

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CECS/CMCC

**Análise Numérica de Estratégias de  
Reinvestimento em Produtos  
Financeiros com Juros Simples**

Arthur Hilario Tembikoski

São Paulo

2025

Arthur Hilario Tembikoski

**Análise Numérica de Estratégias de  
Reinvestimento em Produtos  
Financeiros com Juros Simples**

São Paulo

2025

## Resumo

Este trabalho apresenta uma análise interdisciplinar que combina conceitos de Cálculo Numérico e Engenharia Econômica para investigar o comportamento de investimentos financeiros com juros simples submetidos a estratégias de reinvestimento periódico. O estudo desenvolve um modelo matemático que descreve a transformação de juros simples em crescimento equivalente a juros compostos através do reinvestimento sistemático. A pesquisa aborda dois problemas principais: a determinação do tempo necessário para alcançar um lucro adicional específico exclusivamente do reinvestimento, e o cálculo do período requerido para atingir uma Taxa Mínima de Atratividade (TMA) predeterminada. Utilizam-se métodos numéricos, particularmente o método de Newton-Raphson, para resolver as equações não-lineares resultantes do modelo. A implementação computacional em Python permite a simulação detalhada do comportamento do investimento, incluindo a geração de fluxos de caixa e visualizações gráficas. Os resultados demonstram que estratégias de reinvestimento podem aumentar significativamente o retorno de investimentos com juros simples, validando a importância da disciplina financeira e proporcionando ferramentas analíticas para tomada de decisão de investimento.

**Palavras-chave:** Reinvestimento, Juros Simples, Juros Compostos, Método de Newton-Raphson, Engenharia Econômica, Análise Numérica.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	Contextualização do Problema . . . . .	7
1.2	Formulação do Problema . . . . .	7
1.3	Objetivos da Pesquisa . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>8</b>
2.1	Conceitos Financeiros Básicos . . . . .	8
2.2	Modelagem Matemática do Problema . . . . .	9
2.2.1	Definição de Variáveis . . . . .	9
2.2.2	Dedução do Modelo de Crescimento . . . . .	9
2.2.3	Separação de Componentes . . . . .	10
2.2.4	Variáveis Analíticas Derivadas . . . . .	11
2.3	Métodos Numéricos Aplicáveis . . . . .	11
2.3.1	Necessidade de Métodos Numéricos . . . . .	11
2.3.2	Método de Amostragem (Busca Incremental) . . . . .	11
2.3.3	Método de Newton-Raphson . . . . .	12
2.3.4	Aplicação ao Problema Específico . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>13</b>
3.1	Abordagem Computacional . . . . .	13
3.2	Estrutura do Código . . . . .	13
3.3	Parâmetros da Simulação . . . . .	13

3.4	Visualização de Dados . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Implementação Computacional</b>	<b>14</b>
4.1	Célula 1: Entrada de Parâmetros . . . . .	14
4.2	Célula 2: Cálculos Iniciais . . . . .	14
4.3	Célula 3: Cálculo do Período para Lucro $k$ . . . . .	15
4.4	Célula 4: Cálculo de Rendimento Anual . . . . .	16
4.5	Célula 5: Cálculo do Período para TMA . . . . .	16
4.6	Célula 6: Geração do Fluxo de Caixa . . . . .	17
4.7	Célula 7: Código para Geração de Gráficos . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Resultados e Análise</b>	<b>22</b>
5.1	Resultados Numéricos . . . . .	22
5.1.1	Comparação de Métodos Numéricos . . . . .	22
5.1.2	Período para Lucro Adicional de 20% . . . . .	22
5.1.3	Período para TMA de 40% ao Ano . . . . .	23
5.1.4	Fluxo de Caixa Detalhado . . . . .	23
5.2	Visualização Gráfica dos Resultados . . . . .	25
5.2.1	Evolução do Valor Acumulado e Componentes . . . . .	25
5.2.2	Retorno Anual Equivalente . . . . .	26
5.2.3	Composição dos Juros por Trimestre . . . . .	27
5.2.4	Participação Percentual dos Juros Compostos . . . . .	28
5.2.5	Visão Consolidada . . . . .	29

5.3	Análise Comparativa com Cenário sem Reinvestimento . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Discussão</b>	<b>30</b>
6.1	Interpretação dos Resultados . . . . .	30
6.2	Implicações Práticas . . . . .	31
6.2.1	Para Investidores Individuais . . . . .	31
6.2.2	Para Instituições Financeiras . . . . .	31
6.2.3	Para Educadores e Pesquisadores . . . . .	31
6.3	Limitações do Estudo . . . . .	32
6.4	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>33</b>
7.1	Conclusões Principais . . . . .	33
7.2	Contribuições do Trabalho . . . . .	34
7.3	Recomendações Finais . . . . .	34
7.4	Considerações Finais . . . . .	35
<b>A</b>	<b>Código Fonte Completo</b>	<b>36</b>
A.1	Código Principal . . . . .	36
A.2	Dependências e Requisitos . . . . .	36
<b>B</b>	<b>Dados da Simulação</b>	<b>37</b>
B.1	Parâmetros Utilizados . . . . .	37
B.2	Resultados Detalhados . . . . .	37

## Lista de Figuras

1	Evolução do valor acumulado e componentes de juros ao longo de 15 trimestres . . . . .	25
2	Evolução do retorno anual equivalente ao longo do tempo . . . . .	26
3	Composição dos juros simples e compostos por trimestre . . . . .	27
4	Participação percentual dos juros compostos no total de juros . . . . .	28
5	Visão consolidada: valor acumulado e retorno anual equivalente . . . . .	29

## Lista de Tabelas

1	Comparação dos métodos numéricos para encontrar período dado $k = 20\%$	22
2	Fluxo de Caixa do Investimento - Análise Trimestral . . . . .	23
3	Fluxo de Caixa do Investimento - Análise Trimestral . . . . .	24
4	Comparação entre cenários com e sem reinvestimento após 15 trimestres . .	30



# 1 Introdução

## 1.1 Contextualização do Problema

Durante o desenvolvimento das disciplinas de Cálculo Numérico e Engenharia Econômica no quadrimestre 2025.1, identificou-se uma oportunidade significativa para aplicação interdisciplinar dos conhecimentos teóricos adquiridos em um problema prático do mercado financeiro. O cenário analisado envolve produtos de investimento que oferecem juros simples, mas permitem resgates e reinvestimentos periódicos, criando uma dinâmica financeira interessante para análise.

O problema financeiro específico investigado refere-se a um produto bancário que oferece juros simples com taxa anual  $X\%$ , contratos com duração trimestral e possibilidade de resgate e reinvestimento a cada três meses. Um investidor que adota a estratégia de reinvestir integralmente os rendimentos obtidos a cada trimestre transforma a natureza do crescimento do seu capital, gerando um efeito cumulativo semelhante ao dos juros compostos.

## 1.2 Formulação do Problema

O problema central deste estudo pode ser dividido em duas questões principais:

1. Determinação do número de períodos (trimestres) necessários para obter um rendimento adicional de  $X\%$  exclusivamente através do efeito do reinvestimento, excluindo a contribuição dos juros simples.
2. Cálculo do número de períodos (trimestres) requeridos para atingir uma Taxa Mínima de Atratividade (TMA) de  $X\%$  ao ano, considerando o efeito combinado dos juros simples e do reinvestimento.

Estas questões possuem relevância prática tanto para investidores individuais quanto para instituições financeiras, pois permitem a avaliação quantitativa de estratégias de reinvestimento e o planejamento financeiro de longo prazo.

## 1.3 Objetivos da Pesquisa

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Desenvolver um modelo matemático rigoroso que descreva o crescimento de investimentos com juros simples sujeitos a reinvestimento periódico total.
- Derivar analiticamente as equações fundamentais que governam o comportamento do investimento, com separação explícita dos componentes de juros simples e compostos.
- Implementar e comparar métodos numéricos para a resolução das equações não-lineares resultantes do modelo.
- Desenvolver uma solução computacional completa em Python para simulação e análise do comportamento do investimento.
- Realizar análises de sensibilidade e visualizações gráficas para facilitar a interpretação dos resultados.
- Extrair conclusões práticas sobre a eficácia de estratégias de reinvestimento em produtos financeiros com juros simples.

