数值分析 **Numerical Analysis**

Lecture 14：常微分方程初值问题的数值解法 Ordinary Differential Equations-1

骞微著

邮箱：wzqian@suda.edu.cn

苏州大学，计算机科学与技术学院

办公室：理工楼543

目 录

问题定义：初值问题 IVP

问题：　求解 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x \in [x_0, b] \qquad (5-1)$

数学求解：$y = y(x)$.

数值求解方法：

对区间$[x_0,b]$作等距分割,生成节点$x_i = x_0 + ih\ (i = 0,1,\cdots,n)$,

$h = \dfrac{b - x_0}{N}$,然后逐个求解出节点上的函数值$y(x_1), y(x_2),\cdots,$

$y(x_N)$的近似值

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

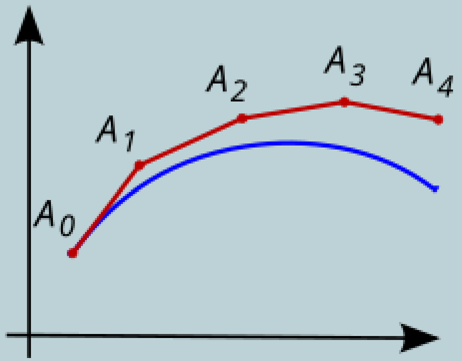
6.1 欧拉方法

欧拉方法
$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad (i = 0,1,\cdots)$$

例6.1 以 h=0.1为步长，用欧拉法求常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = xe^{-x} - y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

的数值解，并与精确解 $y(x) = \frac{1}{2}(x^2+2)e^{-x}$ 比较



解 由欧拉公式得

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(x_i e^{-x_i} - y_i) \\ y_0 = 1 \end{cases} \quad (i = 0,1,\cdots,9)$$

计算结果见表 6-1。

6.1 欧拉方法

表 6-1 欧拉法的计算结果

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i)-y_i \rvert$
0	1	1	0
0.1	0.900 000	0.909 362	9.362×10^{-3}
0.2	0.819 048	0.835 105	$1.605\,7\times10^{-2}$
0.3	0.753 518	0.774 155	$2.063\,7\times10^{-2}$
0.4	0.700 391	0.723 946	2.3555×10^{-2}
0.5	0.657 165	0.682 347	$2.518\,2\times10^{-2}$
0.6	0.621 775	0.647 598	$2.582\,3\times10^{-2}$
0.7	0.592 526	0.618 249	$2.572\,3\times10^{-2}$
0.8	0.568 034	0.593 114	$2.508\,0\times10^{-2}$
0.9	0.547 177	0.571 230	$2.405\,3\times10^{-2}$
1.0	0.529 051	0.551 819	$2.276\,8\times10^{-2}$

6.1.2 梯形公式与改进欧拉公式

由 y_i 求 y_{i+1} 的步骤：

对微分方程积分 $y' = f(x,y)$ 得

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$$

从而把微分方程问题转化为积分方程问题

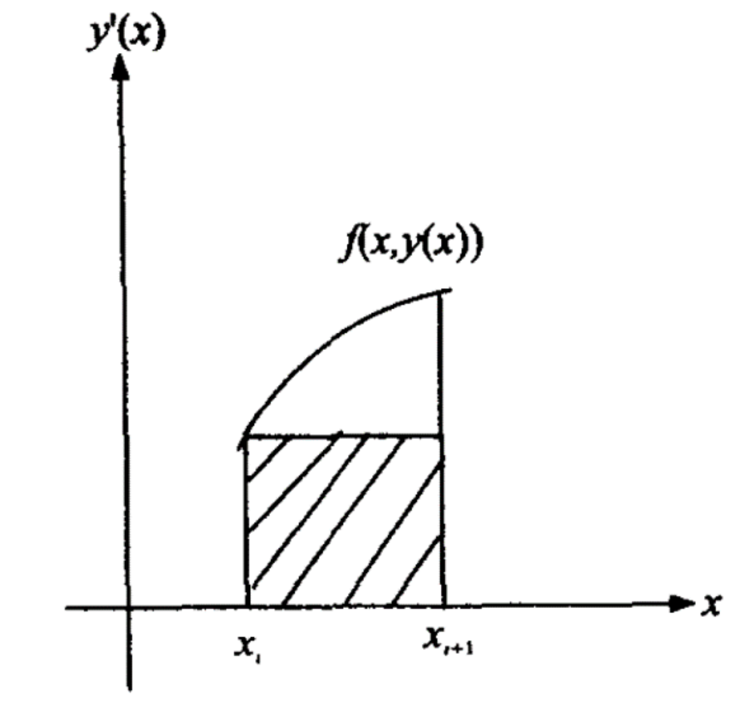
$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \qquad (6-4)$$

