13.4

# 微變量

## Differentials

# 目的

- 了解微變量(differentials)與變化量(increments)的觀念
- 延伸可微分的觀念至雙變數函數
- 使用微變量的求得近似值(Approximation)

# 變化量與微變量

Increments and Differentials

# 變化量與微變量

在單變數函數的時候，我們定義 $y = f(x)$ 的微變量為

$$dy = f'(x)dx$$ 。

使用相同的方式在雙變數函數 $z = f(x, y)$ 的時候，$\Delta x$ 和 $\Delta y$ 就是 $x$ 和 $y$ 的變化量，而 $z$ 的變化量可表示為

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Increment of $z$

# 變化量與微變量

**定義: 雙變數函數之全部微變量 (Total Differential)**

設 $z = f(x, y)$、 $\Delta x$ 和 $\Delta y$ 的變數的變化量(increments)，則對$x$和$y$變數的微變量(differentials) 可以表示爲:

$$dx = \Delta x \quad 和 \quad dy = \Delta y$$ 。

對因變數$z$的全部微變量是

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$ 。

# 變化量與微變量

我們可以將前述定義延伸至三變數或更多變數函數。

舉個例子，假設$w = f(x, y, z, u)$ ，則$dx = \Delta x$， $dy = \Delta y$，$dz = \Delta z$ ，$du = \Delta u$ ，且$w$的全部微變量爲

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial u}du$$ 。

# 例題一

求下面函數全部微變量。

**a.** $z = 2x \sin y - 3x^2y^2$　　　　**b.** $w = x^2 + y^2 + z^2$

解:

a.　根據定義 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ ，

對$z = 2x \sin y - 3x^2y^2$ 的全部微變量爲

$$(2 \sin y - 6xy^2)dx + (2x \cos y - 6x^2y)dy \text{ 。}$$

# 例題一

cont’d

**b.** 根據定義 $dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$ ，

對$w = x^2 + y^2 + z^2$ 的全部微變量為

$$2x\ dx + 2y\ dy + 2z\ dz \quad 。$$

# 練習一

求 $w = e^x \cos y + z$ 全部微變量。

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$ ，

# 練習一

求 $w = e^x \cos y + z$ 全部微變量。

解:

根據定義 $dw = \dfrac{\partial w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz$ ，

對 $w = e^x \cos y + z$ 的全部微變量爲

$$e^x \cos y dx - e^x \sin y dy + dz$$ 。

# 可微性

Differentiability

# 可微性

在一個單變數函數中，假設$y = f(x)$ 可微分，我們常用微變量 $dy = f'(x)dx$ 估計 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 的值。

當相似的方法可以用在在一個雙變數函數中，我們稱作此函數可微分。

# 可微性

**定義: 雙變數函數之可微性 (Differentiability)**

有一個雙變數函數 $z = f(x, y)$，如果$\Delta z$可表示為

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad ,$$

其中 $(\Delta x, \Delta y) \to 0$時$\varepsilon_1$ 、$\varepsilon_2 \to 0$ ，

則此函數 $f$ 在點$(x_0, y_0)$可微分。

如果雙變數函數 $f$ 在區域$R$內的每一點皆可微分，則雙變數函數 $f$ 在區間$R$可微分(differentiable)。

# 例題二

證明 $f(x, y) = x^2 + 3y$ 在平面上任何一點皆可微分。

解:

設$z = f(x, y)$ 。在任意點$(x, y)$ ， $z$的變化量為

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad \text{Increment of } z \\ &= (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y) \\ &= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta y\end{aligned}$$

# 例題二

cont'd

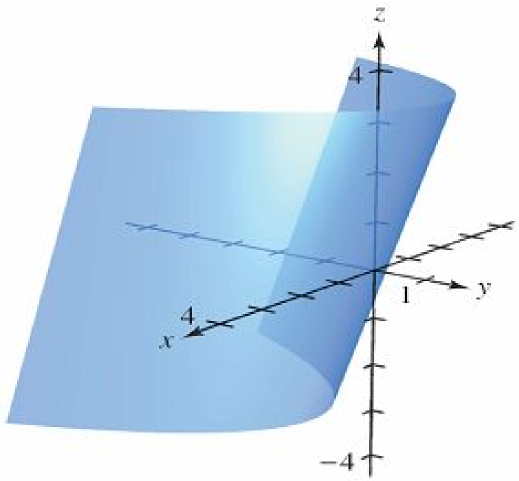
$= 2x(\Delta x) + 3(\Delta y) + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y)$

$= f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$，

其中 $\varepsilon_1 = \Delta x$ 、 $\varepsilon_2 = 0$。

當 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ 的時候 ， $\varepsilon_1 \to 0$ 、 $\varepsilon_2 \to 0$ 。

