第二章　矩陣與矩陣基本運算

最後更新日期：2009 年 2 月 22 日

本章介紹矩陣與向量的定義，以及矩陣的基本運算，包括：相等、轉置、加法、純量積、向量積。最後，介紹向量運算在幾何空間之運算的延伸，含內積與外積。本章的目錄安排如下。

2.1　矩陣與向量

矩陣（*matrices*）是一群排成矩形的數值。雖然這些數值可以是複數，本書只討論實數矩陣。以下是幾個矩陣的例子：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&2\\9&6\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&5&3\\4&7&8\end{bmatrix} \tag{2-1}$$

如這些例子所示，習慣上，我們會以中括號將矩陣的數值括住，並以粗體的大寫羅馬字母（如 $\mathbf{A}$ 、$\mathbf{B}$ 、$\mathbf{C}$ 等）來為矩陣命名。必要的時候，我們會在矩陣名稱以『列數×行數』下標來註記該矩陣的大小。例如，$\mathbf{A}_{3\times 2}$ 表示 $\mathbf{A}$ 是一個 3 列、2 行的矩陣。

本書以 $\mathbf{M}_{m\times n}$ 表示所有 m 列、n 行的矩陣所成的集合。(2-1)中的矩陣可以標示為

$$\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{3\times 2},\qquad \mathbf{B}\in\mathbf{M}_{2\times 2},\qquad \mathbf{C}\in\mathbf{M}_{2\times 3}$$

有些課本用 $\mathbf{M}_{m,n}$ 或 $\mathbf{M}_{mn}$ 來表示矩陣集合。這只是習慣問題，知道有這回事就可以了。

矩陣內的個別數值稱爲該矩陣的**元素**（*entry*）。我們以小寫羅馬字母來表示矩陣內的元素，並以『 列數 行數 』的下標來標示這個元素的位置。例如，a_{23} 爲 **A** 矩陣之第 2 列、第 3 行元素。再檢視(2-1)中的矩陣，以下是元素的標示例子

$$a_{31} = 3, \qquad b_{22} = 6, \qquad c_{23} = 8$$

綜合以上矩陣、元素的標示法，我們應該可以接受下列矩陣符號：

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{3\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 2}$$

題外話（前列後行）　關於矩陣元素標示法的下標『 列數 行數 』有一些小學問。中文習慣稱爲『行列』，但是在線性代數的世界裡，這兩者是倒過來排的。從現在開始，請牢牢記住『**前列後行**』的口訣。

另外，有關列、行的意思，以中文的日常用語來說似乎沒有統一。在這裡列、行就是以下的定義：

列	*row*	橫向	東西向	$\cdots$
行	*column*	縱向	南北向	$\vdots$

搞錯方向，會很離譜的。

向量（*vectors*）爲只有一列或一行的矩陣。以下是幾個向量的例子：

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}$$

成行的稱爲**行向量**（*column vectors*），而成一列就稱爲**行向量**（*column vectors*）。如這幾個例子所顯示的，我們以粗體的小寫羅馬字體來標示列向量，如 **a** 、**b** ；而在行向量加上『 T 』或『 ' 』上標來表示列向量，如 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ 或 $\mathbf{b}'$ 。

題外話（行向量為主） 我們以沒有上標的字體$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$來標示行向量，就已經表明本書以行向量爲主。也就是說，如果沒有特別說明的話，向量指的是行向量。所以呢，在文字間出現$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$的寫法不要覺得太奇怪。有時，在不會有誤解的場合，我們會偷懶，省略成$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\end{bmatrix}$或$\mathbf{b}=(2,3,5)$，但是它指的還是行向量。最後要提醒，雖然大部分學者都以行向量爲主，讀文件時，我們還是先作確認，比較不會有誤解。 ■

有時我們會將一個矩陣視爲幾個矩陣的組合，如

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:c}2 & 4\\ \hdashline 5 & 7\\ 3 & 8\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{A}_{11}=[2],\ \mathbf{A}_{12}=[4],\ \mathbf{A}_{21}=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{22}=\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}$$

這稱爲**矩陣分割**（*partition for matrices*），分割後較小的矩陣稱爲**子矩陣**（*sub-matrices*）。一個矩陣會有很多種不同的分割方式，如

$$\mathbf{B}=\left[\begin{array}{c:cc}2 & 4 & 0\\ \hdashline 5 & 7 & 1\\ 3 & 8 & 6\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}2 & 4 & 0\\ \hdashline 5 & 7 & 1\\ \hdashline 3 & 8 & 6\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c:c}2 & 4 & 0\\ 5 & 7 & 1\\ 3 & 8 & 6\end{array}\right]$$

我們會依據目的來選擇特定的分割方式。上面例子的第二個與第三個分個比較特殊，前者所有子矩陣都是列向量，稱爲**列分割**；而以行向量爲子矩陣者稱爲**行分割**。習慣上，我們會以$\mathbf{a}_j$或$\mathbf{a}_{\bullet j}$來表示$\mathbf{A}$矩陣行分割後的第j行向量；相同的，以$\mathbf{a}^i$或$\mathbf{a}_{i\bullet}$表示列分割後的列向量。例如

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:c}2 & 4\\ 5 & 7\\ 3 & 8\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_{\bullet 1} & \mathbf{a}_{\bullet 2}\end{bmatrix}\quad \text{其中}\quad \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}2\\5\\3\end{bmatrix},\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}4\\7\\8\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ \hdashline 5 & 7\\ \hdashline 3 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \mathbf{a}^2\\ \mathbf{a}^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_{1.}\\ \mathbf{a}_{2.}\\ \mathbf{a}_{3.}\end{bmatrix} \quad \text{其中} \quad \mathbf{a}^1=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}, \mathbf{a}^2=\begin{bmatrix}5 & 7\end{bmatrix}, \mathbf{a}^3=\begin{bmatrix}3 & 8\end{bmatrix}$$

2.2 矩陣轉置與加法

本節介紹矩陣相等（*equal*）、轉置（*transpose*）、加法（*addition*）、與減法（*subtraction*）運算。這幾個運算非常單純，看個例子就可以瞭解。令 $\mathbf{A}$ 、$\mathbf{B}$ 矩陣如下