由 $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y(x_i))dx = h\, f(x_i, y(x_i))$

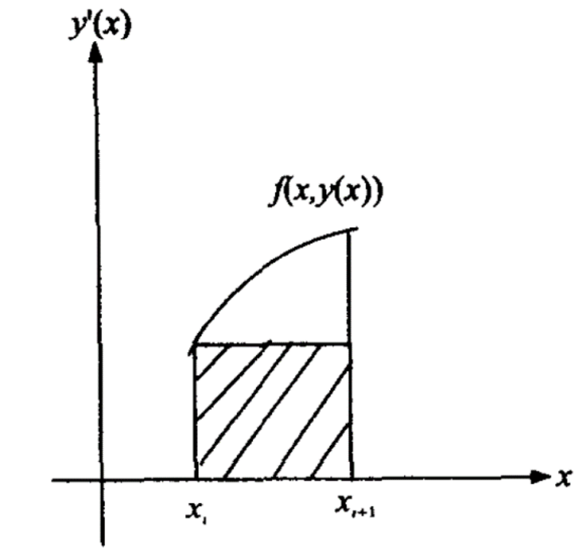
得 $y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h\, f(x_i, y(x_i))$

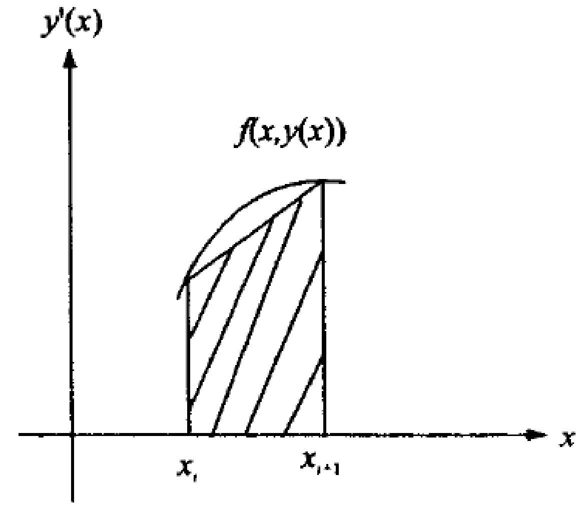
从而可导出欧拉公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad (i = 0, 1, \cdots)$$



6.1.2 梯形公式与改进欧拉公式





由 $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx \approx \frac{h}{2}[f(x_i,y(x_i))+f(x_{i+1},y(x_{i+1}))]$

得 $y(x_{i+1}) \approx y(x_i)+\frac{h}{2}[f(x_i,y(x_i))+f(x_{i+1},y(x_{i+1}))]$

从而导出梯形公式

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})] \\ y_0=y(x_0) \end{cases} \qquad (6-5)$$

梯形公式也是隐式单步法公式

6.1.2 梯形公式与改进欧拉公式

取欧拉公式计算出的解作为 y_{i+1} 的一个预报值，
带入梯形公式得到y_{i+1} 的一个校正值：

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \end{cases} (i = 0,1,\cdots,N-1)$$

这称为**改进欧拉公式**

6.1.2 梯形公式与改进欧拉公式

例6.2 仍取步长$h = 0.1$，采用改进欧拉法重新计算例 6.1 的常微分方程初值问题。

$$\begin{cases} y' = xe^{-x} - y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad x \in [0,1]$$

