13.5

多變數函數的連鎖律

Chain Rules for Functions of Several Variables

目的

- 對多變數函數使用鏈鎖律 (chain rule)
- 求多變數函數的隱微分

多變數函數的連鎖律

定理13.6: 對單一獨立變數的鏈鎖律

令$w=f(x,y)$是依賴x和y的可微分函數。如果$x=g(t)$、$y=h(t)$，而$g(t)$、$h(t)$爲依賴變數t的可微分函數，則w是一個對變數t的可微分函數且

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

。

例題一

令$w = x^2y - y^2$ 、$x = \sin t$ 、 $y = e^t$。利用連鎖律，求當$t = 0$時的 dw/dt 。

解:

根據單變數的連鎖律，

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= 2xy(\cos t) + (x^2 - 2y)e^t$$

例題一

cont’d

$$= 2(\sin t)(e^t)(\cos t) + (\sin^2 t - 2e^t)e^t$$

$$= 2e^t \sin t \cos t + e^t \sin^2 t - 2e^{2t}.$$

將t = 0代入，得

$$\frac{dw}{dt} = -2.$$

例題一

另解:

將w 化成依賴 t 的函數，

$$w = x^2y - y^2 = (\sin^2 t)(e^t) - (e^{2t})$$ 。

對其微分

$$\frac{dw}{dt} = 2e^t \sin t \cos t + e^t \sin^2 t - 2e^{2t}$$ 。

多變數函數的連鎖律

假設每一個x_i都是依賴單一變數 t 的可微分函數、

且$w = f(x_1, x_2, . . . , x_n)$ ，則

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdot \cdot \cdot + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

例題二

假設兩個物體分別沿著橢圓曲線 $\begin{cases} x_1 = 4\cos t \\ y_1 = 2\sin t \end{cases}$、$\begin{cases} x_2 = 2\sin 2t \\ y_2 = 3\cos 2t \end{cases}$ 運動。請問在時間$t = \pi$ 的時候，兩個物體的距離變化率爲何?

解:

兩點之間的距離是 $s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ，

將 $t = \pi$ 代入，可以得到距離$s = 5$。

在時間$t = \pi$ 的偏微分爲

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(0 + 4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(3 - 0) = -\frac{3}{5}$$

例題二

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(0 + 4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(3 - 0) = \frac{3}{5}$$

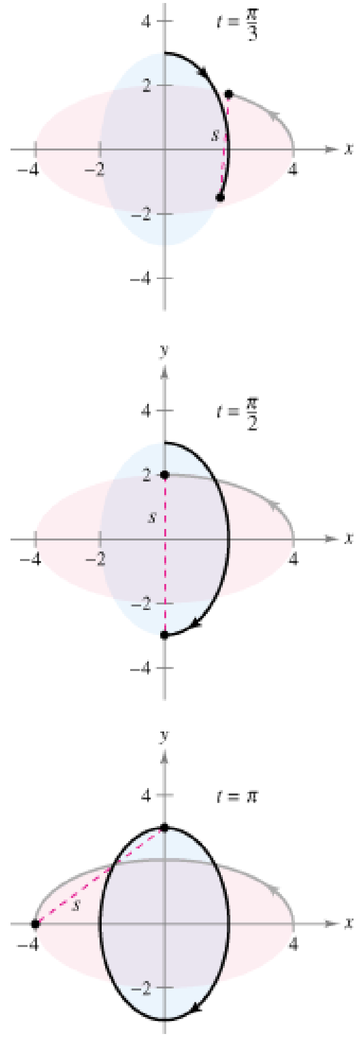
在 $t = \pi$ 時的微分

$$\frac{dx_1}{dt} = -4\sin t = 0 \qquad \frac{dy_1}{dt} = 2\cos t = -2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4\cos 2t = 4 \qquad \frac{dy_2}{dt} = -6\sin 2t = 0.$$

所以距離變化率爲

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{\partial s}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dt} \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)(0) + \left(-\frac{3}{5}\right)(-2) + \left(\frac{4}{5}\right)(4) + \left(\frac{3}{5}\right)(0) \\ &= \frac{22}{5}.\end{aligned}$$



例題二

因爲s是四個中間變數的函數，而每一個變數都只依賴一個時間變數。所以可以用合成函數的方法把s變成依賴時間t的函數，然後對它微分。

如果有兩個獨立參數，譬如$w = f(x,y)$ ，其中$x = h(s,t)$ 、$y = k(s,t)$ ，則我們可以將w視作依賴s與t的函數，再對其中一參數作偏微分。