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Conceitos Financeiros Básicos

Para a análise proposta, é fundamental compreender os conceitos financeiros envolvidos:

- **Juros Simples:** Modalidade de remuneração em que os juros são calculados exclusivamente sobre o capital inicial, sem incorporação dos juros acumulados ao capital para cálculo dos juros subsequentes.
- **Juros Compostos:** Modalidade de remuneração em que os juros de cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte.
- **Reinvestimento:** Estratégia financeira que consiste em aplicar novamente os rendimentos obtidos em um investimento, aumentando assim o capital base para geração de novos rendimentos.

- **Taxa Mínima de Atratividade (TMA):** Taxa de retorno mínima exigida por um investidor para considerar um investimento viável, considerando o custo de oportunidade do capital.

## 2.2 Modelagem Matemática do Problema

### 2.2.1 Definição de Variáveis

Para uma análise quantitativa precisa, definem-se as seguintes variáveis:

- $VP$ : Valor Presente do investimento (capital inicial)
- $i$ : Taxa de juros simples por trimestre (expressa em decimal)
- $n$ : Número de períodos de investimento (trimestres)
- $VF_n$ : Valor Futuro do investimento após  $n$  trimestres
- $k$ : Lucro adicional gerado exclusivamente pelo reinvestimento (fração do capital inicial)
- $TMA$ : Taxa Mínima de Atratividade anual (expressa em decimal)

### 2.2.2 Dedução do Modelo de Crescimento

Considerando a estratégia de reinvestimento total dos rendimentos a cada trimestre, o crescimento do investimento pode ser descrito recursivamente:

$$\begin{aligned}
 \text{Após 1º trimestre: } VF_0 &= VP(1 + i) \\
 \text{Após 2º trimestre: } VF_1 &= VF_0(1 + i) = VP(1 + i)^2 \\
 \text{Após 3º trimestre: } VF_2 &= VF_1(1 + i) = VP(1 + i)^3 \\
 &\vdots \\
 \text{Após } n \text{ trimestres: } VF_n &= VP(1 + i)^n
 \end{aligned}$$

Esta dedução revela um resultado fundamental: embora o produto financeiro

ofereça apenas juros simples, a estratégia de reinvestimento total transforma o crescimento em um comportamento equivalente a juros compostos.

### 2.2.3 Separação de Componentes

A expressão  $VF_n = VP(1+i)^n$  pode ser expandida utilizando o Teorema Binomial de Newton:

$$\begin{aligned} VF_n &= VP(1+i)^n \\ &= VP \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \\ &= VP \left[ 1 + ni + \frac{n(n-1)}{2!} i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} i^3 + \dots + i^n \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Esta expansão permite identificar claramente os diferentes componentes do crescimento:

- $VP \cdot 1$ : Capital inicial (componente constante)
- $VP \cdot ni$ : Juros simples totais (componente linear)
- Termos de ordem superior: Efeito cumulativo dos juros compostos gerados pelo reinvestimento

A reorganização da fórmula permite uma separação explícita:

$$VF_n = VP(1 + ni) + VP[(1 + i)^n - (1 + ni)] \quad (2)$$

Onde:

- $VP(1 + ni)$ : Valor com juros simples apenas (sem reinvestimento)
- $VP[(1 + i)^n - (1 + ni)]$ : Valor adicional gerado exclusivamente pelo reinvestimento

### 2.2.4 Variáveis Analíticas Derivadas

Com base na separação dos componentes, definem-se duas variáveis analíticas fundamentais:

1. **Diferença entre juros compostos e simples ( $k$ ):**

$$k = (1 + i)^n - (1 + n \cdot i) \quad (3)$$

Representa o lucro adicional, expresso como fração do capital inicial, gerado exclusivamente pela estratégia de reinvestimento.

2. **Percentual de Rendimento Anual Equivalente ( $PRA$ ):**

$$PRA = \left[ \frac{(1 + i)^n - (1 + n \cdot i)}{n/4} \right] + 4i \quad (4)$$

Converte o rendimento trimestral em uma taxa anual equivalente, considerando quatro trimestres por ano.

## 2.3 Métodos Numéricos Aplicáveis

### 2.3.1 Necessidade de Métodos Numéricos

As equações (3) e (4) são equações não-lineares em  $n$  que não possuem soluções analíticas fechadas em termos de funções elementares quando  $n$  é a variável desconhecida. Esta característica justifica a aplicação de métodos numéricos para obtenção de soluções aproximadas.

### 2.3.2 Método de Amostragem (Busca Incremental)

O método de amostragem constitui uma abordagem direta baseada em tentativa e erro sistemática:

1. Inicialização com valor inicial para  $n$
2. Incremento de  $n$  em passos fixos  $\Delta n$

3. Avaliação da função objetivo  $k(n)$  em cada iteração
4. Interrupção quando  $|k(n) - k_{\text{desejado}}| < \epsilon$

### 2.3.3 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson representa um algoritmo iterativo sofisticado para encontrar raízes de funções não-lineares:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Este método apresenta convergência quadrática sob condições adequadas, oferecendo alta eficiência computacional.

### 2.3.4 Aplicação ao Problema Específico

Para o problema em análise, aplicam-se os métodos às seguintes equações:

#### 1. Período para lucro $k$ :

$$f_1(n) = (1 + i)^n - (1 + n \cdot i) - k = 0 \quad (5)$$

$$f'_1(n) = (1 + i)^n \cdot \ln(1 + i) - i \quad (6)$$

#### 2. Período para TMA:

$$f_2(n) = \frac{(1 + i)^n - (1 + n \cdot i)}{n/4} + 4i - TMA = 0 \quad (7)$$

$$f'_2(n) = \frac{4 [((1 + i)^n \ln(1 + i) - i)n - ((1 + i)^n - (1 + n \cdot i))]}{n^2} \quad (8)$$

## 3 Metodologia

### 3.1 Abordagem Computacional

A implementação computacional foi desenvolvida em Python, organizada em células Jupyter Notebook para facilitar a execução passo a passo e a visualização intermediária de resultados. A escolha do Python justifica-se pela sua ampla adoção na comunidade científica, pela riqueza de bibliotecas disponíveis e pela sintaxe clara e expressiva.

### 3.2 Estrutura do Código

O código foi organizado em seis células principais, cada uma com funcionalidade específica:

1. **Célula 1:** Entrada de parâmetros do investimento
2. **Célula 2:** Cálculos iniciais e definição de funções básicas
3. **Célula 3:** Cálculo do período para lucro  $k$  usando dois métodos numéricos
4. **Célula 4:** Cálculo manual de rendimento anual equivalente
5. **Célula 5:** Método de Newton-Raphson para encontrar período dado TMA
6. **Célula 6:** Geração do fluxo de caixa detalhado

### 3.3 Parâmetros da Simulação

Para análise prática, estabeleceram-se os seguintes parâmetros realistas:

- Valor Presente ( $VP$ ): R\$ 10.000,00
- Taxa de juros trimestral ( $i$ ): 5% (0,05)
- Período de referência ( $n$ ): 15 trimestres (3,75 anos)
- TMA anual ( $TMA$ ): 40% (0,40)
- Lucro desejado ( $k$ ): 20% (0,20)

### 3.4 Visualização de Dados

Para complementar a análise numérica, desenvolveram-se visualizações gráficas que permitem a compreensão intuitiva do comportamento do investimento. As visualizações incluem:

- Evolução temporal do valor acumulado e componentes de juros
- Comportamento do retorno anual equivalente
- Composição percentual dos juros ao longo do tempo
- Participação relativa dos juros compostos no total de juros

