



Aplicando a Teoria Mie-Debye para Caracterização de Parâmetros Físicos em Pinças Óticas

Defesa de Dissertação de Mestrado

Arthur Luna da Fonseca

Orientadores: Paulo Américo Maia Neto, Rafael de Sousa Dutra

10 de Setembro de 2019

Instituto de Física - Universidade Federal do Rio de Janeiro

1. Introdução
2. Spherical Wave Solutions of the Scalar Wave Equation
3. Electromagnetic Fields description
4. Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)
5. Conclusion

Introdução

Objetivo

Caracterização de parâmetros na pinça ótica:

→ Teoria MDSA+ para pinças óticas:

→ Correções de aberrações óticas na teoria MDSA → Astigmatismo.

→ Espalhamento Mie → Parâmetro de absorção da microesfera.

→ Cálculo numérico usando a teoria MDSA+:

→ Simulação do experimento de transferência de momento angular na pinça ótica.

→ Cálculos da posição de equilíbrio da esfera variando o parâmetro de absorção.

Introdução à teoria de pinças óticas:

Modelagens da pinça ótica: interação de um campo (feixe) com o objeto espalhador (esfera pinçada).

Campo: feixe fortemente focalizado.

Objeto espalhador: simetria esférica \rightarrow espalhamento Mie.

Regimes de tamanhos do objeto espalhador.

Dois regimes distintos:

Regime Rayleigh: raio da esfera muito menor que o comprimento de onda do feixe ($a \ll \lambda$).

Aproximamos a esfera por um dipolo induzido:

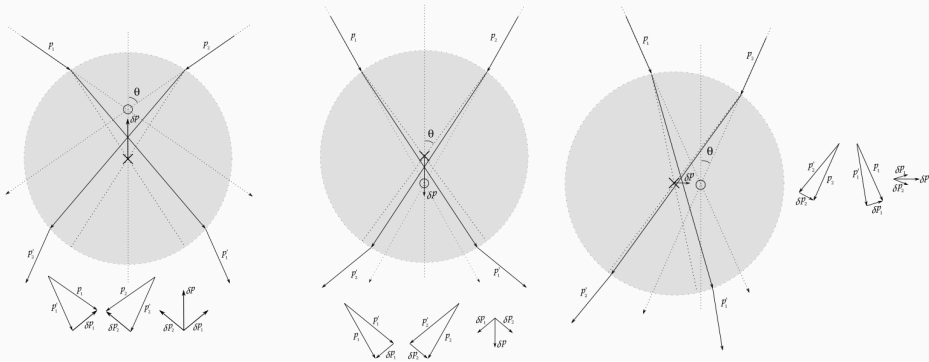
$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla(\alpha \mathbf{E}^2). \quad (1)$$

Força aponta para região de maior intensidade do campo. Para o feixe fortemente focalizado, a região de maior intensidade é o foco.

Regimes de tamanhos do objeto espalhador.

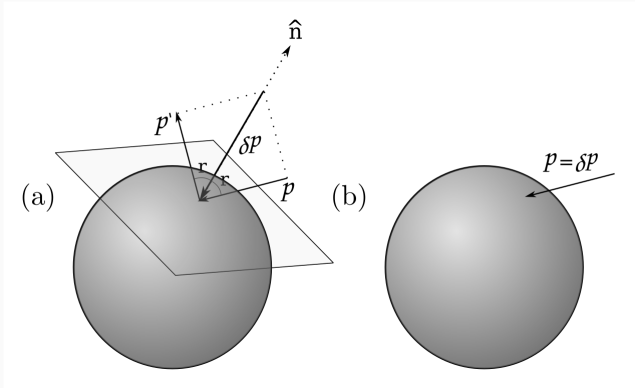
Regime de ótica geométrica: raio da esfera muito maior que o comprimento de onda do feixe ($a \gg \lambda$).

Ignorando efeitos de reflexão e de absorção, raios diametralmente opostos transferem momento para esfera na direção do foco.



Regimes de tamanhos do objeto espalhador.

A posição de equilíbrio não necessariamente é no foco, pois a reflexão (a) transfere momento na direção normal ao plano tangente ao ponto de reflexão na esfera, enquanto a absorção (b) transfere na direção da propagação do raio:



Introdução ao modelo MDSA.

O modelo Mie-Debye para a pinça ótica é um modelo exato para o espalhamento por uma esfera de um campo fortemente focalizado (por uma objetiva).

O modelo para o campo foi desenvolvido por Richards e Wolf, baseado em uma proposição de Debye para um campo escalar produzido por uma objetiva de alta abertura numérica.

