13.2

極限值與連續性

Limits and Continuity

目的

- 了解平面中鄰域的定義
- 了解雙變數函數的極限值定義
- 延伸連續性的概念至雙變數函數
- 延伸連續性的概念至三變數函數

平面中的鄰域

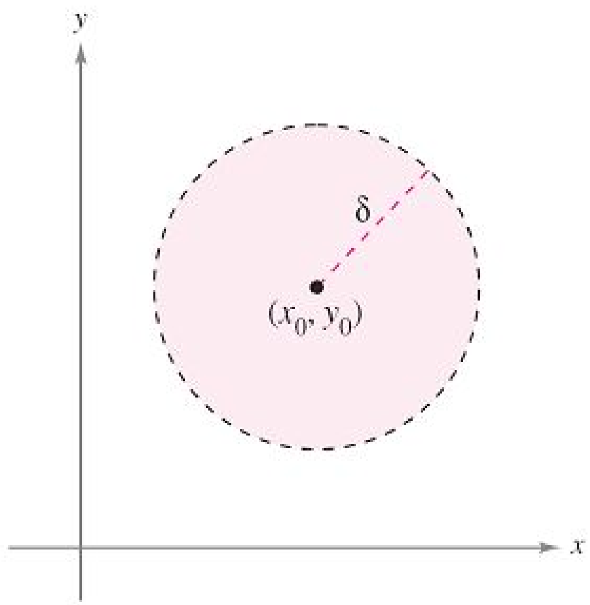
Neighborhoods in the Plane

平面中的鄰域

用平面上的點(x, y) 與點(x_0, y_0)之間的距離公式，可以定義點(x_0, y_0) 的δ-的鄰域(δ-neighborhood) ，其中(x_0, y_0) 是圓盤(disk)的中心、半徑$\delta > 0$，滿足

$$\left\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

。 Open disk

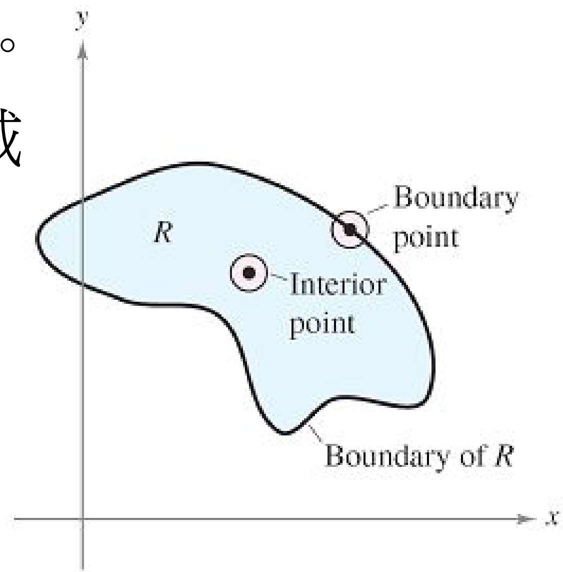


An open disk

平面中的鄰域

當半徑 < δ ，得到的集合為開圓盤(open disk) ；如果半徑≤δ ，則是閉圓盤(closed disk) 。

如果存在一個點(x_0, y_0) 的鄰域完全地落在區域R內，則點(x_0, y_0)是R的一個內部點(interior point)。而如果任何一個點(x_0, y_0) 的鄰域，鄰域部分的點在R內且部分的點在R 外，則點(x_0, y_0)是R的一個邊界點(boundary point) 。如右圖:



The boundary and interior points of a region R

平面中的鄰域

如果R的每一點都是R的內部點，那麼R就是開區域。

藉由定義，一個區域必須包含內部的點，但不必然包含其邊界上的點。

如果區域包含所有的邊界點，那麼這個區域是封閉的。

一個區域包含它的部分邊界點(並非全部邊界點)，則不是開放區域、亦非封閉區域。

雙變數函數的極限值

Limit of a Function of Two Variables

雙變數函數的極限值

定義: The Limit of a Function of Two Variables

設 f 爲一個雙變數函數定義在一個以點(x_0, y_0) 爲中心的開圓盤(但中心點可能挖空)，且 L是實數。如果

對於任意的 $\varepsilon > 0$，都有一個對應的 $\delta > 0$ 使得，

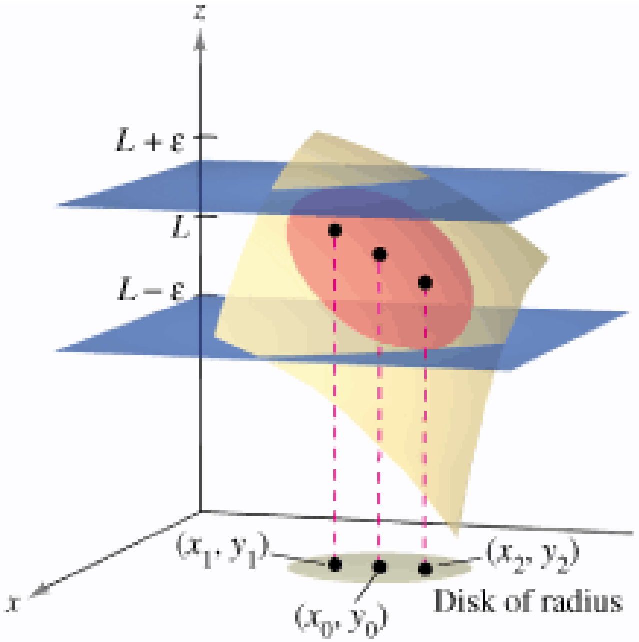
當 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ 時，

滿足 $\left| f(x, y) - L \right| < \varepsilon$ 。

則 $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ 。

雙變數函數的極限值

在下列圖形上，在半徑為δ的圓盤中任何點(x, y) ，
它的函數值$f(x, y)$的值介於$L + \varepsilon$ 和$L - \varepsilon$ 之間。



For any (x, y) in the circle of radius δ, the value $f(x, y)$ lies between $L + \varepsilon$ and $L - \varepsilon$.

雙變數函數的極限值

雙變數函數的極限值定義相似於單變數函數，但是還是有很大的不同。

要證明單變數函數有極限值，我們通常使用兩邊極限逼近。

如果函數趨近於相同的極限值，則極限存在。

雙變數函數的極限值

然而對於一個雙變數函數，在平面上$(x, y) \to (x_0, y_0)$ ，事實上(x, y) 可以從任何方向趨近(x_0, y_0)。

如果(x, y) 從兩個不同路徑趨近(x_0, y_0) ，得到不相同的

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) \ ,$$

則函數靠近點(x_0, y_0) 的極限並不存在。

例題1-藉由定義求出極限

證明 $\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} x = a.$

解:

令 $f(x, y) = x$ 、 $L = a$。我們要證明

當每一個$\varepsilon > 0$，存在一個 (a, b) 的δ-鄰域，使得所有$(x, y) \neq (a, b)$ 在鄰域裡面的點，

$|f(x, y) - L| = |x - a| < \varepsilon$。

例題1- 解

cont’d

所有(x, y)滿足 $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

則
$$
\begin{aligned}
|f(x, y) - a| &= |x - a| \\
&= \sqrt{(x-a)^2} \\
&\le \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\
&< \delta.
\end{aligned}
$$

所以選擇$\delta = \varepsilon$，該極限得證。

雙變數函數的極限值

如同單變數函數作加法、減法、乘法和除法的極限值性質，
多變數函數的極限值有相同的性質。

例題2-極限值

計算 $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$。

解:

藉由極限值的乘法與加法性質，

得到 $\lim_{(x,y)\to(1,2)} 5x^2y = 5(1^2)(2) = 10$

和 $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2+y^2 = 1^2+2^2 = 5$ 。

藉由極限值的除法性質，將它們相除，得到

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{10}{5} = 2$$ 。

例題3-極限值

計算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5x^2y}{x^2+y^2}$。

分子與分母都趨近於0，所以我們不能用除法性質去計算。我們猜測極限可能爲0，我們使用定義證明它。首先，我們知道 $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$ 與 $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$。

