数值分析 Numerical Analysis

Lecture 5：解线性方程组的矩阵分解法

Matrix Decomposition

骞微著

苏州大学，计算机科学与技术学院

邮箱：wzqian@suda.edu.cn

办公室：理工楼543

Recap

1) 解线性方程组的消去法

2) **解线性方程组的矩阵分解法**

3) 解线性方程组的迭代法

推荐课外阅读：

1. Essence of linear algebra (3Blue1Brown)

2. Linear algebra (video series)

3. 矩阵论， 程云鹏

4. An Introduction to Numerical Analysis Endre Suli and David F. Mayers

Recap:

1. 线性方程组解的存在性
2. 线性方程组解的唯一性
3. 应用高斯消去法的条件
4. 选主元

问题：怎么用消去法对矩阵求逆？

解线性方程组的矩阵分解法

高斯消元法：

$$(A|b) \to (U|\tilde{b})$$

$$(A \;\vdots\; b) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & 0 & \vdots & 8 \\ 1 & 2 & 4 & \vdots & 5 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 1.25 & 2 \\ 0 & 1 & -1.25 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

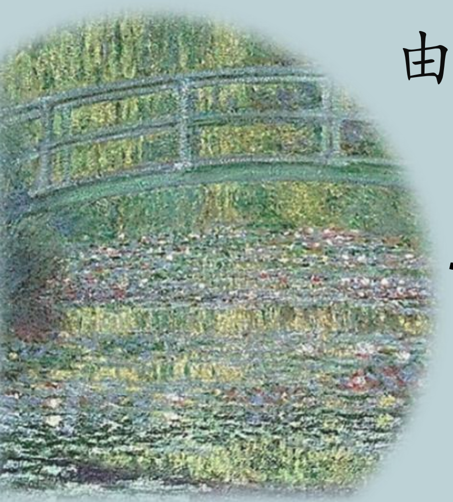
实质：左乘若干初等矩阵之积

例：

$$Ax = b, A = (a_{ij})_{3\times 3}$$

由高斯消元法得： $SAx = Sb$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a_{32}^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & 0 \\ -a_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



解线性方程组的矩阵分解法

$\longleftarrow$ 结合律

$$S=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/a_{33}^{(2)}\end{bmatrix}}_{S^5}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-a_{32}^{(1)}&1\end{bmatrix}}_{S^4}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/a_{22}^{(1)}&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{S^3}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\-a_{21}&1&0\\-a_{31}&0&1\end{bmatrix}}_{S^2}\underbrace{\begin{bmatrix}1/a_{11}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{S^1}$$

$$(A\ \vdots\ b)=\begin{pmatrix}4&2&5&\vdots&8\\2&3&0&\vdots&8\\1&2&4&\vdots&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0.5&1.25&\vdots&2\\0&2&-2.5&\vdots&4\\0&1.5&2.75&\vdots&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0.5&1.25&\vdots&2\\0&1&-1.25&\vdots&2\\0&0&4.625&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0.5&1.25&\vdots&2\\0&1&-1.25&\vdots&2\\0&0&1&\vdots&0\end{pmatrix}$$

非对称矩阵的三角分解法

$$
S=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/a_{33}^{(2)}\end{bmatrix}}_{S^5}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1/a_{32}^{(1)}&1\end{bmatrix}}_{S^4}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/a_{22}^{(1)}&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{S^3}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\-a_{21}&1&0\\-a_{31}&0&1\end{bmatrix}}_{S^2}\underbrace{\begin{bmatrix}1/a_{11}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{S^1}
$$

记 $SA=U$，$Sb=\tilde{b}$，则$Ux=\tilde{b}$，U为单位上三角矩阵。S是若干个可逆的对角矩阵与下三角矩阵的乘积，故S是一个可逆的下三角矩阵。记$L=S^{-1}$，则L也是可逆的下三角矩阵，且$A=S^{-1}U=LU$。故原方程可以改写为:

$$LUx=b$$

LU decomposition is essentially the **matrix version** of Gaussian elimination.

