# 数值分析  Numerical Analysis

## Lecture 8：函数插值Interpolation-2

骞微著

苏州大学，计算机科学与技术学院

邮箱：wzqian@suda.edu.cn

办公室：理工楼543

# 函数插值

1. 多项式插值
2. Lagrange插值
3. **Newton插值**
4. 分段低次插值
5. Hermite插值
6. 三次样条插值

# Recap: 多项式插值和Lagrange 插值

多项式插值的构造：

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} = \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0,i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

# Newton插值

**Motivation：** Lagrange 插值简单易用, 但若增加插值节点时, 全部基函数需重新计算, 很不方便!

**解决办法**: 寻找新的基函数组, 使得当节点增加时, 只需在原有基函数的基础上再增 加一些新的基函数即可.

# Newton插值

构造可以逐次生成插值多项式的算法, 即

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + U_{n+1}(x),$$

其中$P_{n+1}(x)$和 $P_{n+1}(x)$ 分别为 $f(x)$ 的 $n+1$次和 $n$ 次插值多项式, 而且

$U_{n+1}(x)$ 可以很 容易地给出.

# Newton插值基函数

设插值节点为$x_i(i=0,\dots,n)$，考虑函数组

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = x - x_0$$

$$\phi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\dots$$

$$\phi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$\phi_k(x)$是$k$次多项式且线性无关，因此它们组成多项式线性空间$\mathbb{H}_n(x)$的一组基。这就是Newton插值采用的基函数组。

# Newton插值基函数

设$P(x)$是插值节点为$x_i (i = 0, \ldots, n)$上的$n$次插值多项式

$$P(x) = \alpha_0\phi_0(x) + \alpha_1\phi_1(x) + \cdots + \alpha_n\phi_n(x)$$

两个问题：

1）如何确定参数$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$

2）如何从$P_n(x)$递推到$P_{n+1}(x)$？

解决方法：**差商/均差Divided Difference**

# 均差的定义

**定义** 设$x_i(i=0,\dots,n)$，我们称

$$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$$

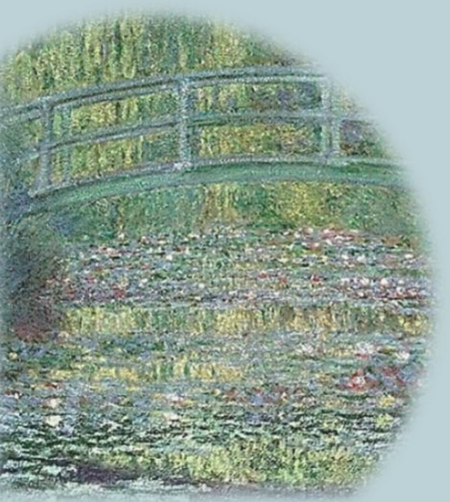
为$f(x)$关于点$x_i,x_j$的一阶均差；称

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$$

为$f(x)$关于点$x_i,x_j,x_k$的二阶均差；一般地，称

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\dots,x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

为$f(x)$关于点$x_0,x_1,\dots,x_k$的k阶均差。



# 均差的性质

均差可以表示为函数的线性组合（归纳法可以证明）

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\prod_{i=0,i\neq j}^{k}(x_j-x_i)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

其中$\omega_{k+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$

可以看出均差与节点顺序无关，即均差具有如下对称性：

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=f[x_{i0},x_{i1},\dots,x_{ik}]$$

其中$i0,i1,\dots,ik$为$0,1,\dots,k$的任意节点。

由此可以给出均差的另一定义：

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_0,\dots,x_{k-2},x_x]-f[x_0,\dots,x_{k-2},x_{k-1}]}{x_k-x_{k-1}}$$

# 均差的性质

若$h(x) = \alpha f(x)$，其中$\alpha$是常数，则

$$h[x_0, x_1, \dots, x_k] = \alpha f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

若$h(x) = f(x) + g(x)$，则

$$h[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_0, x_1, \dots, x_k] + g[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$k$阶均差和$k$阶导数之间的关系：

若$f(x)$在$[a, b]$上有$k$阶导数，则至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

（证明见余项公式）

# 均差的计算：均差表

若利用均差的递推定义，我们可以构造下面的均差表来计算均差。

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 一阶均差 | 二阶均差 | 三阶均差 | … | $n$阶均差 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | | … | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $f[x_0,x_1]$ | | | … | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | $f[x_1,x_2]$ | $f[x_0,x_1,x_2]$ | | … | |
| $x_3$ | $f(x_3)$ | $f[x_2,x_3]$ | $f[x_1,x_2,x_3]$ | $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ | … | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | … | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | $f[x_{n-1},x_n]$ | $f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$ | $f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$ | … | $f[x_0,x_1,\dots,x_n]$ |

