



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**

**Título da Tese (ou Dissertação)**

**Nome do Estudante**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

**Orientador: Paulo Américo Maia Neto**

**Coorientador: Nome do Coorientador**

**Rio de Janeiro**

**Março de 2013**

P436(mudar)      Fonseca, Arthur Luna da  
Interação de Momento Angular de Spin e Orbital na Pinça  
Ótica. / Arthur Luna da Fonseca - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2019.  
xiv, 154f(mudar).  
Orientador: Paulo Américo Maia Neto  
Coorientador:  
Dissertação (mestrado) - UFRJ / Instituto de Física /  
Programa de Pós-graduação em Física, 2019.  
Referências Bibliográficas: f. 124-145.(mudar)  
1. Pinça ótica. 2. Momento angular ótico. 3. Feixes não  
paraxiais. 4. Interação spin-órbita. 5. Astigmatismo. I. Wotzasek,  
Clóvis José. II. Guimarães, Marcelo Santos. III. Universidade Federal  
do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação  
em Física. IV. Abordagem de Julia-Toulouse para condensação de  
correntes topológicas e aplicações.(mudar)

# Resumo

**Título da Tese**

**Nome do Estudante**

**Orientador: Nome do Orientador**

**Coorientador: Nome do Coorientador**

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Resumo da tese.

**Palavras-chave:** Insira as palavras-chave aqui.

# Abstract

## Title of the Thesis

Name of the Student

**Orientador:** Name of the Advisor

**Coorientador:** Name of the Coadvisor

*Abstract* da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Abstract in English.

**Keywords:** Insert the keywords here.

## Agradecimentos

Listar agradecimentos aqui, inclusive à agência de fomento que concedeu a bolsa de pós-graduação.

# Sumário

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Sumário</b>                           | <b>vi</b>   |
| <b>Lista de Figuras</b>                  | <b>viii</b> |
| <b>Lista de Tabelas</b>                  | <b>ix</b>   |
| <b>1 Introdução</b>                      | <b>1</b>    |
| 1.1 Introdução . . . . .                 | 1           |
| <b>2 Teoria da Pinça Ótica</b>           | <b>3</b>    |
| 2.1 Modelo Mie-Debye . . . . .           | 3           |
| 2.2 Efeito do perfil gaussiano . . . . . | 8           |
| 2.3 Efeitos de polarização . . . . .     | 9           |
| 2.4 Aberração esférica . . . . .         | 10          |
| 2.5 Aberrações Óticas . . . . .          | 11          |
| 2.6 Expressões para força. . . . .       | 13          |
| 2.7 Interação Spin-Órbita. . . . .       | 14          |
| <b>3 Experimento e Simulação</b>         | <b>15</b>   |
| 3.1 Aparato Experimental . . . . .       | 15          |
| 3.2 Procedimento Experimental . . . . .  | 18          |
| 3.3 Simulação . . . . .                  | 20          |

|          |                                    |           |
|----------|------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Título do Quarto Capítulo</b>   | <b>22</b> |
| <b>5</b> | <b>Considerações Finais</b>        | <b>23</b> |
| <b>A</b> | <b>Título do Primeiro Apêndice</b> | <b>26</b> |
| <b>B</b> | <b>Título do Segundo Apêndice</b>  | <b>27</b> |

# Lista de Figuras

|     |   |   |
|-----|---|---|
| 2.1 | Operadores vetoriais no espaço de Fourier usados para encontrar as soluções<br>vetoriais. . . . . | 5 |
|-----|---|---|



# Lista de Tabelas



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução

A presente dissertação é um resultado do trabalho do grupo de pinças óticas da UFRJ, que tem sido desenvolvido há quase duas décadas **rever com Paulo-;reclamou dessa frase**. Os trabalhos de teoria do grupo têm como objetivo descrever o aparato de pinças óticas, descoberta por Arthur Ashkin em 1986[3] [2]. Suas contribuições para o ramo de armadilhamento ótico vêm desde 1970, com seu primeiro artigo publicado sobre o assunto[1]. Em 2018, seus trabalhos sobre a pinça ótica e toda a sua importancia para aplicação em biologia lhe renderam o prêmio Nobel de 2018.

A importância desse aparato exigiu uma descrição teórica satisfatória. Os primeiros modelos que tentam descrever as forças da pinça ótica fazem uso de diversas aproximações para descrever o feixe que sai da objetiva e a interação da esfera com o campo. O capítulo 2 introduzirá alguns destes modelos. De acordo com Ashkin ??, a teoria que descreve o feixe as interações da pinça ótica de forma exata se deve a Maia Neto e Nussenzveig. No artigo publicado em 2000 [13] é obtida a força axial (na direção  $z$ ) na microesfera em cima do eixo para um feixe de polarização circular. Resultados seguintes estendem o anterior para uma posição arbitrária da microesfera em relação ao foco do feixe e derivam forças nas demais direções (em coordenadas cilíndricas: azimutal e radial) [12]. O caso da polarização linear é discutido em [8]. Posteriormente, eles também inserem correções

à aberração esférica [16] (para interface vidro-água no porta-amostra) e para aberrações do feixe antes da objetiva (como astigmatismo e coma) [9].

Na seção/ No capítulo **inserir seção**, discutirei brevemente o modelo desenvolvido pelo grupo (MDSA+, do inglês Mie-Debye Spherical Aberration, com correção de outras aberrações). Este foi usado para obter os resultados da presente dissertação. Ele leva em conta diversos efeitos, como efeitos de polarização da luz e acoplamentos de momento angular de spin e orbital, que são ignorados pelos demais, além de ser válido para um espectro maior de razões entre o comprimento de onda  $\lambda$  e o raio  $a$  (também chamado de parâmetro de tamanho, ou  $\beta$ ). Esse tema já foi abordado em teses de doutorado de ex-alunos do grupo [11, 5], que tomaremos e recomendamos como referência para este texto.

