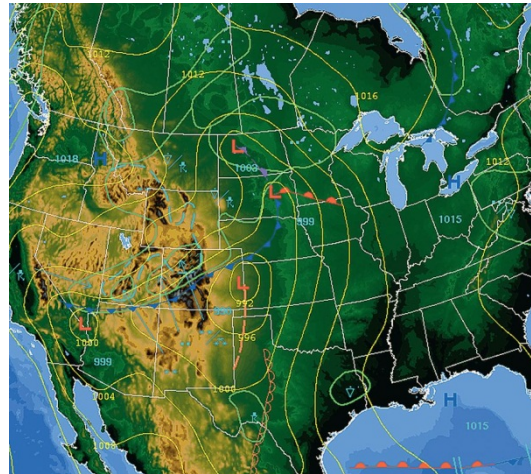


多變數函數

Functions of Several Variables

Functions of Several Variables



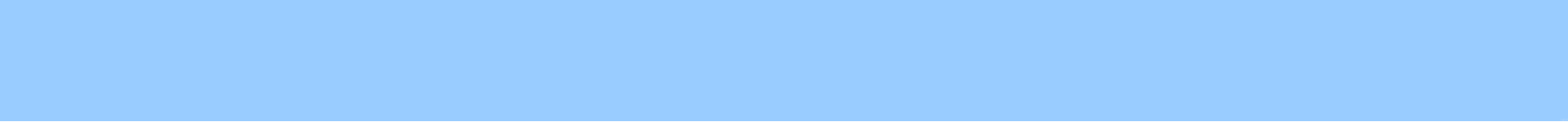
13.1

多變數函數的簡介

Introduction to Functions of Several Variables

目的

- 了解多變數函數的符號
- 畫出雙變數函數的圖
- 畫出雙變數函數的階層曲線(level curves)圖
- 畫出三變數函數的等值曲面(level surfaces)圖
- 運用電腦繪出雙變數函數



多變數函數

Functions of Several Variables

多變數函數

雙變數或多變數的函數的表示符號相似於單變數函數的符號。

以下有兩個例子：

$$z = f(x, y) = x^2 + xy$$


2 variables

Function of two variables

$$w = f(x, y, z) = x + 2y - 3z$$


3 variables

Function of three variables

多變數函數

定義: 雙變數函數 (Function of Two Variables)

假 D 是一個由實數構成的有序對(ordered pairs) 集合。如果在集合 D 中的每一個有序對 (x,y) 皆對映到一唯一實數 $f(x,y)$ ，則 f 被稱為變數 x 、 y 的函數。集合 D 為 f 函數的定義域(domain)，而所有 $f(x,y)$ 值的集合則稱為 f 函數的值域範圍(range)。

如果給一個函數 $z=f(x,y)$ ， x 、 y 被稱為獨立變數(independent variable)， z 被稱為因變數(dependent variable)。此定義可推廣到更多變數的函數。

例題1-找出多變數函數的定義域

找出以下函數的定義域。

a. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$

b. $g(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

解:

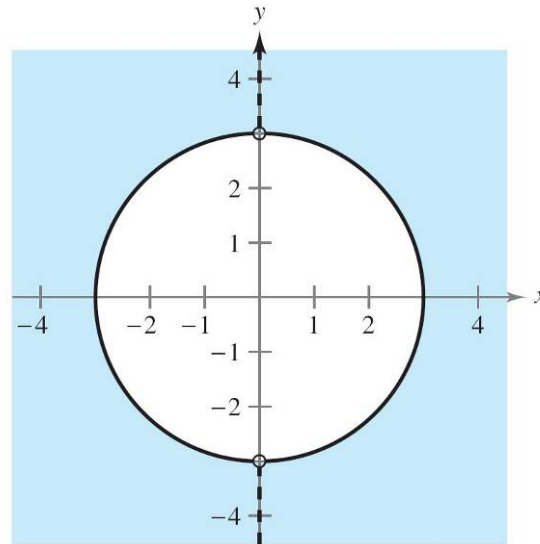
a. 這個函數被定義在

$$x \neq 0 \text{ 與 } x^2 + y^2 \geq 9.$$

例題1-解

cont'd

所以定義域在圓 $x^2 + y^2 = 9$ 圓上與圓外的所有點，
扣除掉在y軸上的點，也就是 $x \neq 0$ 。



Domain of
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$$

例題1-解

cont'd

b. 這個函數 g 的定義域為所有實數要滿足 $x^2 + y^2 + z^2 < 9$.

