数值分析 Numerical Analysis

Lecture 3：牛顿迭代法 (Newton’s Method) & 弦截法 (Secant Method)

骞微著

邮箱：wzqian@suda.edu.cn

办公室：理工楼543

苏州大学，计算机科学与技术学院

Recap

1. 二分法
2. 迭代法
3. 迭代法的收敛性：Lipschitz Continuity

牛顿迭代法Newton's Method

牛顿迭代公式的构造：

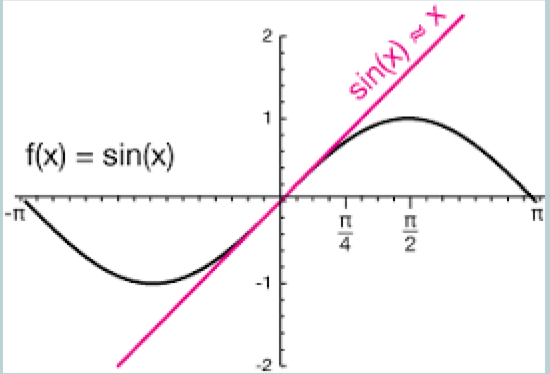
$$f\,(x)=0\Longrightarrow x=g(x)$$

是否存在更一般的形式？

设 f (x) 在**其零点 x^* 附近连续可微**，已知x_k为的第k次近似值，则由Taylor展开并忽略二次项得（线性化linearization）：

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+O((x-x_k)^2)$$

$$\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)\triangleq P_1(x)$$



取 $P_1(x)=0$ 的根作为x^* 的第k+1次近似值x_{k+1}

牛顿迭代法Newton's Method

牛顿迭代公式的构造：线性化linearization

设 f (x) 在其零点 x^*附近连续可微，已知x_k为的第k次近似值，则由Taylor展开并忽略二次项得:

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+O((x-x_k)^2)$$
$$\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k) \triangleq P_1(x)$$

取 $P_1(x)=0$ 的根作为x^* 的第k+1次近似值x_{k+1}

解得

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \qquad (2-12)$$

牛顿迭代法

其迭代函数为 $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ (2 − 13)

牛顿迭代法的几何意义

几何意义：过点$P(x_k, f(x_k))$作函数$y=f(x)$ 的切线l：

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

以切线l与x轴的交点 x_{k+1} 作为x^*的新近似值

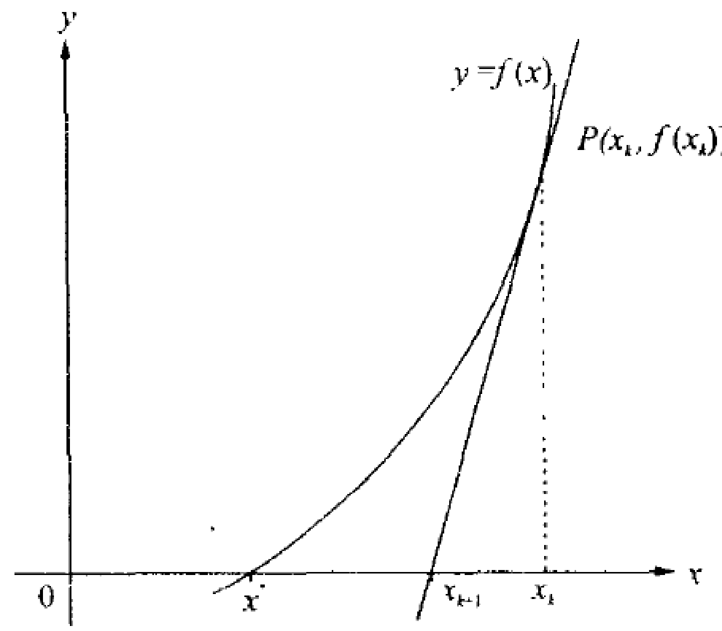


图 2-2　牛顿迭代法

牛顿迭代法的步骤

算法 Newton 算法

```
给定迭代初值 x_0, 精度要求 ε 和最大迭代步数 IterMax
if |f(x_0)| < ε, then
    输出近似解 x_0, 停止迭代
end if
for k = 1 to IterMax do
    计算 x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)
    if |x_1 - x_0| < ε 或 |f(x_1)| < ε, then
        输出近似解 x_1, 停止迭代    % 算法收敛
    end if
    x_0 = x_1
end for
```

牛顿迭代法的收敛性与收敛速度

定理 2.3 给定 $f(x)=0$，如果在根x^*附近 $f(x)$二阶连续，且x^*为 $f(x)=0$ 的单根，则牛顿迭代法在x^*附近至少是平方收敛的。

牛顿迭代法的收敛性与收敛速度

证明： 由$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$可得

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

单根条件保证$f'(x^*) \neq 0$(定义)，所以$g'(x^*) = 0$

当x_k在x^*附近$f''(x)$连续的区域时可做泰勒展开

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^* - x_k)^2(\xi\text{介于}x^*\text{与}x_k\text{之间})$$

整理得

$$x^* = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

$$= x_{k+1} - \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

牛顿迭代法的收敛性与收敛速度

再整理得

$$\frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^2} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}$$

所以

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}$$

由$f'(x^*) \neq 0$得

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}$为一有限常数。

因此，当$f''(x) \neq 0$时，牛顿迭代法平方收敛；
$f''(x) = 0$时，牛顿迭代法超平方收敛。

迭代法的收敛速度

例 2.4 试用牛顿迭代法求解$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$在区间 (2,3) 内满足精度要求$\varepsilon = 10^{-8}$的根。