Ajustes de dados experimentais com o modelo MDSA foram feitos e publicados pelo grupo [15, 6]. Uma vez demonstrada que a teoria tem boa concordância com o experimento, podemos tentar prever parâmetros experimentais a partir dela. Esse é um dos objetivos do presente trabalho, e assim, discutiremos no capítulo 3 um pouco sobre o a simulação com o modelo Mie-Debye e suas extensões, bem como o experimento simulado.

No capítulo 4 discutiremos os resultados das simulações. Nesse mesmo capítulo discutiremos também formas alternativas de se obter os parâmetros obtidos na simulação. Comparações e conclusões serão tratadas no capítulo ??.

# Capítulo 2

## Teoria da Pinça Ótica

Essa seção será dedicada a apresentar teorias que descrevem o aparato de pinça ótica. A ênfase será no modelo Mie-Debye (MD), que foi usado para as simulações e obtenções dos resultados. Outros modelos importantes serão revisados, .

Alguns resultados que parecem contra-intuitivos pedem a introdução de alguns efeitos que os explicam. Portanto, a interação de momento angular de spin e orbital do feixe será discutida no contexto do modelo MD, onde a alta abertura numérica da objetiva é a responsável por efeitos de conversão entre os momentos angulares[4].

### 2.1 Modelo Mie-Debye

Discutiremos brevemente nesse capítulo o modelo MDSA+. Para entender a origem das expressões para a força, vamos começar do problema mais simples. Trataremos nessa seção as bases do modelo Mie-Debye, para uma onda de polarização circular (direita ou esquerda). Os detalhes de tais cálculos podem ser encontrados em [11], e não estarão no presente trabalho para evitar repetição.

Começamos pela forma como se faz o cálculo da força em uma amostra na pinça ótica [10]:

$$\vec{F} = \oint_{\sigma} \hat{n} \cdot T d\sigma - \mu\epsilon \frac{d}{dt} \int_{\nu} \vec{S} d\nu, \quad (2.1)$$

onde  $\sigma$  é uma superfície que envolve a amostra na pinça ótica,  $\nu$  é o interior dessa superfície,  $T$  é o tensor das tensões de Maxwell e  $\mu$  e  $\epsilon$  são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do meio envolvendo a amostra, respectivamente.

O primeiro passo, portanto, é calcular o campo eletromagnético incidente e espalhado nessa amostra (centro espalhador). O campo incidente na amostra tem formato cônico sólido, gerado pela objetiva. Montaremos esse campo superpondo ondas planas. Para tanto, começamos tratando do caso de uma onda plana se propagando na direção  $z$ , com polarização circular. Essa é a polarização conveniente para expansão do campo em multipolo (ondas esféricas ou ondas parciais). Outros casos de polarização serão discutidos adiante. A base de multipolos é a ideal para problemas com simetria esférica, pois são compostas pelos harmônicos esféricos na parte radial, que são autofunções dos operadores de momento angular  $L^2$  e  $L_z$ . Esse fato será importante para obter os campos vetoriais a partir dos potenciais de Debye, que serão definidos a seguir:

$$\Pi^E = \sum_J \Pi_J^E = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_J}{J(J+1)} \quad e \quad \Pi^M = \sum_J \Pi_J^M = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})_J}{J(J+1)}. \quad (2.2)$$

com

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{ikz-i\omega t} \quad e \quad \mathbf{H} = \frac{n_1}{\mu c}(\mp i)\mathbf{E}. \quad (2.3)$$

onde  $n_1$  é o índice de refração do meio ao redor da amostra. Tais potenciais serão úteis para resolver o problema do espalhamento Mie. Estes decompõem os campos em dois modos, um deles com o campo  $\mathbf{E}$  paralelo à superfície do objeto espalhador ( $\Pi^M$ , modo transversal elétrico) e outra perpendicular ( $\Pi^E$ , modo transversal magnético). Essa decomposição forma a base para se aplicar as condições de contorno e obter os coeficientes de Mie, que podemos entender como as amplitudes de espalhamento de cada onda parcial. Os coeficientes de Mie para o espalhamento são:

$$a_J = \frac{\psi_J(\beta)\psi'_J(\alpha) - N\psi'_J(\beta)\psi_J(\alpha)}{\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi'_J(\alpha) - N\zeta_J'^{(1)}(\beta)\psi_J(\alpha)} \quad e \quad b_J = \frac{\psi'_J(\beta)\psi_J(\alpha) - N\psi_J(\beta)\psi'_J(\alpha)}{\zeta_J'^{(1)}(\beta)\psi_J(\alpha) - N\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi'_J(\alpha)}, \quad (2.4)$$

onde  $\beta = ka$ ,  $\alpha = Nka$ ,  $a$  é o raio da esfera,  $\psi_J = xj_J(x)$  e  $\zeta_J^{(1)} = xh_J^{(1)}(x)$  são as funções de Bessel-Riccati e  $j_J(x)$  e  $h_J^{(1)}(x)$  são as funções esféricas de Bessel e Henkel, respectivamente. Os campos espalhados provenientes de  $\Pi^E$  e  $\Pi^M$  terão os termos  $a_J$  e  $b_J$  respectivamente multiplicando as expressões dentro dos somatórios em  $J$ .