所求定義域為球心在原點且半徑為三的球內部。

多變數函數

多變數函數的運算方式與單變數函數的方式相同。

例如：雙變數函數的加法、減法、乘法、除法運算。

$$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$$

Sum or difference

$$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$$

Product

$$\frac{f}{g}(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad g(x, y) \neq 0$$

Quotient

多變數函數

我們可以對兩個單變數函數作合成函數，但是不能合成兩個多變數函數。

不過如果 h 是一個多變數函數且 g 是一個單變數函數，你可用它們組成合成函數(composite function)如

$$(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$$

Composition ◦

多變數函數

如果一個函數被寫成用 cx^my^n 加起來的函數(c 為實數, m 和 n 為非負整數), 則此函數被稱作雙變數多項式函數(**polynomial function of two variables**)。

譬如,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + x + 2 \quad \text{and} \quad g(x, y) = 3xy^2 + x - 2 \quad \circ$$

將兩個多項函式函數相除的函數, 稱為有理函數(**rational function**)。



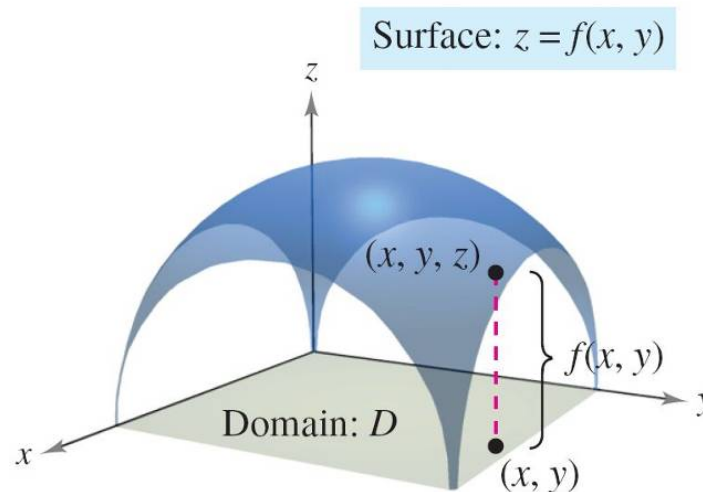
雙變數函數的圖形

The Graph of a Function of Two Variables

雙變數函數的圖形

雙變數函數 f 的圖形是由定義域的每一點 (x, y) 與其對映值 $z = f(x, y)$ 所組成的集合。一般而言，這圖形是空間上的一個曲面。

如下圖，藍色部分為 $z = f(x, y)$ 的圖形，圖形在 xy -平面的投影是函數 f 的定義域。



例題2-雙變數函數的圖形

函數 $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ 的值域範圍為何?請描述 f 的圖形。

解:

由定義域必須滿足 $16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$. 將不等式改爲等式，
整理後發現爲一橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. Ellipse in the xy -plane

所以函數的值域範圍是在上述橢圓曲面上與曲面外的所有的點。

例題2-解

cont'd

而 $z = f(x, y)$ 的值域範圍是 $0 \leq z \leq \sqrt{16}$

或者 $0 \leq z \leq 4$.