# 均差计算举例

已知 $y=f(x)$的函数值表如下，试计算其各阶均差。

| $\boldsymbol{i}$ | 0 | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $-2$ | -1 | 1 | 2 |
| $f(x_i)$ | 5 | 3 | 17 | 21 |

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 一阶均差 | 二阶均差 | 三阶均差 |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $5$ | | | |
| $-1$ | $3$ | $-2$ | | |
| $1$ | $17$ | $7$ | $3$ | |
| $2$ | $21$ | $4$ | $-1$ | $-1$ |

# Newton插值公式

根据均差的定义$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$可得$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$

同理，由$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$可得$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)$

以此类推有

$$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)$$
$$f[x,x_0,x_1,x_2]=f[x_0,x_1,x_2,x_3]+f[x,x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_3)$$
$$\vdots$$
$$f[x,x_0,\dots,x_{n-2}]=f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]+f[x,x_0,x_1,\dots,x_{n-1}](x-x_{n-1})$$
$$f[x,x_0,\dots,x_{n-2},x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n]+f[x,x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n](x-x_n)$$

# Newton插值公式

依次将后面一式代入前面一式, 可得

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0) \\
&+f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&+\cdots \\
&+f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \\
&+f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n) \\
&= N_n(x) + R_n(x)
\end{aligned}
$$

其中，（令$a_0 = f(x_0)$ , $a_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$, $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$）

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)\ldots + a_n(x - x_{n-1})$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

# Newton插值公式

直接验证可得

$$R_n(x_i)=0,\mathrm{i}=0,1,2,\dots,\mathrm{n}$$

所以

$$f(x_i)=N_n(x_i)+R_n(x_i)=N_n(x_i),\mathrm{i}=0,1,2,\dots,\mathrm{n}$$

即$N_n(x)$是满足插值条件的$f(x_i)=N_n(x_i)$的n次插值多项式。

这就是Newton插值多项式。

Relation to Taylor Series:

$$f(x)=f(a)+f'^{(a)}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

# 递推公式

根据 $N_n(x)$的表达式, 我们立即可以得到下面的递推公式:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

由插值公式的存在唯一性可知:

$$N_n(x) \equiv L_n(x)$$

对于插值余项同样有:

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n+1}]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

# 递推公式

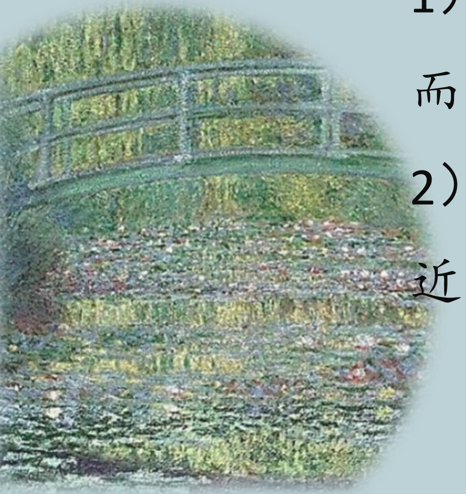
**定理：** 设$f(x) \in C^n[a,b]$（n阶连续可导）且$f^{(n+1)}(x)$在$(a,b)$内存在，则对$\forall x \in [a,b]$,都存在$\xi_x \in (a,b)$使得

$$f[x,x_0,x_1,\dots,x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

**注意：**

1）Newton 插值余项更具实用性, 因为它仅涉及插值点与插值节点的差商, 而不需要计算导数, 因此在导数不存在的情况下仍然可以使用.

2）但在计算均差 $f[x,x_0,x_1,\dots,x_n]$时, 由于 $f(x)$未知, 只能使用插值得到的近似值, 因此 得到的均差可能存在一定的偏差.



# Newton插值举例

已知函数$f(x) = \ln(x)$的函数值如下：

| x | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | −0.9163 | −0.6931 | −0.5108 | −0.3567 | −0.2231 |

试分别用 Newton 线性插值和抛物线插值计算 ln(0.54) 的近似值.