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ 3 & 8\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

則

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}=\left[c_{ij}=a_{ij}\right]=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ 3 & 8\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\left[d_{ij}=b_{ji}\right]=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\left[e_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\right]=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ 3 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+3 & 4+5\\ 5+4 & 7+1\\ 3+2 & 8+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 9\\ 9 & 8\\ 5 & 12\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{A}-\mathbf{B}=\left[f_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\right]=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ 3 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-3 & 4-5\\ 5-4 & 7-1\\ 3-2 & 8-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 6\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

其中，轉置是純量運算所沒有的。我們以在矩陣名稱加上『T』或『'』上標的方式來表示作轉置運算後的結果。對應列向量的符號，$\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ 、$\mathbf{b}'$ ，當然也可以解讀爲『列向量是行向量轉置的結果』。

題外話（純量運算與向量運算） 這節所介紹以矩陣爲運算單位的運算稱爲向量運算（*vector operation*），而傳統只涉及一個實數的稱爲純量運算（*scalar operation*）。我也搞不清楚爲什麼這樣講。 ■

請注意，代數的基本運算裡頭並不包含減法。減法是在引進**加法單位元素**（*additive identity*）與**加法反元素**（*additive inverse*）的概念後，由加法衍生出來的運算。以下我們先寫出相等、轉置、加法、加法單位元素、與加法反元素的正式定義。

定義　（相等）

令 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ，若且唯若 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ ，則 $a_{ij}=b_{ij},\ \forall\, i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$ 。

（Let $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{m\times n}$, if and only if $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, then $a_{ij}=b_{ij},\ \forall\, i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$.）■

定義　（轉置）

令 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{m\times n},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{n\times m}$ ，若且唯若 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ ，則 $a_{ij}=b_{ji},\ \forall\, i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$ 。■

定義　（矩陣加法）

令 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ，若且唯若 $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ，則 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \forall\, i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$ 。■

定義　（加法單位元素）

令 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ，若且唯若 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{A}$ ，則稱 $\mathbf{B}$ 爲 $\mathbf{A}$ 之**加法單位元素**。■

定義　（加法反元素）

令 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ，若且唯若 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{0}$ ，則 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 互爲**加法反元素**，記爲 $\mathbf{B}=-\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}=-\mathbf{B}$ 。■

題外話（若且唯若）　　在定義裡頭有**若且唯若**（*if and only if*）的字眼，這是邏輯上的**充要條件**，定義都是這樣寫的。以下簡單解釋邏輯關係。

在邏輯學裡，有**充分條件**（*sufficient condition*）與**必要條件**（*necessary condition*）的說法。又邏輯推理一定涉及兩個陳述：**前提**（*proposition*，*premise*）與**結論**（*conclusion*，*assertion*）。令 p 、 q 爲可判定真僞的**陳述**（*statement*），下表的各種說法都與『若 p 則 q 』這個邏輯陳述等價：

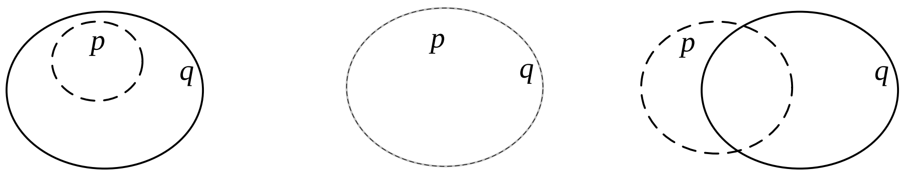
若 p 則 q	p	前提	充分條件	小集合	$p\rightarrow q$	$\{x\mid p \text{ 成立}\}\subseteq\{x\mid q \text{ 成立}\}$
	q	結論	必要條件	大集合	$q\leftarrow p$	

充分條件與必要條件（前提與結論）是相對的，因此，我們不會只說『p是充分條件』，應該說『p是q的充分條件』才完整。當然，『p是q的充分條件』、『q是p的必要條件』、『p是q的前提』、以及『q是p的結論』等四個陳述的內容完全相同（都是$p \to q$）。

若充分條件與必要條件同時成立（$p \to q$且$q \to p$），則稱爲p與q互爲**充要條件**（*necessary and sufficient condition*）。下表是充要條件的四種表示方式：

若且唯若p則q	$p \leftrightarrow q$	p,q互爲充要條件	$\{x \mid p \text{ 成立}\} = \{x \mid q \text{ 成立}\}$

以下集合**范氏圖**（*Venn diagram*）也可以表示p、q兩陳述之邏輯關係：



$p \to q$　　　$p \leftrightarrow q$　　　沒有邏輯關係

定義是用另一種方式來描述一個概念，兩者在意義上必須完全相等，所以會出現若且唯若的字眼。正因爲如此，如果在定義中看到『若…，則…』的敘述，不要懷疑，那絕對是筆者偷懶的結果。 ■

題外話（定義）　在單元開始的時候，常常會有一些定義，一般是說明某個名詞是什麼意思。定義是數學理論的起點，要特別注意，尤其是我們需要作證明的場合。

例如以下兩個矩陣，$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$，如何證明$\mathbf{B}$是$\mathbf{A}$的轉置（$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$）？

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

仔細看轉置的定義就知道該怎麼證明了。證明過程大致如下：

因爲$\overbrace{a_{11} = b_{11} = 3,\ a_{12} = b_{21} = 4, \ldots, a_{23} = b_{32} = 4}^{a_{ij} = b_{ji},\ 1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3}$，所以$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}$。

這不就是把轉置的定義照抄一遍。 ■

在實數加法運算的世界，0 是（加法）單位元素，任何實數加上單位元素後其數值沒有改變：$a+0=a, a\in R$。任意實數 $a\in R$ 的加法反元素標記爲 $-a$，而 a 與其加法反元素作加法運算的結果應爲加法單位元素：$a+(-a)=0, a\in R$。在矩陣加法運算的世界，加法單位元素是**零矩陣**（*zero matrices*）：所有元素都是 0 的矩陣，標記爲 $\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{0}_{m\times n}$；任意矩陣 $\mathbf{A}$ 的加法反元素標記爲 $-\mathbf{A}$，且 $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$。