Assim, uma vez encontradas as soluções escalares para os campos espalhados e incidentes, temos que reobter os campos vetoriais. Fazemos isso usando um conjunto de operadores vetoriais que comutam com  $\nabla^2$  e são perpendiculares entre si:  $-i\mathbf{r} \times \nabla = \mathbf{L}, \nabla \times \mathbf{L}$  e  $\nabla$ . No espaço de Fourier, esses operadores são proporcionais a  $\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \propto \nabla_{\mathbf{k}}$  e  $\mathbf{k}$ , respectivamente. A figura 2.1 mostra os vetores em questão. O operador  $\mathbf{k}$  fornece as soluções com campos na direção de propagação, ou seja, campos com divergência não nula e que não são soluções do nosso problema. Obtemos, até então, os potenciais de

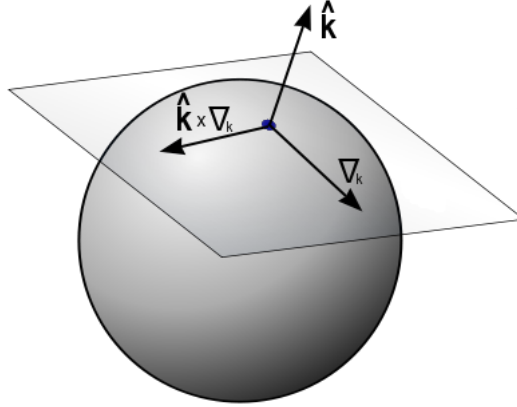


Figura 2.1: Operadores vetoriais no espaço de Fourier usados para encontrar as soluções vetoriais.

ondas planas incidentes e espalhadas na direção  $z$  em coordenadas esféricas. Queremos usa-las para montar um feixe cônico de alta abertura numérica. Faremos isso rotaci-

onando e superpondo diversas ondas planas usando o operador  $\mathbf{J}$ , que é o gerador de rotações no espaço. Como a dependência angular dos potenciais de Debye estão contidas nos harmônicos esféricos, o procedimento se resume em fazer a rotação dos mesmos. Usando o operador  $D(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$  e o fato de que os harmônicos esféricos são autofunções de  $J_z$ , obtemos:

$$Y_{JM}(\theta', \phi') = \sum_{M'=-J}^J Y_{JM'}(\theta, \phi) e^{-i(\alpha M' + \gamma M)} d_{M'M}^J(\beta), \quad (2.5)$$

que representa um harmônico esférico em um eixo rodado com coordenadas  $\theta'$  e  $\phi'$ , onde  $d_{M',M}^J(\beta) = e^{-i\beta J_y}$  é o elemento da matriz- $d$  de Wigner e  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  são os ângulos de Euler. A rotação é feita de forma que o eixo  $z$  coincida com o eixo  $\hat{\mathbf{k}}$  de propagação. Para isso,  $\alpha = \phi_k$  e  $\beta = \theta_k$ . Usamos o último ângulo de Euler para determinar corretamente a direção de polarização do feixe fazendo  $\gamma = -\phi_k$ . Substituindo em 2.2, os potenciais de Debye rotacionados ficam:

$$\Pi^E = \pm \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{k} \sum_{J=1}^{\infty} (i)^{J+1} j_J(kr) \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} \sum_{M'=-J}^J e^{i\phi_k(M' \mp 1)} d_{M', \pm 1}^J(\theta_k) Y_{JM'}(\theta, \phi), \quad (2.6)$$

e

$$\Pi^M = \frac{H_0 e^{-i\omega t}}{k} \sum_{J=1}^{\infty} (i)^J j_J(kr) \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} \sum_{M'=-J}^J e^{i\phi_k(M' \mp 1)} d_{M', \pm 1}^J(\theta_k) Y_{JM'}(\theta, \phi). \quad (2.7)$$

O próximo passo é integrar no ângulo solido do cone. Começando pela varável  $\phi_k$  (ou seja, componente  $\phi$  da direção do vetor de onda  $\mathbf{k}$ ; notação que será usada para  $\theta_k$  também), obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi_{\theta_k}^E = & \pm \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{k} \sqrt{\cos(\theta_k)} \sum_{J=1}^{\infty} (i)^{J+1} j_J(kr) \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} \times \\ & \times \sum_{M'=-J}^J d_{M', \pm 1}^J(\theta_k) Y_{JM'}(\theta, \phi) \int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\phi_k(M' \mp 1)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$



onde o termo  $\sqrt{\cos(\theta_k)}$  vem da condição do seno de Abbe. O cone sólido se obtém integrando em  $\theta_k$ :

$$\begin{aligned}\Pi^E &= \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \Pi_{\theta_k}^E, \\ \Pi^M &= \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \Pi_{\theta_k}^M,\end{aligned}\tag{2.9}$$

onde  $\theta_0$  é a meia abertura do feixe.

Para derivar a força na microesfera em função da sua posição relativa ao foco do feixe, temos que calcular os campos deslocados em relação ao centro do objeto espalhador, ou seja, a origem. Fazemos isso usando o gerador de translações no espaço  $\mathbf{k}$ , com o operador  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$ , onde  $\mathbf{R} = q_x\hat{x} + q_y\hat{y} + q_z\hat{z}$  é o vetor de deslocamento. Multiplicamos esse operador em cada coeficiente de multipolo, e dessa forma, o operador fica dentro da integral em  $\phi_k$ , que leva ao seguinte resultado:

$$\int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} e^{-i\phi_k(M'\mp 1)} = e^{-ikz \cos \theta_k} 2\pi (-i)^{M'\mp 1} J_{M'\mp 1} \left( k \sin \theta_k \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \right) e^{-i(M'\mp 1)\phi}.\tag{2.10}$$

Uma vez determinados os potenciais de Debye incidentes e espalhados, podemos obter os campos aplicando os operadores  $-i\nabla \times \mathbf{L}$  e  $-i\mathbf{L}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T &= \mathbf{E}_{IN} + \mathbf{E}_S = -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{IN}^E + \Pi_S^E) + i\omega\mu(-i)\mathbf{L}(\Pi_{IN}^M + \Pi_S^M), \\ \mathbf{H}_T &= \mathbf{H}_{IN} + \mathbf{H}_S = -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{IN}^M + \Pi_S^M) - i\omega\epsilon(-i)\mathbf{L}(\Pi_{IN}^E + \Pi_S^E).\end{aligned}\tag{2.11}$$