解 这时改进欧拉公式为

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + h(x_i e^{-x_i} - y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}[(x_i e^{-x_i} - y_i) + (x_{i+1} e^{-x_{i+1}} - \tilde{y}_{i+1})] \end{cases} \quad (i = 0,1,\cdots,9)$$

计算结果见表6-2（书125页）

6.1.2 梯形公式与改进欧拉公式

表 6-2　改进欧拉法的计算结果

x_i	y_i	$y(x_i)$	$\lvert y(x_i)-y_i \rvert$
0	1	1	0
0.1	0.909 524	0.909 362	1.63×10^{-4}
0.2	0.835 378	0.835 105	2.73×10^{-4}
0.3	0.774 498	0.774 155	3.43×10^{-4}
0.4	0.724 328	0.723 946	3.83×10^{-4}
0.5	0.682 746	0.682 347	3.99×10^{-4}
0.6	0.647 997	0.647 598	3.99×10^{-4}
0.7	0.618 635	0.618 249	3.87×10^{-4}
0.8	0.593 481	0.593 114	3.66×10^{-4}
0.9	0.571 571	0.571 230	3.41×10^{-4}
1	0.552 132	0.551 819	3.13×10^{-4}

作业14

2. 取步长 $h=0.1$，用改进欧拉公式求解常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在 $x=0.4$ 处的近似值。按照4位小数计算。

作业以word格式将推导，代码，（可视化）运行结果等（控制文件大小，不要粘贴代码图片， 文件名：学号_姓名_作业14）发到助教（小王）邮箱：20245227027@stu.suda.edu.cn。


Thanks

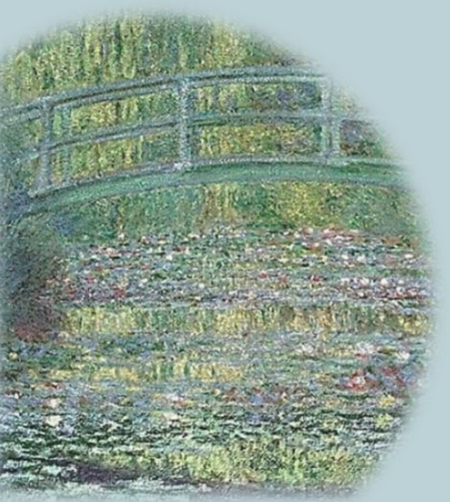
Appendix：ODE解的存在性和唯一性证明

Picard–Lindelöf Theorem

Theorem 1.6.1 Existence and Uniqueness Theorem. *Let* $x' = f(t, x)$ *have the initial condition* $x(t_0) = x_0$. *If* f *and* $\partial f / \partial x$ *are continuous functions on the rectangle*

$$R = \{(t, x) : 0 \leq |t - t_0| \leq a, 0 \leq |x - x_0| \leq b\},$$

there exists a unique solution $u = u(t)$ *for* $x' = f(t, x)$ *and* $x(t_0) = x_0$ *on some interval* $|t - t_0| < h$ *contained in the interval* $|t - t_0| < a$.



Poof: 1) triangle inequality for integrals; 2) local Lipschitz continuity; 3) contraction

Recall: Banach Fixed-Point Theorem

Appendix：ODE解的存在性和唯一性证明

initial value problem: $\boxed{\begin{array}{l}\dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0\end{array}}$ with $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ loc. Lipschitz continuous

$\Longrightarrow$ there is a unique solution!

(Picard-Lindelöf theorem)

Banach fixed-point theorem: Let (X, d) be a complete metric space

and $\Phi : X \to X$ be a contraction.

Then: Φ has a unique fixed point $x^* \in X$.

Appendix : ODE解的存在性和唯一性证明

initial value problem: $\boxed{\begin{array}{l}\dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0\end{array}}$ with $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ loc. Lipschitz continuous

$\Longrightarrow$ there is a unique solution!