Range of f

所有函數 f 圖形的點 (x, y, z) 都滿足 $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ 。

對方程式兩邊平方

$$z^2 = 16 - 4x^2 - y^2$$

整理後

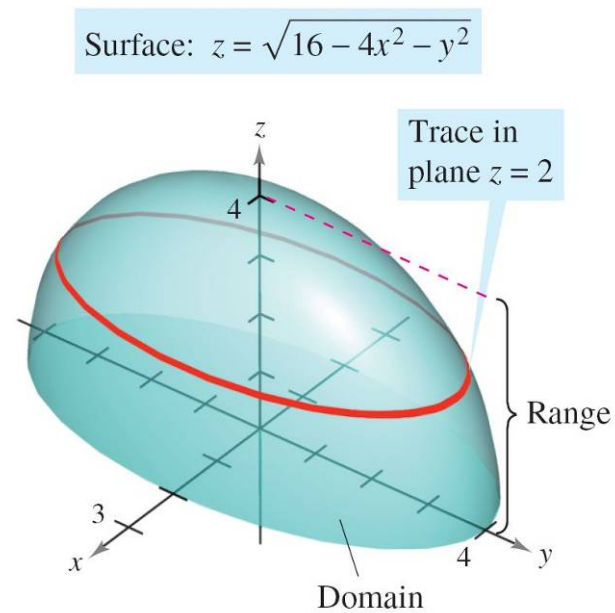
$$4x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

寫成橢圓體方程式 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad 0 \leq z \leq 4.$

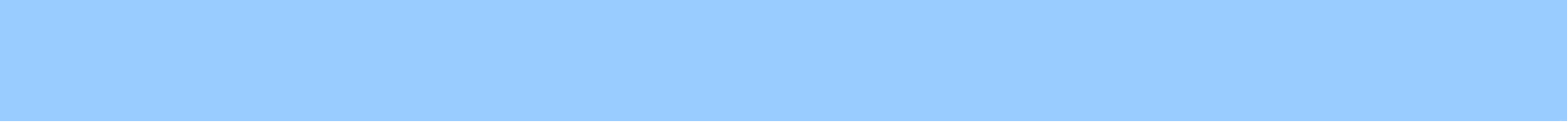
例題2-解

cont'd

f 的圖形是橢圓體的上半部。



The graph of $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ is the upper half of an ellipsoid.



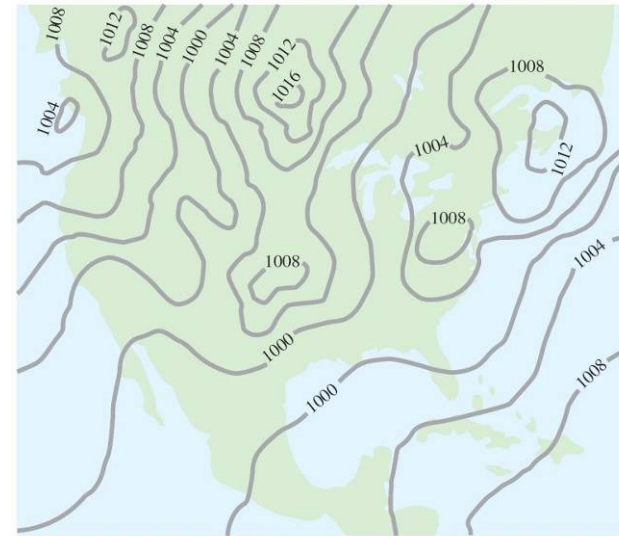
階層曲線

Level Curve

階層曲線

第二種用來描繪雙變數函數的方法是用純量場(scalar field)的概念，找出所有滿足純量 $z = f(x, y)$ 的點 (x, y) 。所有滿足 $f(x, y)$ 為某一常數的點 (x, y) 就是一條階層曲線，純量場使用階層曲線來呈現。