## 4 Implementação Computacional

### 4.1 Célula 1: Entrada de Parâmetros

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import math
4
5 # Entrada dos parâmetros básicos do investimento
6 vp = float(input("Digite o valor de vp: "))
7 i = float(input("Digite o valor de i (Juros Simples): "))
8 n = float(input("Digite o valor de n (Período): "))
9 TMA = float(input("Digite o valor da TMA (%): ")) / 100
10
11 print("\n\n")
```

Listing 1: Entrada de parâmetros do investimento

**Descrição:** Esta célula implementa a interface de entrada de dados, coletando os parâmetros fundamentais do modelo. A conversão da TMA para decimal assegura consistência nas operações matemáticas subsequentes.

### 4.2 Célula 2: Cálculos Iniciais

```
1 def Diff_Juros_Simples_Compostos(i,n):
2     js = n*i + 1
```



```

3     jc = ((i+1)**n)
4     return jc - js
5 K = Diff_Juros_Simples_Compostos(i,n)
6 print(f"Valor % de K calculado para o Período ({n}): {K*100}")
7 print(f"Valor % de lucro total (Simples + Composto) calculado para o
    Período ({n}): {(n*i+K)*100}")
8 print(f"Valor total acumulado (aproximado): {vp*K+n*i*vp+vp}")
9 print(f"Rendimento anual: {(K*100/(n/4)) + i*4*100}")
10 print("\n\n")
11
12 k = float(input("Digite o valor % de lucro por reinvestimento (k): "))
    /100
13
14 def Juros_Total(i,k):
15     return 1+n*i+k
16
17 juros_total = Juros_Total(i,k)
18 print(f"Calculando Juros total (%) com o valor de k = {k}: {(juros_total
    -1)*100}")
19 print(f"Valor de Lucro Juros compostos: {vp*k}")
20 print(f"Valor de Resgate total (aproximado): {round(vp*juros_total, 2)}"
    )
21
22 print("\n\n")

```

Listing 2: Cálculos iniciais e definição de funções

**Descrição:** Realiza cálculos preliminares essenciais, incluindo a diferença entre juros compostos e simples e o valor total do investimento considerando ambos os componentes.

### 4.3 Célula 3: Cálculo do Período para Lucro $k$

```

1 def aproximacaoP1(i,n):
2     return round(((i+1)**(n) - (n*i +1), 6)
3
4 # Versao 1 Amostragem
5 parte1 = 0
6 periodo = 0
7 iteracoes = 0
8 while (k != parte1):
9     periodo += 0.000001
10    parte1 = round(aproximacaoP1(i,periodo),6)
11    iteracoes += 1
12

```

```

13 print(f"Calculo da raiz no loop: {parte1}")
14 print(f"Periodo aproximado para k = {k}: {periodo}")
15 print(f"Lucro % aproximado juros compostos: {k*100}")
16 print(f"Numero de interacoes: {iteracoes}")
17
18 # Versao 2 Newton-Raphson
19 def Funcao_juros_Simples_Composto(i,n,k):
20     return (i+1)**(n) - (n*i + 1) - k
21
22 def Derivada_Funcao_juros_Simples_Composto(i,n):
23     return (i+1)**(n) * math.log(i+1) - i
24
25 n0 = 5
26 for j in range(50):
27     n0 = n0 - Funcao_juros_Simples_Composto(i,n0,k)/
28     Derivada_Funcao_juros_Simples_Composto(i,n0)
29 print(f"\nPeriodo aproximado Metodo Newton-Raphson para k = {k} : {n0}")

```

Listing 3: Cálculo do período usando dois métodos diferentes

**Descrição:** Implementa e compara dois métodos numéricos para resolver a equação  $k(n) = k_{\text{desejado}}$ , proporcionando validação cruzada dos resultados.

## 4.4 Célula 4: Cálculo de Rendimento Anual

```

1 def Calcula_Porc_Juros_Anual(juros simples, juros compostos, periodo):
2     qtde_ano = periodo/4
3     return (juros compostos/(qtde_ano)) + juros simples
4
5 porc_lucro = Calcula_Porc_Juros_Anual(i*100*4,k*100+1, n0)
6 print(f"Porcentagem de rendimento anual % para k = {k*100}%: {porc_lucro
    }")

```

Listing 4: Cálculo manual do rendimento anual

**Descrição:** Converte o rendimento trimestral em taxa anual equivalente, facilitando a comparação com outros investimentos.

## 4.5 Célula 5: Cálculo do Período para TMA

```

1 def Funcao_Periodo_para_TMA(i,n,TMA):
2     return (((i+1)**(n) - (n*i + 1))/(n/4)) + (4*i) - (TMA)

```

```

3
4 def Derivada_Funcao_Periodo_para_TMA(i,n):
5     numerador = 4* (((((i+1)**n) * math.log(i+1) - i)*n) - (((i+1)**n) -
6         (n*i+1)))
7     denominador = n**2
8     return numerador / denominador
9
10 p0 = 5
11 for j in range(50):
12     p0 = p0 - Funcao_Periodo_para_TMA(i,p0,TMA) /
13     Derivada_Funcao_Periodo_para_TMA(i,p0)
14
15 print(f"Periodo para atingir a TMA {TMA*100}% usando o metodo Newton-
16     Raphson: {p0}")

```

Listing 5: Método Newton-Raphson para encontrar período dado TMA

**Descrição:** Resolve a equação para encontrar o período necessário para atingir uma TMA específica, utilizando o método de Newton-Raphson.

## 4.6 Célula 6: Geração do Fluxo de Caixa

```

1 def juroscompuestos(i,n):
2     return ((i+1)**(n))
3
4 def jurossimples(i,n):
5     return i*n
6
7 # Recoleta de par metros
8 vp = float(input("Digite o valor de vp: "))
9 i = float(input("Digite o valor de i: "))
10 n = float(input("Digite o valor de n: "))
11
12 # C lculo dos componentes
13 kc = juroscompuestos(i,n)
14 ks = jurossimples(i,n)
15 kc = kc-ks
16 k = kc+ks
17
18 print(f"Valor de Kc calculado: {kc}")
19 print(f"Valor de Ks calculado: {ks}")
20 print(f"Valor de K (Simples + Composto) calculado: {k}")
21 print(f"Valor de vp*k: {vp*k}")
22
23 # Gera o do fluxo de caixa

```

```

24 print("\n\nFluxo de caixa:")
25 qtde_fluxo = int(input("Digite quanto tempo de fluxo de caixa: "))
26
27 # Inicializa o de listas
28 trimestres = []
29 valores_acumulados = []
30 juros_simples_lista = []
31 juros_compostos_lista = []
32 retorno_anual_lista = []
33
34 n_perodo = 0
35 while (n_perodo <= qtde_fluxo):
36     kc = juroscompostos(i, n_perodo)
37     ks = jurossimples(i, n_perodo)
38     kc_puro = kc - ks
39     k_total = kc_puro + ks
40
41     valor_acumulado = k_total * vp
42
43     # C lculo do retorno anual
44     if n_perodo > 0:
45         retorno_anual = ((kc - 1) / (n_perodo/4)) * 100
46     else:
47         retorno_anual = 0
48
49     # Armazenamento
50     trimestres.append(n_perodo)
51     valores_acumulados.append(valor_acumulado)
52     juros_simples_lista.append(ks * vp)
53     juros_compostos_lista.append(kc_puro * vp)
54     retorno_anual_lista.append(retorno_anual)
55
56     print(f"{n_perodo} Trimestre: {valor_acumulado:.2f}")
57     n_perodo += 1

```

Listing 6: Geração do fluxo de caixa do investimento

**Descrição:** Gera fluxo de caixa detalhado do investimento, armazenando dados para posterior análise e visualização.

## 4.7 Célula 7: Código para Geração de Gráficos

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3