Finalmente, calculando a integral 2.1, obtemos a força na microesfera de um campo cônico e com perfil de intensidade constante antes de entrar na objetiva. Essa integral pode ser resolvida tomando a superfície  $\sigma$  como uma esfera (com centro na origem) com

raio tendendo a infinito. Isso faz com que as componentes radiais do campo sejam desprezadas no cálculo, pois caem com  $\frac{1}{r^2}$ , comparado às componentes tangenciais que caem com  $\frac{1}{r}$ . Temos, então:

$$\mathbf{F} = \frac{-1}{2}r \left( \int d\Omega (\epsilon E_{tan}^2 \mathbf{r}) + \int d\Omega (\mu H_{tan}^2 \mathbf{r}) \right), \quad (2.12)$$

onde as duas integrais dentro do parentesis são iguais. Sendo assim, a força vai depender do quadrado dos campos ( $E^2$  e  $H^2$ ), e de termos proporcionais a  $\mathbf{E}_{IN} \cdot \mathbf{E}_{IN}^*$  (incidente-incidente),  $Real(\mathbf{E}_{IN} \cdot \mathbf{E}_S^*)$  (espalhado-incidente) e  $\mathbf{E}_S \cdot \mathbf{E}_S^*$  (espalhado-espalhado). O primeiro desses termos (campo incidente-incidente) não contribui para a força, pois trata-se do caso onde não há centro espalhador. O produtos dos campos espalhado-incidente é chamado termo de extinção, e representa a taxa de perda de momento do campo incidente para o centro espalhador. Por fim, o termo de espalhamento (espalhado-espalhado) é menos a taxa de transferência de momento para o campo espalhado.

A expressão para a força será mostrada depois de introduzirmos o perfil do feixe e a polarização, uma vez que tanto os campos mudam, quanto as expressões da força ganham termos adicionais. Junto com a expressão para a força, serão mostrados os coeficientes de multipolo  $\mathcal{G}_J M$ , que carregam as informações de aberrações e do perfil de intensidade.

## 2.2 Efeito do perfil gaussiano

O efeitos do perfil gaussiano no feixe. Faremos isso analisando o campo paraxial na entrada da obojtiva. Trataremos também do efeito da aberração esférica causada pela objetiva quando a lente é imersa em um meio com índice de refração diferente do meio que envolve a microesfera.

Para introduzir o efeito que o perfil do feixe produz, basta saber como é o feixe paraxial antes de ser focalizado. Primeiramente, assumimos que tal feixe incidente esteja com a altura da cintura mínima coincidente com a entrada da objetiva. Isso nos permite tratar-

lo como um feixe cilíndrico (de raio de curvatura infinito). **colocar discussão sobre feixe paraxial em algum apêndice, e fazer a referência aqui.** O campo fica:

$$\mathbf{E}_{IN}^{antes}(\vec{r}, t) = E_0 e^{ikz} e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{\omega_0^2}} (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) e^{i\omega t}, \quad (2.13)$$

onde  $\omega_0$  é a cintura (waist) mínima,  $f^2 \sin^2 \theta_k = \rho^2$  (pela condição do seno) é a distância ao eixo do feixe ao quadrado. Ao passar pela objetiva, o campo também ganha uma correção de efeitos de difração [14], o fator multiplicativo  $-i\frac{f}{\lambda}$ . O fator  $e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{\omega_0^2}}$  deve ser inserido dentro da integral em  $\theta_k$ . Assim, as expressões para os multipolos 2.9 são alteradas.

## 2.3 Efeitos de polarização

Entender o caso de polarização linear vai tornar possível a compreensão do caso de polarização elíptica. Começamos modelando o feixe como uma superposição de polarização circular a direita e esquerda, com pesos iguais. O único procedimento que muda em relação ao caso de polarização circular é quando tomamos os quadrados dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . Teremos campos espalhados e incidentes de ambas as polarizações, com as quais montamos os respectivos potenciais de Debye. Produtos de campos de mesma polarização serão chamados puros, e produtos de campos de polarização oposta serão chamados cruzados. Introduzimos, então, o fator de eficiência vetorial, também chamado de força normalizada, para o feixe de polarização linear:

$$\mathbf{Q} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{n_1 P / c} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{(\sigma+)} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{(\sigma-)} + \mathbf{Q}^{(cross)} \quad (2.14)$$

onde  $\langle \mathbf{F} \rangle$  é a média temporal da força,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $P$  é a potência do feixe incidente na amostra. Os termos  $\mathbf{Q}^{(\sigma\pm)}$  são os termos que encontraríamos para a polarização circular direita ou esquerda (tanto de espalhamento quanto de extinção). O termo  $\mathbf{Q}^{(cross)}$  é o que chamamos de cruzado, pois contém produtos de campos com

polarizações opostas.

A força exercida por uma polarização elíptica pode ser obtida introduzindo a dependência com o ângulo  $\psi$  do eixo rápido da placa de quarto de onda (PQO, ou QWP) no feixe paraxial incidente na entrada da objetiva:

$$\mathbf{E}^{ent}(\rho, \phi, z) = E_{centro} e^{ik_0 z} e^{\frac{-\rho^2}{w_0^2}} \sum_{\sigma=+1,-1} \frac{1 - ie^{-2i\sigma\psi}}{2} \hat{\epsilon}_\sigma. \quad (2.15)$$

Dessa forma, os potenciais de Debye ganham um termo a mais devido ao ângulo da placa de quarto de onda. Podemos, então, identificar 4 tipos de termos nas forças de extinção e de espalhamento: diretos ou puros devidos as polarizações  $\sigma_\pm$ , e termos cruzados com os produtos  $\sigma_\pm^* \cdot \sigma_\mp$ .