所以函數在平面上任何點都可微分。



# 練習二

證明 $f(x, y) = 2x^2 - 4y + 3$在平面上任何一點皆可微分。

# 練習二

證明 $f(x, y) = 2x^2 - 4y + 3$在平面上任何一點皆可微分。

解:

設$z = f(x, y)$ 。在任意點$(x, y)$ ， $z$的變化量為

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\
&= 2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 4(y + \Delta y) + 3 - (2x^2 - 4y + 3) \\
&= 4x\Delta x - 4\Delta y + 2\,\Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y) \\
&= f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,
\end{aligned}
$$

其中 $\varepsilon_1 = 2\Delta x$ 、 $\varepsilon_2 = 0$。

# 練習二

其中 $\varepsilon_1 = 2\Delta x$ 、 $\varepsilon_2 = 0$。

當 $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ 的時候 ， $\varepsilon_1 \to 0$ 、 $\varepsilon_2 \to 0$ 。

所以函數在平面上任何點都可微分。

# 可微性

**定理13.4 可微性之充分條件**

**(Sufficient Condition for Differentiability)**

如果一個雙變數函數 $z = f(x, y)$ 的偏微分 $f_x$ 和 $f_y$ 在開區域 (open region) $R$ 具有連續性，則函數 $f$ 在此區域 $R$ 可微分。

# 用微變量估計

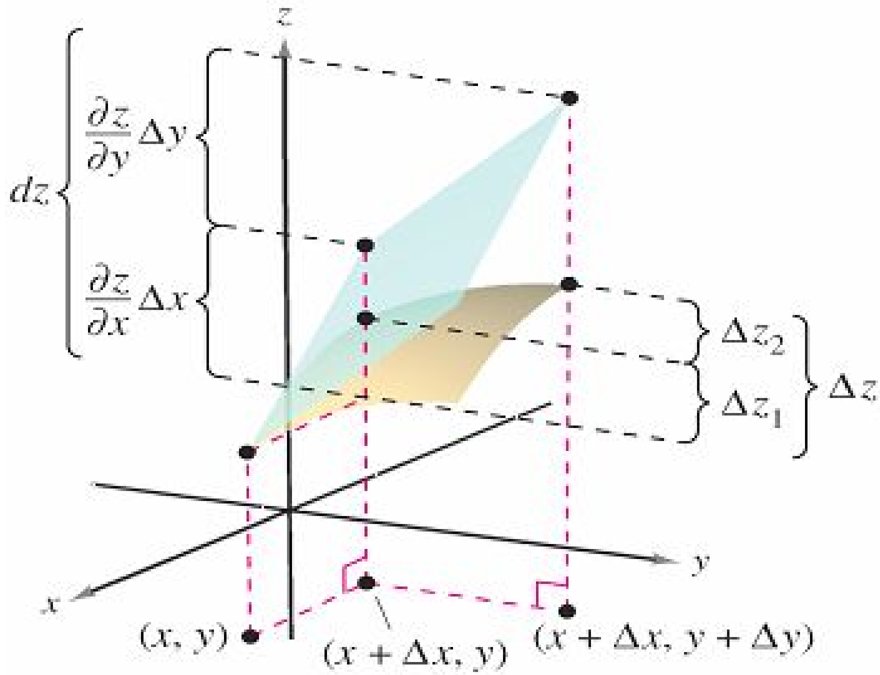
Approximation by Differentials

# 用微變量估計

在前面的定義中，我們知道選擇 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$非常靠近 $(x, y)$ ，會使得 $\varepsilon_1\Delta x$ 和 $\varepsilon_2\Delta y$不顯著，以致不會影響z的改變量。

也就是說，如果$\Delta x$與$\Delta y$很小，我們可以這樣估計，即$\Delta z \approx dz$。而

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$




The exact change in $z$ is $\Delta z$. This change can be approximated by the differential $dz$.

# 用微變量估計

而在幾何上，此時即可用以代表一個曲面(雙變數函數)的切平面在點$(x, y, f(x, y))$上的高度變化量的近似值(z軸變化量的近似值)。

此近似值又稱為線性估計(Linear Approximation)

# 例題三

使用微變量$dz$估計 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 從點 ( 1 , 1 ) 移到 點 ( 1.01 , 0.97 ) 時的變化量，並且比較此估計與實際變化量。

解:

令 $(x, y) = (1, 1)$ 且 $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1.01, 0.97)$ ，

所以 $dx = \Delta x = 0.01$ 與 $dy = \Delta y = -0.03$。

# 例題三

$\Delta z$ 可以用 $dz$估計，也就是

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Delta x + \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\Delta y.$$

