13.8

雙變數函數的極值

Extrema of Functions of Two Variables

目標

- 求雙變數函數的絕對極值與相對極值
- 使用二階偏微分檢定求出雙變數函數的相對極值

絕對極值和相對極值

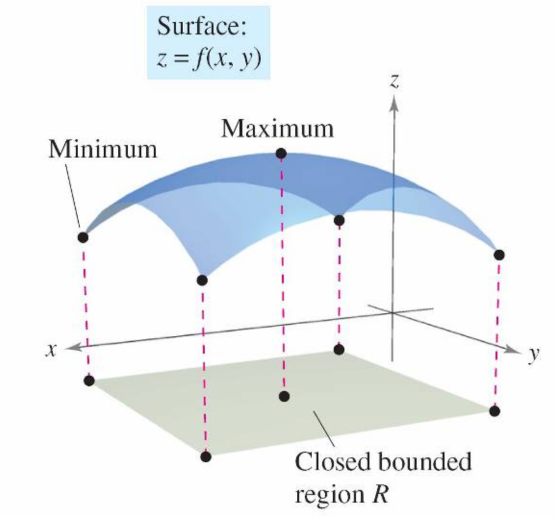
Absolute Extrema and Relative Extrema

絕對極值和相對極值

假設一個定義在一封閉有界區域R的連續雙變數函數。如果(a, b) 和 (c, d) 在R內且對所有在R內的點(x, y)滿足

$$f(a, b) \leqslant f(x, y) \leqslant f(c, d)\ ,$$

則 $f(a, b)$ 和 $f\,(c, d)$ 是函數在區域R的最小值(minimum)和最大值(maximum)。



R contains point(s) at which $f(x, y)$ is a minimum and point(s) at which $f(x, y)$ is a maximum.

絕對極值和相對極值

一個包含所有邊界點的區域爲封閉(closed)區域。

雙變數函數的極值定理必須在一個封閉有界的平面區域。

如果一個區域可以被一個封閉圓盤包圍，該區域稱作有界(bounded) 。

絕對極值和相對極值

定理13.15　極值定理 (Extreme Value Theorem)

令雙變數函數 f 定義在 xy-平面上的一個封閉有界區域 R 連續，則

1. 在區域 R 內至少有一個點的函數值爲最小值；
2. 在區域 R 內至少有一個點的函數值爲最大值。

絕對極值和相對極值

定義: 相對極值 (Relative Extrema)

令雙變數函數 f 定義在一個包含點 (x_0, y_0) 的區域R。

1. 如果在一個包含點 (x_0, y_0) 的開圓盤內的每一點 (x, y)
   滿足 $f(x,y) \ge f(x_0, y_0)$ ，
   則函數 f 在點 (x_0, y_0) 是相對極小值。
2. 如果在一個包含點 (x_0, y_0) 的開圓盤內的每一點 (x, y)
   滿足 $f(x,y) \le f(x_0, y_0)$ ，
   則函數 f 在點 (x_0, y_0) 是相對極大值。

(x_0, y_0)

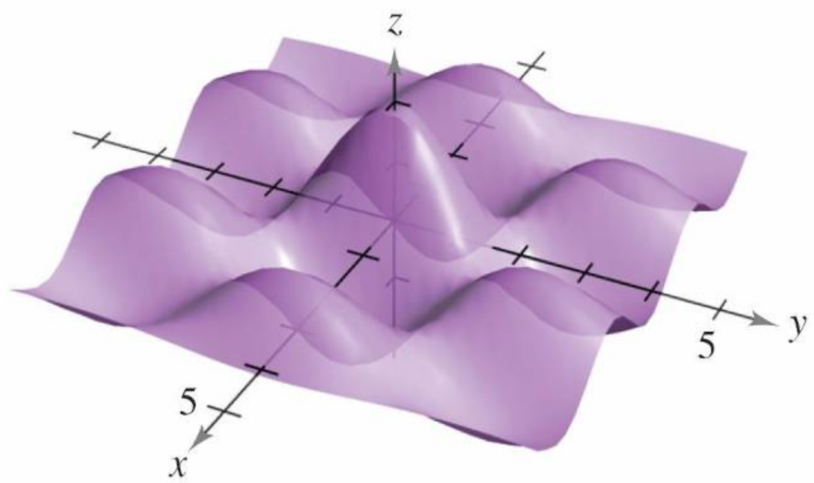
絕對極值和相對極值

定義: 相對極值 (Relative Extrema)

令雙變數函數 f 定義在一個包含點 (x_0, y_0) 的區域 R。

1. 如果在一個包含點 (x_0, y_0) 的開圓盤內的每一點 (x, y)
   滿足 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ，
   則函數 f 在點 (x_0, y_0) 是相對極小值。
2. 如果在一個包含點 (x_0, y_0) 的開圓盤內的每一點 (x, y)
   滿足 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ，
   則函數 f 在點 (x_0, y_0) 是相對極大值。

絕對極值和相對極值



Relative extrema

絕對極值和相對極值

定義: 臨界點(Definition of Critical point)

