13.6

方向導數和梯度

Directional Derivatives and Gradients

目標

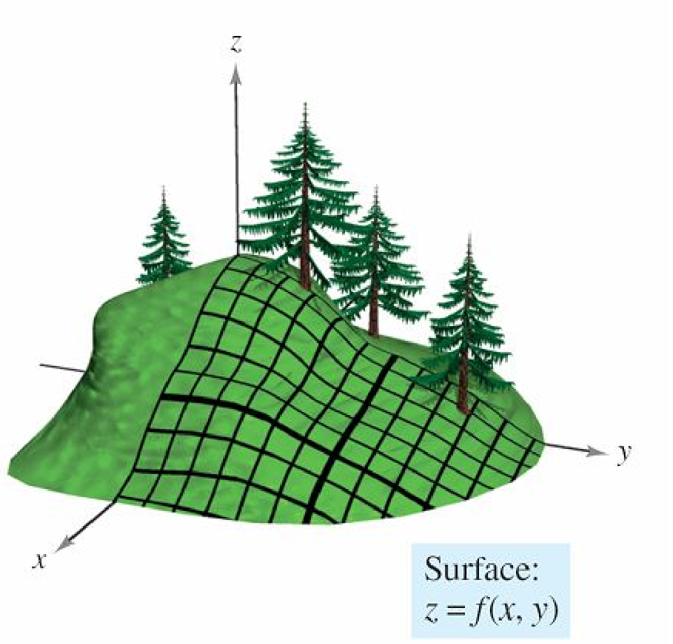
- 求出雙變數函數的方向導數
- 求出雙變數函數的梯度(gradient)
- 梯度的應用
- 推廣方向導數與梯度到參變數函數

方向導數

Directional Derivative

方向導數

假設你站在山坡上，想知道山坡的坡度(傾斜度)。



方向導數

假設山坡表示爲$z = f(x, y)$，你應該已經會作主要兩個方向的斜率。

y方向的斜率可以由對y偏微分得到。

同樣地，藉由對x偏微分得到x方向的斜率。

使用這兩個偏微分可以求出任何方向的斜率。

方向導數

假設$z = f(x, y)$ 爲一個曲面，$P(x_0, y_0)$ 爲 f 定義域內的一個點，如下圖。

單位向量 $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ 的斜率，其中θ是此向量與x軸正向夾角。單位向量 $\mathbf{u}$ 可以表示對任何方向導數的方向。

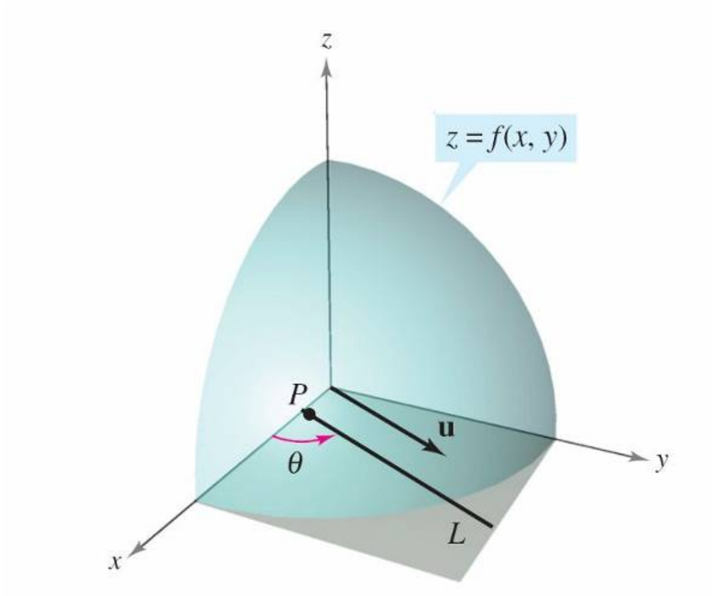


Figure 13.43

方向導數

求**u**方向的斜率，可以考慮如下。

作一個通過P點、平行於**u**方向的垂直平面，如下圖。

該垂直平面與曲面$z = f(x, y)$相交於曲線C。

曲面在點$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$上沿著**u**方向的斜率就是曲線C在點$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$的斜率。

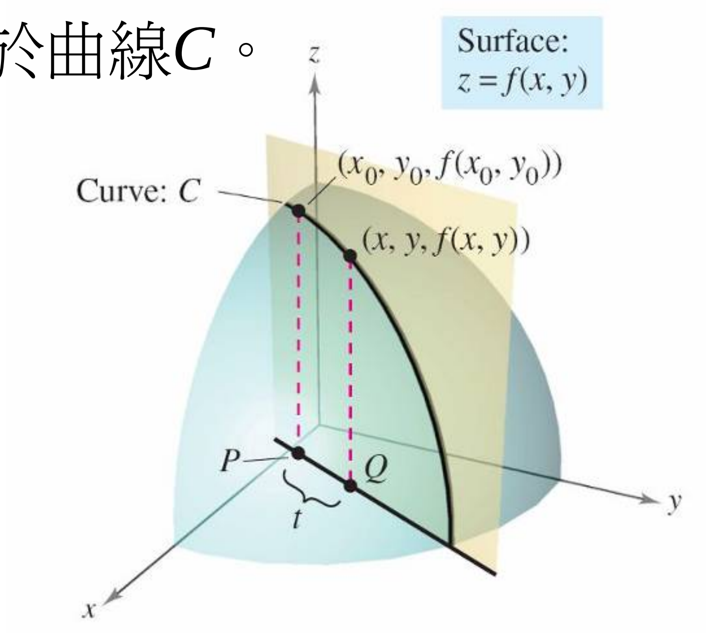


Figure 13.44

方向導數

連接點$P\ (x_0, y_0)$與點$Q\ (x, y)$ 的直線L可以用參數式表示:

$$x = x_0 + t\cos\theta \qquad 與 \qquad y = y_0 + t\sin\theta，$$

t 爲任意時數，$Q(x, y)$則是直線L上的任一點 。

對每一個點P和點Q在曲面上都會有一個相對應的點。

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ Point above P

$(x, y, f(x, y))$ Point above Q

方向導數

P和Q之間的距離為

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2} = |t|$$

連接點$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 、點$(x, y, f(x, y))$的割線斜率，可以寫成