## 2.4 Aberração esférica

Uma das formas que a aberração esférica pode aparecer é quando há algum tipo de feixe focalizado atravessando a interface de meios com índices de refração diferentes. Essa não é a única aberração ótica presente no aparato de pinça ótica. Antes mesmo do feixe ser focalizado, este pode conter aberração esférica, como veremos na próxima seção. Para o caso do feixe focalizado passando por uma interface, é fácil de mostrar como o efeito funciona em uma abordagem de ótica de raios e a lei de Snell. Componentes do feixe no meio com índice  $n$  que incidem na interface com ângulo  $\theta$ , por refração, são transmitidos com um ângulo  $\theta_1$  no meio com índice de refração  $n_1$ , de forma a respeitar a lei de Snell:

$$n \sin \theta = n_1 \sin \theta_1. \quad (2.16)$$

Fica claro, então, que para um feixe focalizado incidindo perpendicularmente à interface, raios que incidem em direções com ângulo  $\theta \neq 0$ , ao mudarem de meio, não mais incidem no foco. Portanto, a região de maior intensidade não se localiza mais no ponto focal, e sim difundida e mais próxima à interface (**inserir figura**). Isso faz com que a posição de

equilíbrio da microesfera se desloque para mais perto da interface, o que pode ser entendido como um efeito de força de gradiente.

Para modelar a passagem de um meio para outro, levamos em conta a amplitude de transmissão de Fresnel de cada componente  $\mathbf{k}$  do campo, dada por [16]:

$$T(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + N \cos \theta_1}, \quad (2.17)$$

onde, por 2.16,  $\theta_1 = \arcsin(\frac{\sin \theta}{N})$ , com  $N = \frac{n_1}{n}$ . Ao serem refratadas, as componentes de onda-plana ganham também uma fase  $e^{i\Psi(z,\theta)}$ , onde

$$\Psi(z, \theta) = k \left( -\frac{L}{N^2} \cos \theta + (L + z) \cos \theta_1 \right) \quad (2.18)$$

é a função de aberração esférica. No experimento, essa aberração aparece depois que o feixe é focalizado pela objetiva de imersão em óleo (que tem o mesmo índice de refração do vidro) e passa pela interface vidro-água para dentro do porta-amostra.

## 2.5 Aberrações Óticas

As aberrações óticas são modificações nos feixes paraxiais induzidas por uma série de fatores, entre eles imperfeições nas lentes e desalinhamentos no sistema ótico. O estudo das aberrações é inspirado pelo fato de que a teoria MDSA subestima a força radial na pinça ótica quando o raio da microesfera aprisionada é menor ou da ordem do comprimento de onda  $\lambda$  do laser[9]. Raios maiores que  $\lambda$  recuperam tanto os resultados da teoria MDSA quanto os da ótica geométrica. Isso ocorre porque a esfera passa a sondar uma média do perfil do feixe, em contraste com o caso anterior, em que ela sonda diferenças de fase e distribuição de intensidade do feixe focalizado.

O formalismo de Seidel é um dos possíveis métodos para se descrever as aberrações em um feixe paraxial. Entre as aberrações primárias, que aparecem como os primeiros termos de uma expansão nesse formalismo, são relevantes para o nosso modelo o astigmatismo, a

coma e a aberração esférica [9]. Estamos tratando aqui de aberrações antes da objetiva, ou seja, a aberração esférica tratada aqui tem origem diferente da descrita na sessão anterior, apesar de serem o mesmo fenômeno físico.

Podemos introduzir essas aberrações no modelo colocando a fase adicional  $e^{i\Phi_{adicional}(\theta,\phi)}$  nos campos na entrada da objetiva (modificando a equação 2.15), com:

$$\Phi_{adicional}(\theta, \phi) = 2\pi \left[ A'_{sa} \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^4 + A'_c \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^3 \cos(\phi - \varphi_c) + A'_a \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^2 \cos^2(\phi - \varphi_a) \right]. \quad (2.19)$$

Identificamos  $A'_{sa}$ ,  $A'_c$  e  $A'_a$  como os parâmetros de aberração esférica (*sa* do inglês, *spherical aberration*), coma e astigmatismo. Para entender os parâmetros  $\varphi_c$  e  $\varphi_a$ , temos que entender o que são essas aberrações. A primeira característica delas é a quebra de simetria no plano perpendicular a propagação do feixe paraxial (eixo  $z$ ), e os parâmetros  $\varphi_c$  e  $\varphi_a$  são os eixos da orientação dos efeitos de coma e astigmatismo respectivamente. Isso também explica o porquê de não haver um parâmetro angular para aberração esférica: trata-se de uma aberração simétrica em  $\phi$ , o que fica muito claro pela seção anterior.

Uma breve explicação das aberrações será feita a seguir, **(talvez colocar a explicação das aberrações em um apêndice. Posso fazer isso depois, com tempo e calma para produzir imagens ilustrativas. Vou dar foco às equações que usei na simulação.)** baseada em trabalhos do grupo [5, 6, 9], onde detalhes do seguinte desenvolvimento podem ser encontrados.

Considemos agora o problema prático: os experimentos que serviram de base comparatória para as simulações desenvolvidas não possuem coma e os efeitos de aberração esférica podem ser negligenciados. Portanto, somente o astigmatismo será levado em conta nas equações apresentadas. Como a fase referente ao astigmatismo possui uma dependência em  $\phi$ , podemos concluir que a integral da equação 2.10 será modificada.

Uma vez apresentadas todas as correções feitas ao modelo MD, vamos apresentar as

expressões para força em termos dos coeficientes de multipolo.