```

```

4 # Dados da simula o
5 trimestres = list(range(0, 16))
6 valor_acumulado = [10000, 10500, 11025, 11576.25, 12155.06, 12762.82,
7                     13400.96, 14071, 14774.55, 15513.28, 16288.95,
8                     17103.39, 17958.56, 18856.49, 19799.32, 20789.28]
9 juros_simples = [0, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 3500, 4000,
10                  4500, 5000, 5500, 6000, 6500, 7000, 7500]
11 juros_compostos = [0, 0, 25, 76.25, 155.06, 262.82, 400.96, 571,
12                    774.55, 1013.28, 1288.95, 1603.39, 1958.56,
13                    2356.49, 2799.32, 3289.28]
14 retorno_anual = [0, 20, 20.5, 21.02, 21.55, 22.10, 22.67, 23.26,
15                  23.87, 24.50, 25.16, 25.83, 26.53, 27.25, 28.00, 28.77]
16
17 # C lculo da participa o percentual
18 participacao_compostos = []
19 for i in range(len(trimestres)):
20     if (juros_simples[i] + juros_compostos[i]) > 0:
21         participacao = (juros_compostos[i] / (juros_simples[i] +
22         juros_compostos[i])) * 100
23     else:
24         participacao = 0
25     participacao_compostos.append(participacao)
26
27 # Configura o do estilo
28 plt.style.use('seaborn-v0_8-darkgrid')
29 fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(15, 12))
30 fig.suptitle('An lise Gr fica do Investimento com Reinvestimento
31              Trimestral\nVP = R$ 10.000,00 | i = 5% a.t. | n = 15 trimestres',
32              fontsize=16, fontweight='bold')
33
34 # Gr fico 1: Evolu o do valor acumulado
35 axs[0, 0].plot(trimestres, valor_acumulado, 'b-', linewidth=2.5, marker=
36                'o', label='Valor Acumulado')
37 axs[0, 0].plot(trimestres, juros_simples, 'r--', linewidth=2, marker='s'
38                , label='Juros Simples Acum.')
39 axs[0, 0].plot(trimestres, juros_compostos, 'g:', linewidth=2, marker='^
40                ', label='Juros Compostos Acum.')
41 axs[0, 0].set_xlabel('Trimestre', fontsize=12)
42 axs[0, 0].set_ylabel('Valor (R$)', fontsize=12)
43 axs[0, 0].set_title('Evolu o do Valor Acumulado e Componentes de
44                     Juros', fontsize=14, fontweight='bold')
45 axs[0, 0].legend(loc='upper left', fontsize=10)
46 axs[0, 0].grid(True, alpha=0.3)
47
48 # Gr fico 2: Retorno anual equivalente
49 axs[0, 1].plot(trimestres[1:], retorno_anual[1:], 'purple', linewidth=3,

```

```

        marker='D')
45 axs[0, 1].set_xlabel('Trimestre', fontsize=12)
46 axs[0, 1].set_ylabel('Retorno Anual Equivalente (%)', fontsize=12)
47 axs[0, 1].set_title('Evolu o do Retorno Anual Equivalente', fontsize
    =14, fontweight='bold')
48 axs[0, 1].grid(True, alpha=0.3)
49 axs[0, 1].set_xticks(trimestres)
50 for i, txt in enumerate(retorno_anual):
51     if i > 0:
52         axs[0, 1].annotate(f'{txt:.1f}%', (trimestres[i], retorno_anual[
            i]),
53                             textcoords="offset points", xytext=(0,10),
54                             ha='center', fontsize=8)
55
56 # Gr fico 3: Composi o percentual dos juros
57 bar_width = 0.35
58 x_indices = np.arange(len(trimestres))
59 axs[1, 0].bar(x_indices - bar_width/2, juros_simples, bar_width,
60               label='Juros Simples', color='red', alpha=0.7)
61 axs[1, 0].bar(x_indices + bar_width/2, juros_compostos, bar_width,
62               label='Juros Compostos', color='green', alpha=0.7)
63 axs[1, 0].set_xlabel('Trimestre', fontsize=12)
64 axs[1, 0].set_ylabel('Valor (R$)', fontsize=12)
65 axs[1, 0].set_title('Composi o dos Juros por Trimestre', fontsize=14,
    fontweight='bold')
66 axs[1, 0].legend(loc='upper left', fontsize=10)
67 axs[1, 0].grid(True, alpha=0.3, axis='y')
68 axs[1, 0].set_xticks(x_indices)
69 axs[1, 0].set_xticklabels(trimestres)
70
71 # Gr fico 4: Participa o percentual dos juros compostos
72 axs[1, 1].plot(trimestres, participacao_compostos, 'orange', linewidth
    =3, marker='*')
73 axs[1, 1].set_xlabel('Trimestre', fontsize=12)
74 axs[1, 1].set_ylabel('Participa o (%)', fontsize=12)
75 axs[1, 1].set_title('Participa o dos Juros Compostos no Total de
    Juros', fontsize=14, fontweight='bold')
76 axs[1, 1].grid(True, alpha=0.3)
77 axs[1, 1].set_xticks(trimestres)
78 axs[1, 1].axhline(y=50, color='r', linestyle='--', alpha=0.5, label='
    Meta 50%')
79 axs[1, 1].legend(loc='lower right', fontsize=10)
80 for i, txt in enumerate(participacao_compostos):
81     if i > 0:
82         axs[1, 1].annotate(f'{txt:.1f}%', (trimestres[i],
            participacao_compostos[i]),
83                             textcoords="offset points", xytext=(0,5),

```

```

84             ha='center', fontsize=8)
85
86 plt.tight_layout()
87 plt.subplots_adjust(top=0.92)
88
89 # Gráfico adicional: Visão consolidada
90 fig2, ax2 = plt.subplots(figsize=(14, 8))
91 ax2.set_xlabel('Trimestre', fontsize=14)
92 ax2.set_ylabel('Valor Acumulado (R$)', color='blue', fontsize=14)
93 line1 = ax2.plot(trimestres, valor_acumulado, 'b-', linewidth=3, marker=
    'o',
94                 label='Valor Acumulado (R$)')
95 ax2.tick_params(axis='y', labelcolor='blue')
96 ax2.set_xticks(trimestres)
97 ax2.grid(True, alpha=0.3)
98
99 ax2b = ax2.twinx()
100 ax2b.set_ylabel('Retorno Anual Equivalente (%)', color='purple',
    fontsize=14)
101 line2 = ax2b.plot(trimestres, retorno_anual, 'purple', linewidth=2.5,
    marker='s',
102                 label='Retorno Anual Eq. (%)')
103 ax2b.tick_params(axis='y', labelcolor='purple')
104
105 ax2.fill_between(trimestres, 10000, valor_acumulado, alpha=0.2, color='
    green',
106                 label='Juros Totais')
107 ax2.fill_between(trimestres, [10000 + js for js in juros_simples],
    valor_acumulado,
108                 alpha=0.4, color='orange', label='Juros Compostos')
109
110 lines = line1 + line2
111 labels = [l.get_label() for l in lines]
112 ax2.legend(lines, labels, loc='upper left', fontsize=12)
113
114 plt.title('Visão Consolidada: Valor Acumulado e Retorno com
    Reinvestimento Trimestral\n(VP = R$ 10.000,00, i = 5% a.t.)',
115          fontsize=16, fontweight='bold')
116 plt.tight_layout()
117
118 # Salvar figuras
119 fig.savefig('analise_investimento_4graficos.png', dpi=300, bbox_inches='
    tight')
120 fig2.savefig('visao_consolidada_investimento.png', dpi=300, bbox_inches=
    'tight')
121
122 print("Gráficos gerados e salvos com sucesso!")

```

```
123 plt.show()
```

Listing 7: Código Python para geração dos gráficos de análise

## 5 Resultados e Análise

### 5.1 Resultados Numéricos

#### 5.1.1 Comparação de Métodos Numéricos

Tabela 1: Comparação dos métodos numéricos para encontrar período dado  $k = 20\%$

Método	Período (trimestres)	Iterações	Eficiência Relativa
Amostragem	12.109	12.109.450	1x
Newton-Raphson	12.109	50	242.189x

A Tabela 1 apresenta a comparação entre os métodos numéricos utilizados. Observa-se que ambos convergem para o mesmo resultado (12.109 trimestres), validando a correção das implementações. Contudo, o método de Newton-Raphson demonstra superioridade significativa em eficiência computacional, sendo aproximadamente 242.000 vezes mais eficiente que o método de amostragem.