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

最後，讓t 趨近於0時，我們可以下列定義。

方向導數

定義:方向導數(Directional Derivative)

設 $f(x,y)$為一個雙變數函數、 $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$為一單位向量。如果下列的極限值存在

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{t},$$

則 f 沿著$\mathbf{u}$方向的方向導數該極限值，此方向導數記為 $D_{\mathbf{u}} f$ 。

補充例題

求 $f(x, y) = x^2 + xy$ 在點 $P_0(1, 2)$、沿著向量 $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$ 方向的方向導數。

解:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \qquad \text{Equation (1)}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{f\left(1 + s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - (1^2 + 1\cdot 2)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\left(1 + \frac{2s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) + \left(2 + \frac{3s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) - 3}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\frac{5s}{\sqrt{2}} + s^2}{s} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + s\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 0\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

方向導數

在求方向導數時，除了使用定義式的求法之外，我們可以使用偏微分來簡化我們的計算。

定理13.9 方向導數(Directional Derivative)

設 $f(x,y)$為一個雙變數函數，則 f 沿著單位向量

$\mathbf{u} = \cos\,\theta\,\mathbf{i} + \sin\,\theta\,\mathbf{j}$的方向導數是

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta$$ 。

方向導數

證明:

對一個定點(fixed point) $p_0 = (x_0, y_0)$，設 $x = x_0 + t\cos\theta, y = y_0 + t\sin\theta$，

$g(t) = f(x, y)$，因為 f 為一可微雙變數函數，所以我們可以使用前一節所提的鏈鎖律來求得

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= f'(x, y) \\
&= f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt} \\
&= f_x(x, y)\,x'(t) + f_y(x, y)\,y'(t) \\
&= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta
\end{aligned}
$$

(將 x 和 y 視為以 t 為變數的單變數函數)

如果$t = 0$，則

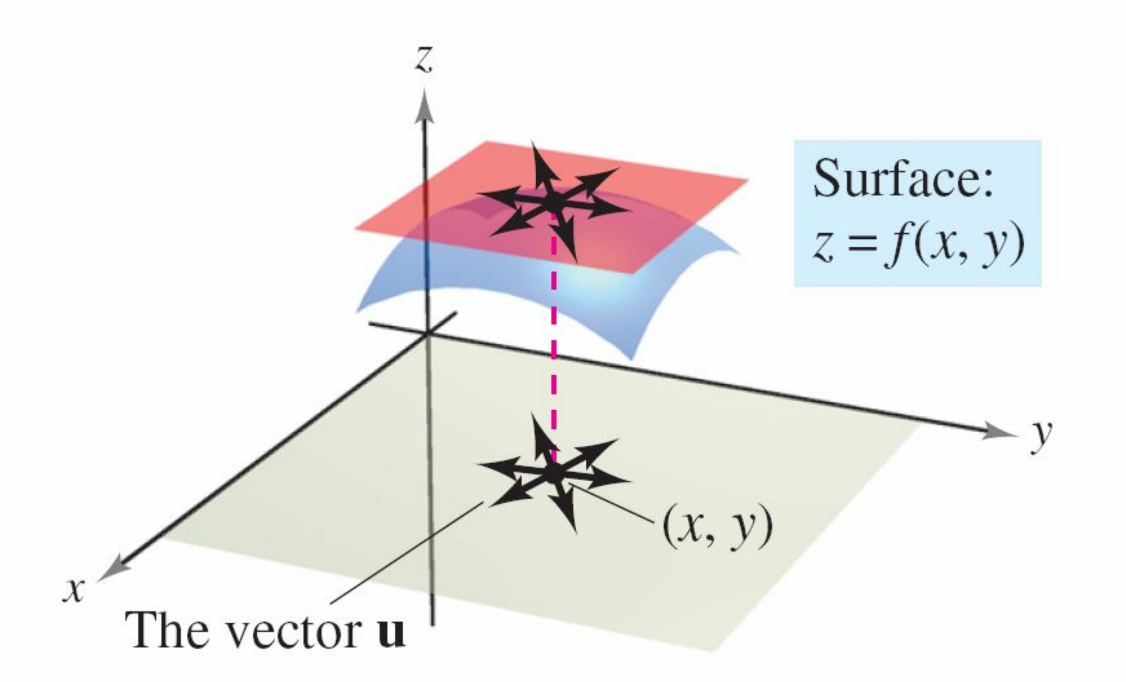
$$
\begin{aligned}
&x = x_0, y = y_0 \\
&g'(0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\sin\theta
\end{aligned}
$$

同樣地，我們也可藉由此方法來證明雙變數函數的方向導數定義式

$$g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t}$$

方向導數

每一個向量**u**的方向導數示意圖。



方向導數

其中特別的兩個是 f_x 和 f_y 。

1. Direction of positive x-axis ($\theta = 0$): $\mathbf{u} = \cos 0\,\mathbf{i} + \sin 0\,\mathbf{j} = \mathbf{i}$

$$D_{\mathbf{i}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos 0 + f_y(x, y) \sin 0 = f_x(x, y)$$