非对称矩阵的三角分解法

矩阵分解法的基本思想是：

对于给定的线性方程组 $Ax = b \quad (|A| \neq 0)$

（1） 分解$A = LU$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

可逆下三角矩阵

可逆上三角矩阵

非对称矩阵的三角分解法

原方程组化为 $(LU)x = b \qquad (3-7)$

求解此方程组等价于依次求解线性方程组

$$\begin{cases} Ly = b & (3-8) \\ Ux = y & (3-9) \end{cases}$$

对于方程组（3-8）容易递推解出

$$\begin{cases} y_1 = b_1/l_{11} \\ y_k = (b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}y_i)/l_{kk} \quad (k = 2,3,\cdots,n) \end{cases} \qquad (3-10)$$

对于方程组（3-9）容易回代解出

$$\begin{cases} \rightleftarrows x_n = y_n/u_{nn} \\ x_k = (y_k - \sum_{i=k+1}^{n} u_{ki}x_i)/u_{kk} \quad (k = n-1, n-2, \cdots, 1) \end{cases} \qquad (3-11)$$

由此可见，解线性方程组的关键在于分解系数矩阵 A。

矩阵分解的存在性和唯一性

存在性： 定理3.3 若的各阶顺序主子式 $D_k \neq 0\ (k = 1,2,\cdots,n)$, 则存在可逆下三角矩阵$L$和可逆上三角矩阵$U$，使$A = LU$ 。

$$(A \;\vdots\; b) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & 0 & \vdots & 8 \\ 1 & 2 & 4 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & -2.5 & \vdots & 4 \\ 0 & 1.5 & 2.75 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 4.625 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a_{32}^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 1 & 0 \\ -a_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵分解的存在性和唯一性

存在性： 定理 3.3 若的各阶顺序主子式 $D_k \neq 0\ (k = 1,2,\cdots,n)$, 则存在可逆下三角矩阵$L$和可逆上三角矩阵$U$，使$A = LU$。

1) 顺序主子式非零，保证在进行高斯消去过程中，**不需要行交换**（也就是说，消元的主元永远不为零）。这避免了“主元为零”时必须换行的问题。所以可以顺利进行逐步消元。**(反例)**
2) 消元过程中得到的消去因子，恰好构成一个下三角矩阵L（对角元非零，因此可逆）。
3) 消元后得到的上三角部分就是U。
4) 即使矩阵不可逆，（不限制 L、U 是否可逆的）LU仍然可能存在。实际上，如果一个秩为k的矩阵的前k个顺序主子式不为零，那么它就可以进行LU分解，但反之则不然。**(例子)**

反例： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\det(A) \neq 0$所以矩阵可逆，但$D_1 = 0$，不存在（不需要行交换/选主元的）LU分解。

例子： $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$\det(A) = 0$所以矩阵不可逆，但存在（不限制 L、U 是否可逆的）LU分解：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(LU) \neq 0 \Rightarrow \det(L)\det(U) \neq 0$$

矩阵分解的存在性和唯一性

存在性：

定理 3.3 若的各阶顺序主子式 $D_k \neq 0\ (k = 1,2,\cdots,n)$, 则存在可逆下三角矩阵$L$和可逆上三角矩阵$U$，使$A = LU$ 。

是否唯一？

$A = LU$，D为可逆对角阵，则$A = (LD)(D^{-1}U) = \tilde{L}\tilde{U}$，$\tilde{L} = LD$仍为下三角矩阵，$\tilde{U} = D^{-1}U$仍为上三角矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \\ -9 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \underset{D}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

唯一性： 矩阵的三角分解一般不惟一。但只要规定了L或U的对角元素，则可逆矩阵的三角分解惟一。

LU分解法

常用的矩阵三角分解为：

（1）规定U为单位上三角矩阵，这称为矩阵的**克洛特（Crout）分解**；

（2）规定为L单位下三角矩阵，这称为矩阵的**杜利特尔（Doolittle）分解**。

1）$u_{ii}=1, i=1,2\cdots n$

2）当$i \geq j$时：

$$
\begin{pmatrix}
\ddots & & & & \\
& \ddots & & & \\
& \vdots & \ddots & & \\
\cdots & a_{i,j} & \cdots & \ddots & \\
& \vdots & & & \ddots
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
l_{1,1} & & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & \\
& & & & \ddots & & & \\
l_{i,1} & \cdots & l_{i,j-1} & l_{i,j} & \cdots & l_{ii} & & \\
\vdots & & & & & & \ddots & \\
l_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & l_{n,n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{1,1} & \cdots & u_{1,j} & \cdots & u_{1,n} \\
& \ddots & \vdots & & \vdots \\
& & u_{j-1,j} & & \vdots \\
& & 1 & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
& & & & u_{n,n}
\end{pmatrix}
$$

$$\Rightarrow a_{i,j} = l_{i,1}u_{1,j} + \cdots l_{i,j-1}u_{j-1,j} + l_{i,j} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{i.k}u_{k,j} + l_{i,j}$$

$$\Rightarrow l_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i.k}u_{k,j}$$

