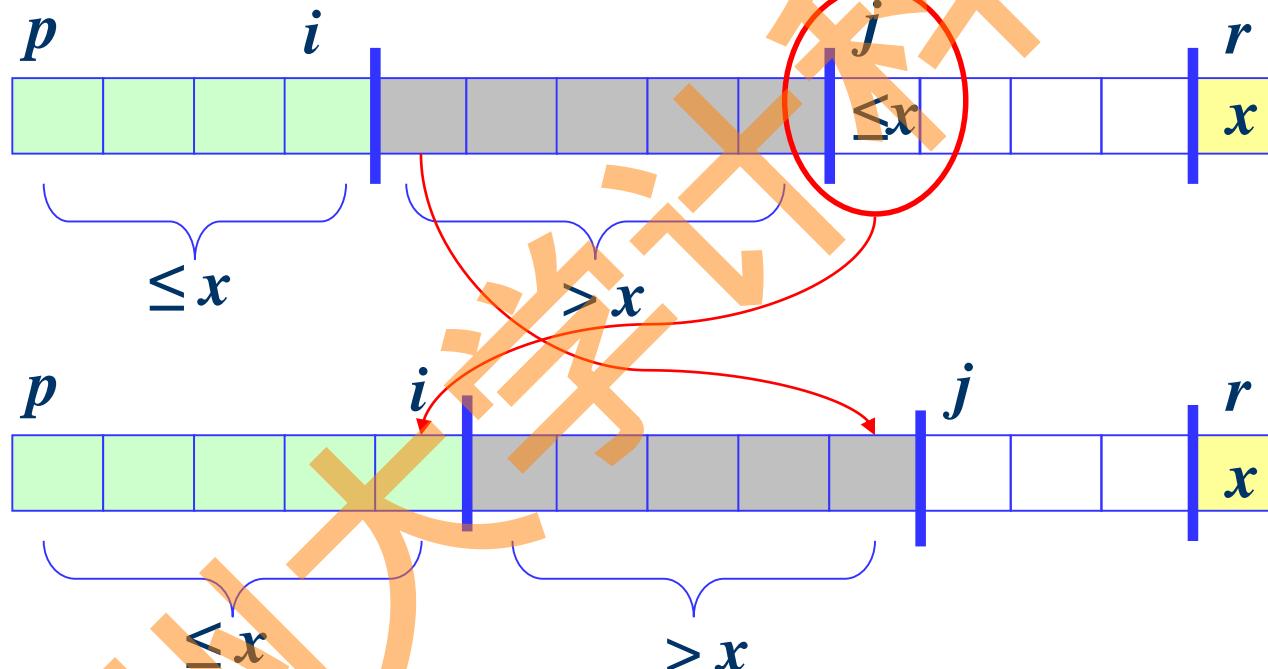
□ PARTITION 在子数组  $A[p \dots r]$  上的执行时间为  $\Theta(n)$ ,  $n=r-p$





# 快速排序算法的描述

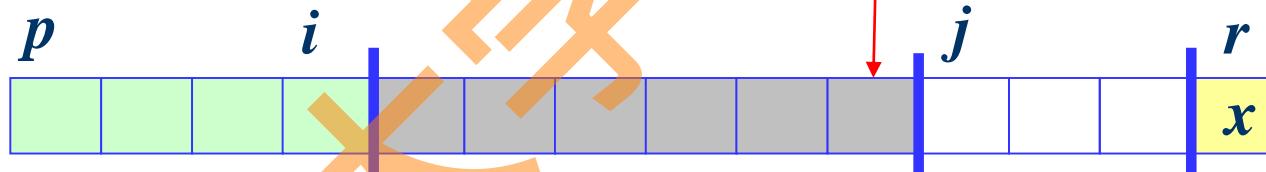
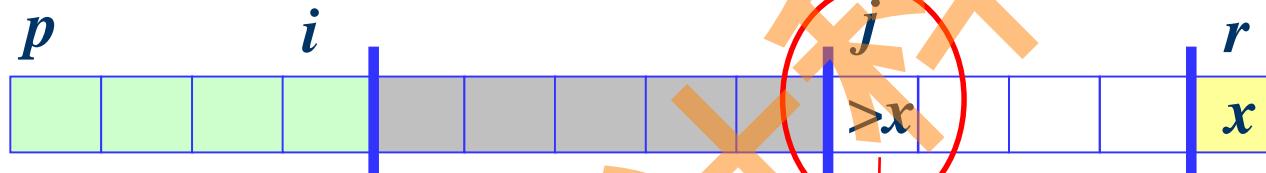
□  $i$  和  $j$  如何改变：