2. Direction of positive y-axis ($\theta = \pi/2$): $\mathbf{u} = \cos \dfrac{\pi}{2}\,\mathbf{i} + \sin \dfrac{\pi}{2}\,\mathbf{j} = \mathbf{j}$

$$D_{\mathbf{j}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{2} + f_y(x, y) \sin \frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$

例題一

求 $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ 在點(1, 2) 、沿著向量

$\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}$ 方向的方向導數。

解:

因為 f_x 跟 f_y 都連續且 f 可微，所以使用定理13.9。

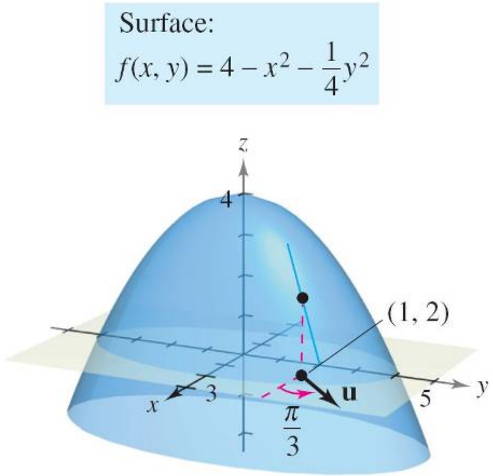
$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta \\
&= (-2x)\cos\theta + \left(-\frac{y}{2}\right)\sin\theta
\end{aligned}
$$

例題一

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta$$

$$= (-2x)\cos\theta + \left(-\frac{y}{2}\right)\sin\theta$$

代入 $\theta = \pi/3$ 、 $x = 1$ 、 $y = 2$ ，則



$$D_{\mathbf{u}}f(1, 2) = (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\approx -1.866.$$

例題二

求 $f(x,y)=x^2\sin 2y$ 在點$(1,\ \pi/2)$ 、沿著向量 $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ 方向的方向導數。

解:

首先，求 $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ 方向的單位向量

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{j}=\cos\theta\mathbf{i}+\sin\theta\mathbf{j}\text{。}$$

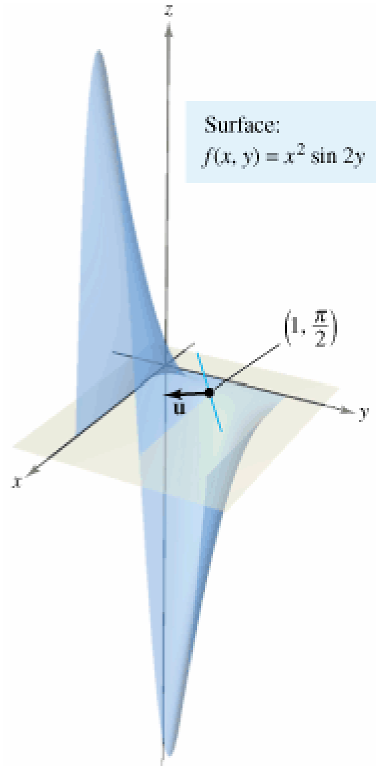
使用定理13.9，得

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=(2x\sin 2y)(\cos\theta)+(2x^2\cos 2y)(\sin\theta)$$

$$D_{\mathbf{u}}f\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=(2\sin\pi)\left(\frac{3}{5}\right)+(2\cos\pi)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$=(0)\left(\frac{3}{5}\right)+(-2)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$=8/5$。

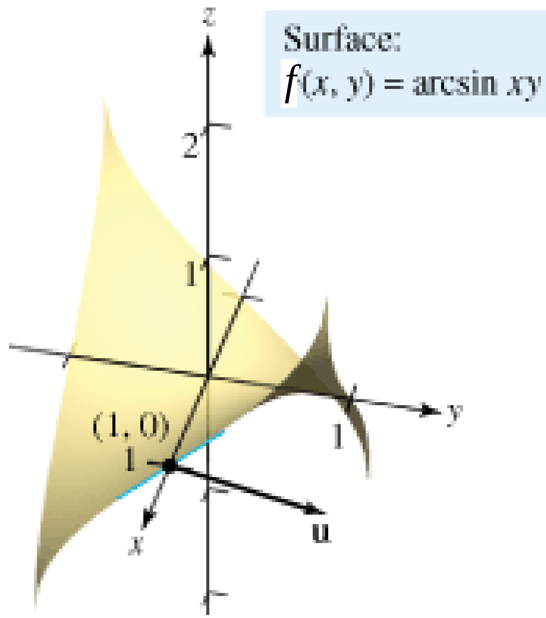


練習二

求 $f(x, y) = \arcsin(xy)$在點(1, 0) 、沿著向量$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$方向上的方向導數。

解:

使用定理13.9，得



練習二

求 $f(x, y) = \arcsin(xy)$在點(1, 0) 、沿著向量$\mathbf{v} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$方向上的方向導數。

解:

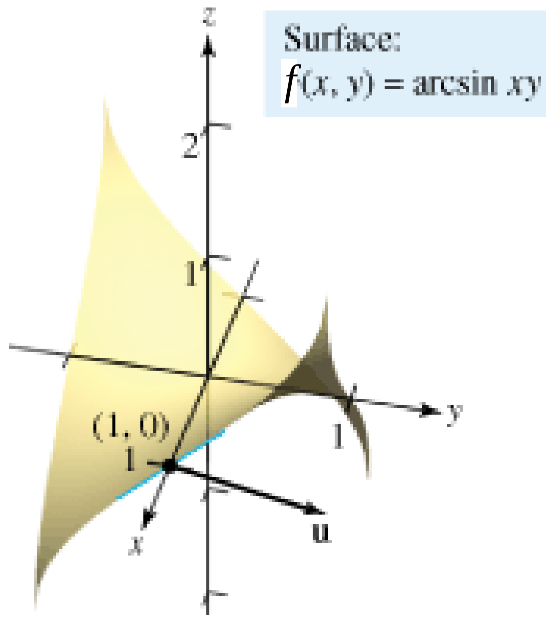
使用定理13.9，得

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2y^2}} \cos\theta + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2y^2}} \sin\theta$$

$$= \frac{y}{1 - x^2y^2} \frac{\sqrt{26}}{26} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2y^2}} \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 0) = 0\left(\frac{\sqrt{26}}{26}\right) + 1\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{26}}{26}$$