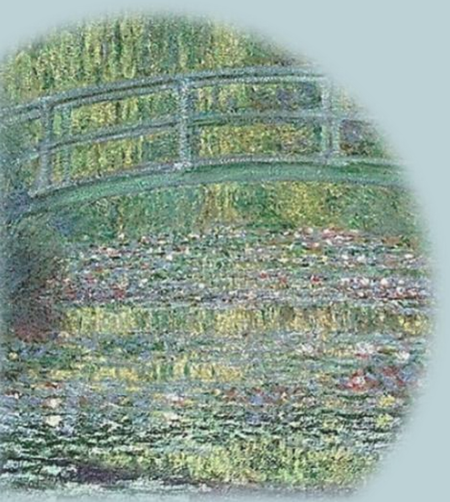
3）类似地，当$i < j$时：

$$u_{i,j} = (a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i.k}u_{k,j})/l_{i,i}$$

克洛特分解法

克洛特分解法的计算公式为

$$
\begin{cases}
l_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} & (i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,i) \rightleftarrows \\
\rightleftarrows u_{ij} = (a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj})/l_{ii} & (i = 1,2,\cdots,n; j = i+1, i+2,\cdots,n)
\end{cases} \qquad (3-12)
$$



这时$u_{ii} = 1 \ (i = 1,2,\cdots,n)$

克洛特分解法举例

例3.5 试用克洛特分解法解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 9 & 4 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

对j=1,2...n
  先求L的第j列;
  再求U的第j行.
return

解

$$\because A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 9 & 4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 9 & 4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore L = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 0 & 2 & \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

克洛特分解法举例

Recall: $\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$

由 $$\underset{L}{\begin{pmatrix} 3 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 0 & 2 & \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \underset{b}{\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}}$$ 解得 $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由 $$\underset{U}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underset{y}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$ 解得 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

选主元/行变换的LU分解

如果矩阵可逆但是无法直接应用LU分解？

解决方法：换主元 pivoting

$$PA = \tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow A = P^{-1}\tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow \tilde{L}\tilde{U}x = Pb, where\ P^{-1} = P^T = P \text{ for row} - \text{swap matrix.}$$

Example: $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \det(\mathrm{A}) \neq 0$$

$$\underset{P}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}} = \underset{\tilde{A}}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}} = \underset{\tilde{L}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\tilde{U}}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}} = \underset{P}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\tilde{L}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\tilde{U}}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}}$$

对称正定矩阵的三角分解法

考虑特殊情况：如果A是**对称正定矩阵**。

定义 3.1 若的n阶方矩阵A具有性质 $A=A^T$且对任何n维向量$x\neq 0$成立$x^TAx>0$,则称A为对称正定矩阵**Symmetric positive definite matrix**。

例：$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 13 & 12 & 9 \\ 2 & 12 & 29 & 15 \\ 1 & 9 & 15 & 36 \end{pmatrix}$

定理 3.4 若A为对称正定矩阵，则

（1）A的顺序主子式$D_k>0\ (k=1,2,\dots,n)$

（2）有且仅有一个单位下三角矩阵L和对角阵D，使得

$$A=LDL^T$$

这称为矩阵的**乔里斯基(Cholesky)分解**。

（3）有且仅有一个下三角矩阵$\tilde{L}$，使

$$A=\tilde{L}\tilde{L}^T$$

这称为矩阵的**平方根分解**。

平方根分解法和Cholesky分解法

因为 $\tilde{L}$ 的第 i 行为 $(\tilde{l}_{i1}\cdots\tilde{l}_{ii}\ 0\cdots 0)$，$\tilde{L}^T$ 的第 j 列为 $(\tilde{l}_{j1}\cdots\tilde{l}_{jj}\ 0\cdots 0)^T$

所以，由 $A=\tilde{L}\tilde{L}^T$ 得 $a_{ij}=\sum_{k=1}^{j-1}\tilde{l}_{ik}\tilde{l}_{jk}+\tilde{l}_{ij}\tilde{l}_{jj}$（$i\geqslant j$ 时），由此可建立平方根法的递推计算公式如下：