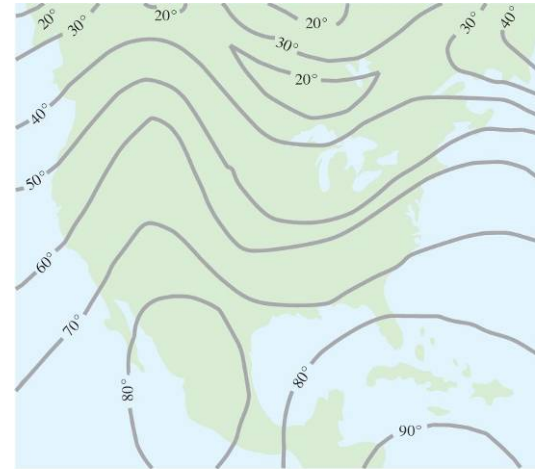
例如:右圖的氣象圖，相同壓力的曲線稱等壓線(isobars)。



Level curves show the lines of equal pressure (isobars) measured in millibars.

階層曲線

又如圖13.6的氣象圖，
相同溫度的曲線稱等溫線(isotherms)。



Level curves show the lines of equal temperature (isotherms) measured in degrees Fahrenheit.

Figure 13.6

另外還有用來表示電位能場，這種圖被稱作等位能線圖(equipotential lines)。

階層曲線

等高線圖(Contour map)常被用在表示地球表面的地形，每一條階層曲線表示一個海拔高度，這種圖被稱作地形圖(topographic map)。