例題3-極限值

接著在考慮(0,0)的δ-鄰域，你會得到 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 。
使得所有(x, y) $\neq$ (0,0) 在鄰域裡面的點，

$$\left|f(x,y)-0\right|=\left|\frac{5x^2y}{x^2+y^2}\right|=5\left|y\right|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\le 5\left|y\right|\le 5\sqrt{x^2+y^2}$$

$$<5\delta \text{。}$$

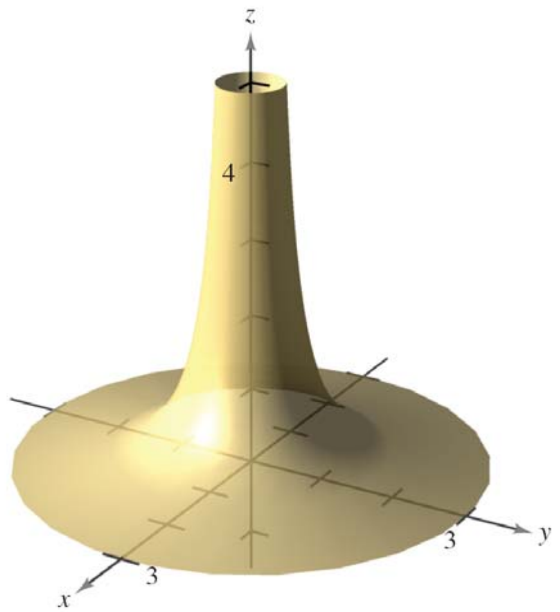
所以選擇 $\delta=\varepsilon/5$ ，得證$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5x^2y}{x^2+y^2}$=0 。

雙變數函數的極限值

對於一些函數可以輕易辨認出它的極限值不存在。

例如，我們可以清楚地發現極限並不存在因爲當(x, y)從任何路徑趨近於$(0, 0)$時，$f(x, y)$增加的很快而且沒有限制。所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$不存在。



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ does not exist.}$$

例題4-極限值不存在

證明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$ 不存在。

解:

爲了表示變數趨近於(0,0)的極限值不存在，考慮由兩條不同趨於(0.0)的路徑如圖13.23。沿著x軸，每一點表示成$(x,0)$ ；

沿著x軸的極限值爲

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2=\lim_{(x,0)\to(0,0)}\left(\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}\right)^2=\lim_{(x,0)\to(0,0)}1^2=1\text{。}$$

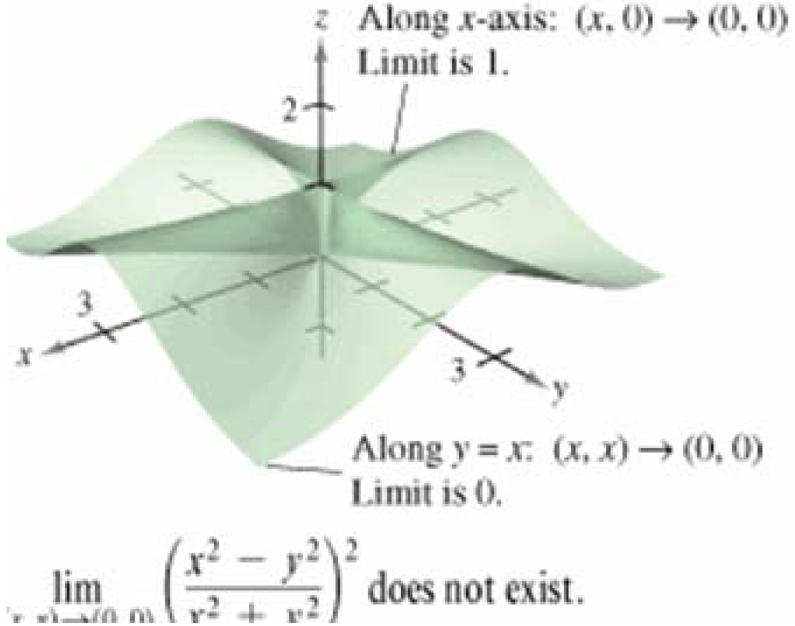
沿著$x=y$的極限值爲

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2=\lim_{(x,x)\to(0,0)}\left(\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}\right)^2=\lim_{(x,0)\to(0,0)}\left(\frac{0}{2x^2}\right)^2=0\text{。}$$