解: 取插值节点 $x_0$= 0.5, $x_1$ = 0.6, $x_2$ = 0.4, 做均差表:

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 一阶均差 | 二阶均差 |
|---|---|---|---|
| 0.5 | −0.6931 | | |
| 0.6 | −0.5108 | 1.8230 | |
| 0.4 | −0.9163 | 2.0275 | −2.0450 |

于是可得,

Newton 线性插值在 x = 0.54 上的近似值为

$$N_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \approx -0.6931 + 1.8230(x - 0.5) \approx -0.6202.$$

Newton 抛物线插值在 x = 0.54 上的近似值为

$$N_2(x) = N_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)\,(x - x_1) \approx -0.6153$$

# Newton 插值公式点评

Newton 插值的优点可以看出, 当增加一个节点时, Newton 插值公式只需在原来的基础上增加一项, 前面的计算结果仍然可以使用. 与 Lagrange 插值相比, Newton 插值具有灵活增加插值节点的优点!

几点注记

- 选取插值节点时, 遵循就近原则
- 插值节点无需按大小顺序排列
- Newton 插值只需要使用差商表中对角线部分的值
- 增加插值节点时, 新增的插值点必须排在已有插值节点的后面

# 差分形式的牛顿插值公式

前面给出的插值多项式是节点任意分布的情况,但实际应用时经常遇到等距节点,即

$$x_i = x_0 + ih, \qquad \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n}$$

其中$h > 0$为步长。此时,我们可以用差分**Finite Difference**简化 Newton 插值公式。

一阶向前差分定义为:

$$\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i)$$

类似地,二阶向前差分定义为:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

一般地,n阶向前差分定义为:

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i$$

# 差分与函数值

为了表示方便，我们引入不变算子($\mathbf{I}f_i = f_i$)和位移算子($\mathbf{E}f_i = f_{i+1}$)

于是

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i = \mathbf{E}f_i - \mathbf{I}f_i = (\mathbf{E} - \mathbf{I})f_i$$

所以

$$\Delta^n f_i = (\mathbf{E} - \mathbf{I})^n f_i = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathbf{E}^{n-k}\right] f_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} f_{n-k+i}$$

反之，有

$$f_{n+i} = \mathbf{E}^n f_i = (\mathbf{I} + \Delta)^n f_i = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f_i$$

# 差分与均差

由均差的定义可知，对于任意两个相邻节点有：

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{1}{h}\Delta f_k$$

对于任意三个相邻节点有：

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+2}, x_{k+1}] - f[x_{k+1}, x_k]}{x_{k+2} - x_k} = \frac{1}{2h}\left(\frac{1}{h}\Delta f_{k+1} - \frac{1}{h}\Delta f_k\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{h^2}\Delta^2 f_k$$

一般地, 对于任意 m + 1 个相邻的节点, 有:

$$f[x_k, \dots, x_{k+m}] = \frac{1}{m!}\frac{1}{h^m}\Delta^m f_k \Rightarrow \Delta^m f_k = h^m m!\, f[x_k, \dots, x_{k+m}] = h^m f^{(m)}(\xi)$$

# 差分的计算：差分表

与均差表类似,我们也可以通过下面的差分表来计算差分

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 一阶差分 | 二阶差分 | 三阶差分 | $\cdots$ | $n$阶差分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | $\Delta f_0$ | $\Delta^2 f_0$ | $\Delta^3 f_0$ | $\cdots$ | $\Delta^n f_0$ |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $\Delta f_1$ | $\Delta^2 f_1$ | $\Delta^3 f_1$ | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | |
| $x_{n-2}$ | $f(x_{n-2})$ | $\Delta f_{n-2}$ | $\Delta^2 f_{n-2}$ | | | |
| $x_{n-1}$ | $f(x_{n-1})$ | $\Delta f_{n-1}$ | | | | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | | | | | |

# Newton向前插值公式

如果采用等距插值节点 $x_i = x_0 + ih$, 则可以用差分来简化 Newton 插值公式.

设$x = x_0 + th$，则相应的Newton 向前插值公式为

$$
\begin{aligned}
N_n(x) &= N_n(x_0 + th) \\
&= f_i(x_0) + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^n f_0 + \cdots \\
&\quad + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0
\end{aligned}
$$

插值余项为

$$
R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} t(t-1)\cdots(t-n)h^{n+1}
$$

# Newton向前插值公式: 举例

给定 f(x) = cos(x) 在等距节点 0 : 0.1 : 0.5 处的函数值, 试用 4 次 Newton 向前插值 公式计算 f(0.048) 的近似值, 并估计误差.