# 快速排序算法的描述

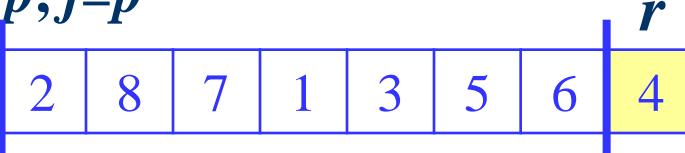
□  $i$  和  $j$  如何改变：



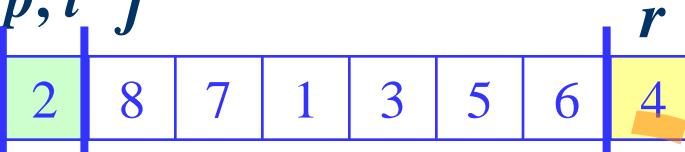


# 快速排序算法的描述

(a)  $i=p-1$   $p, j=p$



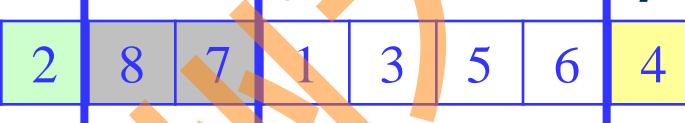
(b)  $p, i \ j$



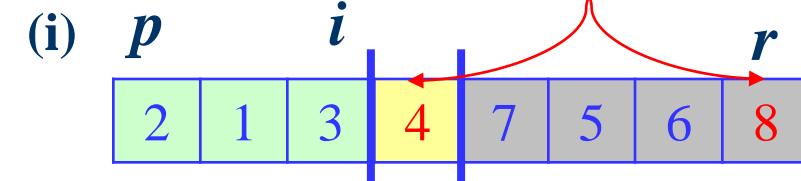
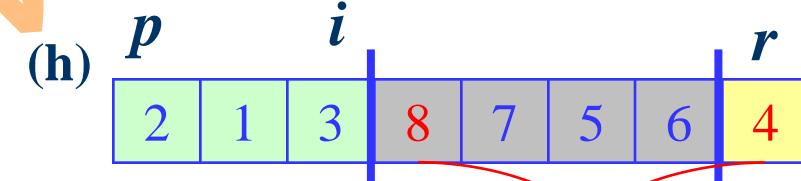
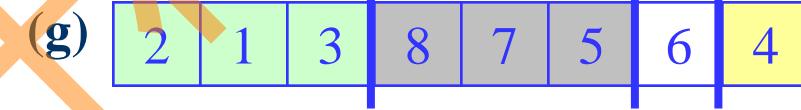
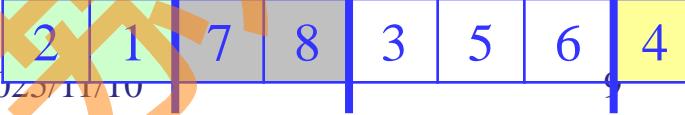
(c)  $p, i \ j$



(d)  $p, i \ j$



(e)  $p, i \ j$





# 第五讲 快速排序算法

内容提要：

- 快速排序算法的描述
- 快速排序算法的性能
- 快速排序算法的随机化版本
- 排序算法的下界



# 快速排序算法的性能

## □ 快速排序算法最坏情况下时间分析

- 当划分产生得到的两个子数组分别包含  $n-1$  个元素和 0 个元素时，比如数组已被排序好，此时快速排序算法的最坏情况发生
- 假设算法的每一次递归调用都出现这种极度不平衡的划分，快速排序算法的运行时间递归式可以表示为：