O campo é expresso como uma superposição de ondas planas onde os vetores $\mathbf{k}(\theta_k, \phi_k)$ formam um cone de meia abertura θ_0 no espaço de momento:

$$\mathbf{E}_{IN} = \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \int_0^{2\pi} d\phi_k \sqrt{\sin \theta_k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (2)$$

onde o termo $\sqrt{\sin \theta_k}$ vem da condição de seno de Abbe ($f^2 \sin^2 \theta_k = \rho^2$) que as objetivas de alta abertura numérica satisfazem.

Introdução ao modelo MDSA.

Para encontrarmos os campos espalhados pela esfera, calculamos os potenciais de Debye do campo incidente para cada caso de polarização circular, que são definidos por:

$$\Pi^E = \sum_J \Pi_J^E = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_J}{J(J+1)} \quad e \quad \Pi^M = \sum_J \Pi_J^M = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})_J}{J(J+1)}. \quad (3)$$

O somatório em J denota a expansão do campo em multipolos. Cada multipolo do campo incidente será espalhado com uma amplitude, dada pelos coeficiente de Mie a_j (para os multipolos elétricos) e b_j (para o multipolo magnético).

Introdução ao modelo MDSA.

Para introduzirmos o efeito causado pelo perfil do feixe paraxial incidente na objetiva, inserimos a amplitude de campo em cada ponto da entrada da objetiva na equação 2:

$$\mathbf{E}_{IN} = \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \int_0^{2\pi} d\phi_k \sqrt{\sin \theta_k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{\omega_0^2}} \hat{\varepsilon}_k. \quad (4)$$

O caso de um feixe elipticamente polarizado é obtido tomando o feixe na entrada da objetiva como uma superposição de ondas circularmente polarizadas:

$$\hat{\varepsilon}_k = \sum_{\sigma=+1,-1} \frac{1 - ie^{-2i\sigma\psi}}{2} \hat{\varepsilon}_\sigma. \quad (5)$$

Introdução ao modelo MDSA.

Para introduzirmos o efeito causado pelo perfil do feixe paraxial incidente na objetiva, inserimos a amplitude de campo em cada ponto da entrada da objetiva na equação 2:

$$\mathbf{E}_{IN} = \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \int_0^{2\pi} d\phi_k \sqrt{\sin \theta_k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{\omega_0^2}} \hat{\varepsilon}_k. \quad (6)$$

O caso de um feixe elipticamente polarizado é obtido tomando o feixe na entrada da objetiva como uma superposição de ondas circularmente polarizadas:

$$\hat{\varepsilon}_k = \sum_{\sigma=+1,-1} \frac{1 - ie^{-2i\sigma\psi}}{2} \hat{\varepsilon}_\sigma. \quad (7)$$

Spherical Wave Solutions of the Scalar Wave Equation

Spherical Wave Solutions of the Scalar Wave Equation

Consider the scalar function $\psi(\vec{r}, \omega)$, which satisfies the Helmholtz wave equation

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}, \omega) = 0.$$

Note that $k^2 = \omega^2/c^2$ and $\psi(\vec{r}, \omega) = FT_t \psi(\vec{r}, t)$.

Spherical Wave Solutions of the Scalar Wave Equation

The laplacian ∇ is then written in spherical coordinates and, after separating the variables and solving the angular part, we find:

$$\psi(\vec{r}, \omega) = \sum_{l,m} F_{l,m}(r) Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

and $F_{l,m}(r)$ is the solution for the radial part of the equation (don't depend on m).

With the transformation:

$$F_l(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} u_l(r)$$

the radial part of the equation becomes a Bessel equation, which solutions are:

$$F_l(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} (A_{l,m} J_{l+1/2}(r) + B_{l,m} N_{l+1/2}(r))$$

Spherical Wave Solutions of the Scalar Wave Equation

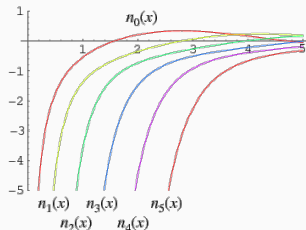
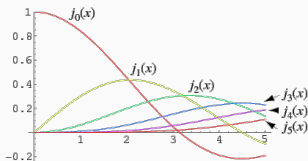
Now, we define the *Spherical Bessel and Henkel Functions*:

$$j_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(kr)$$

$$n_l(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{1/2} N_{l+1/2}(kr)$$

$$h_l^\pm(kr) = j_l(kr) \pm i n_l(kr)$$

which look like:



Spherical Wave Solutions of the Scalar Wave Equation

When $kr \gg l$, those functions will behave as follows:

$$\begin{aligned}j_l(kr) &\rightarrow \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \\n_l(kr) &\rightarrow -\frac{1}{kr} \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \\h_l^+(kr) &\rightarrow (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{kr}\end{aligned}$$

Now, we have a complete set of functions to describe ψ :

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{l,m} [A_{lm}^{(+)} h_l^{(+)}(kr) + A_{lm}^{(-)} h_l^{(-)}(kr)] Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Electromagnetic Fields description

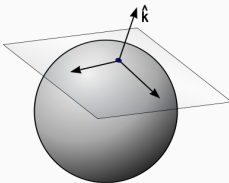
Electromagnetic Fields description

Motivation:

Right now we have the wave equation solution for a scalar field.