解. 取等距节点 $x = 0 : 0.1 : 0.4$ 做差分表

| $x_i$ | $f(x_i)$ | 一阶差分 | 二阶差分 | 三阶差分 | 四阶差分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.00000 | −0.00500 | −0.00993 | −0.00013 | −0.00012 |
| 0.1 | 0.99500 | −0.01493 | −0.00980 | −0.00025 | |
| 0.2 | 0.98007 | −0.02473 | −0.00955 | | |
| 0.3 | 0.95534 | −0.03428 | | | |
| 0.4 | 0.92106 | | | | |

插值点 $x = 0.048$, 则 $t = (x - x_0)/h = 0.48$. 所以由 Newton 向前插值公式可知, $f(0.048)$ 的近似值为

$$\begin{aligned} N_4(0.048) = 1.00000 + 0.48(-0.00500) &+ \frac{1}{2!}0.48(0.48-1)(-0.00993) \\ &+ \frac{1}{3!}0.48(0.48-1)(0.48-2)(-0.00013) \\ &+ \frac{1}{4!}0.48(0.48-1)(0.48-2)(0.48-3)(-0.00012) \approx 0.99884. \end{aligned}$$

误差:

$$|R_4(0.048)| = \left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}t(t-1)\cdots(t-4)h^5\right| \le \frac{h^5}{5!}|t(t-1)\cdots(t-4)| \max_{0\le x\le 0.4}|f^{(5)}(x)| \approx 1.09212\times 10^{-7}$$

# 向后差分与中心差分

向后差分：

$$\nabla f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$$\nabla^k f_i = \nabla\left(\nabla^{k-1} f_i\right) = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}, k = 2,3,\ldots$$

中心差分：

$$\delta f_i = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) - f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\delta^k f_i = \delta\left(\delta^{k-1} f_i\right) = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}}, k = 2,3,\ldots$$

# 作业8

4. 对以下数据表

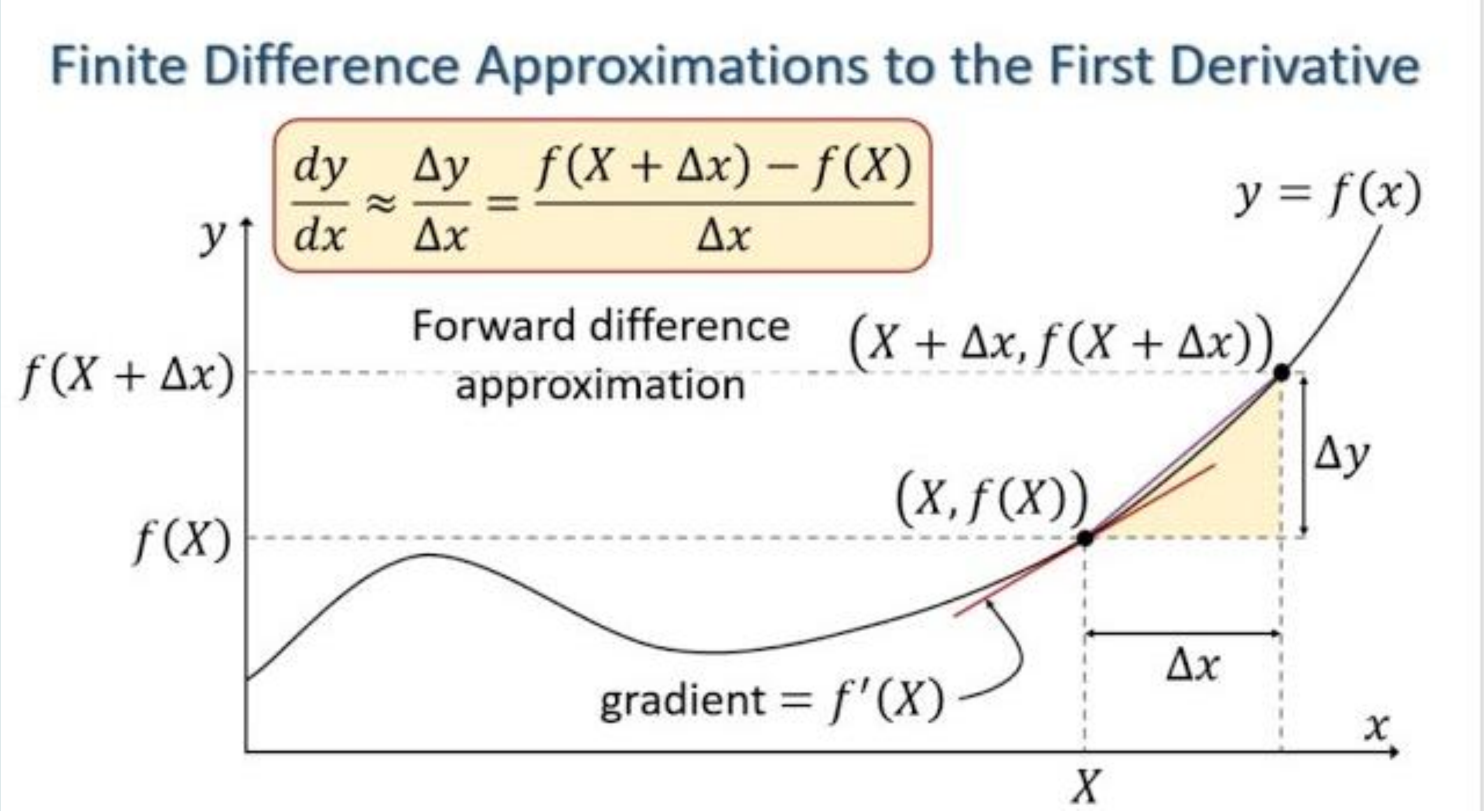
| $x$ | 110 | 113 | 116 | 118 | 121 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.213 0 | 0.240 0 | 0.278 0 | 0.331 0 | 0.420 0 |