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

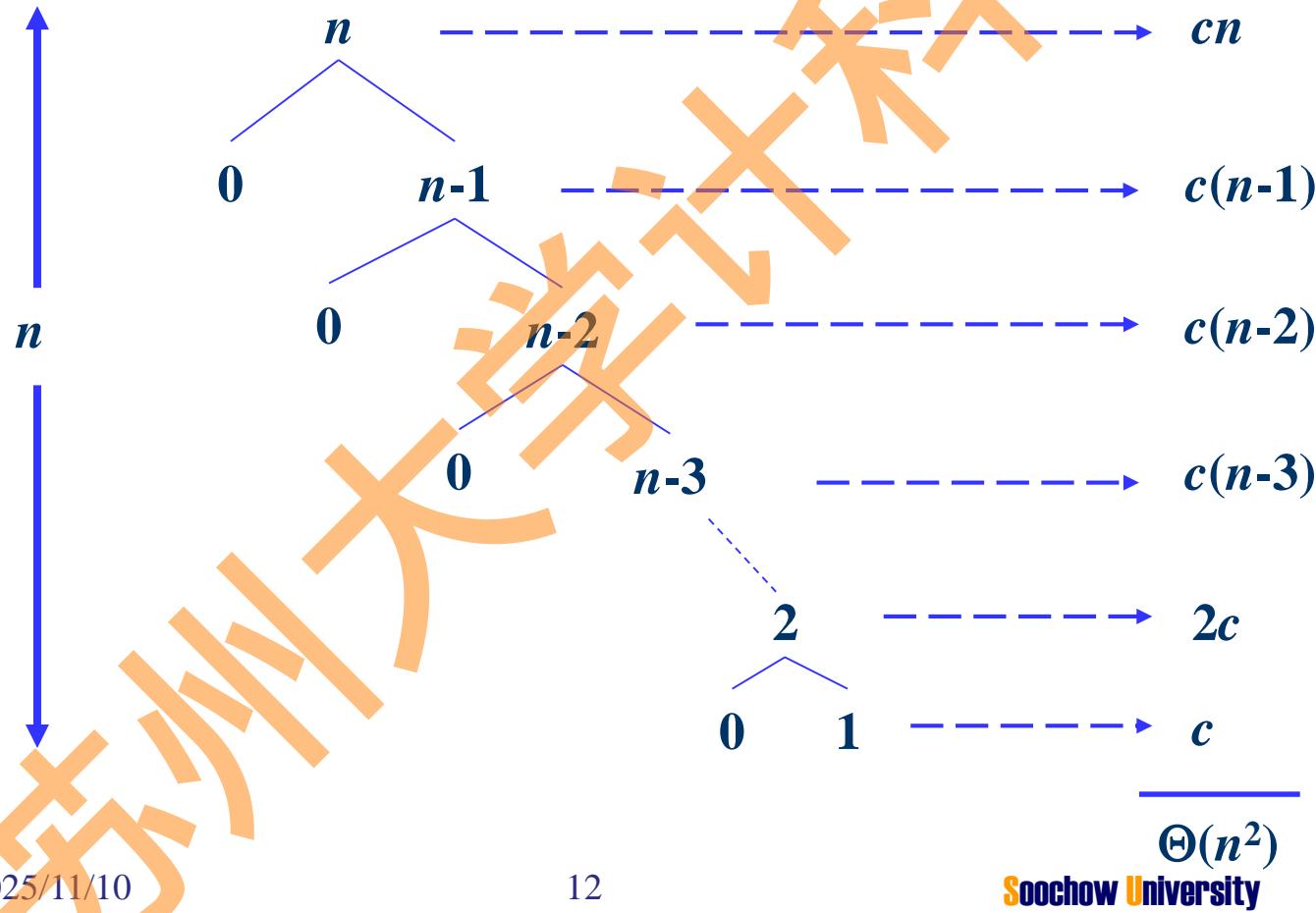
利用代入法求得解为： $T(n) = \Theta(n^2)$

- 因此，如果算法的每一层递归上，划分都是最大程度的不平衡，那么算法的时间复杂度就为： $\Theta(n^2)$



# 快速排序算法的性能

$$T(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$$





# 快速排序算法的最坏情况分析

## □ 快速排序算法最坏情况时间的理论分析

- 前面从直觉上可以判断出最坏情况发生在每次划分过程中产生的两个子数组分别包含  $n-1$  个元素和 0 个元素的时候
- 下面将从理论证明划分过程产生的两个子数组分别包含  $n-1$  个元素和 0 个元素的情况就是最坏情况



# 快速排序算法的最坏情况分析

- 设  $T(n)$  是快速排序算法作用于规模为  $n$  的输入上的最坏情况下的运行时间：

$$T(n) = \max_{0 \leq q \leq n-1} (T(q) + T(n-q-1)) + \Theta(n)$$

因为 PARTITION 过程生成的两个子数组的规模之和总为  $n-1$ ,  
所以参数  $q$  的变化范围是 0 到  $n-1$

- 猜测快速排序的最坏情况运行时间是：  $T(n)=\Theta(n^2)$



# 快速排序算法的最坏情况分析

$$T(n) = \max_{0 \leq q \leq n-1} (T(q) + T(n-q-1)) + \Theta(n)$$

□ 首先证明  $T(n) \leq cn^2$ , 其中  $c$  为常数, 将归纳带入上式, 得到:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \max_{0 \leq q \leq n-1} (cq^2 + c(n-q-1)^2) + \Theta(n) \\ &\leq c \cdot \max_{0 \leq q \leq n-1} (q^2 + (n-q-1)^2) + \Theta(n) \\ &\leq c(n-1)^2 + \Theta(n) \\ &\leq cn^2 - c(2n-1) + \Theta(n) \\ &\leq cn^2 \end{aligned}$$

- 因为在  $[0, n-1]$  上  $q^2 + (n-q-1)^2$  关于  $q$  递减, 所以当  $q=0$  时  $q^2 + (n-q-1)^2$  有最大值  $(n-1)^2$
- 挑选足够大的  $c$ , 使得  $c(2n-1)$  项能够显著大于  $\Theta(n)$  项, 有  $T(n)=O(n^2)$



# 快速排序算法的性能

## □ 快速排序算法最佳情况的时间分析

- 在可能的**最平衡的划分**中，PARTITION 过程得到的两个子数组的规模都不大于  $n/2$ , 其中一个子问题的规模为  $\lfloor n/2 \rfloor$ , 另一个子问题的规模为  $\lceil n/2 \rceil - 1$
- 在这种情况下，通过忽略向下取整和向上取整以及减 1 的操作，**快速排序算法运行时间的递归式为：**

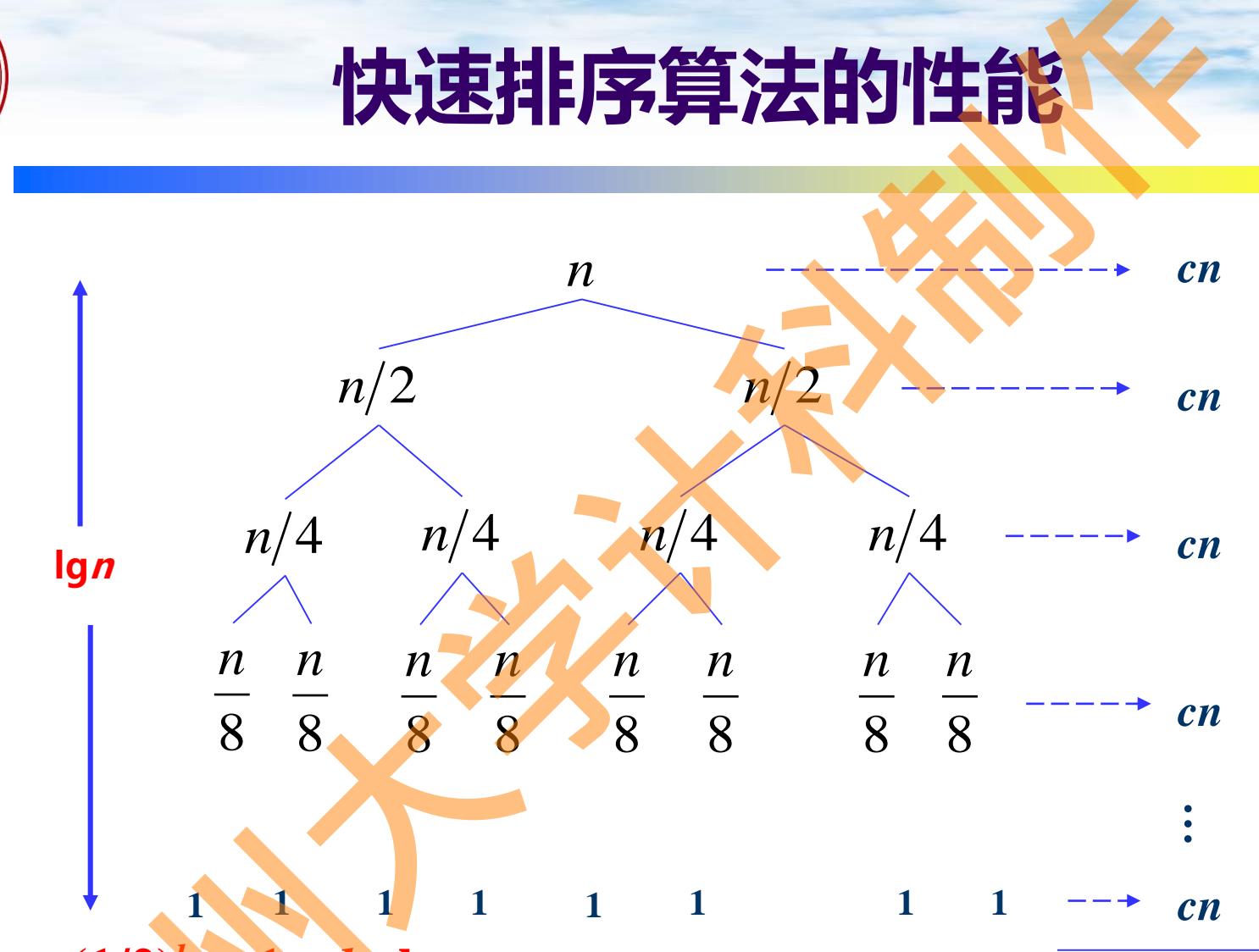
$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