階層曲線

像是圖13.7轉換成地形圖會變成圖13.8



Figure 13.7

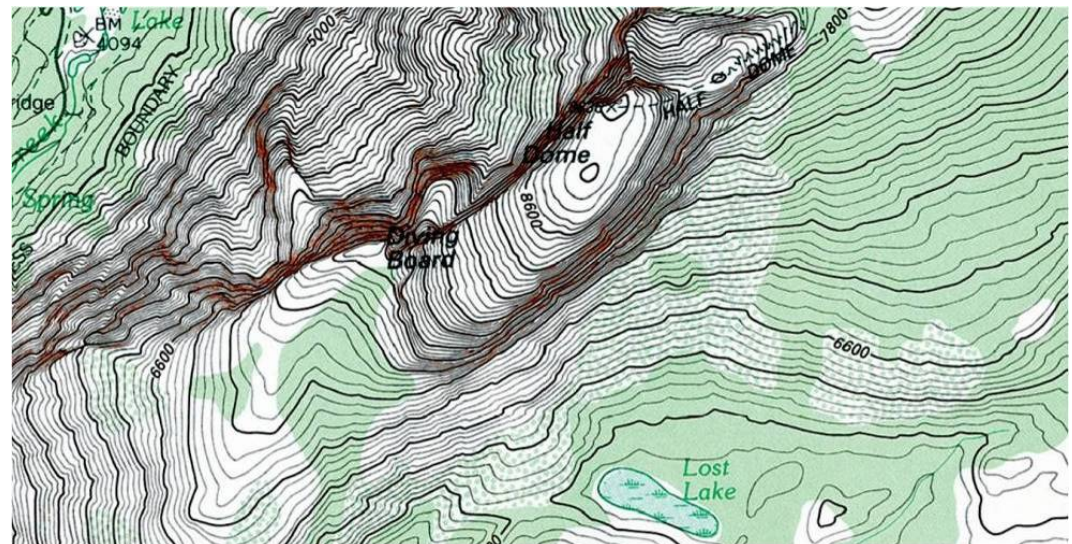


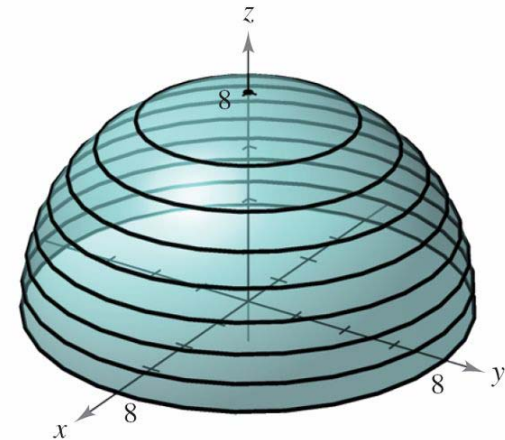
Figure 13.8

例題3-繪製等高地形圖

$f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$ 圖形如下。

請繪製其等高線圖，其中要有相對應的 $c = 0, 1, 2, \dots, 8$ 的階層曲線。

Surface:
 $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$



Hemisphere

例題3-解

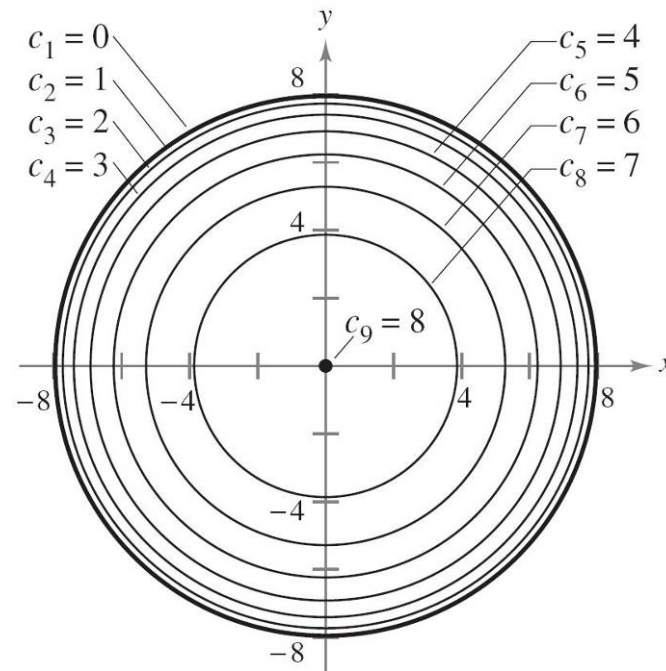
對任何一個 c 值，方程式 $f(x, y) = c$ 在 xy -平面是一個圓。

