13.3

偏微分

Partial Derivatives

目的

- 求出與使用雙變數函數的偏導數
- 求出與使用三或多變數函數的偏導數
- 求出雙或三變數的高階偏導數

雙變數函數的偏導數

Partial Derivatives of a Function of Two Variables

雙變數函數的偏導數

考慮多變數函數 f 對某一個獨立變數的改變率(the rate of change)。

這個程序就是偏微分法(partial differentiation)，其結果是函數 f 對某一選擇獨立變數作偏導數(partial derivative)。

雙變數函數的偏導數

定義: 雙變數函數的偏導數 (Partial Derivatives)

設 $z=f(x,y)$，則 $f(x,y)$ 的偏導數 f_x、f_y 定義爲

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \quad 、 \quad f_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

，假設上述極限值存在。

從定義可以看出，當我們求偏導數時可以將其它的變數視爲常數。例如求 f_y 時，則將 x 當成常數。

例題一

$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$，求出$f_x$ 、 f_y 。

解:

$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$ Write original function.

把 y 視爲常數且 f 對x微分，得

$f_x(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y.$ Partial derivative with respect to x

例題一

cont'd

$f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$ Write original function.

把 x 視為常數且 f 對 y 微分，得

$f_y(x, y) = -2x^2y + 2x^3.$ Partial derivative with respect to y

練習一

$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ ，求出f_x 、 f_y 。

解:

Write original function.

Partial derivative with respect to *x*

Partial derivative with respect to *y*

練習一

$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ ，求出f_x 、 f_y 。

解:

$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ Write original function.

$f_x(x, y) = 2x - 3y$ Partial derivative with respect to x

$f_y(x, y) = -3x + 2y$ Partial derivative with respect to y

雙變數函數的偏導數

一階偏導數之符號 (Notation For First Partial Derivatives)

對 $z=f(x,y)$ 而言，$f(x,y)$ 的一階偏導數 f_x 、 f_y 表示為

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$$ 且

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$$ 。

在一點 (a,b) 的一階偏導數 f_x 、 f_y ，則表示為

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)}=f_x(a,b)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)}=f_y(a,b)$$

例題二

$f(x,y)=xe^{x^2y}$ ，求出在點(1,ln2)的 f_x 、 f_y 。

解:

$$f_x(x,y)=xe^{x^2y}(2xy)+e^{x^2y}$$

$$f_x(1,\ln 2)=e^{\ln 2}(2\ln 2)+e^{\ln 2}=4\ln 2+2$$

$$f_y(x,y)=xe^{x^2y}(x^2)=x^3e^{x^2y}$$

$$f_y(1,\ln 2)=e^{\ln 2}=2$$

練習二

求出 $f(x,y)=\sin(2x-y)$ 在點 $(\pi/4, \pi/3)$ 的 f_x、f_y。

解:

練習二

求出 $f(x,y)=\sin(2x-y)$ 在點 (π /4, π /3)的f_x 、 f_y。

解:

$$f_x(x,y)=2\cos(2x-y)$$

$$f_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(2\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$f_y(x,y)=-\cos(2x-y)$$

$$f_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

雙變數函數的偏導數

表示雙變數函數的偏導數的圖型如下，如果 $y = y_0$，則$z = f(x, y_0)$ 表示一條由$z = f(x, y)$曲面與$y = y_0$平面相交的曲線。