雙變數函數的梯度

The Gradient of a Function of Two Variables

雙變數函數的梯度

雙變數函數的梯度是一個雙變數的向量值函數。

定義：雙變數函數的梯度(Gradient of a Function of Two Variables)

設 $f(x,y)$為一個雙變數函數且f_x 與 f_y 都存在，則 f 的梯度

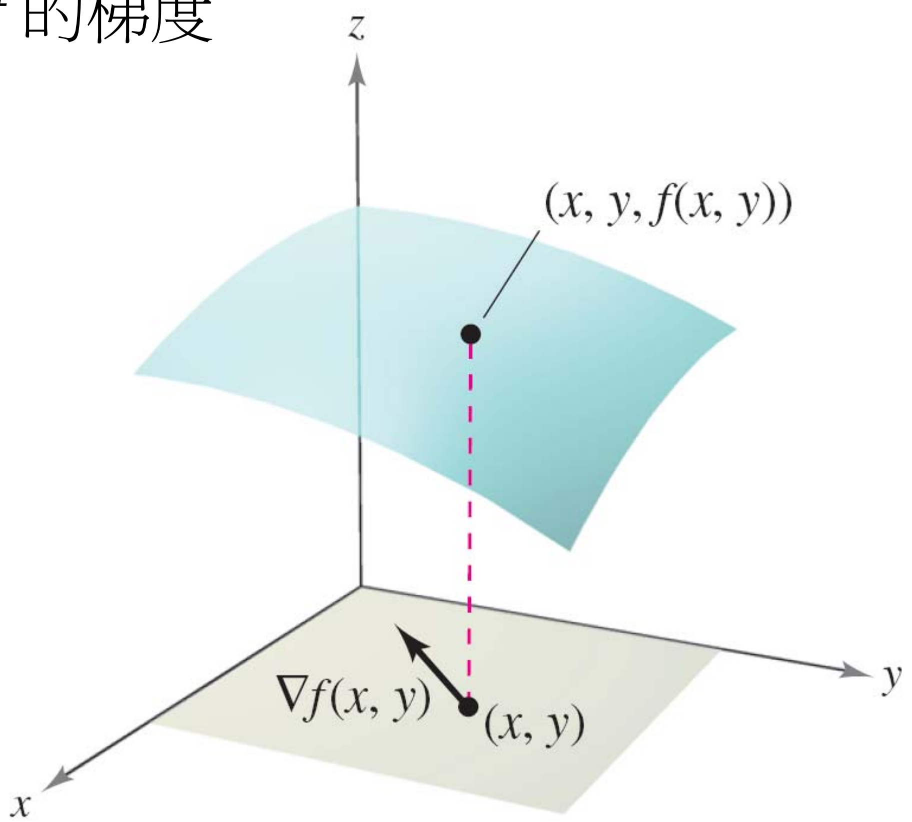
(標記為 ∇f)是

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j}$$ 。

雙變數函數的梯度

雙變數函數 f 的梯度

在xy平面上。



The gradient of f is a vector in the xy-plane.

Figure 13.48

例題三

求 $f(x, y) = y \ln x + xy^2$ 在點 (1, 2)的梯度。

解:

根據定義，

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x} + y^2 \text{、} f_y(x, y) = \ln x + 2xy \text{。}$$

所以

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\mathbf{i} + (\ln x + 2xy)\mathbf{j}.$$

在點(1, 2)的梯度是

$$\nabla f(1, 2) = \left(\frac{2}{1} + 2^2\right)\mathbf{i} + [\ln 1 + 2(1)(2)]\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.$$

練習三

求 $f(x, y) = \ln x^2y$ 在 點(1, 1)的梯度。

解:

練習三

求 $f(x, y) = \ln x^2y$ 在 點(1, 1)的梯度。

解:

根據定義，

$$f_x(x, y) = \frac{2yx}{x^2y} \qquad f_y(x, y) = \frac{x^2}{x^2y}$$

所以

$$\nabla f(x, y) = \frac{2yx}{x^2y}\mathbf{i} + \frac{x^2}{x^2y}\mathbf{j}$$

在點(1, 1)的梯度是

$$\nabla f(1, 1) = \frac{2(1)(1)}{(1)^2(1)}\mathbf{i} + \frac{(1)^2}{(1)^2(1)}\mathbf{j} \quad = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

雙變數函數的梯度

梯度可以用來簡化方向導數的運算，我們知道方向導數是

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)\sin\theta \text{ 。}$$

也可以表示爲

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \left[f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j} \right] \cdot [\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}] \text{。}$$

定理: 方向導數的另一形式(Alternative Form Directional Derivative)

設$f(x, y)$ 是一個可微分的雙變數函數，則 f 沿著單位向量$\mathbf{u}$方向的方向導數是

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u} \text{ 。}$$

例題四

求$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$在點$\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ 、沿著 $P\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ to $Q(0, 1)$.
方向上的梯度。

解:

先求沿著方向

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} = \left(0 + \frac{3}{4}\right)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j}$$

$$= \frac{3}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

例題四

cont’d

所以此方向的單位向量爲

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Unit vector in direction of $\overrightarrow{PQ}$

因爲$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}$，

所以 f在點$\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$的梯度爲

$$\nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = -\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}.$$