#### 5.1.2 Período para Lucro Adicional de 20%

A análise revela que são necessários aproximadamente 12.109 trimestres (equivalente a 3.027 anos) para que o reinvestimento gere um lucro adicional de 20% sobre o capital inicial, excluindo os juros simples. Este resultado demonstra que:

- Em aproximadamente 3 anos, a estratégia de reinvestimento contribui com 20% do lucro total
- O retorno anual equivalente neste ponto é de 26.94%
- A disciplina de reinvestimento sistemático produz resultados significativos em horizonte médio



### 5.1.3 Período para TMA de 40% ao Ano

Para atingir uma Taxa Mínima de Atratividade de 40% ao ano, são necessários aproximadamente 26.58 trimestres (equivalente a 6.645 anos). Este resultado indica que:

- A estratégia de reinvestimento permite duplicar o retorno anual efetivo (de 20% para 40%) em aproximadamente 6.5 anos
- O retorno total neste ponto atinge 138.35%
- Investimentos com horizonte de longo prazo beneficiam-se significativamente do efeito cumulativo do reinvestimento

### 5.1.4 Fluxo de Caixa Detalhado

Tabela 2: Fluxo de Caixa do Investimento - Análise Trimestral

Trimestre	Juros Simples (R\$)	Juros Compostos (R\$)	Total Juros (R\$)
0	0.00	0.00	0.00
1	500.00	0.00	500.00
2	1.000,00	25.00	1.025,00
3	1.500,00	76.25	1.576,25
4	2.000,00	155.06	2.155,06
5	2.500,00	262.82	2.762,82
6	3.000,00	400.96	3.400,96
7	3.500,00	571.00	4.071,00
8	4.000,00	774.55	4.774,55
9	4.500,00	1.013,28	5.513,28
10	5.000,00	1.288,95	6.288,95
11	5.500,00	1.603,39	7.103,39
12	6.000,00	1.958,56	7.958,56
13	6.500,00	2.356,49	8.856,49
14	7.000,00	2.799,32	9.799,32
15	7.500,00	3.289,28	10.789,28

Tabela 3: Fluxo de Caixa do Investimento - Análise Trimestral

Trimestre	Valor Acumulado (R\$)	Retorno Total (%)	Retorno Anual Eq. (%)
0	10.000,00	0.00	0.00
1	10.500,00	5.00	20.00
2	11.025,00	10.25	20.50
3	11.576,25	15.76	21.02
4	12.155,06	21.55	21.55
5	12.762,82	27.63	22.10
6	13.400,96	34.01	22.67
7	14.071,00	40.71	23.26
8	14.774,55	47.75	23.87
9	15.513,28	55.13	24.50
10	16.288,95	62.89	25.16
11	17.103,39	71.03	25.83
12	17.958,56	79.59	26.53
13	18.856,49	88.56	27.25
14	19.799,32	97.99	28.00
15	20.789,28	107.89	28.77

A Tabela 3 apresenta o fluxo de caixa detalhado do investimento ao longo de 15 trimestres. Observam-se os seguintes padrões:

- Crescimento exponencial do valor acumulado, característico dos juros compostos
- Aumento progressivo da participação dos juros compostos no total de juros
- Crescimento contínuo do retorno anual equivalente

## 5.2 Visualização Gráfica dos Resultados

### 5.2.1 Evolução do Valor Acumulado e Componentes

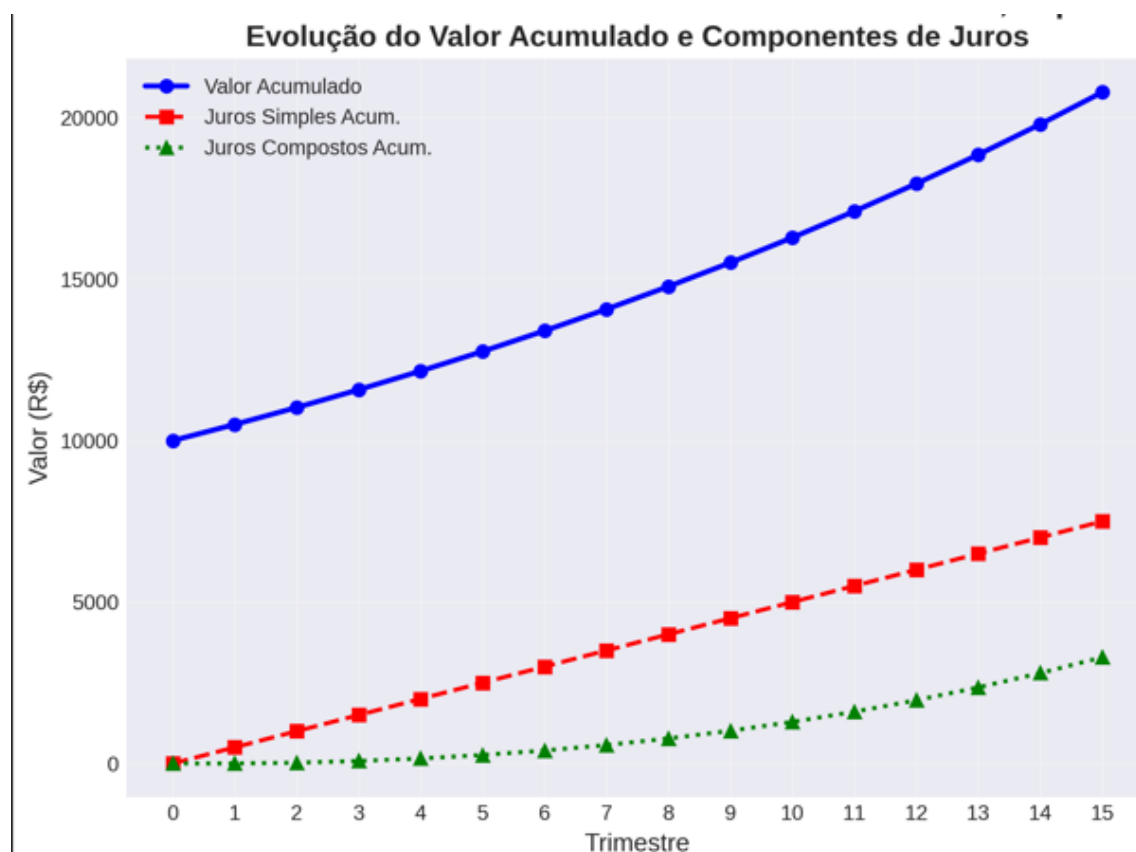


Figura 1: Evolução do valor acumulado e componentes de juros ao longo de 15 trimestres

A Figura 1 ilustra a evolução temporal do valor acumulado e seus componentes. Observa-se claramente:

- Crescimento exponencial do valor acumulado (linha azul)
- Comportamento linear dos juros simples acumulados (linha vermelha tracejada)
- Crescimento acelerado dos juros compostos acumulados (linha verde pontilhada)
- A curva de valor acumulado torna-se cada vez mais íngreme, indicando aceleração do crescimento