Transverse field can be obtained by multiplying the solution by a transverse vector.

But which transverse vector?

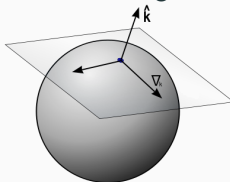


Electromagnetic Fields description

The vector operator ∇_k (in reciprocal space) is a good way to start. Assuming the field has no longitudinal component ($\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$), we can write the operator as:

$$\nabla_k = \frac{1}{k} \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

where is clear that it is defined in the tangential plane.

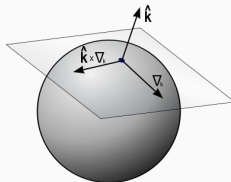


Electromagnetic Fields description

Now, the last component should be perpendicular to, not just \hat{k} , but also ∇_k . The obvious choice is to take the vector product:

$$\hat{k} \times \nabla_k = \alpha \vec{L}$$

and, now, we finally have a set of vectors that describes our vector field:



Electromagnetic Fields description

Since the spherical harmonics are eigenfunctions of the operator \vec{L} , we can build our fields with the normalized vector

$$\vec{X}_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{L} Y_{lm}(\theta, \phi).$$

First, we build the magnetic multipole field, using the scalar field expansion found earlier:

$$\vec{E}_{lm}^{(M)}(\vec{r}) = c^2 g_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\vec{B}_{lm}^{(M)}(\vec{r}) = \frac{-i}{kc^2} \nabla \times \vec{E}_{lm}^{(M)}(\vec{r})$$

where

$$g_l(kr) = B_l^{(+)} h_l^{(+)}(kr) + B_l^{(-)} h_l^{(-)}(kr).$$

Electromagnetic Fields description

The same idea is used to construct the electric multipole field, which leads us to the final result:

$$\vec{E}(\vec{r}) = c^2 \sum_{l,m} \left[\frac{i}{k} a_E(l, m) \nabla \times f_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi) + a_M(l, m) g_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi) \right],$$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{l,m} \left[a_E(l, m) f_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi) - \frac{-i}{k} a_M(l, m) \nabla \times g_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi) \right].$$

Plane waves also have a spherical wave expansion. As an example, we have the case of $\hat{k} = \hat{z}$:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

where

$$P_l(\cos\theta) = Y_{l0}(\theta)$$

Electromagnetic Fields description

This leads to the field:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[j_l(kr) \vec{X}_{l,\pm 1}(\theta, \phi) \pm \frac{1}{k} \nabla \times j_l(kr) \vec{X}_{l,\pm 1}(\theta, \phi) \right], \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\frac{-i}{k} \nabla \times j_l(kr) \vec{X}_{l,\pm 1}(\theta, \phi) \mp ij_l(kr) \vec{X}_{l,\pm 1}(\theta, \phi) \right].\end{aligned}$$

Those will be a sum of *ingoing* spherical waves of various l 's.

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

We begin to discuss our problem by stating that we can divide our fields in 2 parts:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + \vec{E}_{sc}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_{inc}(\vec{r}) + \vec{B}_{sc}(\vec{r})$$

We use the multipole basis to describe them all! But with caution...

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

$\vec{A}_{inc}(\vec{r})$ is an incoming wave, described by the plane wave expansion.

$\vec{A}_{sc}(\vec{r})$ is the scattered wave. Only one Henkel function describe *outgoing* spherical wave: $H_l^+(kr)$.

$$\vec{E}_{sc}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\alpha_{\pm} h_l^+ \vec{X}_{l,\pm 1} \pm \beta_{\pm} \frac{1}{k} \nabla \times h_l^+ \vec{X}_{l,\pm 1} \right],$$

$$\vec{B}_{sc}(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\alpha_{\pm} \frac{-i}{k} \nabla \times h_l^+ \vec{X}_{l,\pm 1} \mp i\beta_{\pm} h_l^+ \vec{X}_{l,\pm 1} \right].$$

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

α_{\pm} and β_{\pm} are both determined by the boundary conditions. Since the scatterer is spherically symmetric, no direction will be treated differently; and assuming there is no absorption, the scattering effect only changes the

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

Conclusion
