



数值分析 Numerical Analysis

Lecture 4: 线性代数方程组的数值解法

消去法 Gaussian Elimination

蹇微著

苏州大学，计算机科学与技术学院

邮箱: wzqian@suda.edu.cn

办公室: 理工楼543



目录

3.1 引言

3.2 解线性方程组的消去法

3.3 解线性方程组的矩阵分解法

3.4 解线性方程组的迭代法



3.1 引言

给定一个线性方程组

$$Ax = b \quad (3-1)$$

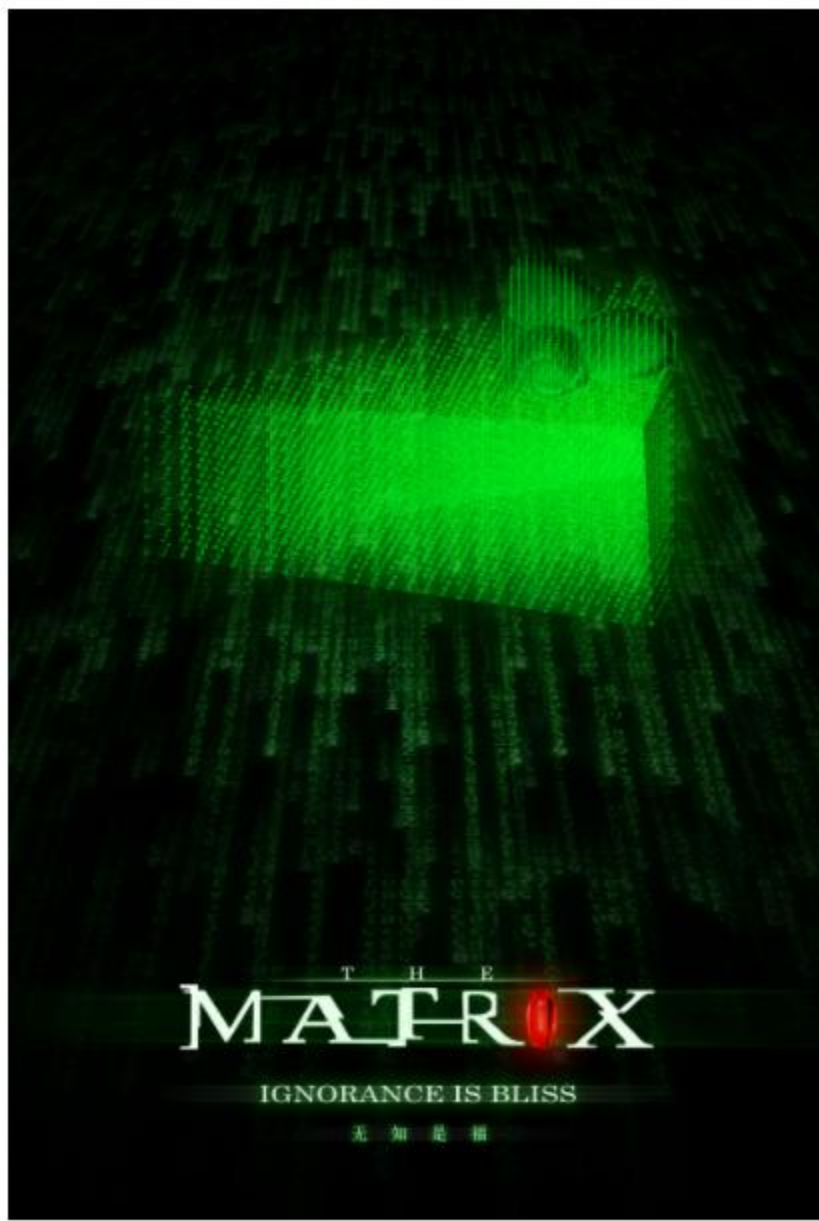
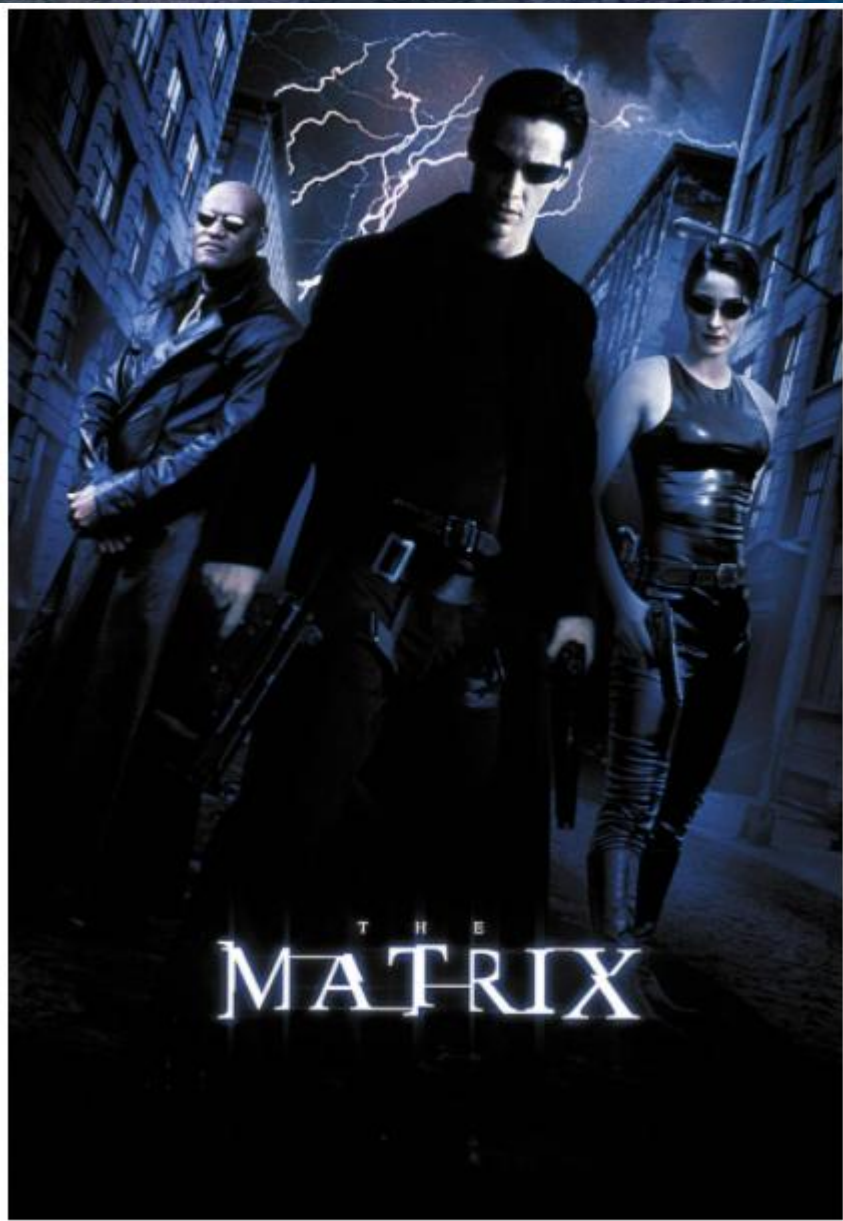
这里 $A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