分别用二次和三次牛顿均差插值多项式计算 $x=115$ 处的函数近似值(得数保留四位小数)。

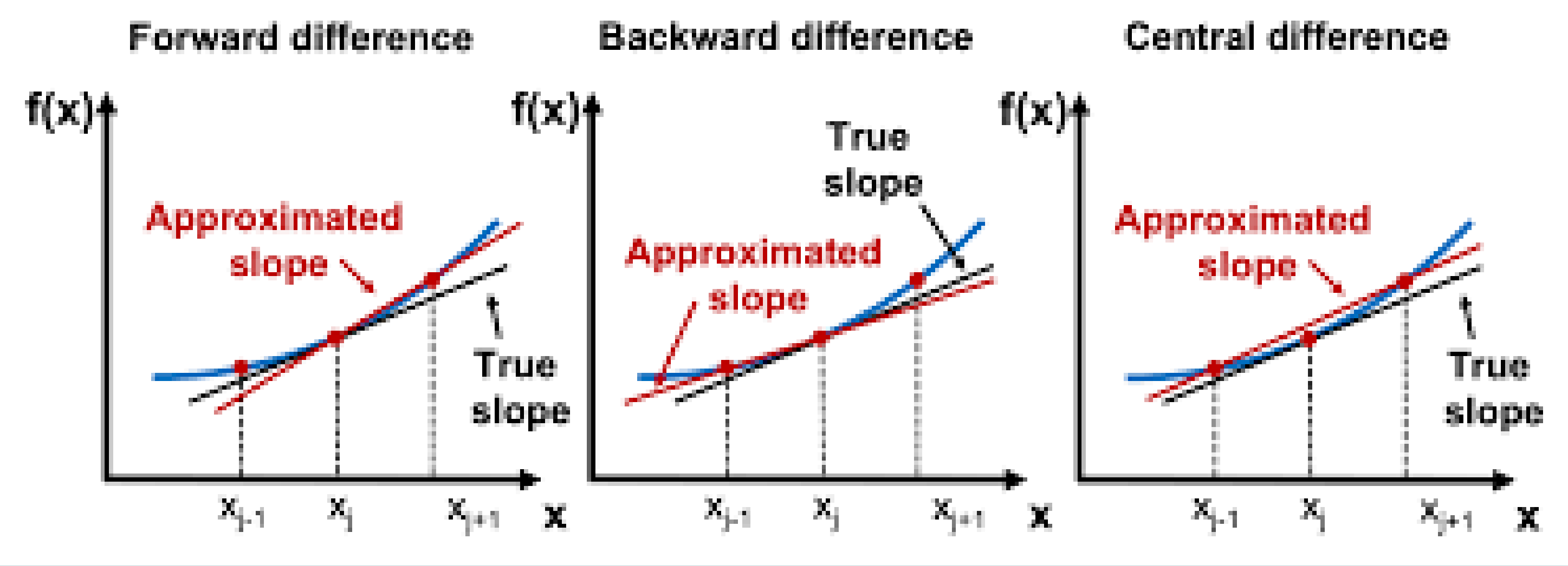
作业以word格式将推导，代码，（可视化）运行结果等（控制文件大小，不要粘贴代码图片， 文件名：姓名_学号_作业8）发到助教（小王）邮箱： 20245227027@stu.suda.edu.cn 。


Thanks

# Appendix


Finite Difference Approximations to the First Derivative
$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(X+\Delta x) - f(X)}{\Delta x}$
$y = f(x)$
$y$
Forward difference
approximation
$(X+\Delta x, f(X+\Delta x))$
$f(X+\Delta x)$
$\Delta y$
$(X, f(X))$
$f(X)$
$\Delta x$
gradient $= f'(X)$
$x$
$X$

# Appendix



Forward difference
Backward difference
Central difference
f(x)
Approximated slope
True slope
x