

## Introdução

Neste trabalho, é introduzido um novo modelo bidimensional (2D) autorregressivo (AR) e de médias móveis (MA) capaz de modelar a estrutura de correlação espacial dos píxeis de imagens de radar de abertura sintética (SAR). Considerando que os valores de amplitude de dados SAR são contínuos e positivos, supomos que, condicionalmente a uma vizinhança espacial, esses valores são variáveis aleatórias com distribuição Maxwell (Mx). Nomeamos o modelo proposto de 2D-MxARMA.

A estimação dos parâmetros do modelo 2D-MxARMA é realizada utilizando o método da máxima verossimilhança condicional (MVC). Expressões simples em forma fechada para o vetor escore e a matriz de informação de Fisher são obtidas. Inferências intervalares e testes de hipóteses são discutidos com base na distribuição assintótica dos estimadores de MVC (EMVC). A avaliação do desempenho dos estimadores é conduzida por meio de simulações de Monte Carlo.

Uma aplicação do modelo proposto em uma imagem SAR em uma região de construção industrial é explorada, junto com uma comparação a um modelo concorrente conhecido na literatura.

## O Modelo 2D-MxARMA(p,q)

Seja  $Y[n, m]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  e  $m = 1, 2, \dots, M$ , uma variável aleatória representando os píxeis de uma imagem  $N \times M$ . Suponha que, condicionalmente ao conjunto de informações na vizinhança  $S[n, m]$ , cada  $Y[n, m]$  seja distribuído conforme a distribuição Maxwell reparametrizada em que o parâmetro de forma representa a média  $\mu$  (LEMONTE, 2022). A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_Y(y[n, m]|S[n, m]) = \frac{32y[n, m]^2}{\pi^2\mu[n, m]^3} \exp\left(-\frac{4y[n, m]^2}{\pi\mu[n, m]^2}\right), \quad (1)$$

em que  $y > 0$  e  $\mu > 0$ .

A estrutura dinâmica do modelo 2D-MxARMA(p,q) é dado por

$$g(\mu[n, m]) = \alpha + \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \phi(i, j)g(y[n-i, m-j]) + \sum_{k=0}^q \sum_{l=0}^q \theta(k, l)e[n-k, m-l], \quad (2)$$

em que  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $g(\mu[n, m]) = \eta[n, m]$  é o preditor linear,  $g(\cdot)$  é uma função de ligação monótona e duas vezes diferenciável, tal que  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . As quantidades  $p$  e  $q$  são as ordens do modelo;  $\phi(i, j)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, p$ , e  $\theta(k, l)$ ,  $k, l = 0, 1, \dots, q$ , são, respectivamente, os parâmetros autorregressivos e de médias móveis.

## Inferências

Seja uma imagem observada, em que cada píxel  $y[n, m]$  é descrito pelo modelo 2D-MxARMA(p, q), e  $\gamma = (\alpha, \phi^T, \theta^T)^T$  o vetor de parâmetros com  $\phi = (\phi(0, 1), \phi(0, 2), \dots, \phi(p, p))^T$  e  $\theta = (\theta(0, 1), \theta(0, 2), \dots, \theta(q, q))^T$ , de dimensões  $(p+1)^2 - 1$  e  $(q+1)^2 - 1$ , respectivamente. A função de log-verossimilhança condicional para  $\gamma$  é dada por

$$\ell(\gamma) = \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \ell[n, m](\mu[n, m]),$$

em que

$$\ell[n, m](\mu[n, m]) = \log(32) - 2\log(\pi) - 3\log(\mu[n, m]) + \log(y[n, m]^2) + \left(\frac{-4y[n, m]^2}{\pi\mu[n, m]^2}\right).$$

A função escore, útil para maximização de  $\ell(\gamma)$ , é dada por

$$\frac{\partial \ell}{\partial \gamma} = \sum_{n=w+1}^N \sum_{m=w+1}^M \frac{\partial \ell[n, m](\mu[n, m])}{\partial \mu[n, m]} \frac{d\mu[n, m]}{d\eta[n, m]} \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \gamma}, \quad (3)$$

em que

$$\frac{d\ell[n, m](\mu[n, m])}{d\mu[n, m]} = \frac{8y[n, m]^2}{\mu[n, m]^3\pi} - \frac{3}{\mu[n, m]}, \quad (4)$$

$$\frac{d\mu[n, m]}{d\eta[n, m]} = \frac{1}{g'(\mu[n, m])}. \quad (5)$$

Os EMVC são obtidos resolvendo o sistema de equações ao igualar o vetor escore a um vetor de zeros.