Gradient at $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

例題四

cont'd

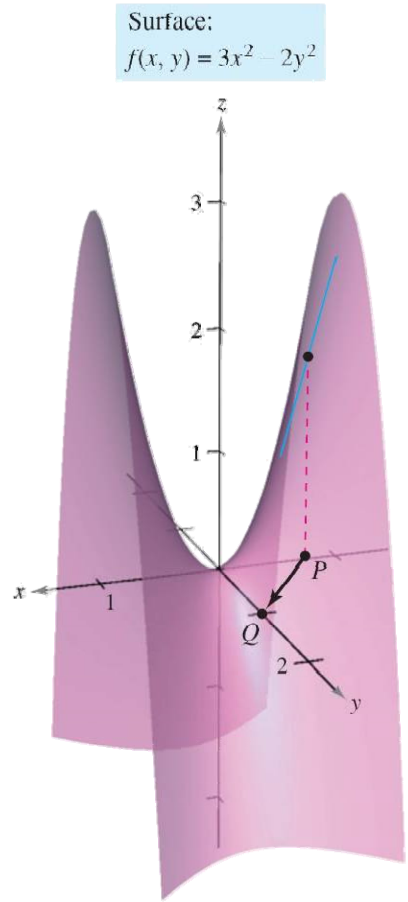
在點 $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ 的方向導數為

$$D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = \nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cdot \mathbf{u}$$

$$= \left(-\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right)$$

$$= -\frac{27}{10}.$$

Directional derivative at $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$



梯度的應用

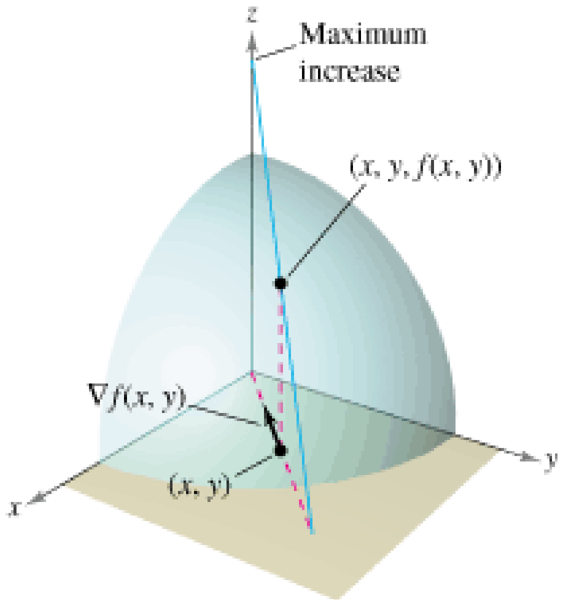
Applications of the Gradient

梯度的應用

定理13.11 梯度的性質(Properties of the Gradient)

設 f 在點 (x, y) 可微分。

1. 如果 $\nabla f(x,y)=0$，則所有方向的 $D_{\mathbf{u}} f(x,y)$ 皆爲0。
2. 函數值的最大增加方向是 $\nabla f(x,y)$。
   $D_{\mathbf{u}} f(x,y)$ 的極大值爲 $\|\nabla f(x,y)\|$。
3. 函數值的最大減少方向是
   $D_u f(x,y)$ 的極小值爲 $-\|\nabla f(x,y)\|$。



梯度的應用

證明:

如果每一個向量的 $\nabla f(x,y)=\mathbf{0}$ ，則

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}\cdot\mathbf{u}=0$$ 。

假設 $\nabla f(x,y)\neq\mathbf{0}$ ，且令 ϕ是$\nabla f(x,y)$與 $\mathbf{u}$的夾角, 則

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}} f(x,y)&=\nabla f(x,y)\cdot\mathbf{u}\\&=\|\nabla f(x,y)\|\|\mathbf{u}\|\cos\phi\\&=\|\nabla f(x,y)\|\cos\phi\end{aligned}$$ 。

當 $\cos\phi=1$時，$D_{\mathbf{u}} f(x,y)$最大值發生。所以$\phi=0$時，$\mathbf{u}$、$\nabla f(x,y)$同方向是函數值增加最大的方向。當 $\cos\phi=-1$時，$D_{\mathbf{u}} f(x,y)$最小值發生。所以$\phi=\pi$時，$\mathbf{u}$、$\nabla f(x,y)$反方向是函數值減少最大的方向。

例題五

假設金屬薄板的表面攝氏溫度用函數

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2 \text{ 表示，}$$

其中 x 跟 y 的單位是公分。請問在點(2, –3)上，哪一個方向的溫度增加最快，增加的速率爲何?

解:

溫度梯度是

$$\begin{aligned}\nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}\text{。}\end{aligned}$$

例題五

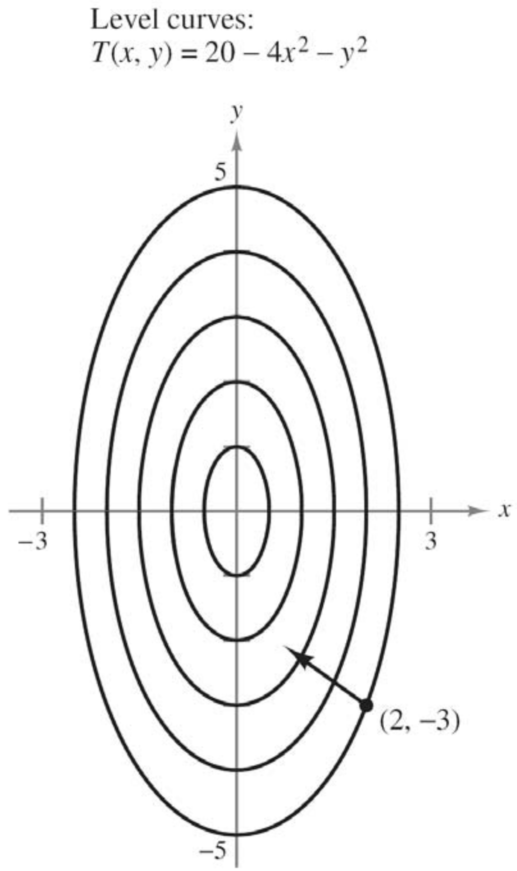
cont'd

溫度增加最大的方向爲

$\nabla T(2, -3) = -16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$。

增加的速率爲

$$\begin{aligned}\|\nabla T(2, -3)\| &= \sqrt{256 + 36} \\ &= \sqrt{292} \\ &\approx 17.09^\circ \text{ per centimeter.}\end{aligned}$$