由加法反元素的定義，我們知道『－』是表示加法反元素的符號，而不是一個運算符號。也就是說，『減法』是『加上反元素』的替代性說法：$\mathbf{A}+(-\mathbf{B})=\mathbf{A}-\mathbf{B}$。

例題 2-1　（加法單位元素）

就下列矩陣

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}4\\1\\7\end{bmatrix}$$

請寫其加法單位元素。

【解答】

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}$ 的加法單位元素爲 $\mathbf{0}_{3\times 2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$，驗證：$\mathbf{A}+\mathbf{0}_{3\times 2}=\mathbf{A}$。

$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}4\\1\\7\end{bmatrix}$ 的加法單位元素爲 $\mathbf{0}_{3\times 1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，驗證：$\mathbf{C}+\mathbf{0}_{3\times 1}=\mathbf{C}$。

■

例題 2-2　（加法反元素）

就下列矩陣

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}$$

請寫其加法反元素。

【解答】

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix} \text{ 的加法反元素為 } -\mathbf{A}=-\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-4\\-5&-7\\-3&-8\end{bmatrix}，$$

驗證如下

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&-4\\-5&-7\\-3&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}。$$

■

題外話（運算與矩陣大小）　仔細檢視矩陣加法的定義，我們會發現只有相同大小的矩陣才能作加法運算。事實上，相等、單位元素、反元素也都有相同大小元素的限制。在矩陣運算的世界，只有特定大小的矩陣才能作某些特定運算；要隨時提醒自己：這是基本常識，弄錯了會很尷尬。所以呢，看到 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ ，馬上知道三個矩陣有相同大小；又看到 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}$ ，兩矩陣的大小關係心裡應有數。 ■

2.3 矩陣乘法

矩陣有兩種乘法，第一種與實數乘法類似，是加法運算的延續，稱為**純量積**（*scalar multiplication*）。例如

$$\begin{bmatrix}3&2\\9&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\\9&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\\9&6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3&2\\9&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times3&3\times2\\3\times9&3\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&6\\27&18\end{bmatrix}$$

第二種矩陣乘法的定義很奇怪，可以想像成要表達線性函數的天才設計，如

$$2x+3y=\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \qquad \text{其中}\quad \mathbf{a}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

以及

$$\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 5x+7y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 5x+7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

這種矩陣乘法稱爲**向量積**（*vector multiplication*）。我們常常只說矩陣乘法，沒有指明是純量積或向量積，這時需要從參與運算的元件（乘數與被乘數）來判斷：其中有一個是實數者爲純量積，兩者階矩陣或向量者爲向量積。

矩陣向量積的作法也有『**前列後行**』的原則，前面矩陣取列向量，後面矩陣取行向量，列、行向量乘積的結果是一個實數（純量）。所以，矩陣向量積的結果，應該是一個列數與前矩陣列數相同、行數與後矩陣行數相同的矩陣：$\mathbf{A}_{m\times p}\mathbf{B}_{p\times n}=\mathbf{C}_{m\times n}$。以下是兩矩陣向量積的例子

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 28 \\ 29 & 31 \end{bmatrix}$$

定義　（矩陣純量積）

令 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{m\times n}, c\in R$，若且唯若 $c\mathbf{A}=\mathbf{B}$，則 $b_{ij}=c\times a_{ij}, \forall i,j$。 ■

定義　（矩陣向量積）

令 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{m\times p},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{p\times n},\mathbf{C}\in\mathbf{M}_{m\times n}$，若且唯若 $\mathbf{AB}=\mathbf{C}$，則 $c_{ik}=\sum_{j=1,\ldots,p} a_{ij}b_{jk}, \forall i,k$。 ■

題外話（向量乘法）　這裡定義的是矩陣（含向量）乘法，以下是矩陣乘法的可能組合情況：

$$c\mathbf{A},\quad c\mathbf{a},\quad \mathbf{AB},\quad \mathbf{Ab},\quad \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A},\quad \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b},\quad \mathbf{ba}^{\mathrm{T}},\quad c\mathbf{AB},\quad c\mathbf{Ab},\quad c\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{A},$$

我們在本章最後一節還會介紹兩個只定義於向量的乘法，稱爲**內積**（*inner product*）與**外積**（*outer product*），其符號分別爲 $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}$ 與 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 。這個時候，我們特別稱這些向量爲**空間向量**（*vector space*），以示區別。空間向量不能與矩陣作運算，請參閱以下例子：

合法運算：$c\mathbf{a}\bullet\mathbf{b},\quad \mathbf{a}\times c\mathbf{b},\quad c\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b},\quad \mathbf{b}c\mathbf{a}^{\mathrm{T}}$

不合法運算：$\mathbf{a}\bullet\mathbf{B},\quad \mathbf{A}\times\mathbf{b},\quad \mathbf{A}\bullet\mathbf{b},\quad \mathbf{b}\times\mathbf{A},\quad \mathbf{A}\bullet\mathbf{B},\quad \mathbf{B}\times\mathbf{A}$

基本原則是，只要出現『 • 』或『 × 』，就不能有矩陣。 ■

例題 2-3　以下是列向量乘上行向量的作法

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times4+2\times5+3\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32\end{bmatrix}=32$$

前列向量與後行向量需要有相同的元素個數，相對位置的元素兩兩相乘後再加起來即爲其結果。結果爲一個純量。 ■

例題 2-4　以下是兩列之矩陣乘上行向量的作法

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times4+2\times5+3\times6\\3\times4+1\times5+2\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32\\29\end{bmatrix}$$

結果爲一個兩個元素的行向量。 ■

例題 2-5　以下是列向量乘上兩行之矩陣的作法

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1\times 4 + 2\times 5 + 3\times 6 & 1\times 6 + 2\times 5 + 3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 28 \end{bmatrix}
$$

結果爲一個兩個元素的列向量。■

例題 2-6　以下是兩個矩陣相乘的作法

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1\times 4 + 2\times 5 + 3\times 6 & 1\times 6 + 2\times 5 + 3\times 4 \\ 3\times 4 + 1\times 5 + 2\times 6 & 3\times 6 + 1\times 5 + 2\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 28 \\ 29 & 31 \end{bmatrix}
$$

