数值分析 Numerical Analysis

Lecture 12：插值型数值积分 Numerical Integration

蹇微著

苏州大学，计算机科学与技术学院

邮箱：wzqian@suda.edu.cn
办公室：理工楼543

目录

2. 插值型数值积分

插值型数值积分的思想是：

若已知 $f(x_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 则利用

拉格朗日插值多项式建立近似计算公式

$$\int_a^b L_n(x)dx \approx \int_a^b f(x)dx$$

这里 $$\int_a^b L_n(x)dx=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b l_i(x)dx=\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \overset{\text{记为}}{=} I_n \qquad (5-9)$$

称为**插值型求积公式**， $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为**求积节点**，

$A_i \overset{def}{=} \int_a^b l_i(x)dx \quad (i=0,1,\cdots,n)$ 称为**求积系数**，其和

$$\sum_{i=0}^{n} A_i=\int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(x)dx=\int_a^b dx=b-a$$

2.1 牛顿柯特斯公式

由 $x_i = a + ih\left(h = \dfrac{b-a}{n}; i = 0,1,\cdots,n\right), x = a + th$

得 $A_i = \int_a^b l_i(x)dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \dfrac{t-j}{i-j} hdt$

$$= \frac{b-a}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} (t-j)dt$$

记 $$\boxed{C_i^{(n)} = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} (t-j)dt}$$

Cotes系数

则 $A_i = (b-a)C_i^{(n)}$， N-C求积公式表示为

$$I_n = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i) \qquad (5-10)$$

2.1 牛顿柯特斯公式

特别地

$$n=1\text{时，有}\quad I_1=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]\overset{\text{记为}}{=}T$$

这称为**梯形公式**；

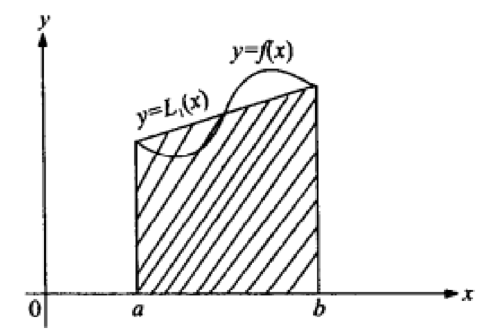

图 5-1　梯形公式

$$n=2\text{时，有}\quad I_2=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\overset{\text{记为}}{=}S$$

这称为**Simpson公式**；

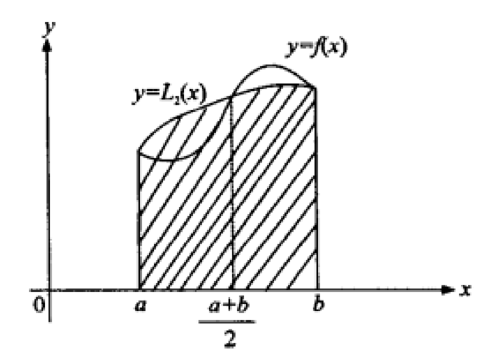

图 5-2　Simpson 公式

2.1 牛顿柯特斯公式

$$n=4\text{时, 有}\quad I_4=\frac{b-a}{90}\left[7f_0+32f_1+12f_2+32f_3+7f_4\right]\overset{\text{记为}}{=}C$$

这称为**Cotes公式**。对应于 $n\le 8$ 情形的Cotes系数见表。

表 5-2 Cotes 系数表

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17\,280}$	$\frac{3\,577}{17\,280}$	$\frac{1\,323}{17\,280}$	$\frac{2\,989}{17\,280}$	$\frac{2\,989}{17\,280}$	$\frac{1\,323}{17\,280}$	$\frac{3\,577}{17\,280}$	$\frac{751}{17\,280}$	
8	$\frac{989}{28\,350}$	$\frac{5\,888}{28\,350}$	$-\frac{928}{28\,350}$	$\frac{10\,496}{28\,350}$	$-\frac{4\,540}{28\,350}$	$\frac{10\,496}{28\,350}$	$-\frac{928}{28\,350}$	$\frac{5\,888}{28\,350}$	$\frac{989}{28\,350}$

规律：系数和为1且对称。

2.2 复合求积公式

求积公式的稳定性分析：

设 $f(x_i)$的近似值为$\tilde{f}(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$, 误差为$e_i=f(x_i)-\tilde{f}(x_i)$,

记 $\tilde{I}_n=\sum_{i=0}^{n}A_i\tilde{f}(x_i)$.

则$\left|I_n-\tilde{I}_n\right|=\left|\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)-\sum_{i=0}^{n}A_i\tilde{f}(x_i)\right|=\left|\sum_{i=0}^{n}A_i e_i\right|$

注意到$n\le 7$时，$C_i^{(n)}$均同号（见表5–2），所以

$$\sum_{i=0}^{n}\left|A_i\right|=\left|\sum_{i=0}^{n}A_i\right|=b-a$$

这时$\left|I_n-\tilde{I}_n\right|\le\left(\sum_{i=0}^{n}\left|A_i\right|\right)\max_{1\le i\le n}\left|e_i\right|=(b-a)\max_{1\le i\le n}\left|e_i\right|$ 计算稳定

2.2 复合求积公式

方法对区间$[a,b]$作等距分割$x_k=a+kh,\ (h=0,1,\cdots,n,\ h=\dfrac{b-a}{n})$在每一个小区间$[x_{k-1},x_k]$上作近似$I_m^{(k)}=\int_{x_{k-1}}^{x_k}L_m(x)dx\approx\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx\quad(k=1,2,\cdots,n)$

合并得 $F_m^{(n)}\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{n}I_m^{(k)}\approx\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