例題4-極限值不存在

這表示任何以(0,0)爲中心的開圓盤，在其中有些點的函數值 $f(x,y)=0$ 且有些點的函數值 是1。

所以變數趨近於(0,0) 時，函數 f 的極限值不存在。



雙變數函數的連續性

Continuity of a Function of Two Variables

雙變數函數的連續性

在先前的例2中，當$(x, y) \to (1, 2)$ ，函數$f(x, y) = 5x^2y/(x^2 + y^2)$的極限值可以直接代值計算。其極限值是$f(1, 2) = 2$。

在這個狀況下，函數 f 在點$(1, 2)$連續(continuous)。

雙變數函數的連續性

定義:

設 f 是一個定義在開區域 R 的雙變數函數且 (x_0, y_0) 屬於 R 。

如果當 (x, y) 趨近 (x_0, y_0) 時的極限值等於 $f(x_0, y_0)$ 時，則函數 f 在點 (x_0, y_0) 連續(continuous)。

用符號表示

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \text{ 。}$$

如果 f 在開區域 R 的每一點都連續，則 f 在開區域 R 連續。

雙變數函數的連續性

在例題3中，函數 $f(x, y) = \dfrac{5x^2y}{x^2 + y^2}$ 在點(0,0)不連續。但是極限值存在，強制重新規定 $f(0, 0)$ 等於極限值，就可以移除在點(0,0)的不連續性質。這種不連續性稱做可消除的不連續性(removable discontinuity) 。

在例題4中，函數 $f(x, y) = \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$ 在點(0,0)不連續，極限也不存在，所以這種不連續性稱做不可消除的不連續性(nonremovable discontinuity) 。

雙變數函數的連續性

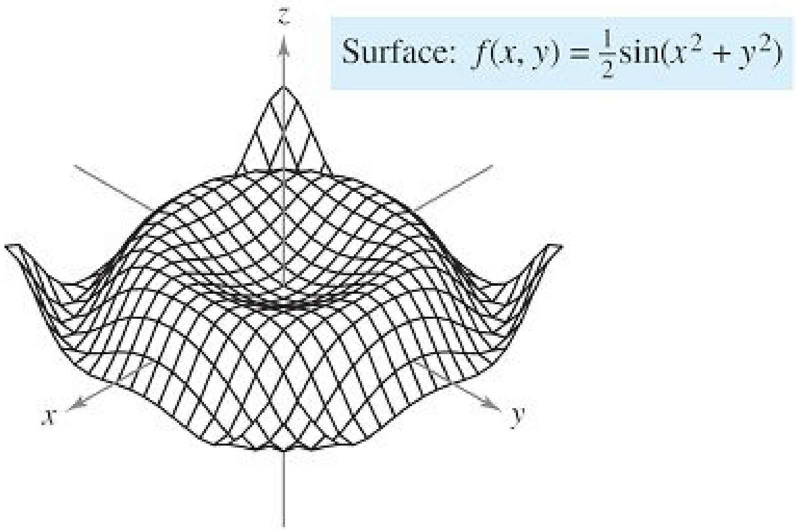
定理13.1: Continuous Functions of Two Variables