## 2.6 Expressões para força.

Como dito no começo do capítulo, o método para se obter a força na pinça ótica é resolver a integral 2.1. A forma mais fácil de fazer-lo é tomando a superfície  $\sigma$  no infinito, já que a escolha dessa é arbitrária. Podemos argumentar também que a integral envolvendo o vetor de Poynting é zero. No limite que tal superfície está no infinito, usamos as expressões assintóticas das funções de Bessel (com dependência em  $kr$ ) dentro dos potenciais de Debye.

Portanto, o resultado para o fator de eficiência em coordenadas cilíndricas ( $\mathbf{Q} = (Q_{s\rho} + Q_{e\rho})\hat{\rho} + (Q_{s\phi} + Q_{e\phi})\hat{\phi} + (Q_{sz} + Q_{ez})\hat{z}$ ), para uma polarização qualquer, corrigida para aberração esférica e astigmatismo, tem a forma [6]:

$$Q_{sz}(\rho, \phi, z) = -\frac{4\gamma^2}{AN} \sum_{jm\sigma} \left[ \frac{\sqrt{j(j+2)(j+m+1)(j-m+1)}}{j+1} \left( (a_j a_{j+1}^* + b_j b_{j+1}^*) \times \right. \right. \\ \left. \left. \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m}^{(\sigma)*} (1 - \sigma \sin 2\theta) + (a_j a_{j+1}^* - b_j b_{j+1}^*) \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m}^{(-\sigma)*} \cos 2\theta e^{i2\sigma(\phi-\theta)} \right) + \frac{2j+1}{j(j+1)} \right] \quad (2.20)$$

$$Q_{ez}(\rho, \phi, z) = -\frac{a}{a} \quad (2.21)$$

$$Q_{s\phi}(\rho, \phi, z) = -\frac{a}{a} \quad (2.22)$$

$$Q_{e\phi}(\rho, \phi, z) = -\frac{a}{a} \quad (2.23)$$

$$Q_{s\rho}(\rho, \phi, z) = -\frac{a}{a} \quad (2.24)$$

$$Q_{e\rho}(\rho, \phi, z) = -\frac{a}{a} \quad (2.25)$$

separar as equações e colocar no apêndice? Vale a pena: posso reescrever as equações com a dependência em  $\theta$  separada, como fiz no código.

## 2.7 Interação Spin-Órbita.

YADA



# Capítulo 3

## Experimento e Simulação

Neste capítulo vamos apresentar o experimento que foi simulado com a teoria MDSA+ para obter os resultados da presente dissertação, bem como os procedimentos de tal simulação.

### 3.1 Aparato Experimental

O aparato que descreverei nessa seção mede a transferência de momento angular da luz na pinça ótica. O experimento foi realizado em 2018 por Diniz *et al.* [6], e foi também resultado do mestrado do mesmo [7]. Detalhes do procedimento experimental, do material e das ferramentas usadas nesse experimento podem ser encontradas em sua tese e no artigo citado, e não serão abordados nesse trabalho.

A descrição do experimento deve ser dividida em partes. De forma geral, temos um feixe que é produzido na mesa ótica sendo levado para dentro de um microscópio. Dentro desse microscópio há uma lente objetiva e o porta-amostra, que contém um meio fluido com as microesferas diluídas. Este porta amostra esta acoplado a um suporte que pode ser movido na direção horizontal (plano  $xy$ ) manualmente ou por um componente piezo-elétrico. Este suporte fica inserido no estágio do microscópio, que permite deslocar o porta amostra verticalmente (direção  $z$ ). Tudo isso forma o aparato da pinça ótica, e deixaremos para o final a descrição do experimento que foi simulado.

Primeiramente, trataremos do feixe paraxial: trata-se de um laser com perfil gaussiano ( $TEM_{00}$ ) e comprimento de onda  $\lambda_0 = 1064nm$ . Suas características são importantes para definir o feixe focalizado pela objetiva, como vimos no capítulo anterior.

O feixe de laser, logo após ser gerado, incide sobre um divisor de feixe que o polariza linearmente. A direção de polarização é paralela à mesa, e quando o feixe de polarização linear entra no microscópio onde o porta-amostra se encontra, a direção de polarização passa a definir o eixo  $x$  das nossas coordenadas. É com esse eixo que vamos medir o ângulo  $\phi$  das coordenadas cilíndricas da microesfera e o ângulo  $\varphi_a$  do eixo do astigmatismo. Como já foi explicado, o astigmatismo gera um alongamento no perfil do feixe, fazendo com que o *spot* tenha um formato elipsoidal ao invés de circular. O ângulo entre a direção do alongamento e o eixo de polarização linear ( $x$ ) é o ângulo  $\varphi_a$ . Dessa forma, medir esse ângulo é realizado de forma muito fácil uma vez que se obtenha a imagem do perfil do feixe. O valor medido e usado na simulação foi  $\varphi_a = (1 \pm 1)$ .

A largura da cintura  $\omega_0$  do feixe é essencial para garantir a condição de aprisionamento da microesfera, pois se esta for muito menor que a entrada da objetiva, teremos o que se chama de *underfilling*, que faz com que o fator de eficiência da pinça seja muito reduzida. Como o feixe que sai diretamente do laser tem uma cintura muito fina, usa-se um expensor de feixes, que consiste em um par de lentes, sendo uma delas biconvexas e a outra convexa, para se ampliar o perfil deste.

A cintura mínima é medida fazendo o feixe passar por uma pupila e medindo-se a potência média transmitida. Como o campo tem perfil gaussiano e a potência é proporcional ao quadrado do campo, a potência transmitida deve obedecer

$$P(R) = P_i(1 - e^{\frac{-2R}{\omega_0}}), \quad (3.1)$$

onde  $R$  é o raio da pupila e  $P_i$  é a potência do laser. O ajuste dessa função com valores medidos da potência fornece o valor da cintura mínima  $\omega_0 = 5.82 \pm 0.08$ .

Antes de entrar no microscópio, o feixe passa por uma placa de quarto de onda (QWP).