結果爲一個 2×2 的矩陣。■

題外話（矩陣向量積與矩陣大小）　並不是任意兩個矩陣都可以相乘。可以作向量積的條件爲:『前矩陣的行數與後矩陣的列數相等』。另外，我們強調以下『前列後行』

$$
\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\times 4 + 5\times 3 = 23
$$

爲矩陣向量積的基本型式，並不意味著行向量不能乘上列向量，如

$$
\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2][4] & [2][3] \\ [5][4] & [5][3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 4 & 2\times 3 \\ 5\times 4 & 5\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 20 & 15 \end{bmatrix}
$$

這則題外話要多留意，很多同學在這裡搞模糊而吃虧。■

題外話（向量積的交換率不成立 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ ） 不同於實數乘法或矩陣純量積，在矩陣向量積乘法的世界裡，交換率並不成立： $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ 。請檢驗以下例子。令

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

則

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 8 \\ 36 & 7 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ 9 & -31 \end{bmatrix}$$

很明顯的， $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ 。 ■

矩陣乘法單位元素(*multiplicative identity*)是一個特殊矩陣，也稱為**單位矩陣**(*identity matrix*)，標記為 $\mathbf{I}_{n\times n}$ 或 $\mathbf{I}_n$ 或 $\mathbf{I}$ ，任何矩陣乘上單位矩陣後的結果還是原矩陣。以下是一個單位矩陣的例子：

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

也就是說，單位矩陣是列數與行數相等的方陣，除對角元素皆為 1 外，其它元素都是零。

定義 （矩陣乘法單位元素）

令 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m\times m}, \mathbf{C} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ ，若 $\mathbf{BA} = \mathbf{A}$ 或 $\mathbf{AC} = \mathbf{A}$ ，則稱 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 為 $\mathbf{A}$ 之**乘法單位元素**。 ■

題外話（矩陣乘法單位元素） 因為矩陣乘法的特殊性（前乘與後乘不同），一個矩陣的乘法反元素可能會有兩個。

例如以下矩陣：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix},\qquad \mathbf{I}_3=\mathbf{I}_{3\times3}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{I}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

驗證如下

$$\mathbf{I}_3\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}=\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_2=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}=\mathbf{A}$$

結果 $\mathbf{I}_3$ 與 $\mathbf{I}_2$ 都是 $\mathbf{A}$ 的乘法單位元素。■

矩陣乘法反元素（*multiplicative inverse*）是附屬在乘法單位元素上的產物。若兩方陣相乘的結果等於乘法單位元素（單位矩陣），則這兩個矩陣互爲對方的乘法反元素。矩陣乘法反元素又稱爲**反矩陣**（*inverse matrices*）。我們在矩陣上標加上『-1』來標示其反矩陣，如 $\mathbf{A}^{-1}$、$\mathbf{B}^{-1}$。以下是一個反矩陣的例子

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix},\qquad \mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$$

驗證如下

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$$

有時候，我們會將反矩陣符號『-1』視爲一種矩陣運算（如同轉置運算的『T』）。爲了避免混淆，反矩陣運算也寫成函數的形式：$inv(\mathbf{A})=\mathbf{A}^{-1}$。

定義　（矩陣乘法反元素）

令 $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{n\times n}$，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{I}$，則 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 互爲**乘法反元素**，記爲 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$ 或 $\mathbf{A}=\mathbf{B}^{-1}$。■

例題 2-7　（反矩陣）

以下矩陣

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\alpha & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & -7\\ \beta & 5\end{bmatrix}$$

若 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 互爲反矩陣，則 α 、 β 其中値各爲何？

【解答】

$\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 互爲反矩陣，故

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\alpha & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -7\\ \beta & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases}3\alpha+7\beta=1\\ -7\alpha+35=0\\ 6+3\beta=0\\ -14+15=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \alpha=5,\quad \beta=-2$$

■

題外話（一般反矩陣）　在正式的定義裡頭，只有方陣才有反矩陣。但是，如果我們放寬一定要方陣的限制，而只需滿足乘積爲單位矩陣的條件

$$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$$

則稱 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 互爲**一般反矩陣**（*generalized inverse matrices*）。例如下列矩陣

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

驗證如下

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$$

故 $\mathbf{B}$ 爲 $\mathbf{A}$ 的一般反矩陣（**左反矩陣**）， $\mathbf{A}$ 爲 $\mathbf{B}$ 的**右反矩陣**。 ■

找出一個方陣的反矩陣（或證實反矩陣不存在），這是初學線性代數者的重要基本能力；畢竟，找出反矩陣後，才可以作矩陣的除法運算。我們會有專章討論反矩陣的性

質以及其求解方法。至於**一般反矩陣**，因涉及較進階的觀念，大部分初學者不會碰觸這個課題。

2.4　矩陣運算的性質

我們已經介紹五種矩陣運算：轉置、加（減）法、純量積、向量積、反矩陣。如同實數的運算，在矩陣運算的世界，我們也在意**交換律**（*commutative law*）、**結合律**（*associative law*）、**分配律**（*distributive law*）等性質。以下條列這些運算的性質，其中三個地方以粗體字標示該性質在矩陣世界不成立。

矩陣加法相關性質（ $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbf{M}_{m,n}$ ）

加法交換律： $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

加法結合率： $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

加法單位元素： $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$ （零矩陣）

純量積相關性質（ $c,d\in R,\ \mathbf{A}\in\mathbf{M}_{m,n}$ ）

純量積交換律： $c\mathbf{A}=\mathbf{A}c$

純量積結合律： $cd\mathbf{A}=(cd)\mathbf{A}=c(d\mathbf{A})$

向量積相關性質（ $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{m,n}$， $\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{n,p}$， $\mathbf{C}\in\mathbf{M}_{p,q}$ ）

向量積交換律： $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ （**不成立**） (2-2)

向量積結合律： $\mathbf{ABC}=(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$

乘法單位元素： $\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}$ （單位矩陣）

分配率相關性質（ $c\in R,\ \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{M}_{m,n}$， $\mathbf{C}\in\mathbf{M}_{p,m}$， $\mathbf{D}\in\mathbf{M}_{n,q}$ ）

純量積對加法分配律： $c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$

向量積對加法分配律： $\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{CA}+\mathbf{CB}$