假設 k 為實數，函數 f 、 g 在點(x_0, y_0)連續，則下列函數在點(x_0, y_0)都連續。

1. kf
2. $f \pm g$
3. fg
4. f/g , 但$g(x_0, y_0) \neq 0$

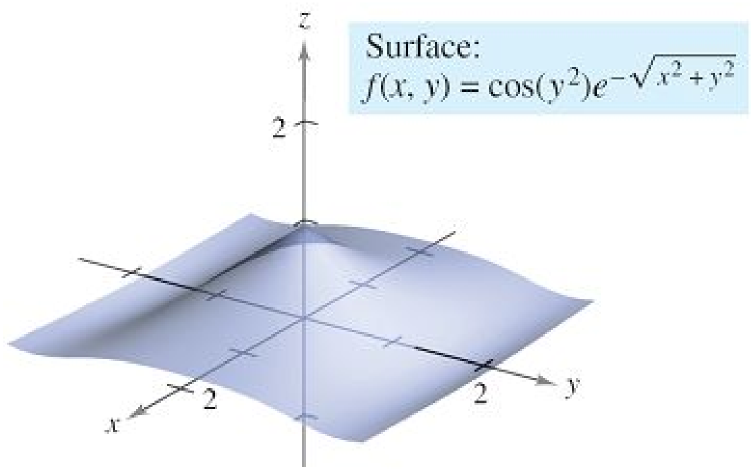
雙變數函數的連續性

例如:圖13.24、 13.25的函數都是在平面上任何點連續。



The function f is continuous at every point in the plane.

Figure 13.24



The function f is continuous at every point in the plane.

Figure 13.25

雙變數函數的連續性

定理13.2: 合成函數的連續性

如果h在(x_0, y_0) 連續且g在$h(x_0, y_0)$ 連續，則合成函數
$(g \circ h)(x,y) = g(h(x,y))$ 在(x_0, y_0) 連續。

可表示為 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(h(x,y)) = g(h(x_0,y_0))$。

例題5-判斷連續

討論以下函數的連續性。

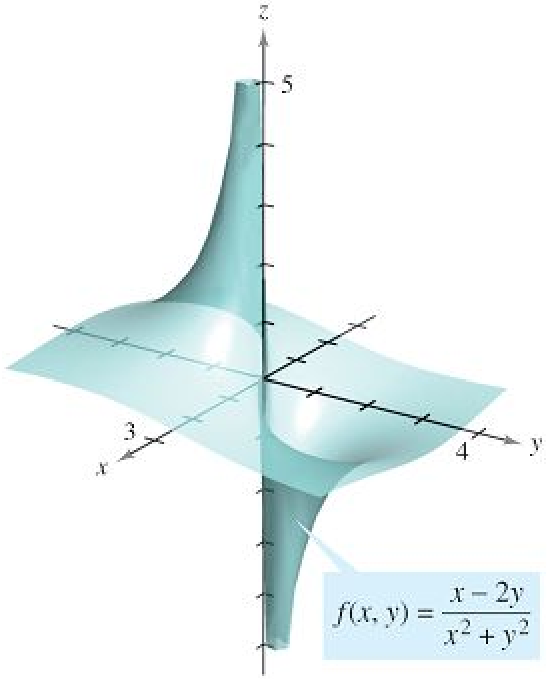
a. $f(x, y) = \dfrac{x - 2y}{x^2 + y^2}$

b. $g(x, y) = \dfrac{2}{y - x^2}$

例題5(a)-解

因爲有理函數在定義域中任何點都連續，所以除了(0,0)這

點外 $f(x, y) = \dfrac{x - 2y}{x^2 + y^2}$ 都連續。



The function f is not continuous at (0, 0).