例如 $c_1 = 0$ 時，階層曲線為 $x^2 + y^2 = 64$ ， Circle of radius 8
是一圓心在原點半徑為8的圓。

例題3-解

cont'd

下圖表示半圓球面的九條階層曲線的等高線。



Contour map

階層曲線

另外舉出一個用在經濟學上的雙變數函數。Cobb-Douglas production function，這個函數被用來表示以勞工或資本為變數的物品製造量。

如果 x 表示員工數量， y 表示資本單位數，則製造數量為

$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}$$

其中 a 跟 C 都是常數，而且 $0 < a < 1$ 。



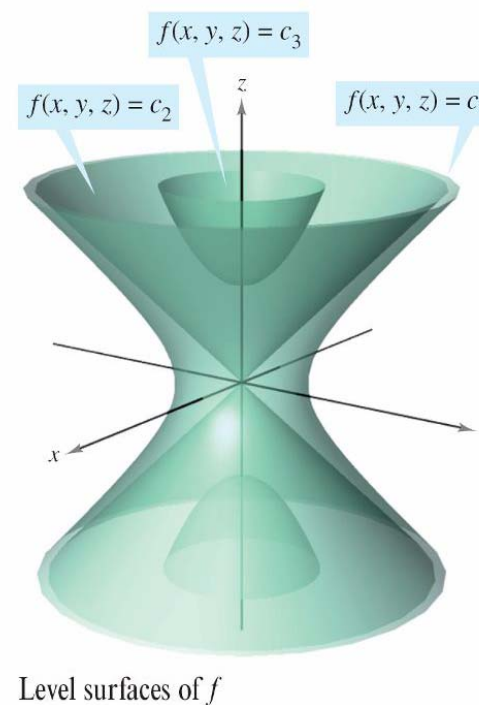
等值曲面

Level Surfaces

等值曲面

將階層曲線的概念可以被進一步延伸一個維度變成等值曲面 (level surface) 。

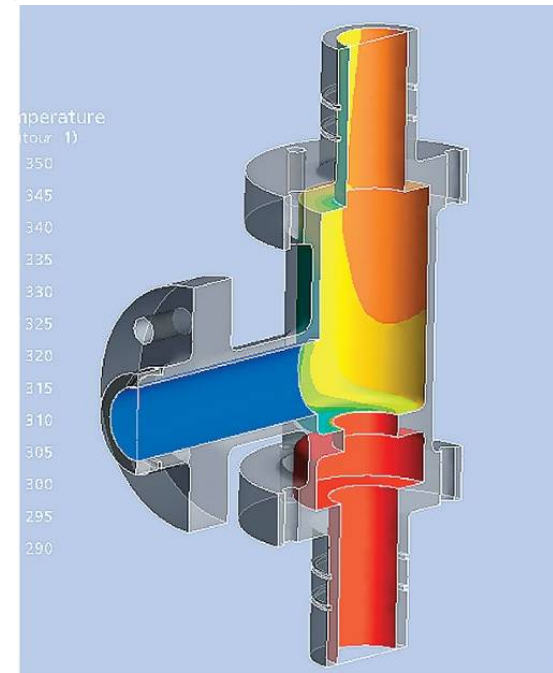
設 f 是三個變數函數且 c 為常數，則 $f(x, y, z) = c$ 的圖形是 f 函數的一片等值曲面。



等值曲面

工程師以及學者已經用電腦發展出一些用來視覺三變數函數的方法。

如圖13.15是一個電腦模擬的結果，使用顏色來標示管內液體的溫度。



One-way coupling of ANSYS CFX™ and ANSYS Mechanical™ for thermal stress analysis

例題6-等值曲面

描述 $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$ 等值曲面的圖。

解:

每一片等值曲面都滿足下列方程式

$$4x^2 + y^2 + z^2 = c. \quad \text{Equation of level surface}$$

所以每一片等值曲面都是橢圓曲面。

當 c 增加則圓切面的半徑就會跟著增加。

例題6-解

cont'd

例如 $c = 0$ 、 $c = 4$ 、 $c = 16$ 所對應的方程式如下：

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Level surface for $c = 0$ (single point)

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Level surface for $c = 4$ (ellipsoid)

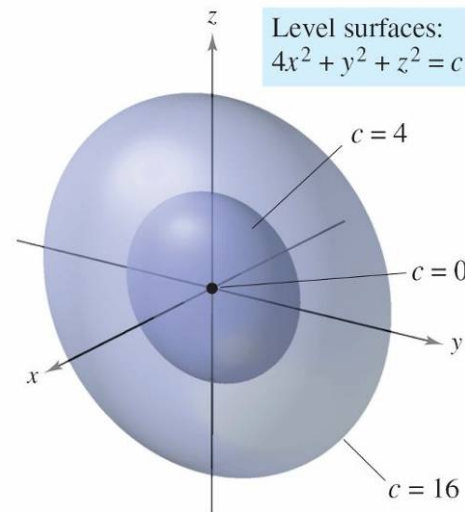
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Level surface for $c = 16$ (ellipsoid)