O eixo rápido da placa faz um ângulo  $\psi$  com a direção de polarização linear (eixo  $x$ ), como dito na seção 2.3 e mostrado na equação 2.15. Inicialmente o feixe tem polarização linear, ou seja,  $\psi = 0$ .

O feixe se propaga na direção do eixo  $z$  com sentido positivo ao entrar no microscópio e entra na objetiva de imersão em óleo. A objetiva tem abertura numérica nominal de  $NA = 1.4$ . Como a abertura numérica é maior que o índice de refração da água ( $n_1 = 1.332$ ), o ângulo de abertura do feixe incidente sobre a microesfera será  $\theta_0 = \arcsin(n_1/n)$ , onde  $n = 1.51$  é o índice de refração do vidro. Isso acontece porque parte do feixe que sai da objetiva incide sobre a interface vidro-água com ângulos maiores que o ângulo crítico, gerando reflexão interna total e ondas evanescentes dentro do porta-amostra. A contribuição para a força das ondas evanescentes não são levadas em conta no modelo teórico, pois assumimos que o centro espalhador está a alguns comprimentos de onda de distância da interface.

Assim, o feixe com a polarização determinada pela QWP entra no microscópio, sendo refletida por um espelho dicróico e incidindo na objetiva. O espelho dicróico reflete a luz com comprimento de onda igual do laser, mas transmite comprimentos de onda de luz visível (um pouco menor que o do laser). Isso permite que uma luz colocada na outra extremidade do porta amostra ilumine o mesmo e possamos ver através do espelho dicróico. Usando uma câmera podemos fazer filmes e obter as imagens de onde serão tirados os dados.

A solução dentro do porta-amostra é composta por microesferas de poliestireno dispersas em água deionizada. A concentração dessa solução é de grande importância para o experimento. Tal concentração não pode ser muito baixa, pois dificulta-se encontrar e aprisionar as microesferas. Por outro lado, se a concentração for alta, torna-se possível que outras microesferas se aproximem da aprisionada, estragando o experimento.

Uma vez que o feixe entre no porta-amostra, um procedimento é feito para definir a posição do foco no eixo  $z$  e a posição do *spot* no plano  $xy$  visualizado pela câmera. Isso é

feito antes de colocar a solução com microesferas, pois assim é possível observar o feixe com a câmera.

Após saber a posição do foco, é colocada a solução e a lamínula superior. Com o controle manual do estágio do microscópio pode-se mover a posição do plano focal e buscar esferas para serem aprisionadas.

## 3.2 Procedimento Experimental

Após o aprisionamento de uma microesfera, é feito um procedimento para determinar a posição de equilíbrio no eixo  $z$ . Para isso, vamos definir as coordenadas que estamos usando e que será usada na simulação. O eixo  $Z$  tem como origem o foco paraxial (note a diferença em relação ao modelo teórico, em que a origem se encontra no centro da microesfera) e a coordenada  $z$  será a posição do centro da microesfera. A coordenada da interface será, para fins práticos,  $-L\hat{z}$ , com  $L$  sendo o módulo da distância entre o plano focal e o plano da interface.

No procedimento, deslocamos a microesfera aprisionada até que ela toque a lamínula de vidro. Nesse momento temos o vínculo  $z_{eq} = a - L_0$ , ou seja, a posição de equilíbrio estável da microesfera define uma distância inicial entre o plano focal e a interface ( $L_0$ ). Por causa do efeito de aberração esférica, discutido na seção 2.4, a posição de equilíbrio tende a ser um pouco abaixo do plano focal, e por isso, usualmente temos  $z_{eq} < 0$ .

Esse detalhe é muito importante para a simulação, pois este vínculo torna possível determinar essa distância inicial  $L_0$ . Depois de encostada a microesfera na lamínula, deslocamos o o estágio do microscópio  $3\mu m$  para baixo. O foco tem um deslocamento efetivo de  $3\frac{n_1}{n}\mu m$ , por causa da diferença de caminho ótico.

Com a microesfera longe da lamínula, observamos seu movimento browniano ao redor da posição do *spot* do laser. A seguir, o estágio do microscópio é movido na direção  $x$  com o controle piezo-elétrico. O deslocamento tem uma velocidade de  $v_1 = 250\mu m/s$ . Faz-se, em seguida, um movimento no sentido contrário com mesma velocidade, e repete-se todo

esse procedimento mais duas vezes, na primeira com velocidade de  $v_2 = 150\mu m/s$  e na segunda  $v_3 = 62.5\mu m/s$ .

Cada um desses movimentos arrasta o fluido dentro do porta-amostra, e portanto faz com que o fluido ao redor da esfera se desloque também. Dessa forma, a microesfera sofre um força de arrasto chamada força de Stokes, dada pela lei de Stokes-Faxen:

$$\vec{F}_s = \beta \vec{v}, \quad (3.2)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade do porta-amostra e  $\beta$  é uma constante que depende da viscosidade do meio e da razão entre o raio da microesfera e a distância entre seu centro de massa e a interface.

Essa força de arrasto desloca a microesfera da posição de equilíbrio da pinça ótica (do centro do *spot*). Uma nova posição de equilíbrio é obtida com  $\vec{F}_\phi + \vec{F}_\rho = -\vec{F}_s$ . Uma vez que  $\vec{F}_s = F_s \hat{x}$ , podemos projetar  $\vec{F}_\phi$  e  $\vec{F}_\rho$  no eixo  $x$  e encontrar a condição de equilíbrio:  $F_s = F_\rho \cos \phi + F_\phi \sin \phi$ .

Como vimos anteriormente, as forças óticas  $\vec{F}_\phi$  e  $\vec{F}_\rho$  são lineares em  $\rho$  quando próximas da posição de equilíbrio. Como a força de arrasto não desloca a microesfera da pinça o suficiente para que a força não seja mais linear, o que esperamos é que o ângulo  $\phi$  seja constante para qualquer velocidade imposta pelo piezo-elétrico.