对于 $j=1,2,\cdots,n$，依次计算

$$\begin{cases}\tilde{l}_{jj}=\sqrt{a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}\tilde{l}_{jk}^2}\\ \tilde{l}_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}\tilde{l}_{ik}\tilde{l}_{jk})/\tilde{l}_{jj}\ (i=j+1,j+2,\cdots,n)\end{cases}\tag{3-18}$$

类似地，由 $A=LDL^T$ 得

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}d_k+l_{ij}d_j\ (\text{因为 } l_{jj}=1)\qquad (i\geqslant j)$$

从而可建立乔里斯基分解法的递推计算公式为

对于 $j=1,2,\cdots,n$，依次计算

$$\begin{cases}d_j=a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{jk}^2d_k\\ l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk}d_k)/d_j\ (i=j+1,j+2,\cdots,n)\end{cases}\tag{3-19}$$

对称正定矩阵的三角分解法

例 3.7

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\3&13&12&9\\2&12&29&15\\1&9&15&36\end{pmatrix}$$

解

① ∵

$$\begin{pmatrix}1&&&\\3&13&&\\2&12&29&\\1&9&15&36\end{pmatrix}\xrightarrow[\tilde l_{i1}=a_{i1}/\tilde l_{11}(i=2,3,4)]{\tilde l_{11}=\sqrt{a_{11}}}\begin{pmatrix}1&&&\\3&13&&\\2&12&29&\\1&9&15&36\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\tilde l_{32}=(a_{32}-\tilde l_{31}\tilde l_{21})/\tilde l_{22}\\ \tilde l_{42}=(a_{42}-\tilde l_{41}\tilde l_{21})/\tilde l_{22}}]{\tilde l_{22}=\sqrt{a_{22}-\tilde l_{21}^2}}\begin{pmatrix}1&&&\\3&2&&\\2&3&29&\\1&3&15&36\end{pmatrix}\xrightarrow[\tilde l_{43}=(a_{43}-\tilde l_{41}\tilde l_{31}-\tilde l_{42}\tilde l_{32})/\tilde l_{33}]{\tilde l_{33}=\sqrt{a_{33}-\tilde l_{31}^2-\tilde l_{32}^2}}$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\3&2&&\\2&3&4&\\1&3&1&36\end{pmatrix}\xrightarrow{\tilde l_{44}=\sqrt{a_{44}-\tilde l_{41}^2-\tilde l_{42}^2-\tilde l_{43}^2}}\begin{pmatrix}1&&&\\3&2&&\\2&3&4&\\1&3&1&5\end{pmatrix}$$

$$\therefore \tilde L=\begin{pmatrix}1&&&\\3&2&&\\2&3&4&\\1&3&1&5\end{pmatrix},\quad A=\tilde L\tilde L^{T}$$

② ∵

$$\begin{pmatrix}1&&&\\3&13&&\\2&12&29&\\1&9&15&36\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{l_{i1}=a_{i1}/d_1\\(i=2,3,4)}]{d_1=a_{11}}\begin{pmatrix}1&&&\\3&13&&\\2&12&29&\\1&9&15&36\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_{32}=(a_{32}-l_{31}l_{21}d_1)/d_2\\ l_{42}=(a_{42}-l_{41}l_{21}d_1)/d_2}]{d_2=a_{22}-l_{21}^2d_1}\begin{pmatrix}1&&&\\3&4&&\\2&1.5&29&\\1&1.5&15&36\end{pmatrix}\xrightarrow[l_{43}=(a_{43}-l_{41}l_{31}d_1-l_{42}l_{32}d_2)/l_{33}]{d_3=a_{33}-l_{31}^2d_1-l_{32}^2d_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\3&4&&\\2&1.5&16&\\1&1.5&0.25&36\end{pmatrix}\xrightarrow{d_4=a_{44}-l_{41}^2\cdot d_1-l_{42}^2d_2-l_{43}^2d_3}\begin{pmatrix}1&&&\\3&4&&\\2&1.5&16&\\1&1.5&0.25&25\end{pmatrix}$$

$$\therefore L=\begin{pmatrix}1&&&\\3&1&&\\2&1.5&1&\\1&1.5&0.25&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&&&\\&4&&\\&&16&\\&&&25\end{pmatrix},A=LDL^{T}$$

三角分解法求解对称正定矩阵的线性方程组

把平方根法应用于解方程组，则把 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 化为等价方程

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ \tilde{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