將 $x = 1$ 跟 $y = 1$ 代入，得

$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}}(0.01) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-0.03)$$

$$= \frac{0.02}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}\,(0.01) \approx 0.0141.$$

# 例題三

cont'd

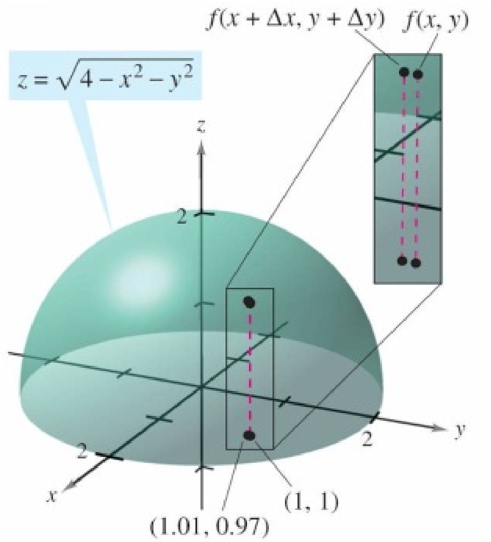
而實際上的改變量是

$$\Delta z = f(1.01, 0.97) - f(1, 1)$$

$$= \sqrt{4 - (1.01)^2 - (0.97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2}$$

$$\approx 0.0137。$$

圖13.36說明實際變化與微分的差別。




As $(x, y)$ moves from (1, 1) to the point (1.01, 0.97), the value of $f(x, y)$ changes by about 0.0137.

**Figure 13.36**

## *練習三*

使用微變量$dz$估計 $z = xy$ 從點 ( 1 , 2 ) 移到 ( 1.05 , 2.1 ) 時的變化量，並且比較此估計與實際變化量。

解:

# 練習三

使用微變量$dz$估計 $z = xy$ 從點 ( 1 , 2 ) 移到 ( 1.05 , 2.1 ) 時的變化量，並且比較此估計與實際變化量。

解:

令 $(x, y) = (1, 2)$ 且$(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1.05, 2.1)$ ，

所以 $dx = \Delta x = 0.05$ 且 $dy = \Delta y = 0.1$。

# 練習三

$\Delta z$ 可以用 $dz$估計，也就是

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$
$$= y\Delta x + x\Delta y \text{。}$$

將 $x = 1$ 與 $y = 2$ 代入，得

$$\Delta z \approx 2(0.05) + 1(0.1) = 0.2 \text{。}$$

而實際上的改變量是

$\Delta z = f(1.05, 2.1) - f(1, 2) = (1.05)(2.1) - (2)(1) = 0.205$。

# 用微變量估計

一個三變數函數 $w = f(x, y, z)$ ，如果

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

可以寫成

$$\Delta w = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z，$$

其中當 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \to (0, 0, 0)$時， $\varepsilon_1$、$\varepsilon_2$、$\varepsilon_3 \to 0$，

則三變數函數 $w = f(x, y, z)$ 在點 $(x, y, z)$可微分 (differentiable) 。

# 練習四

長方體的每邊測量誤差爲±0.1公釐，測出來的長寬高分別爲50、20、15公分。 使用*dV*估計因爲測量誤差造成的可能傳播誤差與長方體體積的相對誤差。

解:

長方體體積$V=xyz$，其中$xyz$分別代表長寬高。

可能傳播誤差可被估計爲

$$
\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \\
&= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.
\end{aligned}
$$

# 練習四

因爲一公分等於十公釐，$dx=dy=dZ=\pm 0.01$。

所以$dV = (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (20)(50)(\pm 0.01)$