令雙變數函數 f 定義在一個包含點(x_0, y_0)的區域R。

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_y(x_0, y_0) = 0$ 。

2. $f_x(x_0, y_0)$ 或 $f_y(x_0, y_0)$ 不存在 。

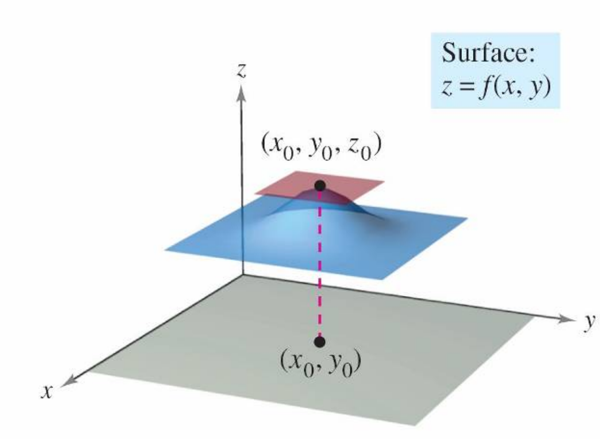
如果滿足上述其中一點，則我們稱點(x_0, y_0)爲臨界點。

絕對極值和相對極值

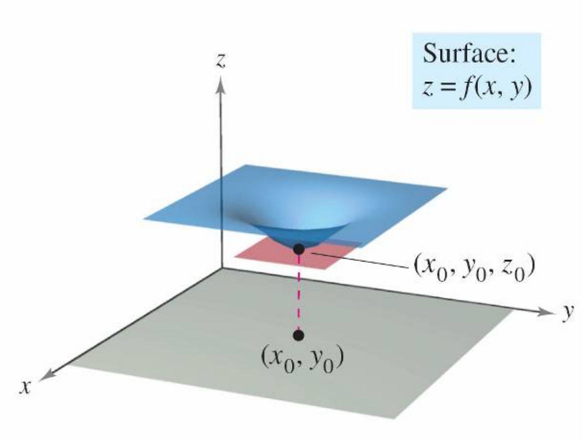
根據定理13.11，如果 f 為可微分且

$$\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$
$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$ ，

則在點(x_0, y_0)的每一個方向微分必為0。這表示此函數在點(x_0, y_0)有一個水平的切平面。



Relative maximum



Relative minimum

絕對極值和相對極值

從前圖似乎告訴我們，臨界點可能是相對極值發生的地方。

定理**13.16** Relative Extrema Occur Only at Critical Points

如果 f 在一開區域R內的點(x_0, y_0)有相對極值，則此點必爲的臨界點。

例題一

求$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$的相對極值。

解:

求臨界點之前，必須先求函數的偏導數。

對於所有的 x 和 y，

$f_x(x, y) = 4x + 8$ 、 Partial with respect to *x*

$f_y(x, y) = 2y - 6$ 。 Partial with respect to *y*

臨界點在偏導數都爲0的點。

例題一

cont’d

爲了求得這些點，設$f_x(x, y)$ $f_y(x, y)$都爲0，則

$$4x + 8 = 0 \quad \text{跟} \quad 2y - 6 = 0 \text{。}$$

得到臨界點在點 $(-2, 3)$ 。

當$(x, y) \neq (-2, 3)$ 時，

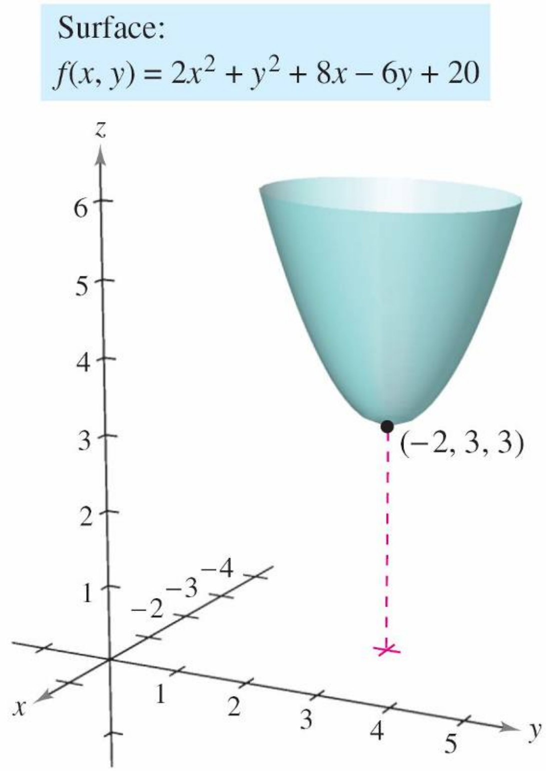
$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3 > 3 \text{。}$$

所以相對極小值發生在點$(-2, 3)$ 。

例題一

cont'd

相對極小值是 $f(-2, 3) = 3$。



The function $z = f(x, y)$ has a relative minimum at $(-2, 3)$.