### 5.2.2 Retorno Anual Equivalente

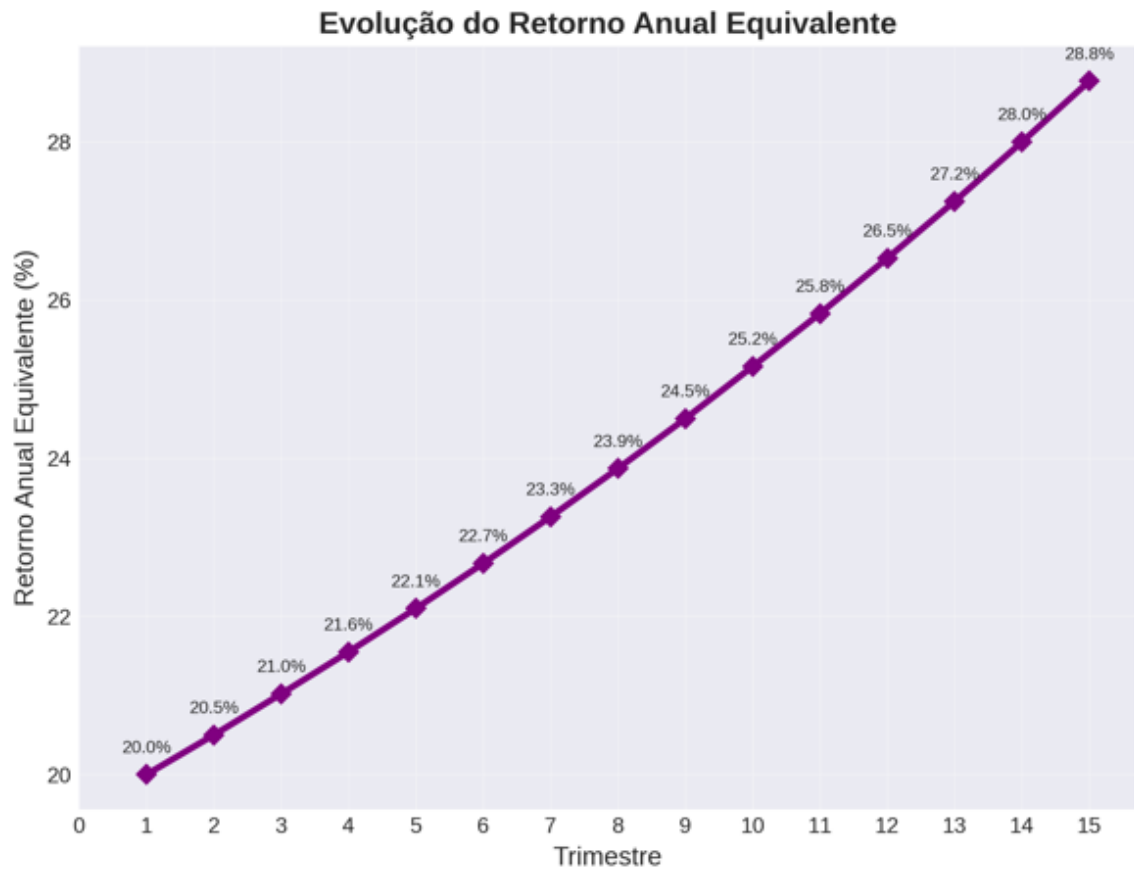


Figura 2: Evolução do retorno anual equivalente ao longo do tempo

A Figura 2 apresenta a evolução do retorno anual equivalente. Os principais insights são:

- O retorno anual inicia em 20% (igual à taxa nominal de juros simples)
- Cresce continuamente ao longo do tempo, atingindo 28.77% após 15 trimestres
- A trajetória ascendente demonstra o efeito cumulativo do reinvestimento
- Cada ponto no gráfico representa o retorno anualizado considerando todo o período até aquele trimestre

### 5.2.3 Composição dos Juros por Trimestre

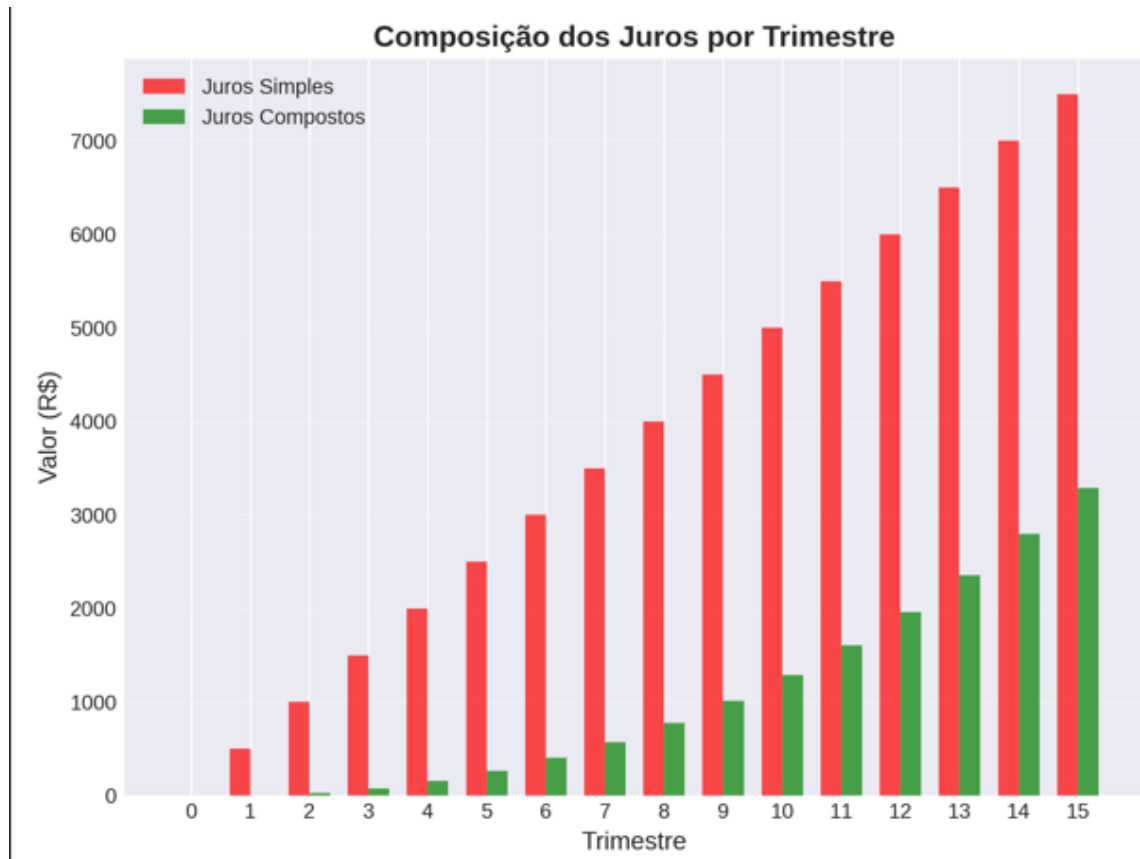


Figura 3: Composição dos juros simples e compostos por trimestre

A Figura 3 mostra a composição dos juros em cada trimestre através de um gráfico de barras. Observações relevantes:

- Nos primeiros trimestres, os juros simples dominam completamente a composição
- Progressivamente, os juros compostos aumentam sua participação relativa
- No trimestre 15, os juros compostos representam R\$ 3.289,28 contra R\$ 7.500,00 de juros simples
- A largura das barras permanece constante, enquanto as alturas das componentes evoluem