MATRIX

求解向量 x 。



3.1 引言



3.1 引言

第一类是直接法。即按求精确解的方法运算求解。

第二类是迭代法。其思想是首先把线性方程组(3-1)等价变换为如下形式的方程组：

$$x = Mx + f \quad (3-2)$$

$$\text{其中 } M = (m_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

然后构造迭代格式

$$x_{k+1} = Mx_k + f \quad (3-3)$$

这称为一阶定常迭代格式， M 称为迭代矩阵。



消去法：高斯消去法与高斯若当消去法

高斯消去法：

(1) 消元过程：

对 $k=1, 2, \dots, n$ 依次计算

$$\begin{cases} a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} & (j = k+1, k+2, \dots; n+1) \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)} & (i = k+1, k+2, \dots, n; j = k+1, \dots, n+1) \end{cases} \quad (3-4)$$

(2) 回代过程：

$$\begin{cases} x_n = a_{nn+1}^{(n)} \\ x_i = a_{in+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \end{cases} \quad (3-5)$$



高斯消去法

例3.1 试用高斯消去法求解线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

解 消元过程为

$$(A : b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 1.25 & 2 \\ 0 & 1 & -1.25 & 2 \\ 0 & 0 & 4.625 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 1.25 & 2 \\ 0 & 2 & -2.5 & 4 \\ 0 & 1.5 & 2.75 & 3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 1.25 & 2 \\ 0 & 1 & -1.25 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

高斯消去法

即把原方程组等价约化为

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + 1.25x_3 = 2 \\ \quad x_2 - 1.25x_3 = 2 \\ \quad \quad x_3 = 0 \end{cases}$$

据之回代解得

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$



高斯-若当消去法

为了避免回代的计算，我们可在消元过程中直接把系数矩阵A约化为单位矩阵I，从而得到解，即

$$(A \quad : \quad b) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (I \quad : \quad x)$$

相应地，计算公式可表述为：

对 $k = 1, 2, \dots, n$, 依次计算

$$\begin{cases} a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} & (j = k+1, k+2, \dots, n+1) \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)} & (i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, n; j = k+1, \dots, n+1) \end{cases} \quad (3-6)$$

从而得到解 $x_i = a_{in+1}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

这一无回代的消去法称为**高斯-若当 (Jordan) 消去法**

高斯-若当消去法

例 3.2 试用高斯-若当消去法求解例3.1的线性方程组。

解 因为

$$(A \vdots b) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & 0 & \vdots & 8 \\ 1 & 2 & 4 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & -2.5 & \vdots & 4 \\ 0 & 1.5 & 2.75 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.875 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 4.625 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

所以, 解 $x = (1 \ 2 \ 0)^T$

消去法的可行性和计算工作量

定理 3.1 如果A的各阶顺序主子式均不为零，即有

$$D_1 = a_{11} \neq 0, D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (k = 2, 3, \cdots, n)$$

即消去法可行。

例子：

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4, \Delta_2 = 21, \Delta_3 = 59$$



消去法的可行性和计算工作量

推论 若系数矩阵严格对角占优，即有

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n |a_{ij}| \quad (i=1,2,\dots,n)$$

则消去法可行，且 $a_{11}^{(0)} = D_1, a_{kk}^{(k-1)} = D_k / D_{k-1} (k=2,3,\dots,n)$

例子：

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

第1行：|4|

第2行：|5|

第3行：|3|



消去法的可行性和计算工作量

定理 3.2 求解 n 阶线性方程组 (3-1) 的高斯消去法的乘除工作量约为 $n^3/3$ ，加减工作量约为 $n^3/3$ ；而高斯-若当消去法的乘除工作量约为 $n^3/2$ ，加减工作量约为 $n^3/2$ 。

$$\begin{aligned}(A \vdots b) &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & \vdots & 8 \\ 2 & 3 & 0 & \vdots & 8 \\ 1 & 2 & 4 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 2 & -2.5 & \vdots & 4 \\ 0 & 1.5 & 2.75 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 4.625 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1.25 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

第一步消元，几次乘法？

$n = 3$ ；归一，3次；消元， $2 \times 3 = 6$ 次；总9次 = n^2

总计： $n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1$

消去法的可行性和计算工作量

证 由式(3-4)知, 高斯消去法在消元过程中第 k 步的工作量为

$$\text{乘除: } (n+1-k) + (n-k)(n+1-k) = (n-k)^2 + 2(n-k) + 1$$

$$\text{加减: } (n-k)(n+1-k) = (n-k)^2 + (n-k)$$

所以, 消元过程的总工作量为

$$\text{乘除: } \sum_{k=1}^n [(n-k)^2 + 2(n-k) + 1] \underline{m = n - k} \left[\sum_{m=1}^{n-1} (m^2 + 2m) \right] + n$$

$$= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n(n-1) + n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} + \frac{1}{6}n$$

$$\text{加减: } \sum_{k=1}^n [(n-k)^2 + (n-k)] = \sum_{m=1}^{n-1} (m^2 + m) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$$