例題三

設 $w = 2xy$ ，$x = s^2 + t^2$ ，$y = s/t$ ，求w對s與t的偏微分。

解:

$w = 2xy = 2(s^2 + t^2)(s/t) = 2(s^3 + st^2)/t$

如果要求w對s的偏微分，則將t當做常數且對s微分

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2(3s^2 + t^2)/t = \frac{6s^2 + 2t^2}{t}。$$

相似地，

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{2(2st)t - 2(s^3 + st^2)}{t^2} = \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}。$$

練習三

設 $w=\sqrt{4-2x^2-2y^2}$ 且 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 求w對r與 θ的偏微分。

解:

練習三

設 $w=\sqrt{4-2x^2-2y^2}$ 且 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 求w對r與 θ的偏微分。

解:

$$w=\sqrt{4-2x^2-2y^2}=\sqrt{4-2r^2\cos^2\theta-2r^2\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{4-2r^2} \text{ 。}$$

所以

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{4-2r^2}=\frac{1}{2}\frac{-4r}{\sqrt{4-2r^2}}=\frac{-2r}{\sqrt{4-2r^2}} \text{ 。}$$

至於對 θ的偏微分，就是對常數微分，得到0。

多變數函數的連鎖律

定理13.7: 對兩獨立變數的鏈鎖律

令$w=f(x,y)$是依賴x和y的可微分函數。如果$x=g(s,t)$、$y=h(s,t)$且$\frac{\partial x}{\partial s}$、$\frac{\partial x}{\partial t}$、$\frac{\partial y}{\partial s}$、$\frac{\partial y}{\partial t}$皆存在，則$\frac{\partial w}{\partial s}$、$\frac{\partial w}{\partial t}$皆存在且

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad 、 \quad \frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad 。$$

例題四

設$w = 2xy$，$x = s^2 + t^2$ ， $y = s/t$ ，始用連鎖率算出w對s與t的偏微分。

解:

根據定義 $$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad = 2y(2s) + 2x\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2s) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2 + 2t^2}{t}$$

$$= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}.$$

例題四

cont’d

w對 t 的偏微分則是

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= 2y(2t) + 2x\left(\frac{-s}{t^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2t) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{-s}{t^2}\right)$$

$$= 4s - \frac{2s^3 + 2st^2}{t^2}$$

$$= \frac{4st^2 - 2s^3 - 2st^2}{t^2}$$

$$= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}.$$

練習四

設 $w = xy$ ，$x = r + \theta$ ，$y = r - \theta$ ，使用連鎖率算出w對r與θ的偏微分。

解:

練習四

設 $w = xy$ ，$x = r + \theta$ ，$y = r - \theta$ ，使用連鎖率算出w對r與θ的偏微分。

解:

w對r的偏微分

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= y(1) + x(1) \\
&= y + x \\
&= r - \theta + r + \theta \\
&= 2r.
\end{aligned}
$$

w 對 θ的偏微分

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= y(1) + x(-1) \\
&= y - x \\
&= r - \theta - (r + \theta) \\
&= -2\theta.
\end{aligned}
$$

多變數函數的連鎖律

假設w爲一個依賴$x_1, x_2, . . . , x_n$的可微分函數、每一個 x_i爲依賴參數$t_1, t_2, . . . , t_m$的可微分函數，則函數$w = f(x_1, x_2, . . . , x_n)$滿足:

$$\frac{\partial w}{\partial t_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdot\cdot\cdot + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_2} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_m} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \cdot\cdot\cdot + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

例題五

設$w = xy + yz + xz$，其中$x = s\cos t$，$y = s\sin t$，$z = t$。求當$s=1$、$t = 2\pi$時，w對 s與 t 的偏微分。

解:

首先，我們先對s偏微分

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (y+z)(\cos t) + (x+z)(\sin t) + (y+x)(0) \\ &= (y+z)(\cos t) + (x+z)(\sin t).\end{aligned}$$

例題五

接著，將s=1、t = 2 π代入可以得到該點的偏微分為2 π 。

再對s偏微分

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$
$$= (y + z)(-s \sin t) + (x + z)(s \cos t) + (y + x)(1)$$

將s=1、t = 2 π代入可以得到該點的偏微分為2+2 π 。

練習五

設$w = x \sin yz$ ，其中$x = t^2$ ，$y = s^2$ ，$z = s + 2t$。求當$s = -1$、$t = 1$時，w對t與s的偏微分。

解:

先對s偏微分

代入點之後得到該點的偏微分值

再對t偏微分

代入點之後得到該點的偏微分值

$$\frac{\partial w}{\partial t_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdot\cdot\cdot + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_2} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdot\cdot\cdot + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_m} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \cdot\cdot\cdot + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

練習五

設$w = x \sin yz$，其中$x = t^2$，$y = s^2$，$z = s + 2t$。求當$s = -1$、$t = 1$時，w對t與s的偏微分。

解:

先對s偏微分

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= \sin yz(0) + xz \cos yz(2s) + xy \cos yz(1) \\
&= (2s)xz \cos yz + xy \cos yz.
\end{aligned}
$$

代入點之後得到該點的微分值爲4。

練習五

再對t偏微分，代入點之後得到該點的偏微分值。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\
&= \sin yz(2t) + xz\cos yz(0) + xy\cos yz(2) \\
&= 2t\sin yz + 2xy\cos yz \\
&= 2(1)\sin 0 + 2(4)\cos 0 \\
&= 8.
\end{aligned}
$$

隱微分

Implicit Partial Differentiation

隱微分

假設方程式$F(x, y) = 0$隱藏地定義 $y = f(x)$是依賴 x 的可微分函數。考慮求dy/dx ，我們可以參考2.5節的。加入隱微分和鏈鎖律的概念可以使得微分比較簡單。

令$w = F(x, y) = F(x, f(x))$ ，使用定理13.6得

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx}.$$

隱微分

如果$w = F(x, y) = 0$ ($dw/dx = 0$)，所以

$$F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

如果 $F_y(x, y) \neq 0$，根據 $dx/dx = 1$ ，推得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

相似的程序可以用來求多變數隱函數的偏微分。

隱微分

定理13.8　鏈鎖律: 隱微分

假設方程式$F(x, y) = 0$隱藏地定義 y 是依賴 x 的可微分函數，則 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$，$F_y(x,y) \neq 0$ 。

假設方程式$F(x, y, z) = 0$隱藏地定義 z 是依賴 x與y 的可微分函數，則

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \text{、} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

，但 $F_z(x,y,z) \neq 0$ 。

例題六

設 $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$ ，求dy/dx?

解:

我們定義F為

$$F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 \text{。}$$

求F的偏導數

$$F_x(x, y) = -2x \text{ 、} F_y(x, y) = 3y^2 + 2y - 5 \text{。}$$

根據定理13.8，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{-(-2x)}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}.$$

練習六

設 $\sin x + \sec(xy) - 3 = 0$ ，求dy/dx?

解:

我們定義F為

$F(x, y) =$

求F的偏導數

$F_x(x, y) =?$ 、 $F_y(x, y) = ?$

根據定理13.8， $dy/dx=?$

練習六

設 $\sin x + \sec(xy) - 3 = 0$ ，求dy/dx?

解:

我們定義F爲

$$F(x, y) = \sin x + \sec(xy) - 3$$ 。

求F的偏導數

$$F_x(x, y) = \cos x + y\tan(xy)\sec(xy)$$ 、$$F_y(x, y) = x\tan(xy)\sec(xy)$$ 。

根據定理13.8，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{\cos x + y\tan(xy)\sec(xy)}{x\tan(xy)\sec(xy)}$$

例題七

設 $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$ ，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ？

解:

設 $F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5$ 。

求F的偏導數，

$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$、

$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$ 、

$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$ 。

根據定理13.8，

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -F_x / F_z$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -F_y / F_z$ (將F的偏導數代入即可)

練習七

設 $x^2+y^2+z^2+6xw-8w^2-5=0$ ，求 $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ 、$\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 、$\dfrac{\partial w}{\partial z}$ ？

解:

設

求F的偏導數

根據定理13.8，將F的偏導數代入即可。

練習七

設 $x^2+y^2+z^2+6xw-8w^2-5=0$ ，求 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 、$\frac{\partial w}{\partial x}$ 、$\frac{\partial w}{\partial z}$?

解:

設

$$F(x,y,z,w)=x^2+y^2+z^2+6xw-8w^2-5$$

求F的偏導數

$$F_x(x,y,z,w)=2x+6w$$

$$F_y(x,y,z,w)=2y$$

$$F_z(x,y,z,w)=2z$$

$$F_w(x,y,z,w)=6x-16w$$

根據定理13.8，將F的偏導數代入即可。