The direction of most rapid increase in temperature at $(2, -3)$ is given by $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

練習五

設 $h(x, y)= 4000 - 0.001x^2 - 0.004y^2$ 表示某山的函數，請問登山者從點(500,300)往哪個方向爬昇的速度最快。

解:

梯度爲

所以爬昇速度最快的方向爲

練習五

設 $h(x, y) = 4000 - 0.001x^2 - 0.004y^2$ 表示某山的函數，請問登山者從點(500,300)往哪個方向爬昇的速度最快。

解:

梯度爲

$$\nabla h(x, y) = h_x(x, y)\mathbf{i} + h_y(x, y)\mathbf{j}$$

$$= -0.002x\mathbf{i} - 0.008y\mathbf{j}$$

所以爬昇速度最快的方向爲

$$\nabla h(500, 300) = -\mathbf{i} - 2.4\mathbf{j}$$

例題六

一顆粒子被放在金屬薄板的點(2, – 3)上，金屬薄板的溫度滿足$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$ 。當粒子沿著溫度增加最大的方向連續移動，找出此粒子的移動路徑?

解:

粒子的路徑表示成

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

粒子在每一點$(x(t), y(t))$的切線向量為

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}.$$

例題六

因爲粒子會往溫度增加最大的方向走，所以切線向量會等於 $\nabla T(x, y) = -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ ，所以

$$-8x = k\frac{dx}{dt} \quad 與 \quad -2y = k\frac{dy}{dt} \qquad ,$$

而k依賴 t 。所以解出上列式子之後，得到

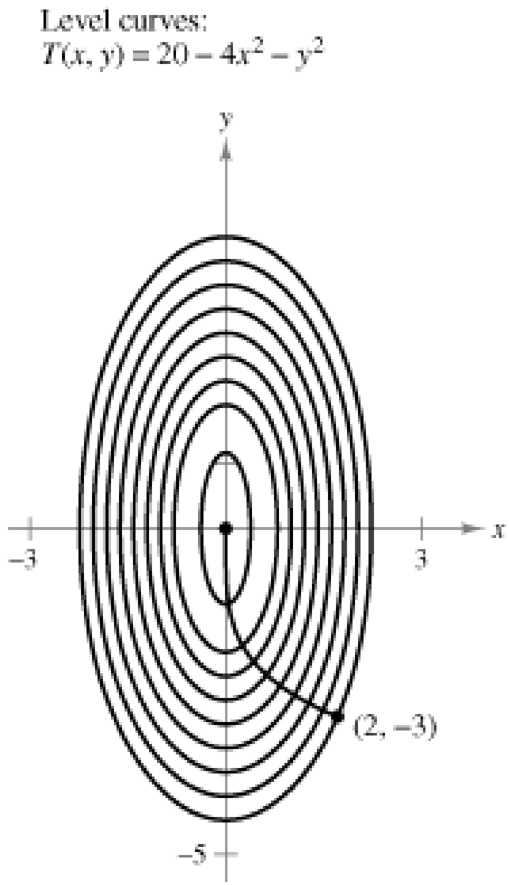
$$\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y}$$

例題六

解微分方程 $\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y}$ 後，得 $x=Cy^4$。

代入點(2, – 3) ，得 $C=2/81$。

所以此粒子的移動路徑是 $x=2y^4/81$。



梯度的應用

定理**13.12**　Gradient is Normal to Level Curves

設 f 在點(x_0,y_0)可微分且 $\nabla f\left(x_0,y_0\right)\neq\mathbf{0}$，則 $\nabla f\left(x_0,y_0\right)$ 會與通過點(x_0,y_0)的階層曲線(Level curve)垂直(normal) 。

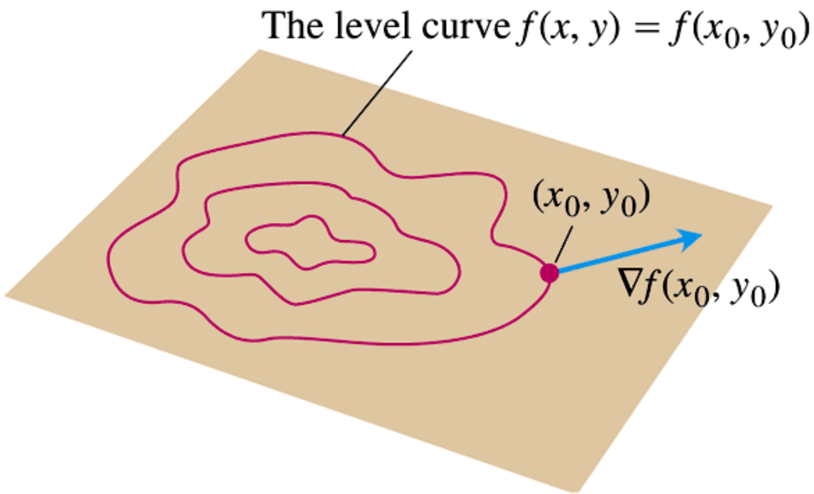


FIGURE 14.28 The gradient of a differentiable function of two variables at a point is always normal to the function's level curve through that point.