消去法的可行性和计算工作量

回代过程中的乘除和加减工作量均为 $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}n(n-1)$
总工作量为

$$\text{乘除: } \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n \approx \frac{1}{3}n^3$$

$$\text{加减: } \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n \approx \frac{1}{3}n^3$$

类似可得，高斯-若当消去法的工作量为

$$\begin{aligned} \text{乘除: } \sum_{k=1}^n [(n+1-k) + (n-1)(n+1-k)] &= \sum_{k=1}^n n(n+1-k) \underline{\underline{m = n+1-k}} n \left(\sum_{m=1}^n m \right) \\ &= n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{2} + \frac{1}{2}n^2 \approx \frac{n^3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{加减: } \sum_{k=1}^n (n-1)(n+1-k) = (n-1) \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{2} - \frac{1}{2}n \approx \frac{n^3}{2}$$



例子

例 3.3 试用高斯-若当消去法求解如下矩阵方程

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 10 \\ 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

解 因为

$$(A \quad B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & \vdots & 1 & 1.5 & 2.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & \vdots & -2 & 1.5 & 2.5 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.2 & \vdots & 1.4 & 1.2 & 2 \\ 0 & 1 & -0.4 & \vdots & -0.8 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 2.8 & \vdots & 5.6 & 2.8 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

选主元素的消去法

主元素的选取通常采用两种方法，一种是**列主元消去法**，另一种是**全主元消去法**。
下面以例介绍选主元的算法思想

例 3.4 试用选主元消去法解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$



列主元高斯消去法

解 (1) 用列主元高斯消去法

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

a) 对 $k = 1, 2, \dots, n$ 作

- a1. 在第 k 列 **主对角线及以下** 的元素中选出按照绝对值最大的一个元素，称为主元；
- a2. **一次** 换行后将主元换到该列主对角线上；
- a3. 归一，消元

b) 回代

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 5 \\ \textcircled{4} & 3 & 0 & \vdots & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{4} & 3 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 5 \\ 2 & 1 & 4 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 5 & \vdots & 5 \\ 0 & -0.5 & 4 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{6.5} & \vdots & 6.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 5 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

回代解得 $x_3 = 1, x_2 = 0, x_1 = 3$

全主元高斯-若当消去法

(2) 用全主元高斯-若当消去法

对 $k = 1, 2, \dots, n$ 作

- a1. 划去前面主元素所在的行、列，在剩下的所有元素中选出主元；
- a2. 一次换行后将主元换到同一列主对角线上；
- a3. 归一，消元

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & \textcircled{5} & \vdots & 5 \\ 4 & 3 & 0 & \vdots & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & \vdots & 10 \\ 4 & 3 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 1 & \textcircled{5} & \vdots & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0.2 & 0 & \vdots & 6 \\ \textcircled{4} & 3 & 0 & \vdots & 12 \\ 0 & 0.2 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} \textcircled{4} & 3 & 0 & \vdots & 12 \\ 2 & 0.2 & 0 & \vdots & 6 \\ 0 & 0.2 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.75 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & \textcircled{-1.3} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

故得解为 $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 1$

作业Homework 4

1. 分别用高斯消去法和高斯-若当消去法求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. 分别用选全主元的高斯消去法和高斯-若当消去法求解如下线性方程组。

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. 分别用选列主元的高斯消去法和~~高斯-若当消去法~~求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

作业以word格式将推导，代码，（可视化）运行结果等（控制文件大小，不要粘贴代码图片， 文件名：学号_姓名_作业4）发到助教（小王）邮箱： 20245227027@stu.suda.edu.cn。

Thanks