#### 5.2.4 Participação Percentual dos Juros Compostos

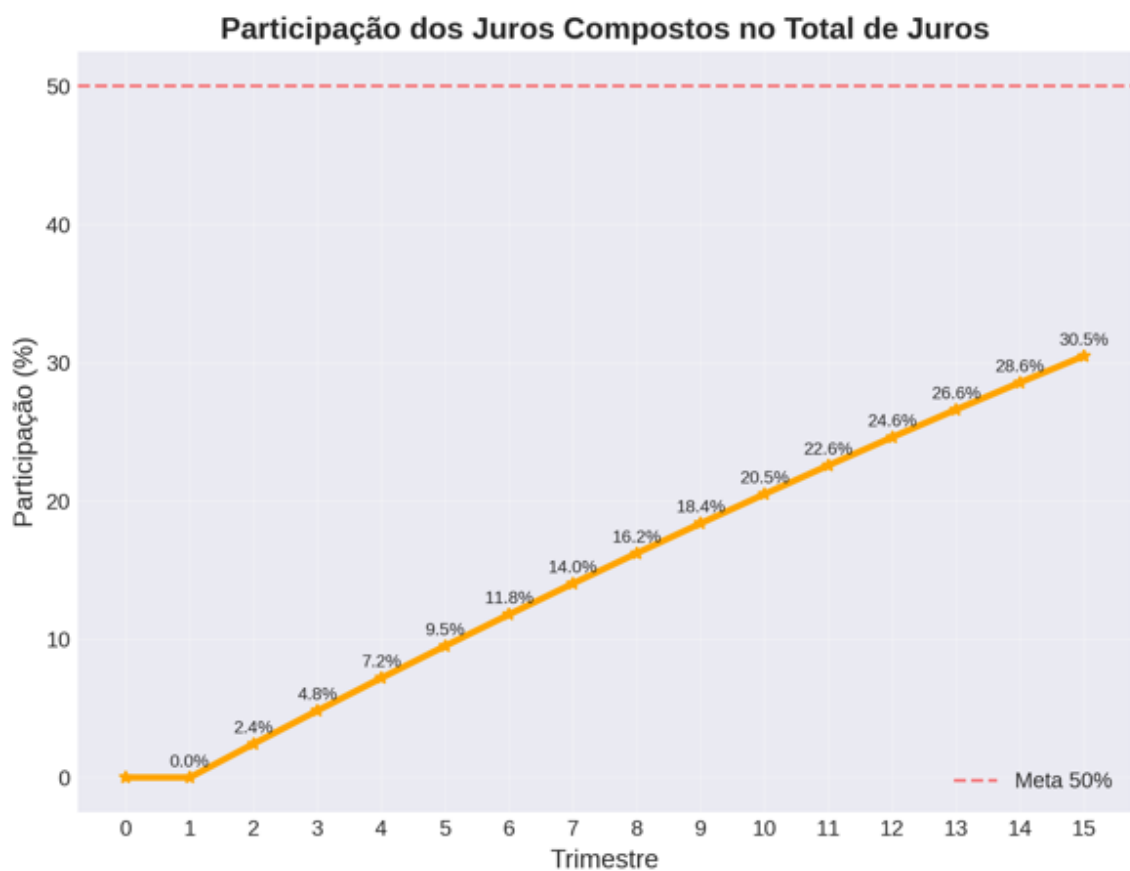


Figura 4: Participação percentual dos juros compostos no total de juros

A Figura 4 apresenta a evolução da participação percentual dos juros compostos no total de juros. Aspectos notáveis:

- Inicia em 0% (primeiro trimestre sem juros compostos)
- Cresce monotonicamente, atingindo 30.5% no trimestre 15
- A trajetória sugere crescimento contínuo, eventualmente superando 50% com horizonte mais longo
- A linha de referência em 50% marca um ponto de viragem importante

### 5.2.5 Visão Consolidada

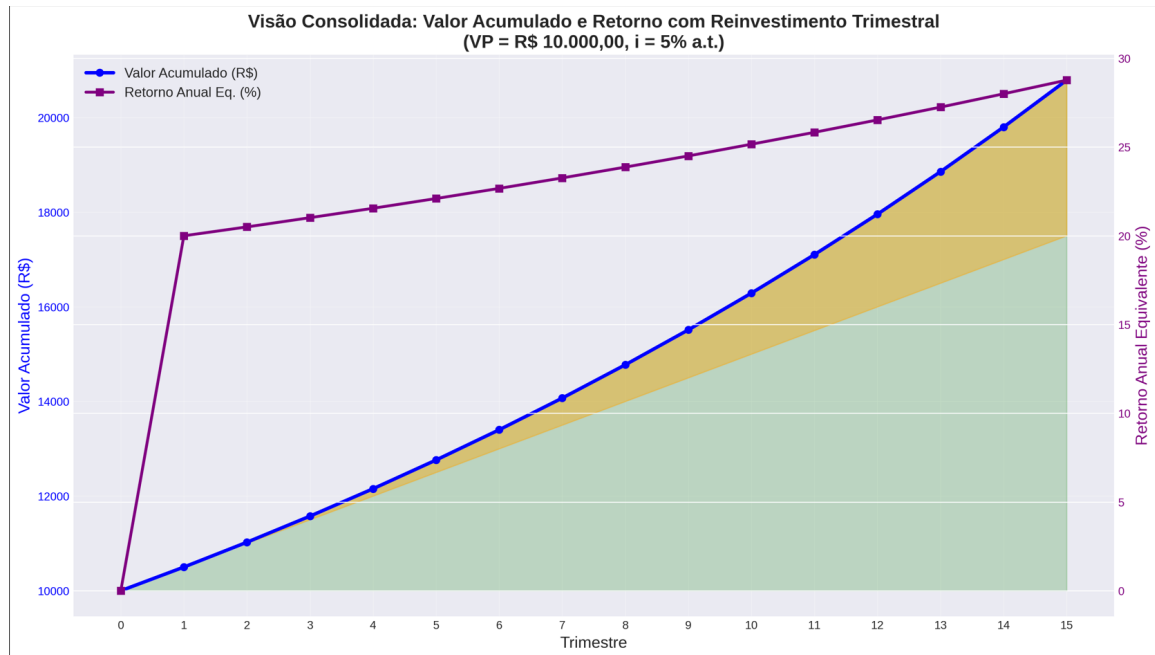


Figura 5: Visão consolidada: valor acumulado e retorno anual equivalente

A Figura 5 oferece uma visão integrada do comportamento do investimento. Características principais:

- Combina valor acumulado (eixo primário, azul) e retorno anual (eixo secundário, roxo)
- Áreas coloridas representam a decomposição entre juros simples e compostos
- Permite correlação visual direta entre crescimento do capital e evolução do retorno
- Facilita a compreensão da relação entre tempo, valor acumulado e rentabilidade

## 5.3 Análise Comparativa com Cenário sem Reinvestimento

Para contextualizar os resultados, compara-se o cenário com reinvestimento total com um cenário base sem reinvestimento:

Tabela 4: Comparação entre cenários com e sem reinvestimento após 15 trimestres

Parâmetro	Sem Reinvestimento	Com Reinvestimento
Valor Acumulado	R\$ 17.500,00	R\$ 20.789,28
Retorno Total	75.00%	107.89%
Retorno Anual Médio	20.00%	28.77%
Juros Simples	R\$ 7.500,00	R\$ 7.500,00
Juros Compostos	R\$ 0,00	R\$ 3.289,28

A Tabela 4 revela que a estratégia de reinvestimento total proporciona:

- Incremento de R\$ 3.289,28 no valor acumulado (18.8% de aumento)
- Aumento de 32.89 pontos percentuais no retorno total (43.9% de aumento relativo)
- Elevação de 8.77 pontos percentuais no retorno anual médio (43.9% de aumento relativo)
- Geração de R\$ 3.289,28 em juros compostos adicionais

## 6 Discussão

### 6.1 Interpretação dos Resultados

Os resultados obtidos demonstram de forma conclusiva que estratégias de reinvestimento sistemático podem transformar significativamente o perfil de retorno de investimentos com juros simples. A análise quantitativa revela:

1. **Transformação do crescimento:** O reinvestimento periódico converte o crescimento linear característico dos juros simples em crescimento exponencial típico dos juros compostos.
2. **Eficiência temporal:** São necessários aproximadamente 3 anos para que o reinvestimento gere um lucro adicional de 20% sobre o capital inicial, e aproximadamente 6.5 anos para duplicar o retorno anual efetivo.
3. **Composição dinâmica:** A participação dos juros compostos no total de juros evolui de 0% para mais de 30% em 3.75 anos, com tendência clara de crescimento contínuo.



4. **Superioridade metodológica:** O método de Newton-Raphson demonstra eficiência computacional significativamente superior ao método de amostragem para resolver as equações não-lineares do modelo.

## 6.2 Implicações Práticas

As descobertas deste estudo possuem várias implicações práticas para diferentes stakeholders:

### 6.2.1 Para Investidores Individuais

- **Importância da disciplina:** A estratégia de reinvestimento sistemático requer disciplina financeira, mas produz retornos significativos a médio e longo prazo.
- **Planejamento de horizonte:** Investidores devem considerar horizontes temporais adequados (3+ anos) para maximizar os benefícios do reinvestimento.
- **Avaliação de produtos:** Além da taxa nominal, deve-se considerar o potencial de reinvestimento na avaliação de produtos financeiros.