(Picard-Lindelöf theorem)

Banach fixed-point theorem: Let (X, d) be a complete metric space

and $\Phi : X \to X$ be a contraction.

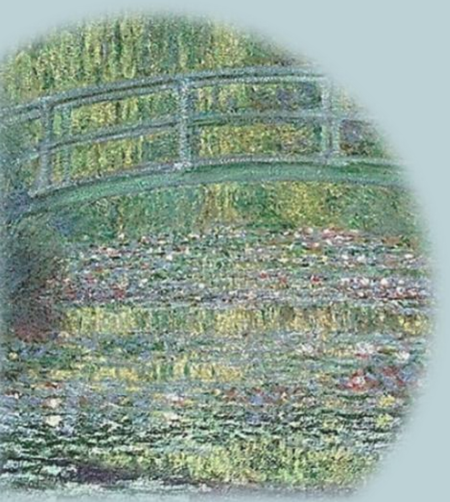
Then: Φ has a unique fixed point $x^* \in X$.

We need: (1) Complete metric space consisting of functions.

(2) Contraction $\Phi(\alpha)(t) = x_0 + \int_0^t v(\alpha(s))\,ds$

Now we know: $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ is a solution of $\boxed{\begin{array}{l}\dot{x} = v(x) \\ x(0) = x_0\end{array}}$

$\Longleftrightarrow \Phi(\alpha) = \alpha$ (fixed point equation)



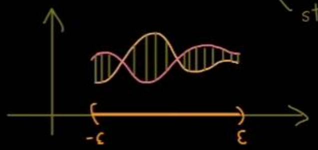
Appendix : ODE解的存在性和唯一性证明

For (1):

$$X = \left\{ \alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n \ \text{(or domain of } v\text{)} \;\middle|\; \alpha \ \text{continuous + bounded},\ \alpha(0) = x_0 \right\}$$

with metric: $$d(\alpha,\beta) := \sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \|\alpha(t)-\beta(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

standard norm



Fact: (X, d) is a complete metric space.

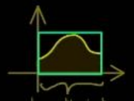
For (2): $$\Phi(\alpha)(t) = x_0 + \int_0^t v(\alpha(s))\,ds$$ gives a map $\Phi : X \longrightarrow X$

$$d(\Phi(\alpha),\Phi(\beta)) = \sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \|\Phi(\alpha)(t) - \Phi(\beta)(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$= \sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \left\| \int_0^t \big(v(\alpha(s)) - v(\beta(s))\big)\,ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

triangle inequality for integrals

$$\leq \sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \int_0^t \|v(\alpha(s)) - v(\beta(s))\|_{\mathbb{R}^n}\,ds$$



$$\leq \sup_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \underbrace{\text{length}([0,t])}_{|t|\leq\varepsilon} \cdot \underbrace{\sup_{s\in[0,t]} \|v(\alpha(s)) - v(\beta(s))\|_{\mathbb{R}^n}}_{\leq \sup_{s\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \cdots}$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sup_{s\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \underbrace{\|v(\alpha(s)) - v(\beta(s))\|_{\mathbb{R}^n}}_{\leq L\,\|\alpha(s)-\beta(s)\|_{\mathbb{R}^n}}$$

$$\leq \underbrace{\varepsilon \cdot L}_{<1 \text{ for } \varepsilon \text{ small enough}} \cdot d(\alpha,\beta)$$ contraction

Appendix：误差分析

定义 6.1 若 y_{i+1} 是从 $y_i = y(x_i)$ 计算得到的近似解，则称 $y(x_{i+1}) - y_{i+1}$ 为所用公式的**局部截断误差**，简称为**截断误差**。

对于单步法，整体截断误差与局部截断误差之间具有如下关系。

定理 6.1 若单步法 $y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h)$ 的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，且增量函数 $\varphi(x, y, h)$ 关于 y 满足李普希兹条件，即存在常数 $L>0$，使对任何 $y, \tilde{y}$ 成立不等式

$$|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, \tilde{y}, h)| \leqslant L|y - \tilde{y}|$$