Nas inferências via intervalos de confiança e testes de hipóteses, considera-se a distribuição assintótica dos EMVC, que é dada por

$$(\hat{\gamma} - \gamma) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\gamma)),$$

sendo  $I^{-1}(\gamma)$  a inversa da matriz de informação de Fisher condicional, em que seus elementos são dados por

$$E\left[\frac{\partial^2 \ell(\gamma)}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}\right] = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M -\frac{6}{\mu[n, m]^2} \left(\frac{1}{g'(\mu[n, m])}\right)^2 \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \gamma_j} \frac{\partial \eta[n, m]}{\partial \gamma_i}.$$

## Resultados

### Simulação de Monte Carlo

Foram utilizadas 1000 réplicas de Monte Carlo, considerando o modelo 2D-MxARMA(1, 1), para dimensões de  $N \times M \in \{64 \times 64, 128 \times 128\}$  com função de ligação log. Os resultados estão na Tabela 1.

Tabela 1: Resultados da Simulação de Monte Carlo.

	Parâmetros	Média	VR	EQM
N = M = 64				
$\hat{\alpha}$	1.039	1.064	0.024	0.003
$\hat{\phi}_{(0,0)}$	0.182	0.179	-0.016	0.001
$\hat{\phi}_{(0,1)}$	0.574	0.541	-0.058	0.002
$\hat{\phi}_{(1,0)}$	0.056	0.088	0.556	0.002
$\hat{\theta}_{(0,0)}$	-0.126	-0.123	-0.022	0.001
$\hat{\theta}_{(0,1)}$	-0.411	-0.374	-0.091	0.002
$\hat{\theta}_{(1,0)}$	0.074	0.044	-0.411	0.002
N = M = 128				
$\hat{\alpha}$	1.039	1.173	0.129	0.021
$\hat{\phi}_{(0,0)}$	0.182	0.234	0.285	0.004
$\hat{\phi}_{(0,1)}$	0.574	0.528	-0.079	0.002
$\hat{\phi}_{(1,0)}$	0.056	0.025	-0.560	0.003
$\hat{\theta}_{(0,0)}$	-0.126	-0.166	0.318	0.003
$\hat{\theta}_{(0,1)}$	-0.411	-0.363	-0.116	0.003
$\hat{\theta}_{(1,0)}$	0.074	0.107	0.446	0.003

### Aplicação a dados reais

Na área de sensoriamento remoto, é comum o uso de sensores ativos, como os sistemas SAR. Esse tipo de imagem apresenta alta qualidade, independentemente de características climáticas, dia ou noite. Nesse sentido, uma imagem de construção industrial com dimensão  $64 \times 64$  foi ajustada pelo modelo 2D-MxARMA(1, 1), conforme Tabela 2. Uma comparação do modelo proposto e do modelo concorrente baseado na distribuição Rayleigh (2-D

RARMA) (PALM et al., 2022) ajustados é vista da Figura 1. A Tabela 3 apresenta algumas métricas de comparação entre os modelos.

Tabela 2: Estimativas pontuais e p-valores do modelo 2D-MxARMA ajustado para a imagem SAR.

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\phi}_{(0,0)}$	$\hat{\phi}_{(0,1)}$	$\hat{\phi}_{(1,0)}$	$\hat{\theta}_{(0,0)}$	$\hat{\theta}_{(0,1)}$	$\hat{\theta}_{(1,0)}$
Estimativa	1.039	0.182	0.574	0.056	-0.126	-0.411	0.074
P-valor	0.000	0.000	0.000	0.096	0.000	0.000	0.036