向量積對加法分配律： $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{D}=\mathbf{AD}+\mathbf{BD}$

加法對向量積分配律： $\mathbf{A}+(\mathbf{CB})\neq(\mathbf{A}+\mathbf{C})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ （**不成立**）

轉置相關性質（$c \in R,\ \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m,n},\ \mathbf{C} \in \mathbf{M}_{p,m}$）

轉置對加法：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$

轉置對純量積：$(c\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = c\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

轉置對向量積：$(\mathbf{C}\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ (2-3)

轉置對轉置：$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$

反矩陣相關性質（$c \in R,\ \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{n,n}$）

反矩陣對加法：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ **（不成立）**

反矩陣對純量積：$(c\mathbf{A})^{-1} = \dfrac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$

反矩陣對向量積：$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (2-4)

反矩陣對轉置：$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$

反矩陣對反矩陣：$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$

請特別注意(2-2)向量積交換律不成立，以及(2-3)與(2-4)中，轉置、反矩陣運算後，向量積的前後矩陣需前後調換位置的性質。

$$\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$$
$$(\mathbf{C}\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$$
$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

例題 2-8

令 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m,n},\ \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{n,p}$，試證 $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$。

【證明】

由定義

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \left[c_{ik} = \sum_{j=1,\ldots,n} a_{ij}b_{jk}\right]_{m\times p},\quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}^{\mathrm{T}} = \left[a_{ji}\right]_{n\times m},\quad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \left[b_{jk}\right]_{n\times p}^{\mathrm{T}} = \left[b_{kj}\right]_{p\times n}$$

我們有

$$\begin{cases} (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \left[\sum_{j=1,\dots,n} a_{ij} b_{jk} \right]_{m\times p}^{\mathrm{T}} = \left[\sum_{j=1,\dots,n} a_{ji} b_{kj} \right]_{p\times m} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left[b_{kj} \right]_{p\times n} \left[a_{ji} \right]_{n\times m} = \left[\sum_{j=1,\dots,n} b_{kj} a_{ji} \right]_{p\times m} \end{cases} \Rightarrow \quad (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

得證 $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 。 ■

例題 2-9

令 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{n,n}$ ，試證 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 。

【證明】

由

$$(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

故知 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 爲 $\mathbf{AB}$ 之反矩陣，即 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 。 ■

例題 2-10

令 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m,n}$ ，試證 $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$ 。

【證明】

由定義

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \left(\left[a_{ji} \right]_{n\times m} \right)^{\mathrm{T}} = \left[a_{ij} \right]_{m\times n} = \mathbf{A}$$

得證 $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$ 。 ■

例題 2-11

令 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n,n}$ ，試證 $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$ 且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ 。

【證明】

由

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$$

故知 $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$ 爲 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 之反矩陣，即 $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$ 。

其次，由定義

$$\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$$

得證 $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{A}$ 。 ■

2.5　特殊矩陣

本節介紹一些外觀特殊之矩陣的名稱，稍後也介紹一些有關特殊矩陣的性質。先看以下這些特殊矩陣的例子

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}2&4&3\\0&5&8\\0&0&6\end{bmatrix},\quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}-3&0&0\\7&2&0\\1&-4&5\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}8&0&0\\0&7&0\\0&0&-2\end{bmatrix},\quad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}1&5&4\\5&3&8\\4&8&0\end{bmatrix}$$

上三角矩陣　　　下三角矩陣　　　對角矩陣　　　對稱矩陣

首先，這些矩陣的行數與列數都相等，稱爲**方陣**（*square matrices*）。$\mathbf{U}$ 、$\mathbf{L}$ 、$\mathbf{D}$ 這三個矩陣的元素以對角線分成三部分：對角元素、上半邊元素、下半邊元素，其中 $\mathbf{U}$ 的上半邊才有非零元素，稱爲**上三角矩陣**（*upper triangular matrix*）；$\mathbf{L}$ 則稱爲**下三角矩陣**（*lower triangular matrix*）；而只有對角元素有非零數值的 $\mathbf{D}$ 則稱爲**對角矩陣**（*diagonal matrix*）。對角矩陣標記爲 $diag\left(d_1,d_2,\ldots,d_n\right)$，其中 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 爲對角元素的數值，如 $\mathbf{D}$ 也標示爲

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}8&0&0\\0&7&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=diag\left(8,7,-2\right)$$

最後，矩陣 $\mathbf{S}$ 比較特殊，它的上半邊元素與下半邊元素互相對稱，故 $\mathbf{S}$ 稱爲**對稱矩陣**（*symmetric matrix*）。轉置後不變也是用來定義對稱矩陣的一種方法：$\mathbf{S}^{\mathrm{T}}=\mathbf{S}$ 。

定義　（上三角矩陣）

令 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，若 $a_{ij}=0, i<j$ ，則 $\mathbf{A}$ 爲**上三角矩陣**。 ■

定義　（下三角矩陣）

令 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，若 $a_{ij}=0, i>j$ ，則 $\mathbf{A}$ 爲**下三角矩陣**。 ■

定義　（對角矩陣）

令 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，若 $a_{ij}=0, i\neq j$ ，則 $\mathbf{A}$ 爲**對角矩陣**。 ■

定義　（對稱矩陣）

令 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{n\times n}$ ，若 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$ ，則 $\mathbf{A}$ 爲**對稱矩陣**。 ■

例題 2-12　（對稱矩陣）

令 $\mathbf{A}\in\mathbf{M}_{m\times n}$ ，試證 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ 皆爲對稱矩陣。

【證明】

由

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$
$$\left(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$$

故知 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ 皆爲對稱矩陣。 ■

例題 2-13　（對稱矩陣）

矩陣 $\mathbf{A}$ 如下，計算 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ 。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}$$

【解答】

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&5&3\\4&7&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38&67\\67&129\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&4\\5&7\\3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5&3\\4&7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&38&38\\38&74&71\\38&71&73\end{bmatrix}$$

■

對角矩陣在矩陣乘法上有兩個非常有用的性質。第一個性質與矩陣的次方有關，還是先看例子，令

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

則

$$\mathbf{D}^2=\mathbf{DD}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^2&0&0\\0&5^2&0\\0&0&3^2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^3=\mathbf{DDD}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^3&0&0\\0&5^3&0\\0&0&3^3\end{bmatrix}$$