相应的求解公式为

$$\begin{cases} y_1=b_1/\tilde{l}_{11}, \quad y_k=(b_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\tilde{l}_{ki}y_i)/\tilde{l}_{kk} \quad (k=2,3,\cdots,n) \\ x_n=y_n/\tilde{l}_{nn}, \quad x_k=(b_k-\sum\limits_{i=k+1}^{n}\tilde{l}_{ik}y_i)/\tilde{l}_{kk} \quad (k=n-1,n-2,\cdots,1) \end{cases} \tag{3-21}$$

把乔里斯基分解法应用于解方程组，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 化为等价方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{y} \end{cases}$$

相应的求解公式为

$$\begin{cases} y_1=b_1, \quad y_k=b_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}l_{ki}y_i \quad (k=2,3,\cdots,n) \\ x_n=y_n/d_n, \quad x_k=\dfrac{y_k}{d_k}-\sum\limits_{i=k+1}^{n}l_{ik}x_i \quad (k=n-1,n-2,\cdots,1) \end{cases} \tag{3-22}$$

Cholesky求解线性方程组

例 3.8 试用平方根法求解对称线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 13 & 12 & 9\\ 2 & 12 & 29 & 15\\ 1 & 9 & 15 & 36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 13\\ 41\\ 52\end{pmatrix}$$

解 由例 3.7 已得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 13 & 12 & 9\\ 2 & 12 & 29 & 15\\ 1 & 9 & 15 & 36\end{pmatrix}=\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ 3 & 2 & & \\ 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ & 2 & 3 & 3\\ & & 4 & 1\\ & & & 5\end{pmatrix}$$

因此，可先由上三角形线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & & & \\ 3 & 2 & & \\ 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 13\\ 41\\ 72\end{pmatrix}\quad \text{解得}\quad \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 6\\ 10\end{pmatrix}$$

再由下三角形线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ & 2 & 3 & 3\\ & & 4 & 1\\ & & & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 6\\ 10\end{pmatrix}\quad \text{回代解出}\quad \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

平方根法求解线性方程组

例 3.9 试用乔里斯基分解法解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -19 \\ 5 & -19 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

解 因为

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 5 & -19 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} ① & & \\ -2 & 1 & \\ ⑤ & -19 & 5 \end{pmatrix}\xrightarrow[l_{32}=[-19-5\cdot(-2)\cdot1]/d_2]{d_2=1-(-2)^2\cdot1}\begin{pmatrix} ① & & \\ -2 & -3 & \\ ⑤ & ③ & 5 \end{pmatrix}\xrightarrow{d_3=5-5^2\cdot1-3^2\cdot(-3)}$$

$$\begin{pmatrix} ① & & \\ -2 & -3 & \\ ⑤ & ③ & ⑦ \end{pmatrix}$$

所以 $L=\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$, $A=LDL^{\mathrm{T}}$

由 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -18 \end{pmatrix}$

解得 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $D^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

再由 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 回代解得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

矩阵分解的其他应用

1. Covariance Matrix for a Gaussian distribution
2. Graph Convolutional Neural Network (Laplacian)
3. Dynamical system (eigenvectors and eigenvalues)
4. Dimension reduction (SVD, PCA)

Homework 5

4. ~~分别用~~克洛特分解法~~和杜利特尔分解法~~分解以下矩阵。

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

5. ~~分别~~用克洛特分解法和~~杜利特尔分解法~~求解线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$

作业以word格式将推导，代码，（可视化）运行结果等（控制文件大小，不要粘贴代码图片， 文件名：学号_姓名_作业5）发到助教（小沈）邮箱：20245227049@stu.suda.edu.cn 。


Thanks

Exercise

Example Consider the linear system:

$$\begin{array}{rrrl} 6x & +18y & +3z & = 3 \\ 2x & +12y & + & = 19 \\ 4x & +15y & +3z & = 0 \end{array}$$

An LU decomposition for the associated matrix M is:

$$\begin{pmatrix} 6 & 18 & 3 \\ 2 & 12 & 1 \\ 4 & 15 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Step 1: Set $W = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = UX$.
- Step 2: Solve the system $LW = V$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

By substitution, we get $u = 1$, $v = 3$, and $w = -11$. Then

$$W_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

- Step 3: Solve the system $UX = W_0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Back substitution gives $z = -11, y = 3$, and $x = -6$.

Then $X = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$, and we're done.

对称正定矩阵的Cholesky分解法

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n,2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{n,n} \end{bmatrix}.$$

直接比较等式两边可得 $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} + l_{jj} l_{ij}$, 所以有

$$\boxed{l_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right)}, j = 1, 2, \ldots, n, \ i = j, j+1, \ldots, n$$