根据主方法的情况 2，递归式的解为：

$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$



# 快速排序算法的性能



Quicksort

Soochow University

17



# 快速排序算法的性能

## □ 平衡的划分

- 如果以常数比例进行划分，即使该比例很不平衡（如 9:1），快速排序算法运行时间的递归表达式为：

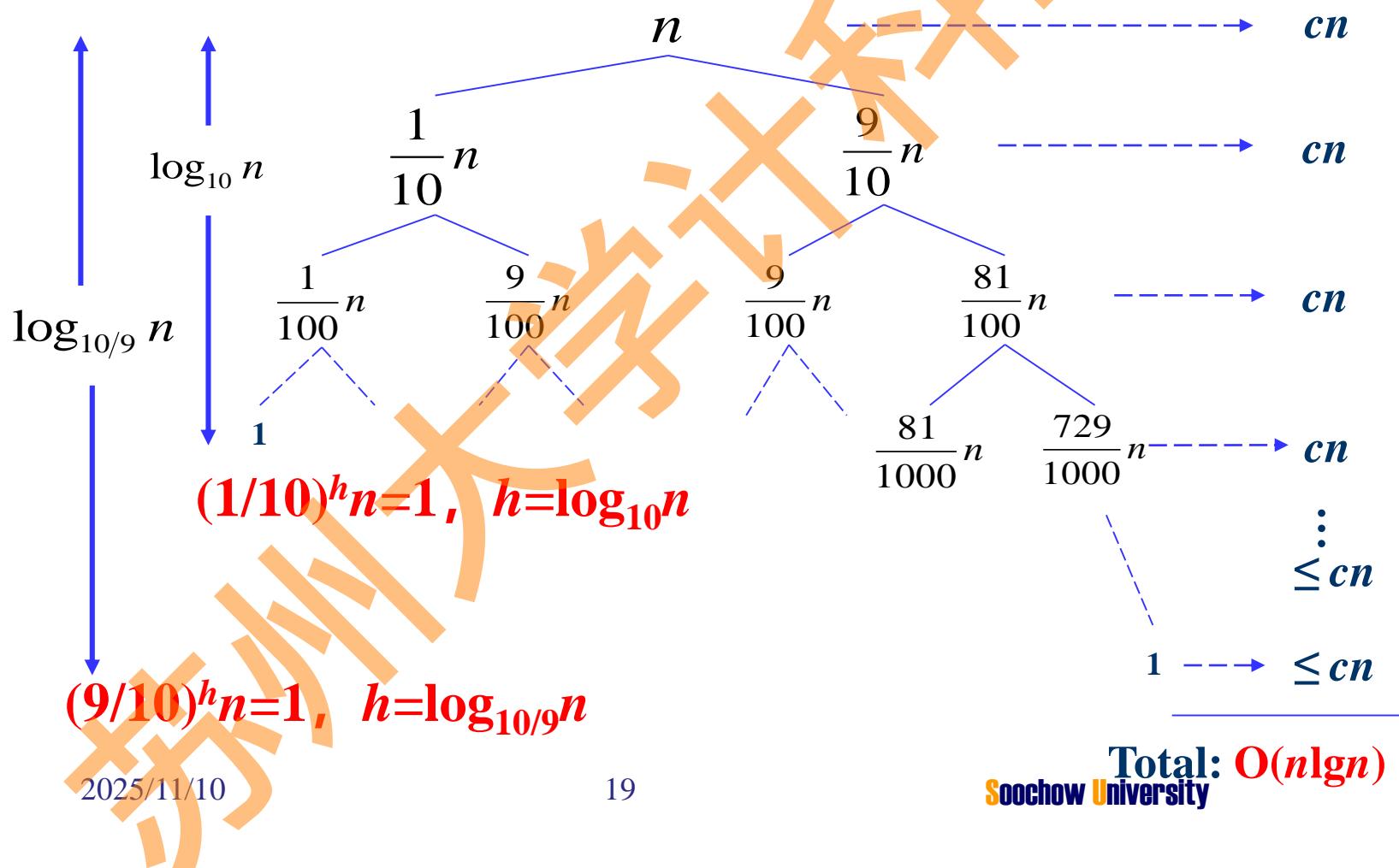
$$T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + \Theta(n)$$