例題七

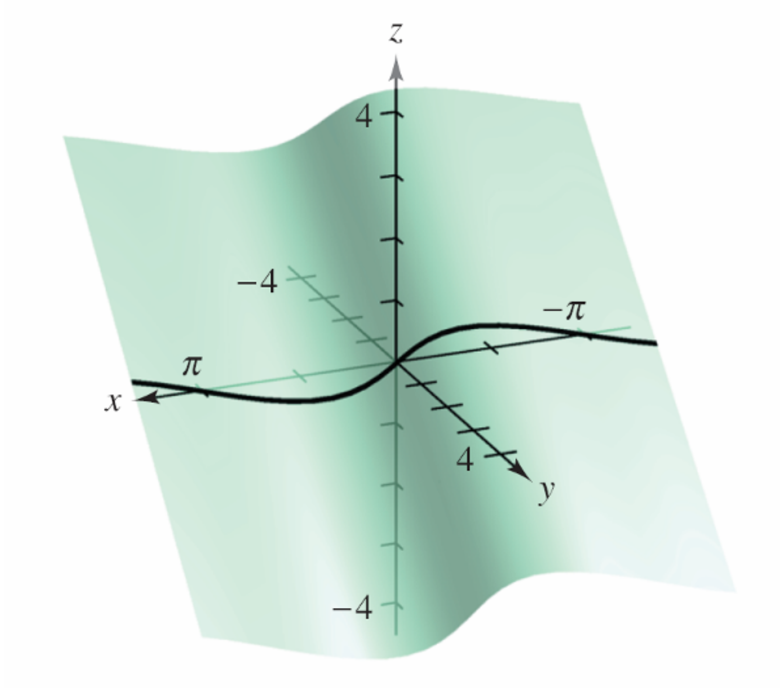
畫出$f(x, y) = y - \sin x$在$c = 0$的階層曲線並求出在曲線上眾多點的法向量。

解:

在 $c = 0$ 的階層曲線爲

$$0 = y - \sin x$$

$$y = \sin x \text{ 。}$$



The surface is given by $f(x, y) = y - \sin x$.

例題七

cont'd

$f\,(x, y)$的梯度向量爲

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$
$$= -\cos x\mathbf{i} + \mathbf{j}\text{。}$$

所以根據定理13.12，眾多點的法向量分別是

$$\nabla f\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\nabla f\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) = \mathbf{j}$$

$$\nabla f(-\pi, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

例題七

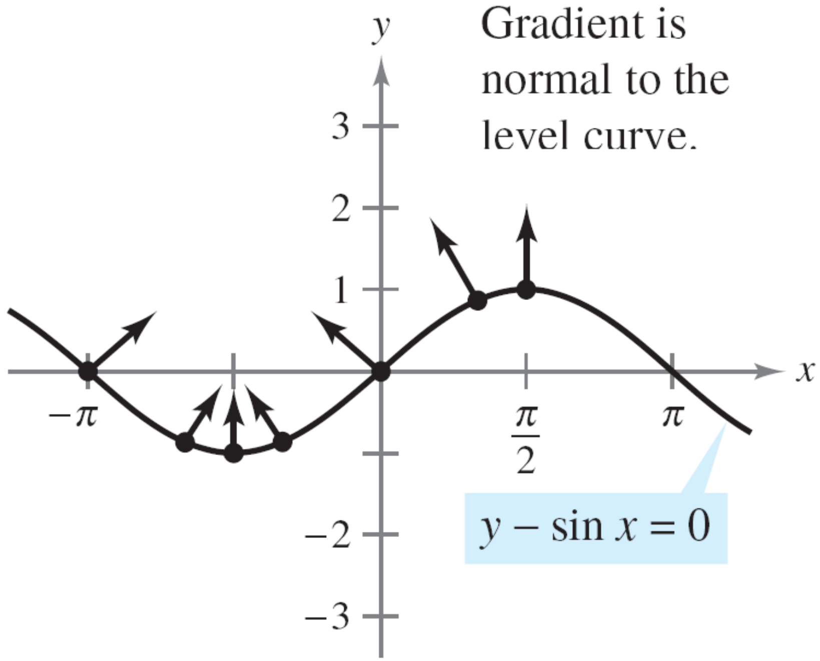
cont'd

$$\nabla f\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\nabla f(0, 0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\nabla f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \mathbf{j}.$$



The level curve is given by $f(x, y) = 0$.

練習七

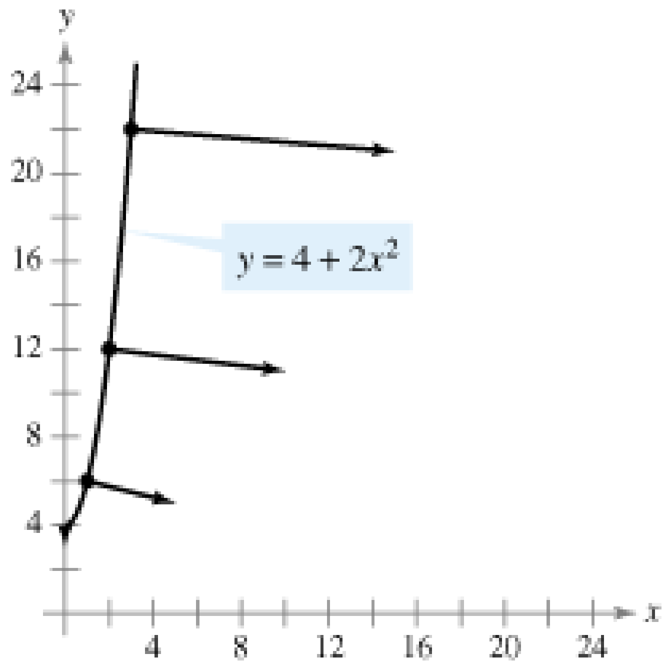
畫出 $f(x, y) = 4 + 2x^2 - y$ 在$c = 0$的階層曲線並求出在曲線上眾多點的法向量。