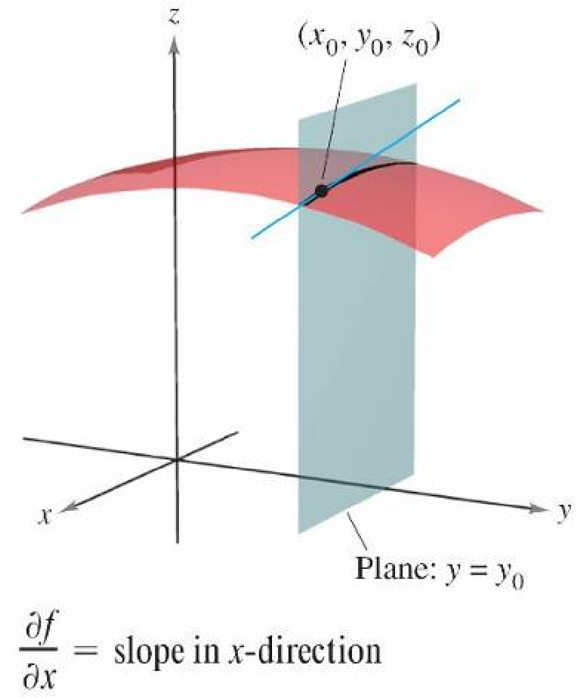


Figure 13.29

雙變數函數的偏導數

因此

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

表示在$((x_0, y_0), f(x_0, y_0))$ 點的切線斜率。

注意: 曲線與切線都在$y = y_0$平面上。

雙變數函數的偏微分

相似地，

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

表示著相交於平面$x = x_0$和曲面$z = f(x, y)$的曲線斜率。

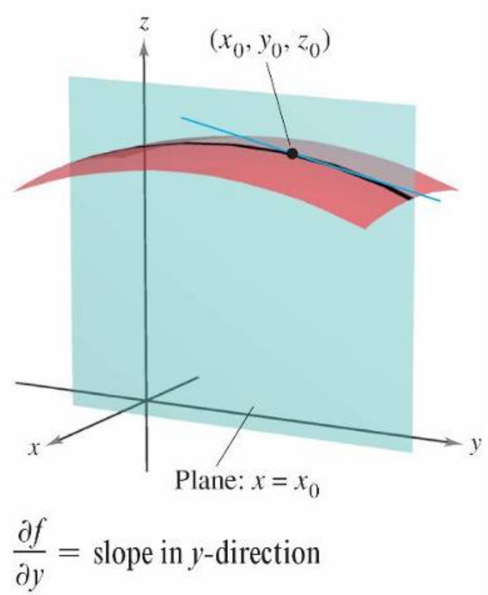


Figure 13.30

雙變數函數的偏微分

不正式的講， $\partial f / \partial x$ 和 $\partial f / \partial y$ 在(x_0, y_0, z_0) 的值分別表示曲面在x和y方向的斜率(slopes of the surface in the x- and y-directions)。

例題三

計算 $f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$ 的x和y方向的斜率。

解:

此函數對x和y的偏導數分別爲

$$f_x(x, y) = -x \quad \text{and} \quad f_y(x, y) = -2y.$$

Partial derivatives

例題三

cont'd

所以在x方向斜率為 $f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}$ 如圖13.31(a)

在y方向斜率為 $f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2.$ 如圖13.31(b)

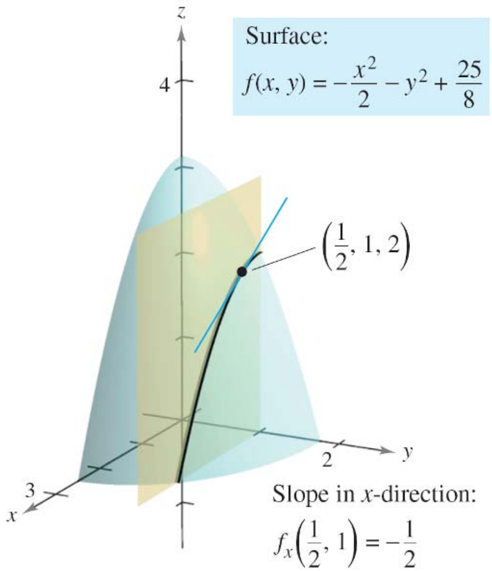


Figure 13.31(a)

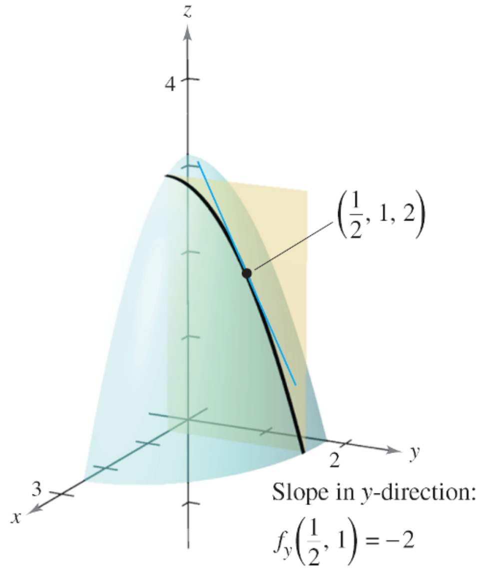


Figure 13.31(b)