對角矩陣的次方很容易計算，只要各對角元素作相同運算就可以了。第二個性質則是關於如何影響被乘矩陣。以上對角矩陣 $\mathbf{D}=diag(2,5,3)$ 可以解讀爲對單位矩陣的各列分別乘上 2、5、3 倍，若將 **D** 乘上以下矩陣 **A** ：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

則

$$\mathbf{DA}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\\2&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times1&2\times4&2\times5\\5\times2&5\times3&5\times1\\3\times1&3\times2&3\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8&10\\10&15&5\\3&6&9\end{bmatrix}$$

DA 的結果正是將 **A** 矩陣的各列分別乘上 2、5、3 倍。但如果將 **D** 乘在 **A** 的後面，則

$$\mathbf{AD}=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2&4\times5&5\times3\\2\times2&3\times5&1\times3\\1\times2&2\times5&3\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&20&15\\4&15&3\\2&10&9\end{bmatrix}$$

現在，是將 **A** 矩陣的各**行**分別乘上 2、5、3 倍了！還是『**前列後行**』四字箴言。

定理 2-1 (對角矩陣的次方)

令 $k \in R, \mathbf{D} = diag\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in \mathbf{M}_{n\times n}$，則 $\mathbf{D}^k = diag\left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right)$。 ■

定理 2-2

令 $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{n\times m}$ $\mathbf{D} = diag\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) \in \mathbf{M}_{m\times m}$，則

$$\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} x_1\mathbf{A}_{1\bullet} \\ x_2\mathbf{A}_{2\bullet} \\ \vdots \\ x_m\mathbf{A}_{m\bullet} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{BD} = \begin{bmatrix} x_1\mathbf{B}_{\bullet 1} & x_2\mathbf{B}_{\bullet 2} & \cdots & x_n\mathbf{B}_{\bullet n} \end{bmatrix}$$

其中，$\mathbf{A}_{i\bullet}$ 爲 $\mathbf{A}$ 之第 i 列向量，$\mathbf{B}_{\bullet j}$ 爲 $\mathbf{B}$ 之第 j 行向量。 ■

2.6 空間向量的運算

空間向量（*space vector*）討論向量運算應用於幾何空間的性質，這是代數（*algebra*）與幾何（*geometry*）連結的基礎。一個 n 維空間上的 x 點可以表示爲

$$\mathbf{x} = x\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in R^n$$

其中 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 爲各座標軸上的數值，這時向量 $\mathbf{x}$ 是 x 點的座標。一個向量 $\mathbf{u}$ 也可以表示空間上兩點間的方向

$$\mathbf{u} = \overline{xy} = \left(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n\right) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$$

這時我們也會在向量符號上加箭號，$\vec{\mathbf{u}}$ 或 $\vec{u}$，來表示方向。事實上，如果將向量的起點放在原點上，則上面討論的點座標 $\mathbf{x}$ 與兩點間向量 $\mathbf{u}$ 就沒有兩樣了。

向量是矩陣的特例，因此所有矩陣的運算都適用於空間向量，包括：加法、純量積。空間向量不區分行向量、列向量，故不需要轉置運算，當然，反矩陣也沒有必要。空間向量的乘法運算有二，原矩陣向量積的運算方式稱爲內積（*inner product*），記爲 $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$，新增的向量積運算稱爲外積（*outer product*）標記爲 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$。參考以下例子。令

$$\mathbf{u} = \left(2,4,3\right), \quad \mathbf{v} = \left(3,5,2\right)$$

則

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=(2,4,3)\bullet(3,5,2)=2\times3+4\times5+3\times2=32$$
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(2,4,3)\times(3,5,2)=(-7,5,-2)$$

請留意，內積運算的結果是一個純量（實數），而外積運算的結果是一個向量。另外，外積的運算規則有點複雜，我們另有介紹。

關於空間向量，我們有興趣知道事項包括：向量的長度，向量間的夾角，兩向量所夾面積，三向量所夾體積等。

例題 2-14　（空間向量）

以下都是合法的空間向量表示法：

$$\bar{x}=(2,-3,4),\quad \bar{y}=\begin{bmatrix}6\\1\\4\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=(1,3,-2)$$

其中 $\bar{x}$ 為三維空間，$\mathbf{u}$ 二維空間（平面）上的向量。 ■

例題 2-15　（兩向量為成之三角形）

令 $x(1,2,3)$ 、 $y(3,6,4)$ 為空間上的兩點，則以 x 為起點 y 為端點的向量為

$$\overline{xy}=\bar{y}-\bar{x}=(3,6,4)-(1,2,3)=(3-1,6-2,4-3)=(2,4,1)$$

亦即向量 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 、 $\bar{y}-\bar{x}$ 構成三角形 ΔOXY 的三個邊（其中 O 為座標原點）。請參考圖 2-1。 ■

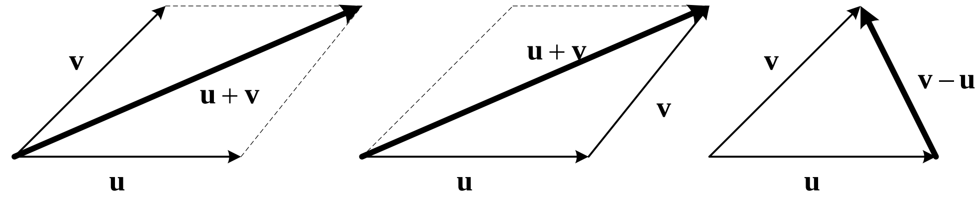


圖 2-1

向量長度（*length* or *magnitude*）爲空間向量的兩個特徵之一，指的是原點到座標點的距離。距離有不同的定義，最常見的**歐幾里德距離**（*Euclidean distance*）定義如下

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

其中 $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$。長度爲一的向量稱爲**單位向量**（*unit vectors*）。我們以 $\mathbf{e}_i$ 來標示第 i 座標軸上的單位向量，在 R^3 上，則另以 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 來標示，亦即

$$\mathbf{e}_1 = \vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (1,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (0,1,0), \quad \mathbf{e}_3 = \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (0,0,1)$$