例題6-解

cont'd

所以等值曲面呈現如下。



如果函數表示溫度，則這階層曲面會被稱作等溫曲面 (isothermal surfaces) 。



電腦繪圖

Computer Graphics

電腦繪圖

隨著電腦迅速地發展，繪圖是越來越容易了。

即使有很多不同形式的三維繪圖設備，但是大多還是用一些路徑分析方法去表示三維圖形。

一般使用這種設備或軟體，你都需要輸入曲面的方程式。

電腦繪圖

例如你需要輸入下列的曲面方程式

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

跟選擇 x, y, z 的邊界值

$$-3 \leq x \leq 3$$

Bounds for x

$$-3 \leq y \leq 3$$

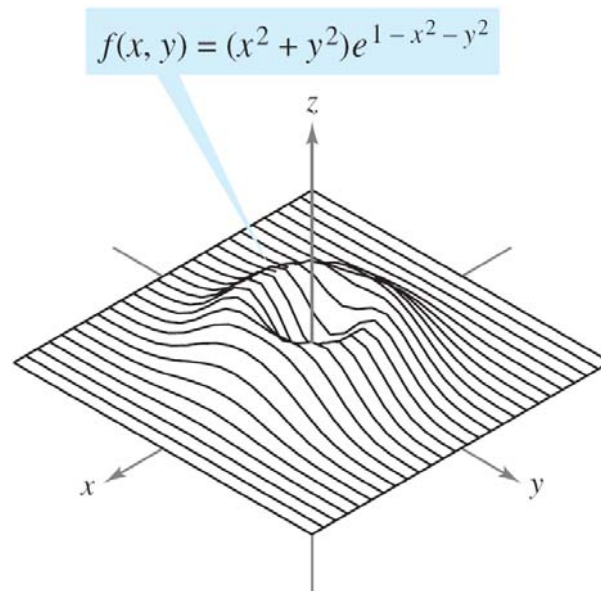
Bounds for y

$$0 \leq z \leq 3$$

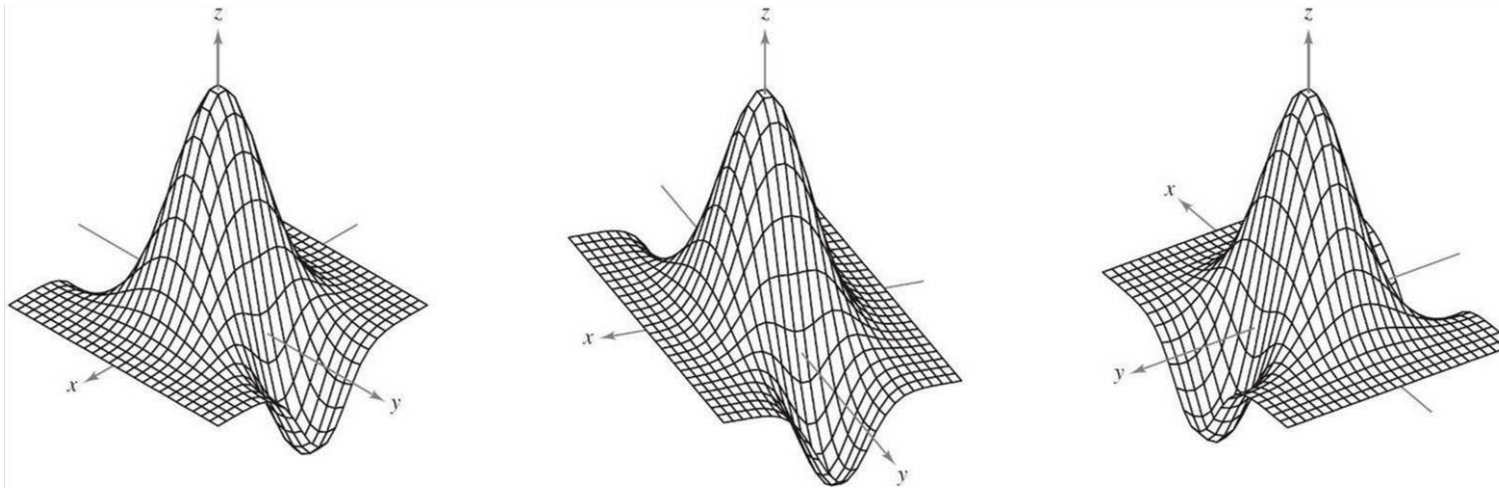
Bounds for z

電腦繪圖

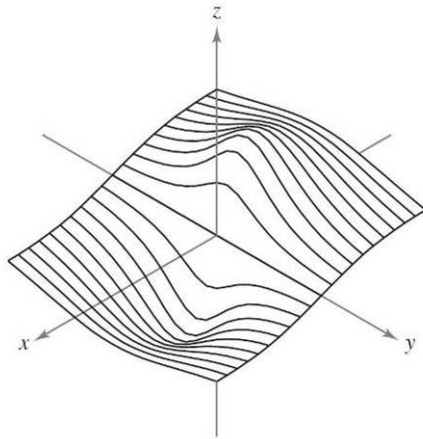
下圖表示著電腦繪圖方式(用26條平行yz-平面的線描繪)。
爲了加強三維的效果，這套系統用隱藏線的選項。