当取 m=1 时，称为**复合梯形公式**，简记为T_n

$$T_n=F_1^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{k-1})+f(x_k)]=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]\qquad(5-11)$$

当取 m=2 时，称为**复合Simpson公式**，简记为S_n

$$S_n=F_2^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{h}{6}\left[f(x_{k-1})+4f\left(x_{k-\frac{1}{2}}\right)+f(x_k)\right]$$

$$=\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f\left(x_{k-\frac{1}{2}}\right)\right]\qquad(5-12)$$

当取 m=4 时，称为**复合Cotes公式**，简记为C_n(公式见书107页）

2.2 复合求积公式

例 5.2 试利用表5-3的函数表，分别用复合梯形公式、复合Simpson公式和复合Cotes公式计算定积分 $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$

表 5-3 被积函数在若干节点上的数值

x	$f(x)=xe^{-x}$
0	0.000 000
1/8	0.110 312
1/4	0.194 700
3/8	0.257 733
1/2	0.303 265
5/8	0.334 538
3/4	0.354 275
7/8	0.364 754
1	0.367 879

2.2 复合求积公式

例 5.2 试利用表5-3的函数表，分别用复合梯形公式、复合Simpson公式和复合Cotes公式计算定积分 $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$

解

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$

$$T_8=\frac{b-a}{8}\times\frac{1}{2}(1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1)$$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$

$$S_4=\frac{b-a}{4}\times\frac{1}{6}(1 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 1)$$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$

$$C_2=\frac{b-a}{2}\times\frac{1}{90}(7 \quad 32 \quad 12 \quad 32 \quad 14 \quad 32 \quad 12 \quad 32 \quad 7)$$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8$

例 5.2 试利用表5-3的函数表，分别用复合梯形公式、复合Simpson公式和复合Cotes公式计算定积分 $I=\int_0^1 xe^{-x}dx$

解 $$T_8=\frac{1}{2}\frac{1}{8}\left[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{7}f\left(\frac{k}{8}\right)\right]=0.262940$$

$$S_4=\frac{1}{6}\frac{1}{4}\left\{f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{3}f\left(\frac{k}{4}\right)+4\sum_{k=1}^{4}f\left(\frac{2k-1}{8}\right)\right\}=0.264238$$

$$C_2=\frac{1}{90}\frac{1}{2}\left\{7[f(0)+f(1)]+14f\left(\frac{1}{2}\right)+12\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}$$
$$+\frac{1}{90}\frac{1}{2}\left\{32\sum_{k=1}^{4}f\left(\frac{2k-1}{8}\right)\right\}=0.264241$$

而精确值 $I=1-2e^{-1}=0.26424111\cdots\cdots$。可见，复合*Simpson*公式的精确程度优于复合梯形公式，复合*Cotes*公式又优于复合*Simpson*公式，而这三种公式的计算量几乎相同。

2.3 插值型求积公式的误差分析

记 $R_n[f]=I-I_n$ 为采用插值型求积公式进行积分近似的截断误差，则由多项式插值公式的误差估计式（5-1）得

$$R_n[f]=I-I_n=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b L_n(x)dx=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx \qquad (5-14)$$

因此，当 $f(x)$ 为次数不超过 n 次的多项式时，插值型求积公式精确成立，由此引出“代数精度”的概念。

定义 5.1（代数精度） 若近似于定积分的数值积分公式当且仅当 $f(x)$ 为次数不高于 n 次的代数多项式时恒等于定积分 I，则称该数值积分公式的**代数精度**为 n（次）。

由定义知，插值型求积公式的代数精度至少为n 。

2.3 插值型求积公式的误差分析

定理 5.1 设 I_n 为由 N-C 公式（5-10）计算生成，则当 n 为奇数时，I_n 的代数精度为 n；当 n 为偶数时，I_n 的代数精度为 $n+1$，且当 $f^{(n+1)}(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续时，我们有如下误差估计式

$$R_n(f)=\begin{cases}\dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\displaystyle\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx & (n\text{为奇数}) \\ \dfrac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\displaystyle\int_a^b (x-\dfrac{a+b}{2})\omega_{n+1}(x)dx & (n\text{为偶数})\end{cases} \qquad (5—15)$$

这里 $\eta\in(a,b)$

作业12

5. 把区间[0,2]分为八等分，采用分点上的函数值，分别以复合梯形公式、复合 Simpson 公式和复合 Cotes 公式计算以下定积分。精度保留4位小数。

(2) $\int_0^2 (xe^{-x}+1)\mathrm{d}x$

作业以word格式将推导，代码，（可视化）运行结果等（控制文件大小，不要粘贴代码图片， 文件名：学号_姓名_作业12）发到助教（小王）邮箱：20245227027@stu.suda.edu.cn。


Thanks

Appendix

例 试确定系数 A_i, 使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度, 并求出此求积公式的代数精度.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1).$$

解 分别取 $f(x)=1, x, x^2$, 令求积公式精确成立, 可得 $\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = b - a \\ -A_0 + A_2 = 0 \\ A_0 + A_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

求得 $A_0 = \frac{1}{3}, A_1 = \frac{4}{3}, A_2 = \frac{1}{3}$. 因此求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1).$$

将 $f(x) = x^3$ 代入, 公式左边 $= 0 =$ 右边. 将 $f(x) = x^4$ 代入, 公式左边为 $\frac{2}{5}$, 右边为 $\frac{2}{3}$. 因此该求积公式的代数精度为 4.

✍ 公式中含有 $n+1$ 个参数, 因此可以选取合适的 A_i, 使得公式至少具有 n 次代数精度