快速排序算法的运行时间仍然为  $T(n)=O(n\lg n)$



# 快速排序算法的性能

求解递归式:  $T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + \Theta(n)$





# 快速排序算法的性能

## □ 平衡的划分

- 事实上，即使是 99:1 的划分，快速排序的运行时间代价仍然为： $O(n \lg n)$
- 任何一种按常数比例进行划分所产生的递归树的深度都为  $\Theta(\lg n)$ ，其中每一层的划分代价为  $O(n)$ ，因而不管常数比例是什么，总的运行时间都为  $O(n \lg n)$ ，只是其中隐含的常数因子不同而已



# 快速排序算法的性能

## 口 快速排序算法平均情况的直觉分析

- ✓ 为了对快速排序的各种随机情况有一个清楚的认识，需要对遇到各种输入的出现频率作出假设，这里假设输入数据的所有排列都是等概率的（即均匀随机排列）
- ✓ 当我们对一个随机的输入数组运行快速排序算法时，要想在每一层上都有同样的划分是不太可能的。我们预期某些划分比较平衡，而另一些则会很不平衡
- ✓ 事实上，在一个随机输入数组上，PARTITION 过程所产生的划分中 80% 以上都比 9:1 更平衡，而另 20% 的划分比 9:1 更不平衡（练习 7.2-6）



# 快速排序算法的性能

## 口 快速排序算法平均情况的直觉分析

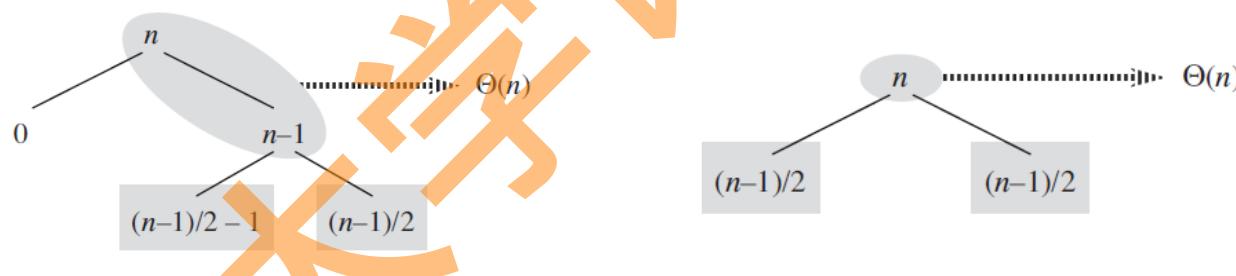
- ✓ 在平均情况下，PARTITION 过程所产生的划分同时混合有“好”和“差”的划分
- ✓ 混合有‘好’和‘差’的划分”的真正含义：与 PARTITION 平均情况所对应的整个递归树是由各种质量的划分随机、混合而成的，即好和差的划分随机分布在树的各层上的
- ✓ 为与我们的直觉相一致，假设好和差的划分交替出现在树的各层上，并且好的划分是最好的划分，而差的划分是最坏的划分



# 快速排序算法的性能

## 口 快速排序算法平均情况的直觉分析

- ✓ 左图（对应于平均情况下的划分）：表示递归树的连续两层上的划分情况：在根节点处，划分的代价为  $\Theta(n)$ ，划分出来的两个子数组大小为 0 和  $n-1$ ，即最坏情况；在下一层上，大小为  $n-1$  的子数组按最好情况划分为大小分别为  $(n-1)/2-1$  和  $(n-1)/2$  的两个子数组

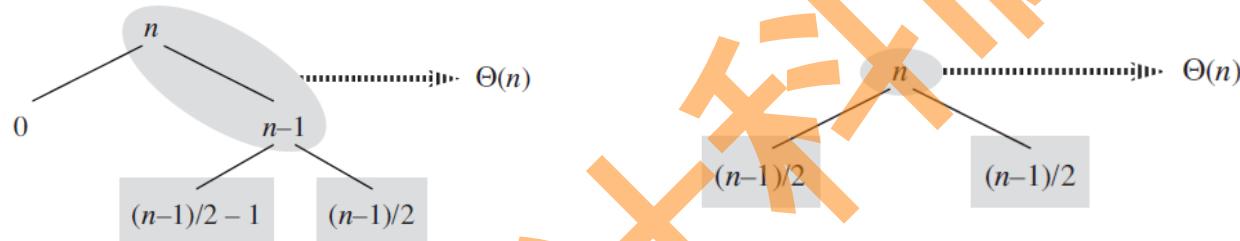


- ✓ 左图：在一个差的划分后面接着一个好的划分，产生三个子数组，大小分别是 0、 $(n-1)/2-1$  和  $(n-1)/2$ ，总划分代价为  $\Theta(n)+\Theta(n-1)=\Theta(n)$
- ✓ 右图：一层划分就产生出大小为  $(n-1)/2$  的两个子数组，划分代价为  $\Theta(n)$ ，这种划分是平衡的



# 快速排序算法的性能

## □ 快速排序算法平均情况的直觉分析



- ✓ **重要发现：**虽然混合情况多了一次划分，但两次划分的总代价仍然是  $\Theta(n)$ ，最终都得到了两个规模减半的子数组
- ✓ 因此，每两层（一次差划分和一次好划分）的总代价为  $O(n)$ ，而每两层后，子问题的大小减半（因为好划分将数组分成两半）。所以，递归树的层数为  $O(\lg n)$ ，但注意这里每两层相当于标准平衡树的一层（因为好划分将问题规模减半），所以总代价为  $O(n \lg n)$



# 快速排序算法的性能

## 口 快速排序算法平均情况的直觉分析

- ✓ 因此，当好、差的划分交替出现时，**快速排序的时间复杂度与全都是好的划分时一样，仍然是  $O(nlgn)$** ，区别是  $O$  符号中隐藏的常数因子要略大一些