一般向量可以座標軸單位向量來表示，例如

$$\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$$

只要確定這些座標軸單位向量的運算（加法、內積、外積），則空間向量的運算就只是我們熟悉的實數代數運算。

例題 2-16　（單位向量）

令 $\mathbf{u} = (2,4,4)$ ，試求在 $\mathbf{u}$ 方向的單位向量。

【解答】

在 $\mathbf{u}$ 方向的單位向量爲 $\dfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$

$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$

因此單位向量爲 $\dfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} = \frac{1}{6}(2,4,4) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 。 ■

例題 2-17　（空間向量的加減）

以下是兩向量， $\vec{u} = (2,-3,4), \vec{v} = (1,3,-2)$ ，加法與純量積的運算：

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}\right) + \left(\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}\right) = 3\vec{i} + 2\vec{k}$$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}\right) - 2\left(\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}\right) = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 16\vec{k}$$

轉換成單位向量，則可以用實數的代數運算來解決向量運算問題。 ■

定理 2-3 (三角不等式)

令$\mathbf{u},\mathbf{v}\in R^3$，則 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$。

【證明】

這是三角不等式的另外一種寫法。已知$\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 $\mathbf{u}-\mathbf{w}$構成三角形的三邊，故由兩邊之和大於第三邊，得知

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|\le\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{w}\|$$

令$\mathbf{w}=-\mathbf{v}$ ，則可得$\|\mathbf{u}-(-\mathbf{v})\|=\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\le\|\mathbf{u}\|+\|-\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$。 ■

向量內積與投影長度、向量夾角

內積（*inner product*）其運作爲將相對位置數值兩兩相乘後再全部加在一起，內積的結果爲純量。內積的運算符號爲『•』，故又稱爲**點積**（*dot product*）。其操作性定義如下：

$$(x_1,y_1,z_1)\bullet(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

向量內積保有矩陣向量積的大部分性質，唯一需注意的地方是交換律成立：

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}$$

其中$\mathbf{u},\mathbf{v}\in R^n$爲任意空間向量。座標軸單位向量間的內積結果如下：

$$\mathbf{e}_i\bullet\mathbf{e}_j=\begin{cases}1, & if\ i=j\\ 0, & if\ i\ne j\end{cases}$$

$$\vec{i}\bullet\vec{i}=\vec{j}\bullet\vec{j}=\vec{k}\bullet\vec{k}=1,\qquad \vec{i}\bullet\vec{j}=\vec{i}\bullet\vec{k}=\vec{j}\bullet\vec{i}=\vec{j}\bullet\vec{k}=\vec{k}\bullet\vec{i}=\vec{k}\bullet\vec{j}=0$$

相同座標軸單位向量的內積爲一，不同座標軸單位向量間的內積結果爲零。

定理 2-4 (內積性質)

若$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in R^n, c\in R$，則

(a) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}>0\ \ if\ \ \mathbf{u}\ne\mathbf{0}$.

(b) $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}=0\ \ if\ and\ only\ if\ \ \mathbf{u}=\mathbf{0}$.

$(c)\,\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}$.

$(d)\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})\bullet\mathbf{w}=\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}$.

$(e)\,(c\mathbf{u})\bullet\mathbf{v}=\mathbf{u}\bullet(c\mathbf{v})=c(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})$. ■

例題 2-18　（向量內積）

以下是兩向量，$\vec{u}=(2,-3,4),\vec{v}=(1,3,-2)$ ，的內積運算：

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}\right)\bullet\left(\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}\right)=2\times1-3\times3-4\times2=-15$$ ■

內積在幾何上的意義，爲向量間夾角以及垂直投影長度的計算。令$\mathbf{u},\mathbf{v}\in R^n$ ，則

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta \tag{2-5}$$

其中θ爲$\mathbf{u},\mathbf{v}$間的夾角。(2-5)可以改寫爲兩個公式

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

$$\mathbf{u}\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\|\mathbf{u}\|\cos\theta$$

其中，$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$爲$\mathbf{v}$方向上的單位向量。也就是，$\mathbf{u}\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$爲$\mathbf{u}$在$\mathbf{v}$方向上的投影長度。請參考圖 2-2。

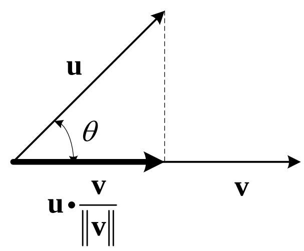


圖 2-2

例題 2-19　（向量夾角）

令$\mathbf{u}=(1,1,0),\mathbf{v}=(0,1,1)$ ，試求$\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$兩向量的夾角。

【解答】

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}=1\times0+1\times1+0\times1=1,\quad \|\mathbf{u}\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\quad \|\mathbf{v}\|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

故夾角 $\theta=60^\circ$。 ■

例題 2-20 （垂直投影）

令 $\mathbf{u}=(2,-3,4),\ \mathbf{v}=(1,3,-2)$，試求 $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{v}$ 方向上的投影長度。

【解答】

$$\mathbf{u}\bullet\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{(2,-3,4)\bullet(1,3,-2)}{\|(1,3,-2)\|}=-\frac{15}{\sqrt{14}}$$

其中負號表示投影方向與 $\mathbf{v}$ 方向相反。 ■

定理 2-5 **(**科西不等式，*Cauchy-Schwarz inequality***)**

令 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in R^3$，則 $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|\le\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$。

【證明】

由內積定義，$\dfrac{\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ 是 $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{v}$ 方向上的投影，得知 $\|\mathbf{u}\|$ 爲一直角三角形的斜邊長，而 $\dfrac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|}$ 爲其一股之長。由直角三角形斜邊長大於任一股長，我們有

$$\frac{|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|}\le\|\mathbf{u}\|\quad\Rightarrow\quad|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}|\le\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

得證科西不等式。 ■

向量外積與面積

向量外積（*outer product*）的目的就是求兩向量所圍成之平行四邊行的面積。外積只定義於三維空間，運算符號爲『×』，故又稱爲**叉積**（*cross product*）。以下是其操作上的定義

$$\left(x_1,y_1,z_1\right)\times\left(x_2,y_2,z_2\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$
$$=\left(y_1z_2-y_2z_1\right)\vec{i}+\left(z_1x_2-z_2x_1\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\vec{k}$$

