

Gaussiana Inversa Unitária

Arthur Hintz

April 15, 2025

1. Função de Densidade de Probabilidade

Considerando a transformação $X = \exp^{-Y}$, a variável X segue a distribuição Gaussiana Inversa Unitária (UIG), cuja função densidade de probabilidade (fdp) é apresentada a seguir.

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \frac{1}{x(-\log x)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\lambda}{2\mu^2 \log x} (\log x + \mu)^2 \right],$$

$0 < x < 1$ e

$$f(0) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 < \frac{\lambda}{2\mu^2} < 1, \\ 0 & \text{se } \frac{\lambda}{2\mu^2} \geq 1, \end{cases} \quad f(1) = 0$$

2. Função de Distribuição Acumulada

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X > x) = F_Y(-\log x) \\ &= \Phi \left(\sqrt{\frac{\lambda}{-\log x}} \left(\frac{-\log x}{\mu} - 1 \right) \right) + e^{2\lambda/\mu} \Phi \left(-\sqrt{\frac{\lambda}{-\log x}} \left(\frac{-\log x}{\mu} + 1 \right) \right), \end{aligned}$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a acumulada da distribuição Normal Padrão

3. Função Quantílica

A função quantílica da distribuição UIG não possui forma fechada, uma vez que não é possível inverter analiticamente a função de distribuição acumulada. Por esse motivo, foi utilizado métodos numéricos para sua obtenção. Especificamente, foi empregado a função `uniroot`, que busca as raízes da função acumulada.

4. Geração de Números Aleatórios

A geração de números aleatórios foi realizada por meio do método da inversão. Esse procedimento consiste em gerar valores de uma distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$ e aplicar a função quantílica da UIG.

5. Estimação via Máxima Verossimilhança

A função de log-verossimilhança é dada por:

$$\ell(\mu, \lambda; \mathbf{x}) = \frac{n}{2} \log \frac{\lambda}{2\pi} - \sum_{i=1}^n \log (x(-\log x)^{3/2}) + \frac{\lambda}{2\mu^2} \sum_{i=1}^n \frac{(\log x + \mu)^2}{\log x}$$

A estimação dos parâmetros μ e λ foi feita maximizando essa função por meio de métodos numéricos.