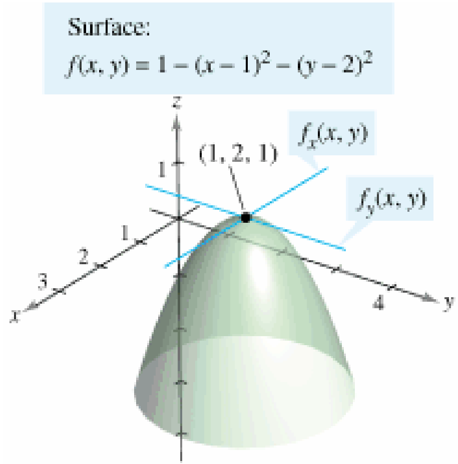
例題四

計算 $f(x,y)=1-(x-1)^2-(y-2)^2$ 在(1,2,1)的x和y方向的斜率。

解:

函數 f 對x和y的偏導數分別爲

$$f_x(x,y)=-2(x-1) \text{ 和 } f_y(x,y)=-2(y-2)$$



所以在該點的斜率分別爲

$$f_x(1,2)=-2(1-1)=0 \text{ 和 } f_y(1,2)=-2(2-2)=0$$ 。

練習四

計算 $f(x,y)=\dfrac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在(1,0,0)的x和y方向的斜率。

解:

練習四

計算 $f(x,y)=\dfrac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在(1,0,0)的x和y方向的斜率。

解:

此函數對x的偏導數爲

$$f_x(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}(4y)-4xy\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-1/2}(2x)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2)^{-1/2}[(x^2+y^2)4y-4x^2y]}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{4y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

練習四

此函數對y的偏導數為

$$f_y(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}(4x)-4xy\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-1/2}(2y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2)^{-1/2}[(x^2+y^2)4x-4xy^2]}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{4x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

所以在點(1,0,0)上，x方向和y方向斜率分別為

$$f_x(1,0)=\frac{4(0)^3}{(1^2+0^2)^{3/2}}=0 \quad \text{and} \quad f_y(1,0)=\frac{4(1)^3}{(1^2+0^2)^{3/2}}=4$$

三變數函數的偏導數

Partial Derivatives of a Function of Three or More Variables

三變數函數的偏導數

偏導數的概念可以延伸到三變數或多變數函數。

例如$w = f(x, y, z)$，它有三個偏導數，對某一個變數作偏導數都會有其它兩個視爲常數的變數。

例如我們定義一個w對x偏導數，可以把y和z看成常數。

對於y和z的偏導數也是採取相同的程序。

三變數函數的偏導數

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

推廣至更多變數的函數，例如$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ，則我們對其中某個變數作偏導數可以這樣表示

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) \quad，\quad k = 1, 2, \cdots, n \quad。$$

要對其中一個變數作偏導數，我們把其它變數當作常數，而只對選定的變數微分。

例題六

(a) 求出 $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$對z變數的偏導數

(b) 求出 $f(x, y, z) = z \sin(xy^2 + 2z)$ 對z變數的偏導數

(c) 求出 $f(x, y, z, w) = (x + y + z)/w$ 對w變數的偏導數

例題六

解:

(a)

首先，我們假設x跟y爲常數，對z微分可以得到

$$\frac{\partial}{\partial z}[xy + yz^2 + xz] = 2yz + x.$$

(b)

同樣的，我們假設x跟y爲常數，對z微分可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}[z \sin(xy^2 + 2z)] &= (z)\frac{\partial}{\partial z}[\sin(xy^2 + 2z)] + \sin(xy^2 + 2z)\frac{\partial}{\partial z}[z] \\ &= (z)[\cos(xy^2 + 2z)](2) + \sin(xy^2 + 2z) \\ &= 2z\cos(xy^2 + 2z) + \sin(xy^2 + 2z).\end{aligned}$$

例題六

(c)

我們假設x、y和z為常數，對w微分就可以得到

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{x+y+z}{w}\right] = -\frac{x+y+z}{w^2}.$$

練習六

求 $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{x+y+z}$ 對z變數的偏導數。

解:

練習六

求 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y+z}$ 對z變數的偏導數。

解:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{xy}{x+y+z}\right]=\frac{(x+y+z)(0)-xy(1)}{(x+y+z)^2}$$

$$=\frac{-xy}{(x+y+z)^2}$$

高階偏導數

Higher-Order Partial Derivatives

高階偏導數

高階偏導數 (Higher-Order Partial Derivatives)

對 x 變數作二階偏微分:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx} \quad 。$$

對 y 變數作二階偏微分:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy} \quad 。$$

高階偏導數

混合偏導數(mixed partial derivatives)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=f_{yx}$$

例題七

$f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$，計算$f_{xy}(-1, 2)$的值。

解:

先作一階偏導數，f 分別對x與y偏微分，得

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2 \quad \text{和} \quad f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y \text{。}$$

$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2$分別對$x$與$y$偏微分，可以得到

$$f_{xx}(x, y) = 10y^2 \quad \text{跟} \quad f_{xy}(x, y) = 6y + 20xy \text{ 。}$$

例題七

cont'd

$f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$分別對$x$與$y$偏微分，可以得到

$$f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy \text{ 跟 } f_{yy}(x, y) = 6x + 10x^2 \text{。}$$

對於這個函數我們看到$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy$ 。

所以在點$(-1, 2)$的地方，

$f_{xy}(-1, 2) = 6(2) + 20(-1)\,(2) = 12 - 40 = -28 = f_{yx}(-1, 2)$。

練習七

$f(x, y) = xe^y + ye^x$ ，計算$f_{xy}(1, 1)$的值。

解:

我們先考慮一階的偏導數

再偏微分一次

最後代入點得到

練習七

$f(x,y)=xe^{y}+ye^{x}$ ，計算$f_{xy}(1, 1)$的值。

解:

我們先考慮一階的偏導數

$$f_x(x, y) = e^y + ye^x \quad \text{and} \quad f_y(x, y) = xe^y + e^x$$

再偏微分一次

$$f_{xx}(x, y) = ye^x \qquad f_{yy}(x, y) = xe^y$$

$$f_{xy}(x, y) = e^y + e^x \qquad f_{yx}(x, y) = e^y + e^x$$

最後代入點得到$f_{xy}(1, 1)= e + e = 2e$。

高階偏導數

定理13.3: 混合偏導數的相等性 (Equality if Mixed Partial Derivatives)

如果一個雙變數函數 $f(x, y)$與它的二次混合偏導數 f_{xy}、f_{yx} 在開圓盤R(open disk)連續，則對在R中的每一個點會 $f_{xy}(x, y)=f_{yx}(x, y)$ 。

例題八

證明函數 $f(x, y, z) = ye^x + x \ln z$的 $f_{xz} = f_{zx}$ 、 $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ 。

解:

一階偏導數

$$f_x(x, y, z) = ye^x + \ln z, \qquad f_z(x, y, z) = \frac{x}{z}$$

二階偏導數(前兩個相等)

$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \qquad f_{zz}(x, y, z) = -\frac{x}{z^2}$$

三階偏導數(三個都一樣)

$$f_{xzz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zxz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \qquad f_{zzx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}$$

練習八

證明函數 $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y+z}$ 的 $f_{xz}=f_{zx}$ 、$f_{xzz}=f_{zxz}=f_{zzx}$。

解:

一階偏導數

二階偏導數(前兩個相等)

練習八

證明函數 $f(x,y)=\dfrac{x}{y+z}$ 的 $f_{xz}=f_{zx}$ 、 $f_{xzz}=f_{zxz}=f_{zzx}$ 。

解:

一階偏導數

$$f_x(x,y,z)=\frac{1}{y+z},\quad f_z(x,y,z)=\frac{(y+z)(0)-x(1)}{(y+z)^2}=-\frac{x}{(y+z)^2}$$

二階偏導數(前兩個相等)

$$f_{xz}(x,y,z)=-\frac{1}{(y+z)^2},\quad f_{zx}(x,y,z)=-\frac{1}{(y+z)^2},$$

$$f_{zz}(x,y,z)=\frac{(y+z)^2(0)+x(y+z)^2}{(y+z)^4}=\frac{2x}{(y+z)^3}$$

練習八

$$f_{xzz} = \frac{2}{(y+z)^3}, \quad f_{zxz}(x, y, z) = \frac{2}{(y+z)^3}, \quad f_{zzx}(x, y, z) = \frac{2}{(y+z)^3}$$

上敘三個三階偏導數都相同。