则其整体截断误差 $y(x_i) - y_i = O(h^p)$。

有此定理可知，对于单步法来说，整体截断误差比局部误差的阶低一阶。可以用泰勒展开来估计单步法的局部截断误差。

Appendix :误差分析

设常微分方程初值问题(6-1)的解 $y(x)$ 在区间 $[x_0,b]$ 上三阶连续可微，则

$$y(x_{i+1}) = y(x_i+h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3) \tag{6-7}$$

在 $y_i=y(x_i)$ 的假设下，由欧拉公式(6-2)得

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) = y(x_i) + hy'(x_i)$$

所以

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3) = O(h^2) \tag{6-8}$$

因此，欧拉公式的局部截断误差为 $O(h^2)$。

对于后退欧拉公式，由式(6-3)得

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

而 $$\begin{aligned} f(x_{i+1},y_{i+1}) &= [f(x_{i+1},y_{i+1}) - f(x_{i+1},y(x_{i+1}))] \\ &\quad + f(x_{i+1},y(x_{i+1})) \\ &= f'_y(x_{i+1},\eta)[y_{i+1} - y(x_{i+1})] + f(x_{i+1},y(x_{i+1})) \end{aligned}$$

(η 介于 y_{i+1} 与 $y(x_{i+1})$ 之间)

且 $f(x_{i+1},y(x_{i+1})) = y'(x_{i+1}) = y'(x_i) + hy''(x_i) + O(h^2)$

故得

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y(x_i) + hy'(x_i) + h^2y''(x_i) + O(h^3) \\ &\quad + hf'_y(x_{i+1},\eta)[y_{i+1} - y(x_{i+1})] \end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned} y(x_{i+1}) - y_{i+1} &= -\frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3) \\ &\quad + hf'_y(x_{i+1},\eta)[y(x_{i+1}) - y_{i+1}] \end{aligned}$$

整理得

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{1}{1 - hf'_y(x_{i+1},\eta)}\left[-\frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3)\right]$$

又利用泰勒展式 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + O(x^3)$

得 $$\frac{1}{1 - hf'_y(x_{i+1},\eta)} = 1 + hf'_y(x_{i+1},\eta) + O(h^2)$$

所以 $$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = -\frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3) = O(h^2) \tag{6-9}$$

因此，后退欧拉公式的局部截断误差为 $O(h^2)$。

Appendix :误差分析

对于梯形公式，注意到这时式(6-5)可改写为

$$y_{i+1} = \frac{1}{2}\{[y_i + hf(x_i, y_i)] + [y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})]\}$$

故利用式(6-8)与式(6-9)知：在 $y_i = y(x_i)$ 时，成立

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) - y_{i+1} &= \frac{1}{2}\{y(x_{i+1}) - [y_i + hf(x_i, y_i)] \\ &\quad + y(x_{i+1}) - [y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})]\} \\ &= \frac{1}{2}\{[\frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3)] \\ &\quad + [-\frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3)]\} \\ &= O(h^3) \end{aligned} \tag{6-10}$$

因此，梯形公式的局部截断误差为 $O(h^3)$。

对于改进欧拉公式，由式(6-6)得

$$\begin{cases} \widetilde{y_{i+1}} = y(x_i) + hy'(x_i) \\ y_{i+1} = y(x_i) + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \widetilde{y_{i+1}})] \end{cases}$$

而由 $y' = f(x, y)$ 得 $y''(x) = f'_x(x, y) + y' f'_y(x, y)$，故有

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}, \widetilde{y_{i+1}}) &= f(x_i + h, y(x_i) + hy'(x_i)) \\ &= f(x_i, y(x_i)) + [hf'_x + hy' f'_y]_{(x_i, y(x_i))} + O(h^2) \\ &= y'(x_i) + hy''(x_i) + O(h^2) \end{aligned}$$

所以

$$y_{i+1} = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3)$$

与式(6-7)比较得

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = O(h^3) \tag{6-11}$$

因此，改进欧拉公式的局部截断误差为 $O(h^3)$。