解 相应于该方程的牛顿迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k - 5}{3x_k^2 - 2}$$

取 $x_0 = 2$，计算结果见表2-4。

表 2-4 牛顿迭代法的计算结果

k	x_k
1	2.1
2	2.094 568 121
3	2.094 551 482
4	2.094 551 482

牛顿迭代法评述

优点：收敛速度比较快。

缺点：

1）对初始值的要求比较高。为解决这一问题，可采用二分法来提供足够“好”的近似值作为迭代初值。

可以使用下山法放宽对初始值的限制：

$$x_{k+1} = \lambda_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

λ_k使得$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$。

2）涉及 $f'(x)$ 的计算。

弦截法Secant Method

计算思想：若已知 x* 的两个近似值 x_k和 x_{k-1}，则以

f (x) 在 x_k和 x_{k-1}之间的平均变化率(差商) $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$

近似代替$f'(x_k)$，据此把牛顿迭代法修改为

$$\boxed{\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) \\ x_0, x_{-1} \end{cases}} \quad (k = 0,1,\cdots)$$

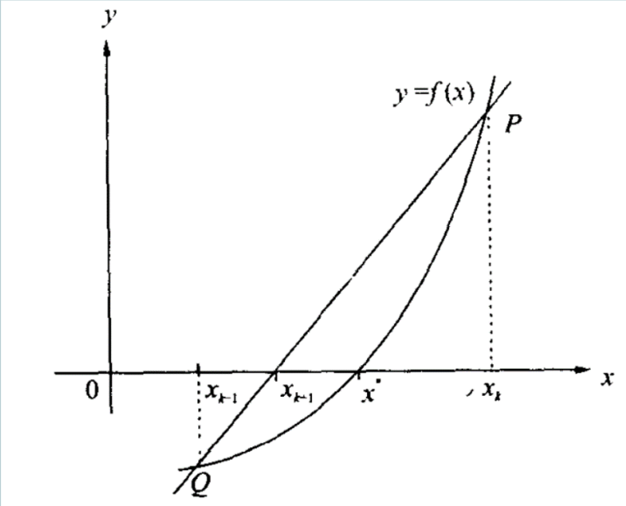
弦截法

弦截法

几何意义: 是以过$P(x_k, f(x_k))$和$Q(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$两点做曲线 $y=f(x)$的弦线l

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

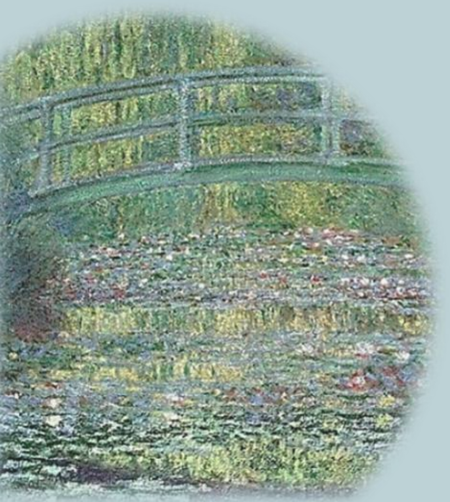
以l与 x 轴的交点 x_{k+1}作为的新近似值（如图所示）：



弦截法的收敛性

定理 2.4 设 f (x) 在其零点 x* 的邻域$\Delta=\{x||x-x^*|<\delta\}$内二阶连续，且对$\forall x\in\Delta, f'(x)\neq 0$，则对$\forall x_0, x_{-1}\in\Delta$，相应的弦截法是$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$阶收敛的。

该定理说明弦截法是超线性收敛的算法，也是局部收敛的方法，其迭代初始值亦可用二分法提供。



弦截法举例

例 2.5 试用弦截法求解$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$在区间内满足精度要求$\varepsilon = 10^{-8}$的根。

解 相应于该方程的弦截法公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k - 5}{(x_k^3 - 2x_k - 5) - (x_{k-1}^3 - 2x_{k-1} - 5)}(x_k - x_{k-1})$$

取$x_0 = 2, x_{-1} = 3$ 计算，结果见表2-5。

弦截法的计算结果

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k - 5}{(3x_k^2 - 2) - (3x_{k-1}^2 - 2)}(x_k - x_{k-1})$$

取 $x_0=2, x_{-1}=3$ 计算，结果见表 2-5。

表 2-5　弦截法的计算结果

k	x_k
1	2.058 823 529
2	2.096 558 637
3	2.094 510 554
4	2.094 551 435
5	2.094 551 482
6	2.094 551 482

作业3

4. 给定代数方程 $f(x)=x^3+2x-3=0$，

(1)取 $x_0=0$，用牛顿迭代法求其正根 $x^*=1$ 的近似值(精度要求为 $\varepsilon=10^{-2}$)；

5. 给定代数方程 $x^2-0.1x-3.06=0$，

取$x_{-1}=1$, $x_0=2$, 用弦截法求解正根，精度要求$\varepsilon=10^{-3}$ 。

作业以word格式将推导，代码，（可视化）运行结果等（控制文件大小，不要粘贴代码图片， 文件名：姓名_学号_作业3）发到助教（小沈）邮箱： 20245227049@stu.suda.edu.cn 。

注意：在作业中自己编写函数，不要直接使用相关库中的现成函数。


Thanks