其中$|\bullet|$爲行列式運算符號，以後有專章介紹。外積運算的結果爲一向量（有方向性）。以下是向量外積有關分配律、交換律、結合律之性質。

分配律：$\mathbf{u}\times\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w},\qquad \left(\mathbf{u}+\mathbf{v}\right)\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

交換律：$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{v}\times\mathbf{u},\quad \left(\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}\right)$

結合律：$\mathbf{u}\times\left(\mathbf{v}\times\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{u}\times\mathbf{v}\right)\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}\times\mathbf{w}$

其中$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in R^3$爲任意空間向量。請特別注意交換律。座標軸單位向量間的外積運算結果如下：

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$

相同座標軸單位向量的外積結果爲零向量，不同座標軸單位向量間以$\vec{i}\to\vec{j}\to\vec{k}\to\vec{i}$之順序，順向爲正，逆向爲負。

定理 2-6　(外積性質)

若$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in R^n, c\in R$，則

$(a)\ \mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\left(\mathbf{v}\times\mathbf{u}\right).$

$(b)\ \mathbf{u}\times\left(\mathbf{v}+\mathbf{w}\right)=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}.$

$(c)\ \left(\mathbf{u}+\mathbf{v}\right)\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w}.$

$(d)\ c\left(\mathbf{u}\times\mathbf{v}\right)=\left(c\mathbf{u}\right)\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times\left(c\mathbf{v}\right).$

$(e)\ \mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}.$

$(f)\ \mathbf{0}\times\mathbf{u}=\mathbf{u}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}.$

$(g)\ \mathbf{u}\times\left(\mathbf{v}\times\mathbf{w}\right)=\left(\mathbf{u}\bullet\mathbf{w}\right)\mathbf{v}-\left(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\right)\mathbf{w}.$

$(h)\ \left(\mathbf{u}\times\mathbf{v}\right)\times\mathbf{w}=\left(\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}\right)\mathbf{v}-\left(\mathbf{w}\bullet\mathbf{v}\right)\mathbf{u}.$ ■

例題 2-21　（向量外積）

令 $\mathbf{u}=(1,1,0), \mathbf{v}=(0,1,1)$，試求 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$。

【解答】

寫成各座標軸的單位向量組合：

$$\mathbf{u}=(1,1,0)=\vec{i}+\vec{j},\quad \mathbf{v}=(0,1,1)=\vec{j}+\vec{k}$$

則

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(\vec{i}+\vec{j})\times(\vec{j}+\vec{k})=\vec{i}\times\vec{j}+\vec{i}\times\vec{k}+\vec{j}\times\vec{j}+\vec{j}\times\vec{k}=\vec{k}-\vec{j}+0+\vec{i}$$

故 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=(1,-1,1)$。■

向量外積的運算與面積、體積有關。令 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in R^3$，則 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ 爲 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$ 所夾之平行四邊行面積。又令 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in R^3$，則 $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\times\mathbf{w}|$ 爲 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{w}$ 所圍之平行六面體之體積。請參考圖 2-3。

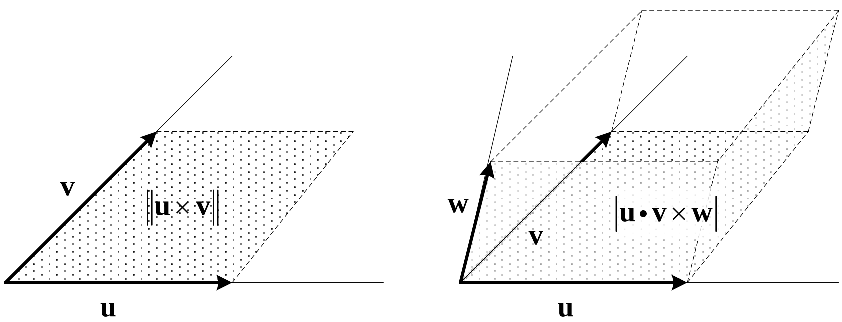


圖 2-3

例題 2-22　（平行四邊形面積）

求以下向量 $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}, \vec{v}=4\vec{k}$ 所圍之平行四邊形面積。

【解答】

$$\vec{u}\times\vec{v}=(2\vec{i}+3\vec{j})\times4\vec{k}=12\vec{i}-8\vec{j},\quad \|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{12^2+8^2}=\sqrt{208}$$

平行四邊形面積爲 $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{208}$。■

例題 2-23　（平行六面體體積）

求以下向量 $\mathbf{u}=(2,3,0), \mathbf{v}=(0,0,4), \mathbf{w}=(2,0,2)$ 所圍之平行六面體體積。

【解答】

$$\mathbf{u}=(2,3,0)=2\vec{i}+3\vec{j},\quad \mathbf{v}=(0,0,4)=4\vec{k},\quad \mathbf{w}=(2,0,2)=2\vec{i}+2\vec{k}$$
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(2\vec{i}+3\vec{j})\times 4\vec{k}=12\vec{i}-8\vec{j}$$
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=(12\vec{i}-8\vec{j})\bullet(2\vec{i}+2\vec{k})=12\times 2=24$$

六面體體積為 $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}|=|24|=24$。也可以試試 $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\times\mathbf{w}|$：

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=4\vec{k}\times(2\vec{i}+2\vec{k})=8\vec{j}$$
$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\times\mathbf{w}=(2\vec{i}+3\vec{j})\bullet 8\vec{j}=3\times 8=24,\quad |\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=|24|=24$$

事實上，$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}\times\mathbf{u}$，只要 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ 的次序對就可以了，內積、外積的次序沒有關係。 ■

例題 2-24　（平行六面體體積）

求以下向量 $\mathbf{u}=(2,3,4), \mathbf{v}=(1,3,2), \mathbf{w}=(5,2,1)$ 所圍之平行六面體體積。

【解答】

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&2\\5&2&1\end{vmatrix},\quad \mathbf{u}\bullet(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k})\bullet\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&2\\5&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&3&2\\5&2&1\end{vmatrix}=-27$$

六面體體積為 $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=|-27|=27$。 ■