解:

在 $c = 0$ 的階層曲線為

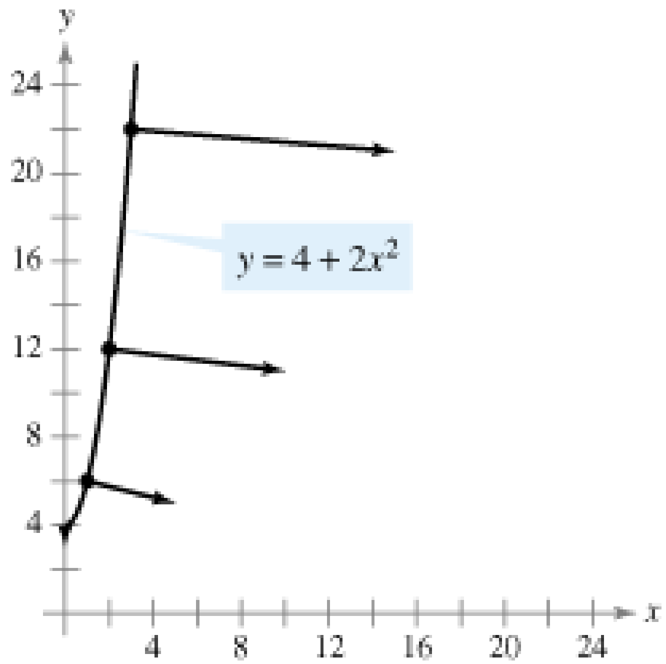
所以梯度向量為

所以任意點上的法向量為



練習七

畫出 $f(x, y) = 4 + 2x^2 - y$ 在$c = 0$的階層曲線並求出在曲線上眾多點的法向量。



解:

在 $c = 0$ 的階層曲線為

$$0 = 4 + 2x^2 - y$$

$$y = 4 + 2x^2 \text{ 。}$$

所以梯度向量為

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

$$= 4x\mathbf{i} - \mathbf{j} \text{ 。}$$

練習七

所以任意點上的法向量爲

$$\nabla f(0,4) = -\mathbf{j}$$
$$\nabla f(1,6) = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$$
$$\nabla f(2,12) = 8\mathbf{i} - \mathbf{j}$$
$$\nabla f(3,22) = 12\mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

三變數函數

Functions of Three Variables

三變數函數

定義: 參變數的方向導數與梯度

(Directional Derivative and Gradient for Three Variables)

設 $f(x,y,z)$ 為一參變數函數，with continuous first partial derivatives

f 在 $u = ai + bj + ck$ 方向上的方向導數為

$$D_u f(x,y) = af_x(x,y,z)i + bf_y(x,y,z)j + cf_z(x,y,z)k$$

在 $u = ai + bj + ck$ 方向上的梯度為

$$\nabla f(x,y,z) = f_x(x,y,z)i + f_y(x,y,z)j + f_z(x,y,z)k$$

梯度的性質

1. $D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot u$

2. 如果 $\nabla f(x,y,z) = 0$ 則對所有方向 u 之方導數 $D_u f(x,y,z) = 0$

3. $D_u f(x,y,z)$ 的極大值為 $\|\nabla f(x,y,z)\|$

4. $D_u f(x,y,z)$ 的極小值為 $-\|\nabla f(x,y,z)\|$

例題八

求$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$ 的 $\nabla f(x, y, z)$ 與在點$(2, -1, 1)$最大增加量的方向。

解:

梯度向量爲

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

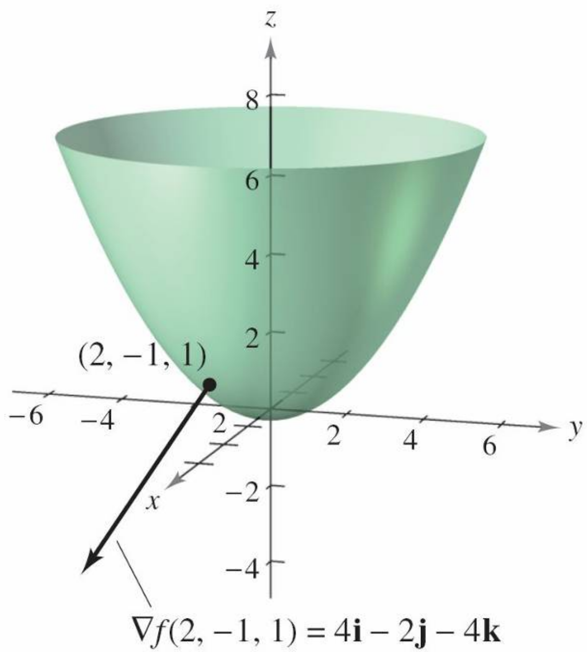
$$= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

例題八

cont'd

在點 (2, –1, 1)的最大增加量的方向是

$\nabla f(2, -1, 1) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$。



Level surface and gradient vector at $(2, -1, 1)$ for $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$

練習八

求$f(x, y, z) = x^3 + y + 3z^2$的 $\nabla f(x, y, z)$與點(–1, 2, 1)最大增加量的方向。

解:

梯度向量爲

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$= 3x^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6z\mathbf{k}\text{。}$$

所以在點 (–1 , 2, 1)的最大增加量的方向是

$$\nabla f(-1 , 2, 1) = 3\mathrm{i} + \mathrm{j} + 6\mathrm{k}\text{。}$$