# 第五讲 快速排序算法

内容提要：

- 快速排序算法的描述
- 快速排序算法的性能
- 快速排序算法的随机化版本
- 排序算法的下界



# 快速排序算法的随机化版本

- 前面讨论快速排序的平均情况性能的分析中，我们的前提假设是：**输入数据的所有排列都是等概率的**。但在实际应用中，这个假设不会总是成立（练习7.2-4）
- 解决方法：利用随机化策略，能够克服分布的等可能性假设所带来的问题
- 随机算法不是假设输入符合某个分布，而是通过对输入**设定一个分布**



# 快速排序算法的随机化版本

- 通过向快速排序算法中引入随机性，以便对于所有的输入，算法均能获得较好的期望性能。很多情况下选择随机化快速排序算法作为大数据输入情况下的排序算法
- 通过显示地对输入数组进行重新排列，使得算法实现随机化：随机排列数组或者原址排列数组
- 采用**随机采样 (random sampling)** 的随机化技术
  - 做法：从子数组  $A[p \dots r]$  中随机选择一个元素作为主元，然后将  $A[r]$  与从  $A[p \dots r]$  中随机选出的一个元素交换，保证主元元素  $x = A[r]$  等概率地从  $r-p+1$  个元素中选取的，从而达到对输入数组的划分比较平衡



# 快速排序算法的随机化版本

## □ 随机采样 (random sampling)

RANDOMIZED-PARTITION( $A, p, r$ )

- 1  $i = \text{RANDOM}(p, r)$
- 2 exchange  $A[r]$  with  $A[i]$
- 3 return PARTITION( $A, p, r$ )

## ➤ 随机快速排序算法调用 RANDOMIZED-PARTITION

RANDOMIZED-QUICKSORT( $A, p, r$ )

- 1 if  $p < r$
- 2  $q = \text{RANDOMIZED-PARTITION}(A, p, r)$
- 3 RANDOMIZED-QUICKSORT( $A, p, q-1$ )
- 4 RANDOMIZED-QUICKSORT( $A, q+1, r$ )



# 快速排序算法的随机化版本

- 随机化快速排序算法有一个和其他随机化算法一样的有趣性质：  
**没有一个特别的输入会导致最坏情况出现**
- 随机化快速排序算法的最坏情况出现是由随机数产生器决定的
  - 即使有意给出一个坏的输入也没用，因为随机化排列会使得输入数据次序对算法不产生影响
  - 只有在随机数产生器给出一个很不巧的排列时，随机算法的最坏情况才会出现



# 快速排序算法的期望运行时间

## □ RANDOMIZED-QUICKSORT 快速排序的期望运行时间分析

- QUICKSORT 和 RANDOMIZED-QUICKSORT 除了选择主元元素有差异外，其他方面完全相同
- 因此，可以讨论 QUICKSORT 和 PARTITION 的基础上分析 RANDOMIZED-QUICKSORT
- RANDOMIZED-QUICKSORT 随机地从子数组中选择元素作为主元



# 快速排序算法的期望运行时间

## □ RANDOMIZED-QUICKSORT 快速排序的期望运行时间分析

- QUICKSORT 的运行时间是由花在 PARTITION 过程上的时间所决定的
- 每当 PARTITION 过程被调用时，需要选择一个主元元素，而且该元素不会被包含在后续对 QUICKSORT 和 PARTITION 的递归调用中，于是最多对 PARTITION 调用  $n$  次
- 调用一次 PARTITION 的时间为： $O(1)$ +一段循环时间，循环内部（3~6 行）的每次迭代本身都是  $O(1)$  时间，那么整个循环的总时间就简单地正比于循环的迭代次数



# 快速排序算法的期望运行时间

## □ RANDOMIZED-QUICKSORT 快速排序的期望运行时间分析

- **for 循环每一轮迭代都要在第 4 行中进行一次比较：**比较主元元素与数组 A 中的另一个元素。因此，统计第 4 行比较操作的总次数，就等价于统计了 for 循环的总迭代次数，从而也就知道了 PARTITION 过程中循环部分所花费的总时间



# 快速排序算法的期望运行时间

## □ 数组划分过程 PARTITION:

```
QUICKSORT( $A, p, r$ )
1 if  $p < r$ 
2 then  $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$ 
3    $\text{QUICKSORT}(A, p, q-1)$ 
4    $\text{QUICKSORT}(A, q+1, r)$ 
```

```
PARTITION( $A, p, r$ )
1  $x = A[r]$ 
2  $i = p - 1$ 
3 for  $j = p$  to  $r - 1$ 
4   if  $A[j] \leq x$ 
5      $i = i + 1$ 
6   exchange  $A[i]$  with  $A[j]$ 
7 exchange  $A[i + 1]$  with  $A[r]$ 
8 return  $i + 1$ 
```



# 快速排序算法的期望运行时间

□ 引理 7.1：假设所有元素都不相同，当在一个包含  $n$  个元素的数组上运行 QUICKSORT 时，假设在 PARTITION 的第 4 行中所执行的总的比较次数为  $X$ ，那么 QUICKSORT 的运行时间为  $O(n+X)$

- 证明：QUICKSORT 的总时间  $\approx$  所有 PARTITION 调用的固定开销之和  $n +$  所有 PARTITION 调用的总的“比较”次数之和  $X$ 。
- 关键点：目标是计算出  $X$ ，所有对 PARTITION 过程的调用中，所执行的总的比较次数。因此，必须了解算法在什么时候对数组中的两个元素进行比较，什么时候不进行比较