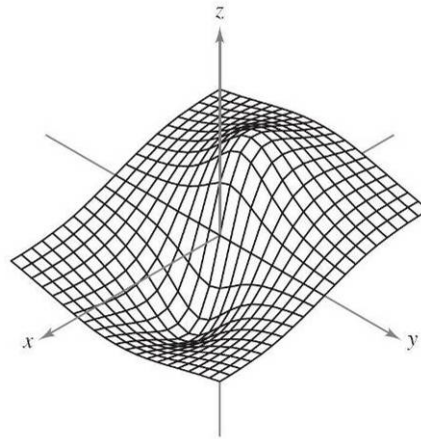
電腦繪圖



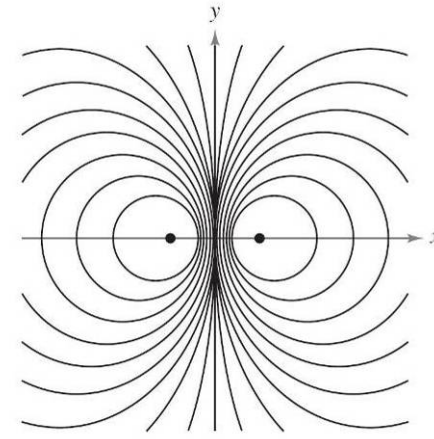
Three different views of the graph of $f(x, y) = (2 - y^2 + x^2)e^{1-x^2-(y^2/4)}$



Single traces



Double traces

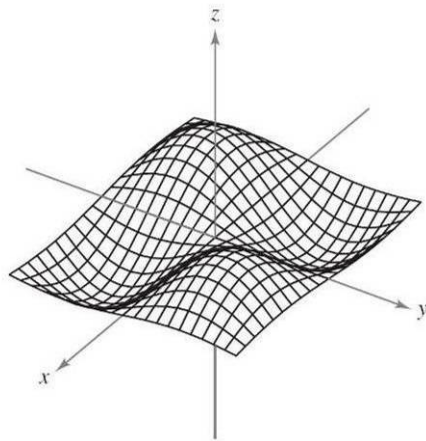


Level curves

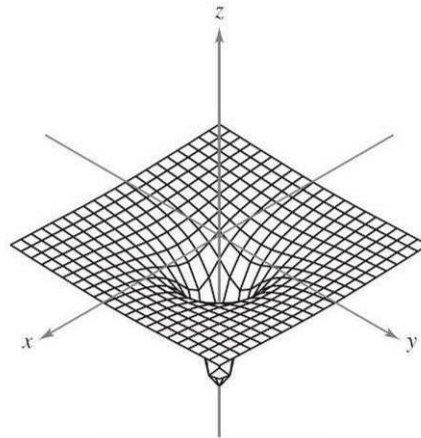
Traces and level curves of the graph of $f(x, y) = \frac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$

電腦繪圖

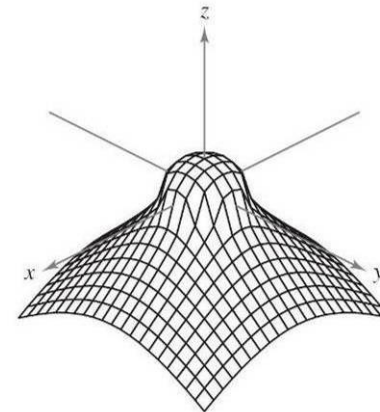
cont'd



$$f(x, y) = \sin x \sin y$$



$$f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



$$f(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{\sqrt{|1 - x^2 - y^2|}}$$