$= (300)(\pm 0.01) + (750)(\pm 0.01) + (1000)(\pm 0.01)$

$= \pm 20.5$立方公分。

實際體積是

$V = (50)(20)(15)=15000$。

長方體體積的相對誤差是

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15000} \approx 0.14\%$$ 。

# 用微變量估計

**定理13.5 可微性推出連續性**

**(Differentiability Implies Continuity)**

如果一個雙變數函數在點$(x_0, y_0)$ 可微分(Differentiable)，則雙變數函數在點$(x_0, y_0)$連續(Continuous)。

# 例題五

給一個雙變數函數

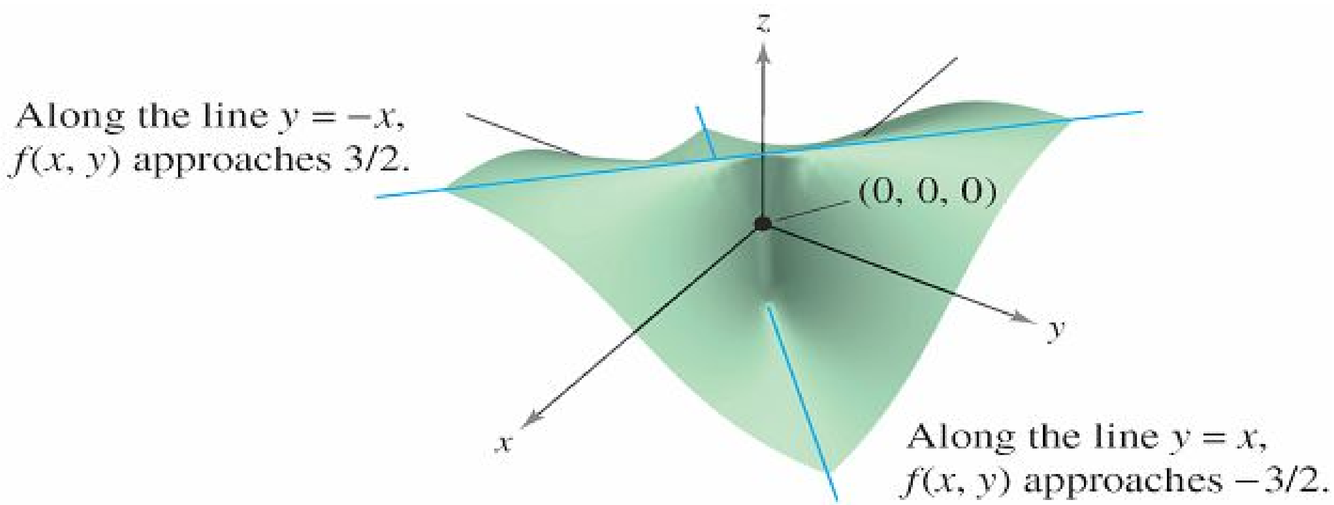
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-3xy}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

證明$f_x(0, 0)$和 $f_y(0, 0)$ 都存在，但在點(0, 0)不可微分。

# *例題五*

可以根據函數在點 (0,0) 不連續來說明它在點 (0,0)不可微分。

要確認函數 $f(x, y)$在點(0,0)不連續，可以藉由兩條不同路徑趨近於(0,0) 。



# 例題五

cont'd

沿著直線$y = x$ 時，它的極限值爲

$$\lim_{(x,\, x)\to(0,\, 0)} f(x, y) = \lim_{(x,\, x)\to(0,\, 0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

從另一條直線 $y = -x$ 時，我們可以得到

$$\lim_{(x,\, -x)\to(0,\, 0)} f(x, y) = \lim_{(x,\, -x)\to(0,\, 0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

所以 在$(x, y) \to (0, 0)$ 的時候， $f(x, y)$的極限值不存在。

所以在點(0,0)不連續。

根據定理13.5，函數(0,0)不連續；所以無法在點(0, 0)微分。

# 例題五

cont'd

藉由偏微分的定義可以得到

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

和

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

所以在點(0, 0)的偏微分存在。

# 練習五

給一個雙變數函數

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

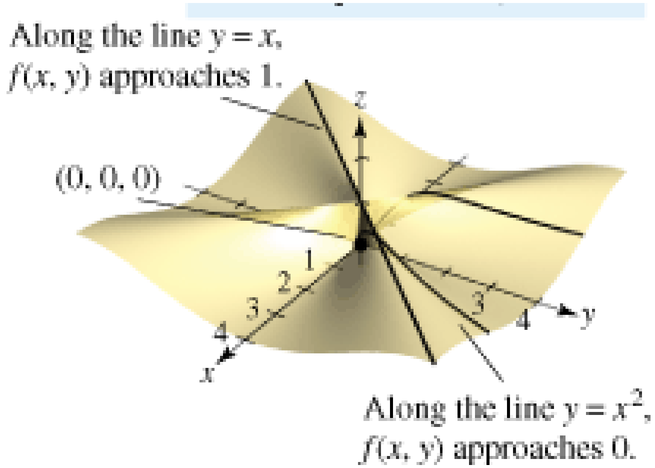
證明$f_x(0, 0)$和 $f_y(0, 0)$ 都存在，但在點(0, 0)不可微分。

# 練習五

我們一樣從函數的不連續著手，從兩條不同的路徑趨近於(0, 0) 。

當沿著直線 $y = x$時，它的極限值為

$$\lim_{(x, x)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, x)\to(0, 0)} \frac{2x^4}{2x^4} = 1$$




當沿著另一條直線$y = x^2$時，極限值為

$$\lim_{(x, x^2)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, x^2)\to(0, 0)} \frac{2x^6}{x^4 + y^8} = \lim_{(x, x^2)\to(0, 0)} \frac{2x^2}{1 + x^4} = 0$$

# 練習五

藉由偏微分的定義可以得到

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

跟

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0.$$

所以在點(0, 0)的偏微分存在。