例題5(b)-解

cont'd

除去分母為0的點，函數$g(x, y) = 2/(y - x^2)$ 連續。

所有$y - x^2 \neq 0$的點都連續。

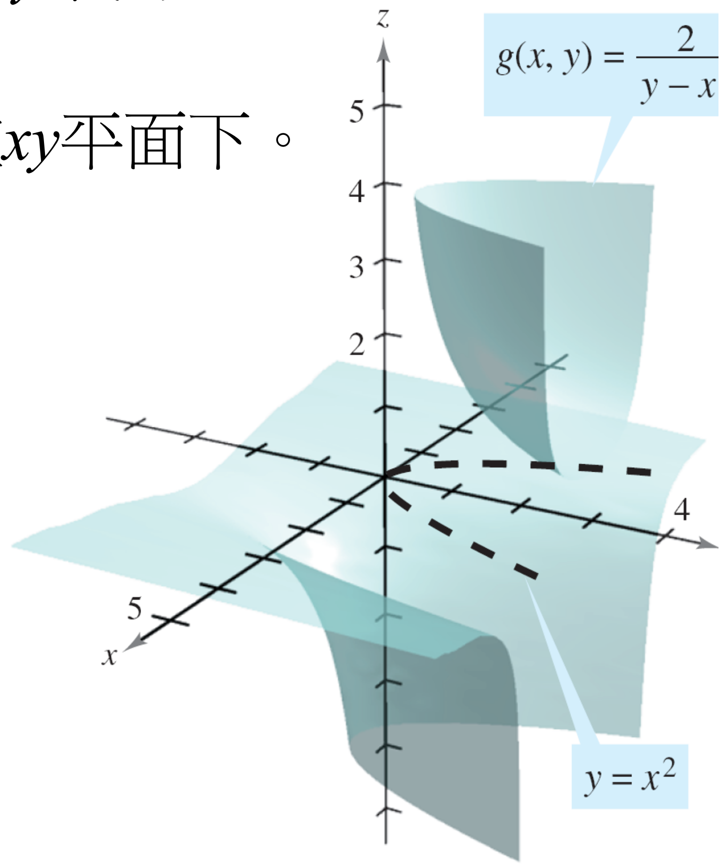
所以除了在這條拋物線$y = x^2$的點，函數g都連續。

例題5(b)-解

cont’d

在拋物線內側，$y > x^2$。圖形在xy平面上。

在拋物線外側， $y < x^2$。圖形在xy平面下。



The function g is not continuous on the parabola $y = x^2$.

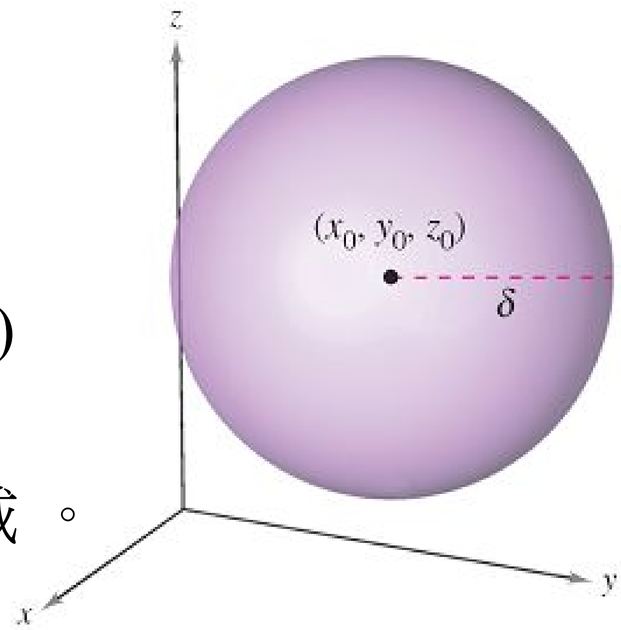
三變數函數的連續性

Continuity of a Function of Three Variables

三變數函數的連續性

藉由用開球(open sphere)替代開圓盤，前面連續性與極限的定義可拓展到三變數的函數。如果$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\delta^2$，則點$(x,y,z)$在球心在$(x_0, y_0, z_0)$ 、半徑爲δ的開球內。上述開球又稱在點(x_0, y_0, z_0) 的δ-球。

如果存在一個點(x_0, y_0, z_0) 的δ-球完全落在區域R內，則點(x_0, y_0, z_0)爲區域R的內部點；如果區域R的點都是內部點，則R是一個開區域 。



Open sphere in space

雙變數函數的連續性

定義:

設 f 是一個定義在開區域 R 的三變數函數且 (x_0, y_0, z_0) 屬於 R 。

如果當 (x, y, z) 趨近 (x_0, y_0, z_0) 時的極限值等於 $f(x_0, y_0, z_0)$ 時，

則函數 f 在點 (x_0, y_0, z_0) 連續(continuous)。

用符號表示

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) \text{ 。}$$

如果 f 在開區域 R 的每一點都連續，則 f 在開區域 R 連續。

例題6-三變數函數的連續性

討論 $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z}$ 的連續性。

解:

除了$x^2 + y^2 - z = 0$的點，函數f在空間中的任何點都是連續。

不連續的點在拋物面$z = x^2 + y^2$上。