二次偏微分檢定

The Second Partials Test

二次偏微分檢驗

根據定理13.16，要求出相對極值，你只需要檢查$f(x, y)$在臨界點的值。

但是這個方法僅對單變數函數有效，而雙變數函數的臨界點並不是總是相對極大或相對極小。

有些臨界點不是相對極大或相對極小，而是一個的鞍點(saddle points) 。

二次偏微分檢驗

以下是一個在臨界點並非相對極值的例子。

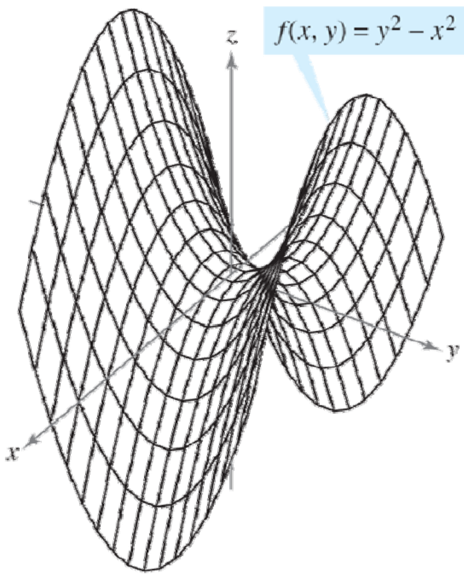
曲面

$f(x, y) = y^2 - x^2$ 。 Hyperbolic paraboloid

函數 f 的二個偏導數在點(0, 0) 都為零。

但是函數 f 在這個點並非相對極值。

因爲函數在點(0, 0)附近的值包含負值(沿著x軸)和正值(沿著y軸) 。



Saddle point at (0, 0, 0):
$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$

二次偏微分檢驗

定理**13.17**　二階偏導數檢定法 (Second Partials Test)

設$f(x,y)$在一開區域(Open disk)內的點(a,b)有連續的二階偏導數，且 $f_x(a,b)=0$ 、$f_y(a,b)=0$ 。

設 $d=f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)-[f_{xy}(a,b)]^2$ 。

1. 如果 $d>0$且 $f_{xx}(a,b)>0$，則函數在點有相對極小值。
2. 如果 $d>0$且 $f_{xx}(a,b)<0$，則函數在點有相對極大值。
3. 如果 $d<0$，則 $(a,b,f(a,b))$ 為一個鞍點(Saddle point)。
4. 如果 $d=0$，則無結論。

例題三

求 $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$ 的相對極值。

解:

先找臨界點。

f 的兩個偏導數

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y \text{ 、 } f_y(x, y) = 4x - 4y$$

在整個平面上存在。

然後令兩個偏導數等於零。

例題三

cont'd

得到

$-3x^2 + 4y = 0$ - - - - - - - - - - - - - - (1) 、

$4x - 4y = 0$ - - - - - - - - - - - - - - (2) 。

由(2)得到$x = y$。

代回(1)得到

$y = x = 0$ 與 $y = x = 4/3$。

例題三

cont'd

因爲

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{yy}(x, y) = -4, \quad \text{and} \quad f_{xy}(x, y) = 4$$ 。

代入臨界點(0, 0)

$$d = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = 0 - 16 < 0$$ 。

藉由二次偏導數檢定法，可以確定點(0, 0, 1)是 f 的一個鞍點。

例題三

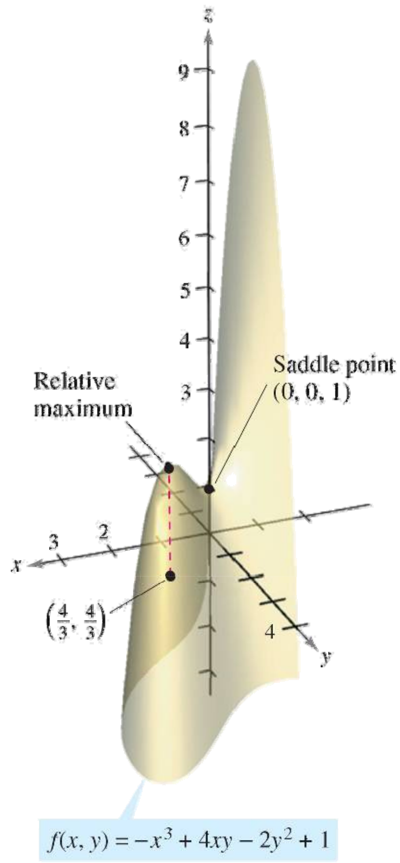
cont'd

代入臨界點 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) f_{yy}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) - \left[f_{xy}\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right)\right]^2 \\ &= -8(-4) - 16 \\ &= 16 \\ &> 0 \end{aligned}$$

因為 $f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$

所以 f 在點 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$有一個相對極大值。



二次偏微分檢驗

絕對極值發生的狀況有以下兩者。

1.一些相對極值可能是絕對極值。

例如例題一的 $f(-2, 3)$ 就是絕對極小值，而例題三的 $f(4/3, 4/3)$ 就僅僅是相對極大值。

2.絕對極值也許發生在定義域的邊界點上。

例如例題五。