# 快速排序算法的期望运行时间

□ 定义指示器随机变量:  $X_{ij} = I\{z_i \text{ 与 } z_j \text{ 进行比较}\}$

- 将数组 A 的元素重新命名为  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 其中  $z_i$  是数组 A 中第  $i$  小的元素
- 定义  $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$  为  $z_i$  与  $z_j$  之间的元素集合 (包含  $i$  和  $j$ )
- 首先, 每一对元素至多比较一次: 因为每个元素只与主元元素进行比较, 并且在某一次 PARTITION 过程调用结束之后, 该次调用中所用到的主元元素就再也不会与其他元素进行比较
- 因此, 算法的总的比较次数:  $X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}$



# 快速排序算法的期望运行时间

- 对上式两边取期望，有：

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E[X_{ij}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \Pr\{z_i \text{ 与 } z_j \text{ 进行比较}\} \end{aligned}$$

- 考虑两个元素  $z_i$  与  $z_j$  何时不会进行比较？

例：令  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ，假设选择的第一个主元是 7， $A$  被划分为两个子集合  $A_1 = \{1, 2, \dots, 6\}$ ,  $A_2 = \{8, 9, 10\}$ 。在这一过程中，主元 7 与所有这些元素进行比较。第一个集合  $A_1$  中任何一个元素不会与第二个集合  $A_2$  中的任何元素进行比较。



# 快速排序算法的期望运行时间

- 假设每个元素是互异的，因此，一旦一个满足  $z_i < x < z_j$  的主元  $x$  被选择后，那么  $z_i$  与  $z_j$  就再也不可能进行比较了
- 如果  $z_i$  在  $Z_{ij} = \{z_i, z_{i+1}, \dots, z_j\}$  中的 所有其他元素之前 被选为主元，那么  $z_i$  将与  $Z_{ij}$  中除了它自身之外的所有元素进行比较
- 类似地，如果  $z_j$  在  $Z_{ij}$  中的所有其他元素之前被选为主元，那么  $z_j$  将与  $Z_{ij}$  中除了它自身之外的所有元素进行比较
- 因此，两个元素  $z_i$  与  $z_j$  进行比较，**当且仅当  $Z_{ij}$  中将被选为主元的第一个元素是  $z_i$  或者  $z_j$**



# 快速排序算法的期望运行时间

- RANDOMIZED-PARTITION 是随机且独立地选择主元
- 在  $Z_{ij}$  中的某一元素被选为主元之前，整个集合  $Z_{ij}$  的元素都属于某一划分的同一分区。因此， $Z_{ij}$  中的任何元素都会被等概率地首先选为主元。集合  $Z_{ij}$  中有  $j-i+1$  个元素，并且主元的选择是随机且独立的，所以任何元素被首先选为主元的概率是  $1/(j-i+1)$

$$\begin{aligned}\Pr \{z_i \text{与 } z_j \text{ 进行比较}\} &= \Pr \{z_i \text{ 或 } z_j \text{ 是集合 } Z_{ij} \text{ 中选出的第一个主元}\} \\&= \Pr \{z_i \text{ 是集合 } Z_{ij} \text{ 中选出的第一个主元}\} \\&\quad + \Pr \{z_j \text{ 是集合 } Z_{ij} \text{ 中选出的第一个主元}\} \\&= \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}\end{aligned}$$



# 快速排序算法的期望运行时间

- 根据上述分析,  $E[X]$  有:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} \\ &< \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} O(\lg n) = O(n \lg n) \end{aligned}$$

- 综合起来, 使用 RANDOMIZED-PARTITION, 在输入元素互异情况下, 随机快速排序算法的期望运行时间为  $O(n \lg n)$



# 第五讲 快速排序算法

内容提要：

- 快速排序算法的描述
- 快速排序算法的性能
- 快速排序算法的随机化版本
- 排序算法的下界



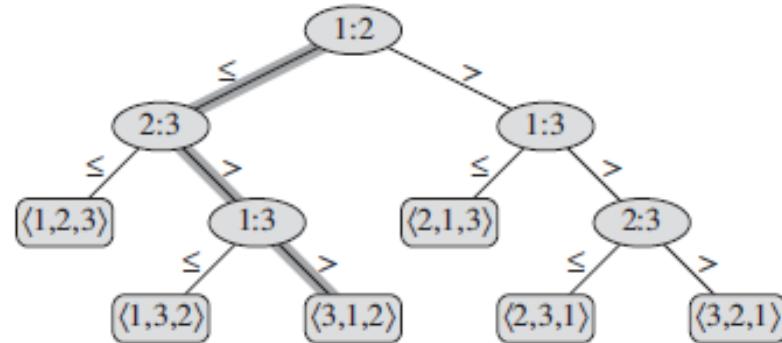
# 排序算法时间的下界



- 口 基于**比较运算操作**的排序算法的时间下界
- 以**比较为基础的排序**: 只使用**比较运算**来决定元素之间的大小关系并调整其位置, 不做改变元素值大小等其它操作的排序算法
- **冒泡排序, 插入排序, 归并排序, 快速排序**都是**比较排序算法**



# 排序算法时间的下界



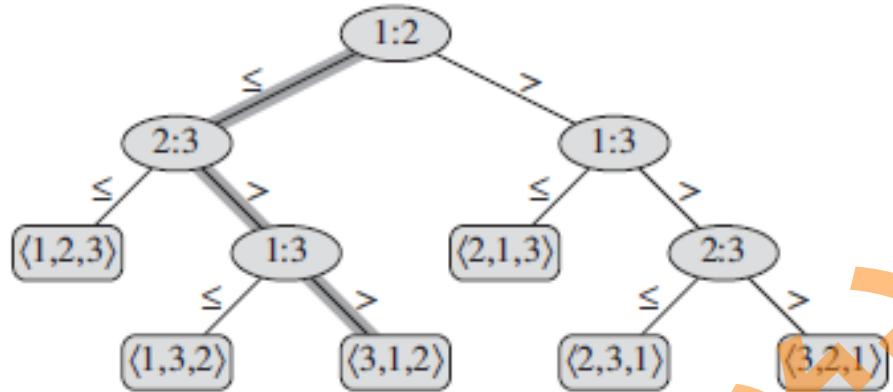
- ◆ 若  $a_i \leq a_j$ , 进入下一级的左分支
- ◆ 若  $a_i > a_j$ , 进入下一级的右分支