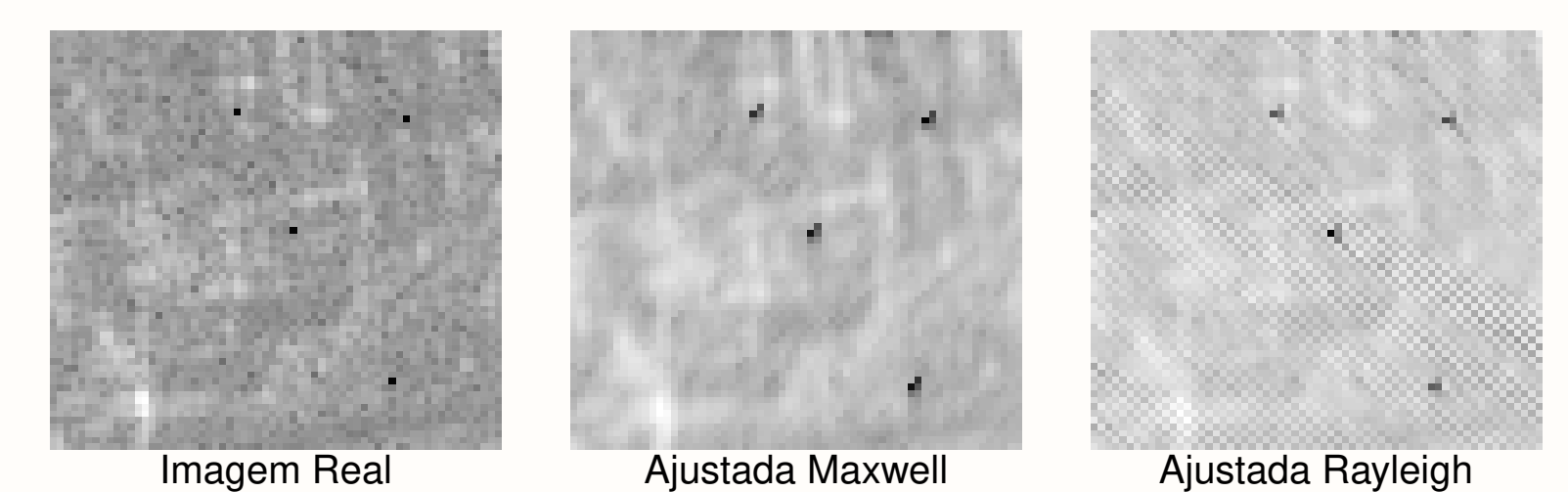


Figura 1: Imagens SAR (amplitude) e previstas pelos modelos 2D-MxARMA(1,1) e 2-D RARMA(1,1).

Tabela 3: Medidas de qualidade de ajuste dos modelos.

	Modelo 2D-MxARMA(1,1)	2-D RARMA(1,1)
RMSE	162.99	180.77
MAPE	64204.7	115169.5

Para fins de detecção de anomalias, comparamos os modelos 2D-MxARMA e 2-D RARMA, conforme representado na Figura 2.

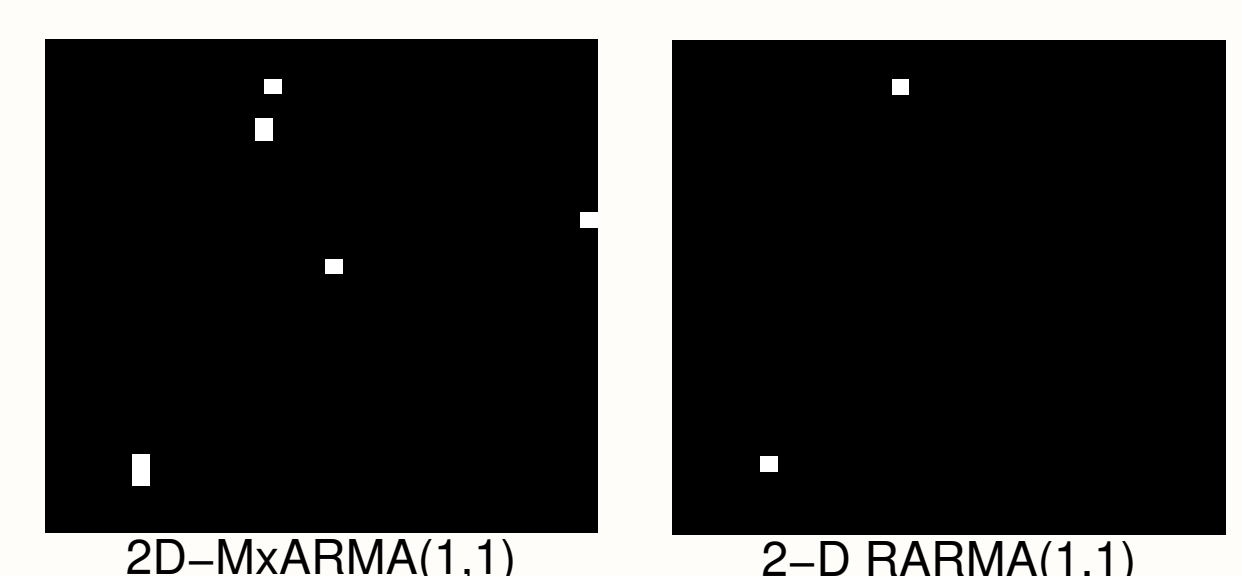


Figura 2: Imagens com detecção de anomalias identificadas pelos modelos.

## Conclusão

O modelo proposto mostrou-se uma ferramenta adequada para a modelagem de amplitude de imagens SAR e na detecção de anomalias.

Os resultados dos experimentos numéricos evidenciaram a adequação tanto da teoria quanto das implementações desenvolvidas.

Na aplicação prática, o modelo proposto apresentou um desempenho superior, conforme demonstrado pelas medidas de qualidade, como o RMSE e o MAPE. Nas imagens analisadas, o modelo 2D-MxARMA(1,1) identificou mais pontos de anomalia de forma eficaz.

## Referências

- [1] PALM, B. G.; BAYER, F. M.; CINTRA, R. J. 2-D Rayleigh autoregressive moving average model for SAR image modeling. Computational Statistics & Data Analysis, 2022.
- [2] LEMONTE, A. J. A Simple Mean-Parameterized Maxwell Regression Model for Positive Response Variables: Accepted-December 2022. REVSTAT-Statistical Journal, 2022.

### Agradecimentos:

