§3–3 矩陣的應用

“矩陣”是線性代數、多變量微積分、多變量統計分析的基本工具。在資訊蓬勃發展的今日，矩陣的應用更加廣泛。

本節將介紹。

1 乘法反方陣。
2 用乘法反方陣解線性方程組。
3 轉移矩陣。

(甲)乘法反方陣

◆ 矩陣的乘法反方陣：

在實數 R 中，

設 a 為一個實數，$a\cdot 1=1\cdot a=a$，數學上稱 **1** 為**乘法單位元素**。

若 $a\neq 0$，$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$，稱 a 與$\frac{1}{a}$互為**乘法反元素**。

在矩陣的乘法運算中，是否有類似實數乘法的結構呢？

例題：設 $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$，可否找到一個 2 階方陣 I，使得 AI=IA=A 呢？

令 $I=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，因為 AI=IA=A $\Rightarrow\begin{cases}a+3c=1\\2a+4c=2\end{cases}$ 且 $\begin{cases}b+3d=3\\2b+4d=4\end{cases}$ $\Rightarrow a=1$，$b=0$，$c=0$，$d=1$ 即 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(1)單位方陣

(a)若一個 n 階方陣，由左上角到右下角的對角線上各位置的元(即 $(1,1),(2,2)\ldots(n,n)$元)都是 1，而其餘各元都是 0，則稱為 ***n* 階單位方陣**，以 $\mathbf{I}_n$ 表之。

例：$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，…..，$I_n=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&&&0\\0&&\ddots&&0\\\vdots&&&1&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$。

(b)$A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$，稱 $\mathbf{I}_n$ 為 ***n* 階方陣乘法的單位元素。**

(2)矩陣的乘法反元素：

設 A 是一個 n 階方陣，若有 n 階方陣 B 使下列成立 $AB=BA=I_n$，

則稱 B 為 A 的**乘法反方陣(反矩陣)**，記為 $\mathbf{B=A^{-1}}$。

當方陣 A 有乘法反方陣時，A 稱為**可逆方陣**。

例如：

(1) 設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$ $(\neq O)$，對任一個 $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，恆使 $AB=\begin{bmatrix}a+2c&b+2d\\0&0\end{bmatrix}\neq I$。

(2) 設 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ($\neq O$)，取 $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$，則 $AB=I=BA$。

[問題與討論]：

若 $AB_1=B_1A=I_n$ 且 $AB_2=B_2A=I_n$，則 $B_1=B_2$ 會成立嗎？

◆ 可逆方陣的條件：

以二階方陣來說明：**一個方陣須滿足何種條件，才是“可逆方陣”**。

給了一個二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$。

假設二階方陣 $B=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ 滿足“$AB=I$”(B 右乘 A)，則

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1x_1+a_2x_2 & a_1y_1+a_2y_2 \\ b_1x_1+b_2x_2 & b_1y_1+b_2y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ (1) $\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2=1 \\ b_1x_1+b_2x_2=0 \end{cases}$ 與(2) $\begin{cases} a_1y_1+a_2y_2=0 \\ b_1y_1+b_2y_2=1 \end{cases}$。

方程組(1)與(2)之“係數矩陣”就是原方陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$，

當 $\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 時，方程組(1)與(2)恰有一解，換句話說：

“$\det(A)\neq 0 \Longleftrightarrow B=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ 唯一存在”。

再假設二階方陣 $B'=\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$，滿足“$B'A=I$”(B'左乘 A)，

則$\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_1x_1'+b_1x_2' & a_2x_1'+b_2x_2' \\ a_1y_1'+b_1y_2' & a_2y_1'+b_2y_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ (1)′ $\begin{cases} a_1x_1'+b_1x_2'=1 \\ a_2x_1'+b_2x_2'=0 \end{cases}$ 與(2)′ $\begin{cases} a_1y_1'+b_1y_2'=0 \\ a_2y_1'+b_2y_2'=1 \end{cases}$。

方程組(1)′與(2)′之“係數矩陣”同為方陣 $A^T=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$。此方陣$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$是將原方陣 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$之“第一列調到第一行，第二列調到第二行”而形成的。

因 $\det(A^T)=\det(A)=a_1b_2-a_2b_1$。(行、列依序交換，行列式的值不改變)。

當 $\det(A^T)\neq 0$ (即 $\det(A)\neq 0$) 時，方程組(1)′與(2)′都恰有一解。也就是說：

“$\det(A)\neq 0 \Longleftrightarrow B'=\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$ 唯一存在”。

由上面的論述知：當 $\det(A)\neq 0$ 時，存在二階方陣 B 與 B'滿足“$AB=I=B'A$”，那麼上式的 B 與 B'會“相等”嗎？

（結合律）

因 $B'=B'I=B'(AB)=(B'A)B=IB=B$，故 $B'=B$。

上面導出的結論 $\boldsymbol{B'=B}$ 有兩層意義：

(i)當 det $(A)\neq 0$ 時，則 $B'=B$。

由此知 B 就是 A 的乘法反方陣，故方陣 A 是“可逆方陣”。

(ii)當 det $(A)\neq 0$ 時，欲求方陣 A 的“乘法反方陣 B”，只須求出一個同階方陣 B，滿足下列兩個條件之一即可。

“$AB=I$”(B 右乘 A) 或 “$BA=I$”(B 左乘 A)。

> 可逆方陣的充要條件
> **設 A，B，B'都是二階方陣，**
> **(1) 若 $AB=I_2=B'A$，則 $B=B'$。**
> **(2) A 為可逆方陣 $\Longleftrightarrow$ A 的行列式值 det $(A)\neq 0$。**

◆ 如何找乘法反方陣：

例子：

設 A=$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix}$，求一 2 階方陣 B 使得 AB=$I_2$，令 B=$\begin{bmatrix}x & u\\ y & v\end{bmatrix}$，則可得

兩個聯立方程組：$\begin{cases}x+2y=1\\ 3x+7y=0\end{cases}$與$\begin{cases}u+2v=0\\ 3u+7v=1\end{cases}$，因為 det(A)=$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}\neq 0$，這兩個聯立方程組的係數矩陣都是原來的矩陣 A，而解這個聯立方程組可以利用 A 的增廣矩陣的列運算，即

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 7 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列運算}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 7 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列運算}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

此時 B=$\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$，但我們可以觀察上面兩個增廣矩陣的列運算，我們可以使用相同的基本列運算，使得它們的前兩行的係數都相同，因此此處可以將它們合併來計算

$$M=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 7 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{(-3)R_1+R_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{(-2)R_2+R_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 7 & -2\\ 0 & 1 & -3 & 1\end{array}\right]$$

(1)找乘法反方陣的一般方法：

n 階方陣 A=$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$仿照上述的方法，做一個 $n\times 2n$ 矩陣 M，

$$M=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\end{array}\right]$$=[A|I_n]，對 M 作基本列算，

若經過一連串的列運算，可得 $M^{/}=[I|B]$，則 B 即為 A 的反矩陣。

(2)二階反矩陣：

若設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，若 $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0$，

則反矩陣 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

記法：*a,d* 對調；*b,c* 變號⇒主對調,副變號,再除以 det(A)

[證明]：設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$，$AA^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

即 $\begin{cases} ax_1+by_1=1 \\ cx_1+dy_1=0 \end{cases}$，$\begin{cases} ax_2+by_2=0 \\ cx_2+dy_2=1 \end{cases}$，利用克拉瑪公式

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{d}{\det(A)} \\ y_1=\dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{-c}{\det(A)} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{-b}{\det(A)} \\ y_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)}=\dfrac{a}{\det(A)} \end{cases}\text{，得 } A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(3)三階乘法反方陣的找法(補充教材)：

設 A=$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，且 detA≠0，如何找 A^{-1} 呢？

令 B=$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$，且滿足 BA=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

且 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，

$\overrightarrow{p}=(p_1,p_2,p_3)$，$\overrightarrow{q}=(q_1,q_2,q_3)$，$\overrightarrow{r}=(r_1,r_2,r_3)$

因為 BA=$\begin{bmatrix} \vec{p}\cdot\vec{a} & \vec{p}\cdot\vec{b} & \vec{p}\cdot\vec{c} \\ \vec{q}\cdot\vec{a} & \vec{q}\cdot\vec{b} & \vec{q}\cdot\vec{c} \\ \vec{r}\cdot\vec{a} & \vec{r}\cdot\vec{b} & \vec{r}\cdot\vec{c} \end{bmatrix}$⇒$\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{b}=0$，$\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{c}=0$，所以 $\overrightarrow{p}$ 與 $\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 均垂直，

同理 $\overrightarrow{q}$ 與 $\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{a}$ 均垂直；$\overrightarrow{r}$ 與 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 均垂直。

因為 $\overrightarrow{p}$ 與 $\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 均垂直，且 detA≠0

所以 $\overrightarrow{p}=t(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$，又 $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{a}=1\Rightarrow t(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a}=1\Rightarrow t=\dfrac{1}{\det(A)}$。

故 $\overrightarrow{p}=\dfrac{1}{\det(A)}(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$。

同理 $\overrightarrow{q}=\dfrac{1}{\det(A)}(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a})$，$\overrightarrow{r}=\dfrac{1}{\det(A)}(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

所以 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}\vec{b}\times\vec{c}\\ \vec{c}\times\vec{a}\\ \vec{a}\times\vec{b}\end{bmatrix}$。

[例題1] (1)若矩陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，則反矩陣 $A^{-1}=$________。

(2)若方陣 X 滿足 $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -3 & 1\end{bmatrix}$，則 $X=$__________。

Ans：(1) $\begin{bmatrix}\frac{1}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{2}{13} & -\frac{3}{13}\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}24 & 13\\ -34 & -18\end{bmatrix}$

[例題2] 若二階方陣 A 滿足 $A^3=\begin{bmatrix}3 & -10\\ 2 & -7\end{bmatrix}$，$A^5=\begin{bmatrix}7 & -25\\ 5 & -18\end{bmatrix}$，求 A。

Ans：$A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

[例題3] (利用矩陣的運算求反矩陣)

若矩陣 A 滿足方程式 $X^2-2X-3I=O$，試求 A 的反矩陣。(以 A 來表示)

Ans：$A^{-1}=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I$

[例題4] 設 2 階方陣 A 滿足 A$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$且 A$\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$，試求方陣 A。

Ans：A=$\begin{bmatrix} -23 & -13 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

[例題5] 求 A=$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$的乘法反元素。Ans：$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 0 & 9 & -3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

(練習1) 若二階方陣 X 滿足$\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}X+2\begin{bmatrix}2&1\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\2&-1\end{bmatrix}$，則 $X=$______。

Ans：$\begin{bmatrix}12&-\frac{33}{2}\\-5&\frac{13}{2}\end{bmatrix}$

(練習2) 設 A 為二階方陣，$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$；若 $A^2-5A+6I_2=O$，則下列何者是 $5I_2-A$ 的乘法反矩陣?

(A)A (B)$-A$ (C)$A-5I_2$ (D)$\frac{1}{6}A$ (E)A^2-5A . Ans：(D)

(練習3) 設 2 階方陣 A 滿足 A$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$且 A$\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$，試求方陣 A。

Ans：A=$\begin{bmatrix}7&-2\\11&-5\end{bmatrix}$

(練習4) 已知 $A^2=\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix}5&8\\8&13\end{bmatrix}$，求二階方陣 A。Ans：A=$\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$

(練習5) 請求出 A=$\begin{bmatrix}2&1&2\\1&-3&-2\\4&1&3\end{bmatrix}$的反矩陣。Ans：$\begin{bmatrix}-7&-1&4\\-11&-2&6\\13&2&-7\end{bmatrix}$

(練習6) 若 A=$\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&3&a\\1&a&3\end{bmatrix}$沒有乘法反元素，則 a=？ Ans：a=2 或−3

◆ 反矩陣的性質：

(1)若 **A、B 為 2 階方陣，則 det(AB)=det(A)．det(B)。**

[證明]：

設 A=$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$、B=$\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}$，則 AB=$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ae+bg&af+bh\\ce+dg&cf+dh\end{bmatrix}$

det(AB)

$=(ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg)=ad(eh-fg)-bc(eh-fg)$

$=(ad-bc)(eh-fg)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}e&f\\g&h\end{vmatrix}$=det(A)．det(B)。

根據這個結果，可以得知：「若 A 為 2 階可逆方陣，則 $\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$。」

事實上：「**若 A、B 為 *n* 階方陣，則 det(AB)=det(A)．det(B)。**」亦成立！

(2)若方陣 A 為可逆的，且 AB=AC，則 B=C。

[證明]：

∵方陣 A 為可逆的，∴A^{-1}存在

$\Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)\Rightarrow(A^{-1}A)B=(A^{-1}A)C\Rightarrow B=C$。

(3)若 A、B 都是 n 階方陣，且 A 和 B 都有反矩陣，則 AB 有反矩陣，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

[證明]：

∵$\det(AB)=\det(A)\det(B)\neq0$，∴$(AB)^{-1}$存在

$AB(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$

當 A=B 時，可以得知$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$，一般而言$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$。

(4)$(ABA^{-1})^n=AB^nA^{-1}$

[證明]：

$(ABA^{-1})^n=(ABA^{-1})(ABA^{-1})(ABA^{-1})\ldots\ldots(ABA^{-1})(ABA^{-1})=AB^nA^{-1}$

再用數學歸納法即可得證

結論： 設 A、B、C 為 n 階方陣

(1) $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$

(2) $\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$

(3)AB=AC，若 $\det(A)\neq0$ (即 A^{-1}存在) ，則 B=C

(4)若 A 和 B 都有反矩陣，則 AB 有反矩陣，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

(5) $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

(6)$(ABA^{-1})^n=AB^nA^{-1}$。

矩陣裡的“可逆方陣 A”($\det(A)\neq0$) 與實數裡之“實數 a”($a\neq0$)，在乘法性質上可以類比。(如下表)

可逆方陣乘法性質	異於 0 的實數乘法性質
1. 若 $\det(A)\neq0$，則存在 A^{-1} 滿足 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$。	1. 若 $a\neq0$，則存在 a^{-1} 滿足 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$。
2. 若 $\det(A)\neq0$，$\det(B)\neq0$，則 $\det(AB)\neq0$ 且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。	2. 若 $a\neq0$，$b\neq0$，則 $ab\neq0$，且 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$。
3. 乘法消去律成立：若 $AB=AC$，且 $\det(A)\neq0$，則 $B=C$。	3. 乘法消去律成立 若 $ab=ac$ 且 $a\neq0$，則 $b=c$。
4. 若 $\det(A)\neq0$ 且 $AX=B$，則 $X=A^{-1}B$。	4. 若 $a\neq0$，且 $ax=b$，則 $x=a^{-1}b$。

[例題6] (矩陣的對角化)

A＝$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$，P＝$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，D＝PAP^{-1}，求矩陣 D？又 A^n＝？

Ans：D＝$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，A^n＝$\begin{bmatrix} 2^{n+1}-3^n & 3^n-2^n \\ 2^{n+1}-2\cdot 3^n & 2\cdot 3^n-2^n \end{bmatrix}$

[例題7] 兩數列$\langle a_n\rangle$，$\langle b_n\rangle$滿足$a_1=1$，$b_1=3$，且$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-3b_n \\ b_{n+1}=-3a_n+b_n \end{cases}$，

假設$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，其中$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則：

(1) $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，則$P^{-1}AP=$？(2)利用$A^n$可求得$a_n=$？

Ans：(1) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (2)$a_n=2\times(-2)^{n-1}-4^{n-1}$

(練習7) 設方陣 $A=\begin{bmatrix}0.7 & 0.4\\ 0.3 & 0.6\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，試求：

(1) P^{-1}。(2) $P^{-1}AP$。(3) A^n。

Ans：(1)$\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{1}{7}\\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\end{bmatrix}(2)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.3\end{bmatrix}(3)\begin{bmatrix}\frac{4+3(0.3)^n}{7} & \frac{4-4(0.3)^n}{7}\\ \frac{3-3(0.3)^n}{7} & \frac{3+4(0.3)^n}{7}\end{bmatrix}$

(乙)乘法反方陣解線性方程組

未知數的個數與方程式的個數相同的線性方程組，可用乘法反方陣的概念求解，說明如下：

方程組　　　　　　　　　　矩陣表示法

(A) $\begin{cases}a_{11}\,x+a_{12}\,y=b_1\text{，}\\ a_{21}\,x+a_{22}\,y=b_2\text{。}\end{cases} \overset{\text{轉化}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}$　　(1)

(B) $\begin{cases}a_{11}\,u+a_{12}\,v=c_1\\ a_{21}\,u+a_{22}\,v=c_2\end{cases} \longleftrightarrow \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\ uv=\ c_1c_2$　　(2)

(1)，(2)兩式可以合併，用矩陣的乘積表成

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & u\\ y & v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{bmatrix}\qquad(3)$$

當係數矩陣 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ 之行列式值 $\det(A)\neq 0$ 時，A 之乘法反方陣為

$A^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$。

因此方程組(A)與(B)的解可以寫成

$$\begin{bmatrix}x & u\\ y & v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{bmatrix}\qquad(C)$$

結論：

解聯立方程組與乘法反方陣：

將聯立方程組$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=c_1\\ a_{21}x+a_{22}y=c_2\end{cases}$或$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3\end{cases}$寫成 AX=C，此處的

A=$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，X=$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$，C=$\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}$，

若方陣 A 是可逆的，則解 X=A^{-1}C。

[例題8] 解下列兩個線性方程組：

(1) $\begin{cases}2x_1-4x_2=4\\ 3x_1-5x_2=3\end{cases}$。　(2) $\begin{cases}2y_1-4y_2=-2\\ 3y_1-5y_2=1\end{cases}$。

分析：

(i) 兩個線性方程組之係數矩陣皆為 $A=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 3 & -5\end{bmatrix}$。

因 det $(A)=2\neq 0$，故 A 的乘法反方陣 A^{-1} 存在，即

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-5 & 4\\ -3 & 2\end{bmatrix},$$

(ii) 方程組(1)與(2)可用"矩陣的乘法"表成

$$\begin{bmatrix}2 & -4\\ 3 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}。$$

解法：

承分析之(ii) $\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 3 & -5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-5 & 4\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-20+12 & 10+4\\ -12+6 & 6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 7\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 7\\ -3 & 4\end{bmatrix}$，所以 $\begin{cases}x_1=-4\\ x_2=-3\end{cases}$，$\begin{cases}y_1=7\\ y_2=4\end{cases}$。

(練習8) 解線性方程組 $\begin{cases}9x_1+4x_2=17\\ 7x_1-3x_2=13\end{cases}$。　Ans：$(x_1, y_1)=(\frac{103}{55}, \frac{2}{55})$

(練習9) 設 $A=\begin{bmatrix}4 & 9\\ 3 & 7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}17\\ 135\end{bmatrix}$，且矩陣 $X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$滿足 $AX=B$，試求

(1)A 的乘法反方陣 A^{-1}。　(2)矩陣 X。

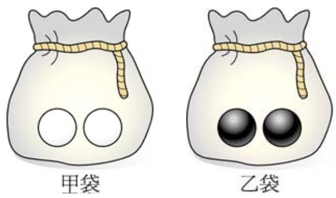
Ans：(1)$A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -9\\ -3 & 7\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}-1096\\ 489\end{bmatrix}$

(丙)轉移矩陣

◆ 引入轉移矩陣：

什麼是轉移矩陣呢？先看底下的例子：

有四個大小相同、質料相同的小球，其中甲袋分配到兩個白球，乙袋分配到兩個黑球。今從甲袋任意抽出一球放入乙袋，攪勻後再從乙袋抽出一球放回甲袋稱做操作一次。試問經過操作三次後，甲袋有一黑一白之機率：



每操作一次，甲袋兩個球的顏色有三種狀態：

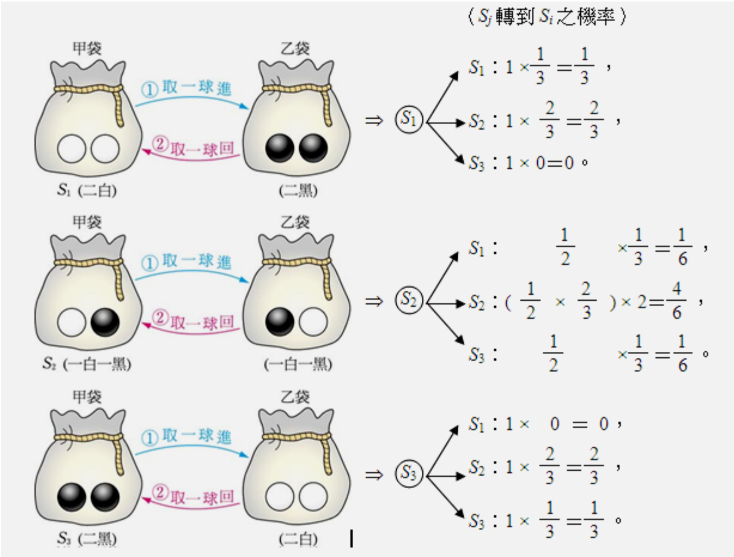
狀態 S_1：二個白球。

狀態 S_2：一個白球，一個黑球。

狀態 S_3：二個黑球。

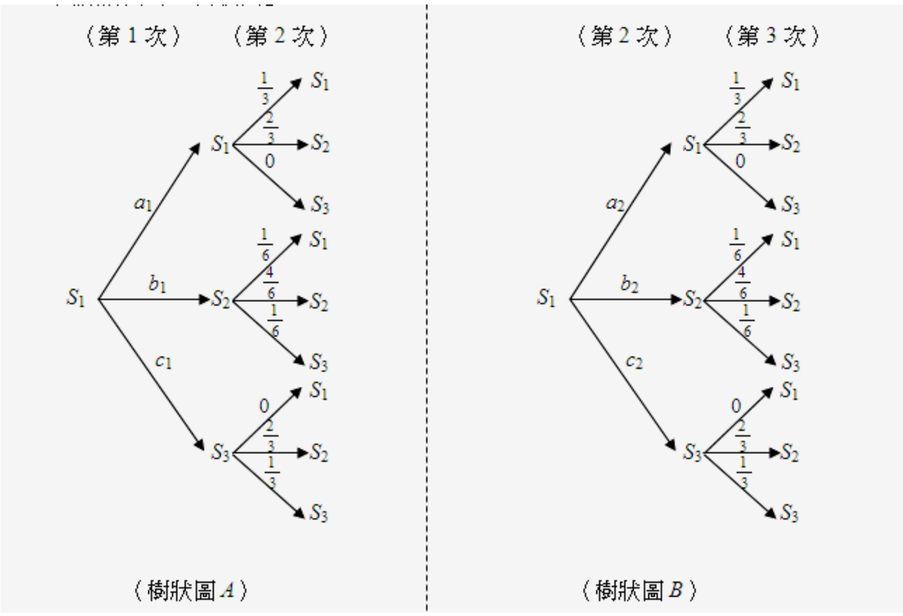
[利用樹狀圖]：

先考慮各種狀態間轉換的機率，並且畫出樹狀圖。



上面“樹狀圖”「脈絡清晰，一目了然」是優點，但當操作次數 n 愈大時，樹的“分枝”就愈多，計算相關的機率也愈趨繁複。

[建立遞迴關係式]：
假設操作第 n 次後，狀態 S_1、S_2、S_3 發生之機率為 a_n、b_n、c_n，顯然 $a_n+b_n+c_n=1$
回顧前面的「樹狀圖」



（樹狀圖 A）（樹狀圖 B）

由圖 A 可由 a_1、b_1、c_1 求出 a_2，b_2，c_2　　由圖 B 可由 a_2、b_2、c_2 求出 a_3，b_3，c_3

$$(A)\ \begin{cases} a_2=\dfrac{1}{3}a_1+\dfrac{1}{6}b_1+0\,c_1 \\ b_2=\dfrac{2}{3}a_1+\dfrac{4}{6}b_1+\dfrac{2}{3}c_1 \\ c_2=0\,a_1+\dfrac{1}{6}b_1+\dfrac{1}{3}c_1 \end{cases}。$$

(B) $\begin{cases} a_3=\dfrac{1}{3}a_2+\dfrac{1}{6}b_2+0\ c_2 \\ b_3=\dfrac{2}{3}a_2+\dfrac{4}{6}b_2+\dfrac{2}{3}c_2 \\ c_3=0\ a_2+\dfrac{1}{6}b_2+\dfrac{1}{3}c_2 \end{cases}$ 。

用矩陣的乘法來表示上述的關係：

(A)$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & 0 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{6} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$

(B)$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & 0 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{6} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$

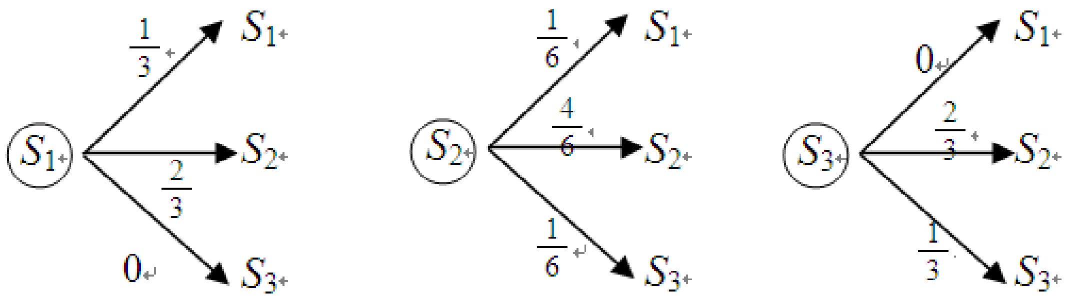
從樹狀圖(A)(B)可以看出，第$(n-1)$次操作與第 n 次操作間，各狀況(S_1、S_2、S_3)間的轉換模式都是一樣的，因此可將“樹狀圖 B”中的 a_2，b_2，c_2 依序換成 a_{n-1}，b_{n-1}，c_{n-1}，同理可求得 a_n，b_n，c_n

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}+\dfrac{1}{6}b_{n-1}+0c_{n-1} \\ b_n=\dfrac{2}{3}a_{n-1}+\dfrac{4}{6}b_{n-1}+\dfrac{2}{3}c_{n-1} \\ c_n=\quad a_{n-1}+\dfrac{1}{6}b_{n-1}+\dfrac{1}{3}c_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & 0 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{6} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

令(1)式中的三階方陣為 $P=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6} & 0 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{4}{6} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$，$P$ 是這樣形成的：

參照下面樹狀圖



矩陣 P 之第 1 行是“由狀態 S_1 分別轉到 S_1，S_2，S_3 之三項機率”。
第 2 行是“由狀態 S_2 分別轉到 S_1，S_2，S_3 之三項機率”。
第 3 行是“由狀態 S_3 分別轉到 S_1，S_2，S_3 之三項機率”。

即

轉變

$$P=\begin{array}{c|l} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} S_1\text{（二　　白）} \\ S_2\text{（一白一黑）} \\ S_3\text{（二　　黑）} \end{array} \end{array}$$

其次考慮三項機率 a_n，b_n，c_n 所形成的矩陣 X_n，其中 $X_n=\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow S_1 \\ \leftarrow S_2 \\ \leftarrow S_3 \end{array}$，而

$X_0=\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$（一開始，甲袋僅有“二白球”）

利用上面的(1)式，可以遞推求得 a_n，b_n，c_n。

$$X_1=PX_0=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X_2=PX_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{6}{9} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{6}{9} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix},$$

同理

$$X_3=PX_2=\begin{bmatrix}\frac{5}{27}\\\frac{18}{27}\\\frac{4}{27}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{27}\\\frac{18}{27}\\\frac{4}{27}\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow S_1\text{（二　　白）}\\\leftarrow S_2\text{（一白一黑）。}\\\leftarrow S_3\text{（二　　黑）}\end{matrix}$$

所以，經第三次操作後，甲袋有“二個白球”之機率為$\frac{5}{27}$，

有“一白球、一黑球”之機率為$\frac{18}{27}$，

有“二個黑球”之機率為$\frac{4}{27}$。

矩陣 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&0\\\frac{2}{3}&\frac{4}{6}&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$有兩個特殊性質：

(i) P 中的每一個元素都是“非負的實數”。

（P 中的元素 a_{ij}，代表由狀態 S_j 轉變到 S_i 之機率）

(ii) P 中每一行（直行）之“元素總和等於 1”。

像 P 這樣，滿足(i)、(ii)兩個條件的矩陣稱做**轉移矩陣**。

而上面的行矩陣，像

$$X_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}，X_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\0\end{bmatrix}，X_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{9}\\\frac{6}{9}\\\frac{1}{9}\end{bmatrix}，\cdots$$

都滿足

(1) 行矩陣之每一元素都是“非負的實數”。

(2) 行矩陣之“元素總和等於 1”。

這種行矩陣稱為**機率矩陣**（或機率向量）。

◆ 轉移矩陣：

一般而言，在自然現象與社現象中，許多現象都會隨時間的改變而呈現不同的狀態。假設某現象所可能呈現的不同狀態只有有限多種：$S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n$ 每隔一固定的時間來觀查察它所呈現的狀態。如果此現象在各觀察期呈現某種狀態的過程滿足下面的性質：在任意觀察期中此現象呈現狀態 $\mathbf{S}_j$時，則它在下一觀察期呈現狀態 $\mathbf{S}_i$的機率為 p_{ij}。當一個現象的呈現具有這個性質時，我們就說這個過程形成一個**馬可夫鏈**。

馬可夫鏈有下列的特性：

(a)A=$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$，$p_{ij}\geq 0$，$\sum_{k=1}^{n} p_{k\,j}=1$，$j=1,2,\ldots,n$。

稱為此**馬可夫鏈的轉移矩陣**。

(b)若一個方陣的各元都大於或等於 0，而且每一行中各元的和都等於 1，此種方陣稱為馬可夫矩陣或轉移矩陣。

(c)如果一馬可夫鏈可達到**穩定狀態**，而其(n 階)轉移矩陣為 A，則其穩定狀態就是滿足 AX=X 的 $n\times 1$ 矩陣 X。

(練習10) 設 A 為 2×2 階的轉移矩陣，$X_n=\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$，$n=0,1,2,\ldots$，其中 $x_0+y_0=1$，$x_0\geq 0$，$y_0\geq 0$，而 $X_n=AX_{n-1}$，試證明 $x_n+y_n=1$，$n=1,2,\ldots$且 $x_n\geq 0$，$y_n\geq 0$。

[例題9] 設 A,B 兩箱中，A 箱內有 1 黑球 1 白球，B 箱內有 1 白球。甲乙兩人輪流取球，每次先由甲自 A 箱內任取一球，放入 B 箱內，再由乙自 B 箱內任取一球，放入 A 箱內，這樣的動作完成後稱為一局。

(1)當一局結束時，A 箱內兩球為一黑一白的機率為多少？

(2)當第三局結束時，A 箱內兩球為一黑一白的機率為多少？

(3)當第 n 局結束時，A 箱內兩球為一黑一白的機率為多少？(以 n 表示)

(4)長期下來，A 箱內兩球為一黑一白的機率為多少？

Ans：(1)$\frac{3}{4}$ (2)$\frac{43}{64}$ (3) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times(\frac{1}{4})^n$ (4)$\frac{2}{3}$

[例題10] 假設某區的數學教科書，有甲、乙、丙三種不同的版本提供各校自由選購，統計各校多年選購的市場資訊，顯示出：

每一年甲版的顧客群中，隔年選購甲版佔$\frac{5}{10}$；乙版佔$\frac{2}{10}$；丙版佔$\frac{3}{10}$。

乙版的顧客群中，隔年選購甲版佔$\frac{4}{10}$；乙版佔$\frac{4}{10}$；丙版佔$\frac{2}{10}$。

丙版的顧客群中，隔年選購甲版佔$\frac{3}{10}$；乙版佔$\frac{2}{10}$；丙版佔$\frac{5}{10}$。

此區，目前甲、乙、丙三種版本的市占率依序為$\frac{4}{10}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{3}{10}$。若市場選購教科書的資訊不變的趨勢下，

試問：

(1)甲、乙、丙三種版本三年後的市占率各為多少？(教科書每年選購一次)

(2)試求長期之後，甲、乙、丙三種版本三年後的市占率(穩定狀態)各為多少？

[分析]：

(1) 各校使用的數學教科書有三種狀態：

S_1 (甲版)；S_2 (乙版)；S_3 (丙版)。

(2) 求轉移矩陣

$$P=\begin{array}{c} \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{轉購}} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{matrix} \xrightarrow{\text{轉購}} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \end{matrix}\text{。}$$

(3) 目前甲、乙、丙三種版本的市占率為

$$X_0=\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{甲} \\ \leftarrow \text{乙} \\ \leftarrow \text{丙} \end{matrix}\text{，設經 } k \text{ 年後的市占率 } X_k=\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{甲} \\ \leftarrow \text{乙} \\ \leftarrow \text{丙} \end{matrix}\text{。}$$

[解法]：

$$(1)X_1=PX_0=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.26 \\ 0.33 \end{bmatrix},$$

$$X_2=PX_1=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.26 \\ 0.33 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.408 \\ 0.252 \\ 0.340 \end{bmatrix}\text{。}$$

$$X_3=PX_2=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.408 \\ 0.252 \\ 0.340 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.4068 \\ 0.2504 \\ 0.3428 \end{bmatrix}\text{。}$$

故預估三年後甲、乙、丙三種版本之市占率為 40.68%，25.04%，34.28%。

$$(2)\ \text{設穩定狀態的機率矩陣 } X=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{甲} \\ \leftarrow \text{乙} \\ \leftarrow \text{丙} \end{matrix}\text{，轉移矩陣 } P=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix},$$

由 $PX=X$ 得

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\ (a+b+c=1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5a+4b+3c=0 & \text{——①} \\ 2a-6b+2c=0 & \text{——②} \\ 3a+2b-5c=0 & \text{——③} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -11a+0b+13c=0 \\ 11a+0b-13c=0 \\ 3a+2b-5c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11a+0b+13c=0 \\ 3a+2b-5c=0 \end{cases}$$

$\because (a,b,c)$異於$(0,0,0)$，

故 $a：b；c=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}：\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}：\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=13：11：8$，又 $a+b+c=1$，

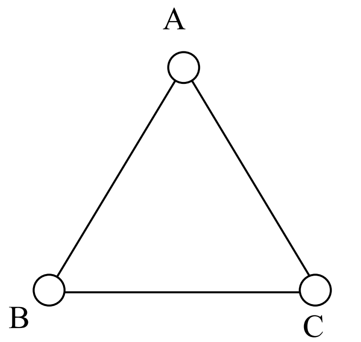
所以 $a=\dfrac{13}{32}=0.40625$，$b=\dfrac{8}{32}=0.25$，$c=\dfrac{11}{32}=0.34375$

即 $X=\begin{bmatrix} 0.40625 \\ 0.25000 \\ 0.34375 \end{bmatrix}\begin{matrix} \leftarrow 甲 \\ \leftarrow 乙 \\ \leftarrow 丙 \end{matrix}$ 為“**穩定狀態**”。

[例題11] 有一夢幻雞排小吃攤每天晚上在 A、B、C 三個夜市之間擇一攤營業。此三個夜市相鄰關係如右圖所示。每天老闆決定隔夜繼續在同一個夜市經營，或轉而前往相鄰任一夜市營業之機率分別為$\dfrac{1}{2}$與$\dfrac{1}{4}$。若星期日晚上夢幻雞排小吃攤出現在 A 夜市，請問

(1)星期二(兩天後)出現在 A 夜市的機率為何？

(2)星期三(三天後)出現在 B 夜市的機率為何？



Ans：(1) $\dfrac{3}{8}$ (2) $\dfrac{21}{64}$

[例題12] 設 A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$為二階實係數方陣

(1)當 A 為轉移矩陣時，試敘述實數 a、b、c、d 需滿足的條件。

(2)試證：當 A 為轉移矩陣時，A^2 也是轉移矩陣(式中 A^2 代表 A 與 A 的乘積) (2011 指定乙)

[解法]：

(1)a,b,c,d 均為正實數，且第一行各項之和 $a+c=1$、第二行各項之和 $b+d=1$。

(2) $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$\because a$、b、c、d 均為正實數，$\therefore$ A^2 中各項亦為正實數。

$\because a+c=1$，$b+d=1$

A^2 第一行各項之和$(a^2+bc)+(ac+cd)=a(a+c)+c(b+d)=a+c=1$

A^2 第二行各項之和$(ab+bd)+(bc+d^2)=b(a+c)+d(b+d)=b+d=1$。故 A^2 為轉移矩陣。

[例題13] 設有 A，B 兩支大瓶子，開始時，A 瓶裝有 a 公升的純果汁，B 瓶裝有 b 公升的淨水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶，均勻混合後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶。設 n 輪操作後 A 瓶有 a_n 公升的溶液，B 瓶有 b_n 公升的溶液。

已知二階方陣 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ 滿足：$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$。

(1) 求二階方陣 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$。

(2) 當 $a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$時，求 a_{100} 及 b_{100}。

(3) 在第二輪操作後，A 瓶的溶液中有百分之多少的“果汁”。

Ans：(1) $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ (2) $a_{100}=\dfrac{2}{3}$，$b_{100}=\dfrac{1}{3}$ (3) 68.75％

(練習11)設某地區有甲乙兩種報紙，訂戶總人數不變，且每一年訂戶變化皆如下述：今年訂閱甲報的人有$\frac{1}{3}$明年會繼續訂閱甲報，有$\frac{2}{3}$會改定乙報；今年訂閱乙報的人有$\frac{3}{5}$明年會改訂閱甲報，有$\frac{2}{5}$會繼續定乙報，根據這些資料，請寫出這項資料的推移矩陣 A，當市場趨於穩定狀態時，甲乙兩種報紙市場佔有率之比為何？

Ans：A=$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$，9：10

(練習12)台北市捷運局曾做過調查，消費者中原來搭捷運者有 80%繼續搭乘捷運，有 10%會改為自行開車，有 10%改為騎機車；原來自行開車的人有 30%改搭捷運，有 50%會繼續開車，有 20%改為騎機車；原來騎機車者有 20%改為搭捷運，有 20%會改為自行開車，有 60%會繼續騎機車；假設台北市人口數不變，且目前有 20%的消費者採用捷運系統，有 30%的人自行開車，有 50%的人騎機車為交通工具。

(a)試自行定義狀態，並寫出推移矩陣。

(b)一年後將有多少比例的消費者採用捷運系統為交通工具？

(c)長期而言，將有多少比例的人會搭乘捷運？

Ans：(a)$\begin{array}{c} \\ \text{捷運} \\ \text{開車} \\ \text{機車} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{捷運} & \text{開車} & \text{機車} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$(b)35%(c)$\frac{16}{29}$

綜合練習

(1) 小惠有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天， 志明向她借用這台自行車，她答應借用，但只告訴志明號碼鎖的密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式：$\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

志明卻一直無法解出正確的密碼， 而不能使用這台自行車。請你(妳)幫忙志明求出這副號碼鎖的正確密碼。 (2010 指定乙)

(2) 設 A=$\begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix}$、B=$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ c & d \end{bmatrix}$。已知 AB=$\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$且 A 的行列式之值為 2，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $9a-4b=-2$(2) $ac=-24$(3) $d=-15$ (4) $\begin{bmatrix} b & -a \\ -9 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。(2011 指定甲)

(3) 用“乘法反方陣”同時解下列二個方程組。

(a) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 5x+3y=7 \end{cases}$。 (b) $\begin{cases} 2u+v=1 \\ 5u+3v=4 \end{cases}$。

(4) 設 A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，I=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則

(a)若實數 a,b 使得，$A^2=aA+bI$，試求 a,b 之值。

(b)若實數 c,d 使得，$A^{-1}=cA+dI$，試求 c,d 之值。

(5) 2 階方陣 A=$\begin{bmatrix} t & 5 \\ 1 & t-4 \end{bmatrix}$，試回答下列問題：

(a)若 A 不為可逆方陣，求 t 的值。

(b)若 A 為可逆方陣，用 t 表示 A^{-1}。

(c)$-2A-I=\begin{bmatrix} x^2 & -3x-y \\ y-9 & z+2 \end{bmatrix}$，試求滿足此條件的 x,y,z,t 的值。

(6) 令 A=$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$，

(a)試求實數 t，使得 $A-tI_2$ 沒有乘法反方陣。(有兩解)

(b)對於(a)中的每個解 t，試求出所有$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$使得$(A-tI_2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

(7) 設 A、B、C 皆為 3×3 矩陣，則下列敘述哪些是正確的?

(A) AB=BA 恆成立 (B)(AB)C=A(BC)恆成立 (C)若 AB=0 則 A=0 或 B=0

(D)若 $\det(A)\neq 0$ 且 $AB=AC$，則 $B=C$ (E)$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 恆成立

(8) 設 A、B 皆為二階方陣且 I、O 分別為二階單位方陣與零矩陣，則下列何者錯誤？

(A)若 AB=O，則 BA=O (B)若 AB=I，則 BA=I (C)$A^2-I=(A+I)(A-I)$

(D)若 $A^2=I$，則 $A=I$ 或 $A=-I$　(E)若 AB=O，則 A=O 或 B=O。

(9) 已知 A、B、C 為 n 階方陣，$O_{n\times n}$ 為 n 階零矩陣，則下列何者為真？
(A)det(A+B)=det(A)+det(B)　(B)若 k 為實數，det(kA)=$k$det(A)　(C)若 AB=AC 且 det(A)≠0，則 B=C (D)若 A、B 均為可逆方陣，則 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
(E)若 AB=BA，則 $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$。

(10) 設 A，B 均為 3 階方陣，A^{-1} 存在，C 為非零矩陣，I 為 3 階單位方陣，O 為零矩陣，請選出下列正確的選項：
(A) $\det(A)\det(A^{-1})=1$
(B) $\det(5A)=125\det(A)$
(C) $(AB)^2=A^2B^2$
(D)若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$
(E)若方程組 $AX=C$ 恰存在一組解，則 $\det(A)\neq 0$

(11) 設 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$。
(a) 求 det (A) 及 A^{-1}。
(b) 若 $AX=B$，求矩陣 X。

(12) 有關矩陣 A=$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$與矩陣 B=$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，試問下列哪些選項是正確的？
(1)AB=BA　(2)$A^2B=BA^2$　(3)$A^{11}B^3=B^6A^5$　(4)$AB^{12}=A^7$　(5)$(ABA)^{15}=AB^{15}A$。(2007 指定甲)

(13) 設實係數二階方陣 A 滿足 A$\begin{pmatrix}7\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$，A$\begin{pmatrix}9\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$，若 A=$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$，則
a=_____，b=______，c=_______，d=________。(2006 指定甲)

(14)三個二階可逆方陣 A=$\begin{bmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$、B=$\begin{bmatrix}x & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$、C=$\begin{bmatrix}x & 1\\ y & 3\end{bmatrix}$，且滿足 $BA^{-1}=C^{-1}B$
試求實數 x,y 的值。

(15) 若矩陣 A 滿足方程式 $X^2-2X-3I=O$ (I、O 分別代表單位方陣與零矩陣)，則 A 的乘法反元素=？

(16) 設二階可逆方陣 A 滿足：A$\begin{bmatrix}a\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ b\end{bmatrix}$且 A$\begin{bmatrix}1\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ 1\end{bmatrix}$，試以 a,b 表示矩陣 A。

(17) 設 A=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}$、P=$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$且 $D=PAP^{-1}$，則
(a)矩陣 D=？　(b)利用 $D=PAP^{-1}$，計算 A^n=？

(18) 若二階方陣 A 滿足 $A^3=\begin{bmatrix}3 & -10\\ 2 & -7\end{bmatrix}$ 且 $A^5=\begin{bmatrix}7 & -25\\ 5 & -18\end{bmatrix}$，試求 A=？

(19) 一實驗室培養兩種菌，令 $\langle a_n\rangle$ 和 $\langle b_n\rangle$ 分別代表兩種培養菌在時間點 n 的數量，彼此有如下的關係：$a_{n+1}=2(a_n+b_n),\quad b_{n+1}=2b_n \quad (n=0,1,2,\cdots).$

若二階方陣 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix}a_{n+3}\\ b_{n+3}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，(其中 $n=0,1,2,\cdots$)，則

$a=$______，$b=$______，$c=$______，$d=$______。(2005 指定乙)

(20) 設 $\begin{cases}a_n=a_{n-1}-2b_{n-1}\\ b_n=a_{n-1}+4b_{n-1}\end{cases}$ 表為 $\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_{n-1}\\ b_{n-1}\end{bmatrix}$，則：

(a)令 $P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ 時，求 $P^{-1}AP$。

(b)利用 $P^{-1}A^nP=(P^{-1}AP)^n$，n 為自然數，求 A^n=？

(21) 設 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & c\\ a & b\end{bmatrix}$ 是一個轉移矩陣，若 $A^2=\begin{bmatrix}\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{bmatrix}$，試求出 a,b,c 的值。

(22) 設 A,B 是 2×2 階的轉移矩陣，且 X 為 2×1 階的機率向量，且滿足 Y=AX，試問下列敘述哪些是正確的？

(1)A^2 是轉移矩陣。 (2)AB^2 不是轉移矩陣 (3)$\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}B$ 是轉移矩陣

(4)Y 是 2×1 階的機率向量 (5)A^{-1} 是轉移矩陣。

(23) 所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩個條件：

(甲)該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數，

(乙)該矩陣的每一行的數字相加都等於 1

以 2×2 矩陣為例，$\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.8 & 0.7\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0.9 & 0.6\\ 0.1 & 0.4\end{bmatrix}$，滿足(甲)(乙)這兩個條件，因此都是轉移矩陣。今設 A、B 是兩個 $n\times n$ 的轉移矩陣，請問下列哪些敘述是正確的？

(1)A^2 是轉移矩陣 (2)AB 不滿足條件(乙) (3)$\frac{1}{2}(A+B)$ 是轉移矩陣 (4)$\frac{1}{4}(A^2+B^2)$ 是轉移矩陣。(2002 指定考科甲)

(24) 設甲袋中有 3 白球 1 紅球，乙袋中有 2 白球，現自兩袋中各取出一球交換，再第二次各取一球交換，如此重複交換。在長期交換後，甲袋中有一紅球的機率為________。

(25) 某籃球選手經常作罰球投籃練習，依據過去的經驗，當他前一球投進時，下一球的命中率為 80%；當他前一球不進時，下一球的命中率為 60%。

(a)請寫出此選手投籃的轉移矩陣 A。

(b)在暖身球投進之後，分別求接下來投進第 1 球、第 2 球、第 3 球的機率。

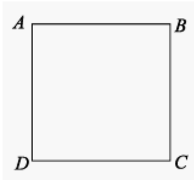
(c)長期而言，此選手的投籃命中率為何？

(26) 甲乙兩個袋子，甲袋內裝有兩顆編號 3 的球，乙袋內裝有兩顆編號 4 的球，每一顆球被抽到的機會相等，今從各袋中抽出一球後互相交換
(a)試求交換五次後，甲袋內兩顆球號和為偶數的機率。
(b)若經長久交換後成穩定狀態，試求此時乙袋內兩顆球號和為奇數的機率。
(2009 台北區指考模擬考 1)

(27) 已知甲袋中裝有 1 紅球 2 白球，乙袋中裝有 2 紅球 1 白球，現依下列規則取球：每次取一球後放回原袋，若某次取出白球，則下一次由乙袋取球；若某次取出紅球則下一次由甲袋取球，且第一次由甲袋取球。設第 n 次取中白球之機率為 P_n，則 (a)P_3=？　(b)試求穩定狀態 X=？

(28) 設甲袋中有 2 個白球，乙袋中有 2 個紅球(設各個球大小及觸感相同)，現在每次自袋中各取一球交換，回答下列小題：
(a)試求在交換兩次後，甲袋中有 2 紅球的機率。
(b)試求甲袋的兩球之轉移矩陣 A。
(c)試求在長期交換下，成穩定狀態，甲袋中有 2 紅球的機率。

(29) 有一人流浪於 A，B，C，D 四鎮間，此四鎮間相鄰關係如下圖。假設每日清晨，此人決定當日夜晚繼續留宿該鎮，或改而前往相鄰任一鎮之機率皆為$\frac{1}{3}$。若此人第一夜宿 A 鎮，
(a)第三夜亦宿於 A 鎮之機率為多少？
(b)第五夜此人宿於 A 鎮之機率為多少？宿於 C 鎮之機率為多少？



進階問題

(30) 設三階方陣 A=$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & x\end{bmatrix}$，其中 x 為實數，
(a)若 A 為可逆方陣，則 x 要滿足什麼條件？　(b)若 x=4，則 A^{-1}=？

(31) 設 A=$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，試求 A^{-1}=？

(32) 設 A=$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$B_1$、$B_2$ 為兩個 2 階方陣，Q 為 3 階方陣，且這些方陣滿足下列關係：
$B_1AQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$B_2AQ=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$且 $B_1+B_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
(a)試求 B_1 與 B_2。
(b)若 $AQ^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，則 Q=？

(33) 設 a 為實數，方陣 A=$\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$、P=$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，B 為 2 階方陣且滿足 AB=BA

$P^{-1}BP=\begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$，試回答下列問題：

(a)試求 $P^{-1}AP$=？　(b)試求 a 的值與方陣 B　(c)試求$(A+B)^n$=？

(34) (a)設 a 為實數，試證明：對於所有的自然數 n，$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

(b)設 A=$\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$，P=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，求 $P^{-1}AP$=？

(c)試求 A^n=？

綜合練習解答

(1) $a=7,b=3,c=2,d=1$

(2) (1)(3)

(3) (a)$(x,y)=(2,-1)$，$(u,v)=(-1,3)$

(4) (a)$a=5$，$b=2$ (b)$c=\frac{1}{2}$ ，$d=\frac{-5}{2}$

(5) (a)$t=5$ 或-1 (b)$A^{-1}=\frac{1}{t^2-4t-5}\begin{bmatrix} t-4 & -5 \\ -1 & t \end{bmatrix}$ (c)$x=1$，$y=7$，$z=7$，$t=-1$

(6) (a)$t=2$ 或 6 (b)當 $t=2$ 時，$(x,y)=(s,-s)$，s 為實數 ；
當 $t=6$ 時，$(x,y)=(s,3s)$，s 為實數。

(7) (B)(D)

【解法】

(A) × ：矩陣乘法沒有交換性

(B) ○

(C) × ：例如：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，但前二者都不是零矩陣。

(D)○ ：行列式值不為 0 是有反方陣的充要條件，
故 $\det(A)\neq 0$ 表 A^{-1} 存在，
又 $AB=AC \Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}AC \Rightarrow B=C$

(E) × ：$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

這是矩陣基本性質，矩陣在某些性質上和「數字」很不相同，
容易混淆，因此學習上要特別澄清這些觀念。

(8) (A)(D)(E)

[提示：(A)反例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$滿足 AB=O 但 BA≠O，(D)反例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$(E)反例同(A)]

(9) (C)(D)(E)

(10) (A)(B)(E)

(11) (a)$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (b)$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

(12) (2)(4)(5)

(13) a=4，b=−3，c=−9，d=7

(14) x=5，y=0 [提示：利用 CB=BA 去找 x,y 的關係式，並注意 det(B)≠0]

(15) $A^{-1}=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I$ [提示：$A^2-2A-3I=O\Rightarrow A(A-2I)=3I\Rightarrow A(\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}I)=I$]

(16) $A=\frac{1}{ab-1}\begin{bmatrix} b-a & a^2-1 \\ b^2-1 & a-b \end{bmatrix}$

(17) (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2^{n+1}-3^n & 3^n-2^n \\ 2^{n+1}-2\times 3^n & 2\times 3^n-2^n \end{bmatrix}$

(18) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

[提示：先求$(A^3)^{-1}$，可得 $A^2=(A^3)^{-1}\cdot A^5$，再求$(A^2)^{-1}$，則 $A=(A^2)^{-1}\cdot A^3$]

(19) $a=8$，$b=24$，$c=0$，$d=8$

(20) (a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3^n+2^{n+1} & -2\cdot 3^n+2^{n+1} \\ 3^n-2^n & 2\cdot 3^n-2^n \end{bmatrix}$

(21) $a=\frac{2}{3}$ ，$b=\frac{1}{3}$，$c=\frac{2}{3}$

(22) (1)(3)(4)

(23) (1)(3)

(24) $\frac{2}{3}$ [提示：轉移矩陣為$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix}$]

(25) (a)$A=\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ (b)0.8 、0.76、0.752 (c)0.75

(26) (a)$\frac{5}{16}$ (b)$\frac{2}{3}$

(27) (a)$\frac{14}{27}$ (b)$\frac{1}{2}$

(28) (a)$\frac{1}{4}$ (b) $A=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} 2W \\ 1W \\ 0W \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 2W & 1W & 0W \end{array} \end{array}$ (c)$\frac{1}{6}$

(29) (a)$\frac{1}{3}$ (b)$\frac{7}{27}$、$\frac{20}{81}$

(30) (a)$x \neq 6$ (b)$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

(31) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(32) (a)$B_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (b)$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(33) (a)$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (b)$a=0$，$B=\begin{bmatrix} -7 & 15 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5\cdot 3^{n-1}-4\cdot 6^{n-1} & -5\cdot 3^{n-1}+10\cdot 6^{n-1} \\ 2\cdot 3^{n-1}-4\cdot 6^{n-1} & -2\cdot 3^{n-1}+10\cdot 6^{n-1} \end{bmatrix}$

[提示：(b)$AB=BA \Rightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP) \Rightarrow a=0 \Rightarrow B=\begin{bmatrix} -7 & 15 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$

(c)$P^{-1}(A+B)P=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow [P^{-1}(A+B)P]^n=P^{-1}(A+B)^nP=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{bmatrix}$]

(34) (a)利用數學歸納法 (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1-6n & 4n \\ -9n & 6n+1 \end{bmatrix}$