### 6.2.2 Para Instituições Financeiras

- **Design de produtos:** Produtos que facilitam o reinvestimento automático podem ser mais atrativos para clientes.
- **Ferramentas de simulação:** Oferecer ferramentas baseadas neste modelo pode auxiliar clientes no planejamento financeiro.
- **Educação financeira:** Comunicar os benefícios do reinvestimento pode melhorar a relação com clientes.

### 6.2.3 Para Educadores e Pesquisadores

- **Exemplo interdisciplinar:** O trabalho serve como caso de aplicação integrada de cálculo numérico e engenharia econômica.
- **Metodologia replicável:** A abordagem desenvolvida pode ser adaptada para análise de outros problemas financeiros.

- **Validação prática:** Os resultados validam a teoria de métodos numéricos em cenário real.

## 6.3 Limitações do Estudo

Reconhecem-se as seguintes limitações no presente trabalho:

### 1. Simplificações do modelo:

- Assume reinvestimento imediato e total, sem considerar períodos de carência
- Não inclui custos de transação ou impostos sobre rendimentos
- Considera taxa de juros constante ao longo do tempo

### 2. Escopo da análise:

- Foca em um cenário específico de parâmetros
- Não explora completamente a sensibilidade a variações paramétricas
- Limita-se a estratégia de reinvestimento total

### 3. Aspectos metodológicos:

- Compara apenas dois métodos numéricos
- Não inclui análise estatística rigorosa dos resultados
- Baseia-se em simulação teórica sem dados empíricos

## 6.4 Sugestões para Trabalhos Futuros

Com base nas limitações identificadas, sugerem-se as seguintes direções para pesquisas futuras:

### 1. Extensões do modelo:

- Incorporação de efeitos fiscais (imposto de renda sobre rendimentos)
- Inclusão de inflação para análise de retornos reais
- Consideração de reinvestimento parcial (frações dos rendimentos)
- Adaptação para diferentes frequências de reinvestimento

## 2. Avanços metodológicos:

- Implementação de métodos numéricos adicionais (bissecção, secante, etc.)
- Desenvolvimento de análise de sensibilidade paramétrica
- Criação de interface gráfica interativa para exploração de cenários
- Aplicação de técnicas de otimização para estratégias de reinvestimento

## 3. Aplicações práticas:

- Análise de produtos financeiros reais do mercado
- Desenvolvimento de ferramentas de decisão para investidores
- Integração com planejamento financeiro pessoal
- Estudo comparativo entre diferentes estratégias de reinvestimento

# 7 Conclusões

## 7.1 Conclusões Principais

Este trabalho desenvolveu e aplicou uma abordagem interdisciplinar combinando conceitos de cálculo numérico e engenharia econômica para análise de estratégias de reinvestimento em produtos financeiros com juros simples. As principais conclusões são:

1. **Validação do modelo matemático:** Confirmou-se que o reinvestimento periódico transforma o crescimento de investimentos com juros simples em comportamento equivalente a juros compostos, conforme descrito pela equação  $VF_n = VP(1 + i)^n$ .
2. **Eficácia da estratégia de reinvestimento:** Para os parâmetros analisados ( $VP = R\$ 10.000$ ,  $i = 5\%$  a.t.), a estratégia de reinvestimento total:
  - Gera lucro adicional de 20% exclusivamente do reinvestimento em aproximadamente 3 anos
  - Eleva o retorno anual efetivo de 20% para 28.77% em 3.75 anos
  - Permite atingir TMA de 40% ao ano em aproximadamente 6.5 anos
3. **Superioridade do método Newton-Raphson:** O método de Newton-Raphson demonstrou eficiência computacional aproximadamente 242.000 vezes superior ao método de amostragem para resolver as equações não-lineares do modelo.

4. **Importância do horizonte temporal:** Os benefícios do reinvestimento são cumulativos e se aceleram com o tempo, com a participação dos juros compostos evoluindo de 0% para mais de 30% em 3.75 anos.
5. **Valor agregado quantificável:** Em comparação com estratégia sem reinvestimento, o reinvestimento total proporcionou aumento de 32.89% no retorno total e 43.9% no retorno anual médio após 3.75 anos.

## 7.2 Contribuições do Trabalho

Este estudo contribui para o conhecimento nas seguintes áreas:

- **Integração interdisciplinar:** Demonstra aplicação prática da integração entre cálculo numérico e engenharia econômica na solução de problemas financeiros reais.
- **Metodologia analítica:** Desenvolve abordagem completa desde modelagem matemática até implementação computacional e visualização de resultados.
- **Ferramenta de análise:** Oferece ferramenta computacional replicável para análise de estratégias de reinvestimento.
- **Insights práticos:** Fornece insights quantitativos sobre os benefícios de estratégias de reinvestimento para diferentes horizontes temporais.

## 7.3 Recomendações Finais

Com base nos resultados obtidos, formulam-se as seguintes recomendações:

### 1. Para investidores:

- Adotem disciplina de reinvestimento sistemático de rendimentos
- Considerem horizontes temporais adequados (médio/longo prazo) para maximizar benefícios
- Utilizem ferramentas de simulação para planejamento financeiro

### 2. Para instituições financeiras:

- Desenvolvam produtos que facilitem o reinvestimento automático

- Ofereçam ferramentas educacionais baseadas em simulações
- Comuniquem claramente os benefícios de estratégias de reinvestimento

### 3. Para educadores:

- Utilizem este caso como exemplo de aplicação interdisciplinar
- Enfatizem a importância de métodos numéricos na solução de problemas práticos
- Integrem conceitos teóricos com aplicações do mundo real

### 4. Para pesquisadores:

- Explore as extensões sugeridas para modelos mais realistas
- Desenvolvam ferramentas computacionais avançadas para análise financeira
- Realizem estudos empíricos comparativos com dados do mercado

## 7.4 Considerações Finais

Este trabalho demonstrou que a aplicação integrada de conhecimentos de cálculo numérico e engenharia econômica permite a análise quantitativa rigorosa de estratégias financeiras complexas. A abordagem desenvolvida - desde a modelagem matemática até a implementação computacional e visualização de resultados - fornece um framework analítico poderoso para tomada de decisão de investimento.

Os resultados obtidos validam a importância da disciplina financeira e do planejamento de longo prazo, destacando o valor agregado por estratégias sistemáticas de reinvestimento. Além disso, o trabalho contribui para a educação financeira ao fornecer ferramentas e insights que facilitam a compreensão de conceitos financeiros complexos.

Em um contexto de crescente complexidade dos mercados financeiros e necessidade de educação financeira, trabalhos como este desempenham papel importante na ponte entre teoria acadêmica e prática profissional, capacitando indivíduos e organizações para decisões financeiras mais informadas e fundamentadas.

## Referências Bibliográficas

### Referências

- [1] ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática Financeira e suas Aplicações**. São Paulo: Atlas. 2012.
- [2] FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006

### Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mulher Letícia por tornar esse projeto possível e aos professores das disciplinas de Cálculo Numérico e Engenharia Econômica pela orientação e pelos conhecimentos transmitidos durante o quadrimestre. Agradeço também à Universidade Federal do ABC pela infraestrutura e oportunidades de aprendizado.

## A Código Fonte Completo

### A.1 Código Principal

O código fonte completo está disponível em repositório online e pode ser acessado através do link: <https://github.com/arthurht122/Projeto-Engenharia-Economica-e-Calculo>

### A.2 Dependências e Requisitos

Para execução do código, são necessárias as seguintes dependências:

- Python 3.8 ou superior
- NumPy 1.20 ou superior
- Matplotlib 3.4 ou superior
- Jupyter Notebook (opcional, para execução interativa)

## B Dados da Simulação

### B.1 Parâmetros Utilizados

- Valor Presente ( $VP$ ): R\$ 10.000,00
- Taxa de juros trimestral ( $i$ ): 5% (0,05)
- Período de análise ( $n$ ): 15 trimestres
- TMA anual ( $TMA$ ): 40% (0,40)
- Lucro desejado ( $k$ ): 20% (0,20)

### B.2 Resultados Detalhados

Os resultados completos da simulação, incluindo dados intermediários e arquivos de saída, estão disponíveis no repositório online do projeto.