□ 一个以比较元素为基础的排序算法可以按照比较的顺序构建出一棵决策树 (Decision-Tree)

- 决策树是一棵满二叉树, 表示在给定输入规模情况下, 某一特定排序算法对所有元素的比较操作
- 每个内部结点标记为  $i:j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), 表示一对元素  $a_i$  与  $a_j$  的比较
- 每个叶结点上标注一个排序序列  $\langle \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n) \rangle$ ,  $n$  个元素的  $n!$  种可能的排列都应该出现在决策树的叶结点上



# 排序算法时间的下界

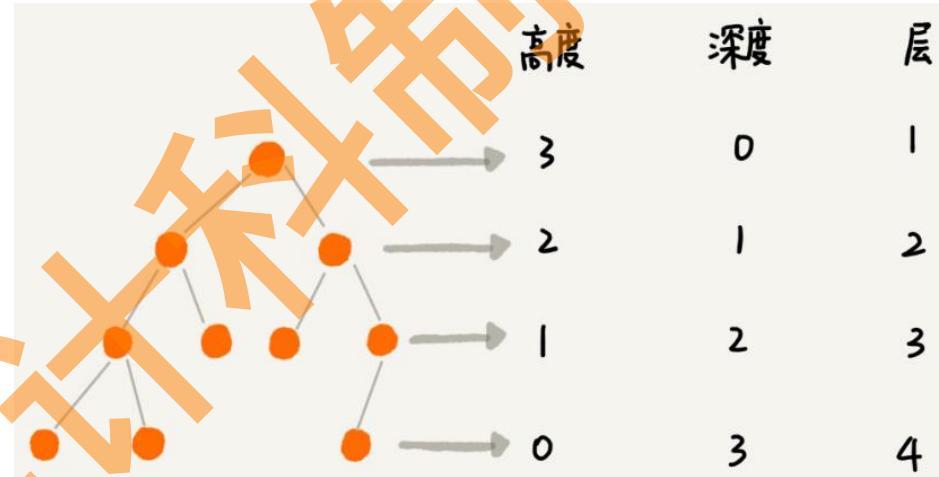
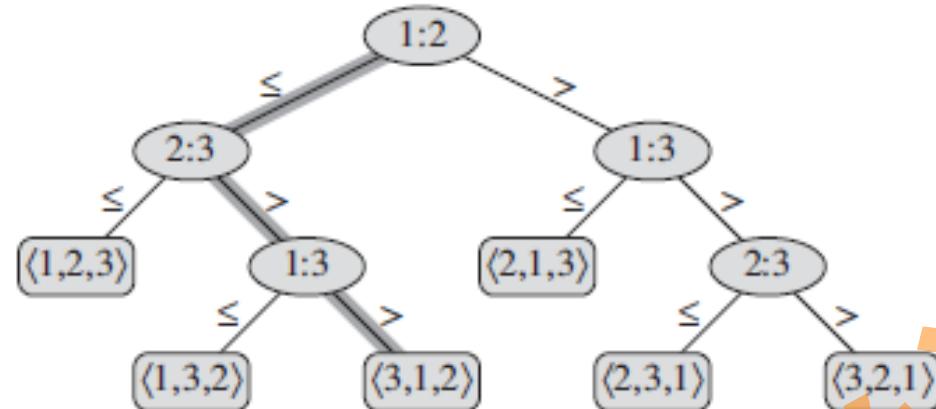


- ◆ 若  $a_i \leq a_j$ , 进入下一级的左分支
- ◆ 若  $a_i > a_j$ , 进入下一级的右分支

- 算法在叶结点终止：排序算法的执行过程对应于一条从树的根结点到叶结点的路径。当到达一个叶结点时，表示排序算法已经确定一个排序序列  $a_{\pi(1)} \leq a_{\pi(2)} \leq \dots \leq a_{\pi(n)}$
- 路径长度表示生成该排序序列所需要的比较次数



# 排序算法时间的下界



- 在决策树中，从根结点到任意一个可达叶结点之间**最长路径的长度**表示对应的排序算法在**最坏情况下**所作的**比较次数**，也就是**决策树的高度**
- 因此，**决策树高度的下界**也就是**比较排序算法在最坏情况下运行时间的下界**



# 排序算法时间的下界

## □ 决策树的性质有：

- ✓ 由于  $n$  个关键字有  $n!$  种可能的排列，所以决策树中将有  $n!$  个叶结点
- ✓ 一棵高为  $h$  的二叉决策树中，最多有  $2^h$  个叶结点（完全二叉树），因此有  $n! \leq 2^h \rightarrow h \geq \lg(n!) = \Omega(n \lg n)$

□ 因此，任何以比较操作为基础的排序算法在最坏情况下运行时间的下界为： $\Omega(n \lg n)$



# 排序算法时间的下界

- 归并排序是渐近最优的排序算法，因为它们在最坏情况下运行时间上界  $O(n \lg n)$  与上述给出的最坏情况下界  $\Omega(n \lg n)$  一致
- 快速排序算法不是渐近最优的比较排序算法。但是，快速排序算法其执行效率平均而言较归并排序更好



2025/11/10

48

Soochow University

感谢！