Dessa forma, cada velocidade determina uma posição de equilíbrio, ao redor da qual a microesfera apresenta movimento browniano. As posições médias de cada velocidade formam uma reta que determinam  $\phi$ .

É importante observar que esse ângulo será muito pequeno. Podemos aproveitar esse fato e aproximar a projeção das forças no eixo  $y$   $F_\rho \sin \phi = F_\phi \cos \phi$  como:

$$\frac{F_\phi}{F_\rho} = \tan \phi \approx \phi. \quad (3.3)$$

Com a linearidade da força  $F_\phi/F_\rho = \kappa_\phi \rho / \kappa_\rho \rho$ , temos:

$$\frac{\kappa_\phi}{\kappa_\rho} \approx \phi. \quad (3.4)$$

Por fim, o experimento consiste em medir o ângulo  $\phi$  para várias polarizações do feixe incidente. Espera-se que com deslocamentos ao longo da direção  $x$  (de polarização linear) não haja rotação em torno da pinça. Se o deslocamento fosse em outras direções, poderíamos esperar uma força de gradiente na direção  $\phi$  causada por assimetrias no feixe. Da mesma forma, o astigmatismo pode gerar essa força azimutal pela quebra da simetria de rotação que este gera no spot. Nos pontos experimentais podemos ver que o eixo do astigmatismo é de aproximadamente  $1^\circ$ , e por isso não observamos rotação nenhuma quando  $\psi = 0$ .

### 3.3 Simulação

A simulação do experimento leva em conta alguns processos que não foram explicados na seção anterior. Começamos por definir a posição inicial do foco em relação a lamínula. O fator de eficiência  $Q_z$  é calculado para várias posições onde o vínculo  $z = a - L$  é válido, com  $L - a$  como *input* para a posição  $z$  onde é calculada a força e  $L$  para a distância entre o plano focal e a interface. **inserir gráfico** No experimento, esse primeiro passo é feito com  $\psi = 0$ .

A forma como são tratadas medidas de distância no programa é por unidades de raio. Dessa forma as distâncias ficam adimensionais, e portanto mais fáceis de se interpretar. A distância entre o foco e a interface fica definida a menos do deslocamento inicial (de  $3\mu m$ ):  $L = L_0 + 3\frac{n_1/n}{a}$  (com  $a$  em  $\mu m$  e  $L$  e  $L_0$  em unidades de raio).

Após esse cálculo podemos procurar a posição de equilíbrio estável da microesfera em função da sua posição relativa ao plano focal. Fazemos  $\rho = 0$  e calculamos  $Q_z$  para vários valores de  $z$ . Buscamos os pontos em que cruzam o eixo  $Q_z = 0$ , de forma que  $Q_z(z_i) > 0$  e  $Q_z(i + 1) < 0$ . Essa é a condição para posição de equilíbrio estável.

Com esses dois pontos podemos traçar uma reta, e como a força é linear ao redor da

posição de equilíbrio, o valor de  $z$  em que  $Q_z = 0$  pode ser calculado com:

$$z_{eq} = -\frac{B}{A}, \quad (3.5)$$

onde  $A$  e  $B$  são os coeficientes de ajuste da reta  $Q_z(z) = Az + B$ .

No experimento, a posição de equilíbrio não é diretamente medida, mas sabe-se que ela varia quando a polarização do feixe incidente muda. Levar isso em conta no código implica em calcular  $Q_z$  várias vezes até que o valor desse mude de sinal como descrito anteriormente.

Calcular tal posição de equilíbrio para cada polarização do feixe incidente seria computacionalmente muito custoso. Dessa forma, a dependência com o ângulo  $\psi$  da placa de quarto de onda é explicitada e o fator de eficiência  $Q_z$  para várias posições  $z$  da microesfera pode ser calculado para qualquer polarização uma vez só. Uma vez tendo os valores de  $Q_z(z)$  e  $z$ , podemos calcular a posição de equilíbrio em função do ângulo da placa de onda.

## Capítulo 4

### Título do Quarto Capítulo

blablabla...

blablabla...

blablabla...



## Capítulo 5

# Considerações Finais

blablabla...

blablabla...

blablabla...

## Referências Bibliográficas

- [1] A. Ashkin. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Physical Review Letters*, 24(4):156–159, jan 1970. 1
- [2] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Observation of Resonances in the Radiation Pressure on Dielectric Spheres. *Physical Review Letters*, 38(23):1351–1354, jun 1977. 1
- [3] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and Steven Chu. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Optics Letters*, 11(5):288, may 1986. 1
- [4] K. Y. Bliokh, F. J. Rodríguez-Fortuño, F. Nori, and A. V. Zayats. Spin–orbit interactions of light. *Nature Photonics*, 9(12):796–808, nov 2015. 3
- [5] Rafael de Sousa Dutra. *Parametrizando uma Pinça Ótica: Efeitos de Aberrações e Absorção*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011. 2, 12
- [6] K. Diniz, R. S. Dutra, L. B. Pires, N. B. Viana, H. M. Nussenzveig, and P. A. Maia Neto. Negative optical torque on a microsphere in optical tweezers. *Optics Express*, 27(5):5905, feb 2019. 2, 12, 13, 15
- [7] Kainã Gonçalves Diniz. Momento angular de spin em pinças Óticas. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2018. 15

- [8] R S Dutra, N B Viana, P A Maia Neto, and H M Nussenzveig. Polarization effects in optical tweezers. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 9(8):S221–S227, jul 2007. 1
- [9] R. S. Dutra, N. B. Viana, P. A. Maia Neto, and H. M. Nussenzveig. Absolute calibration of forces in optical tweezers. *Physical Review A*, 90(1), jul 2014. 2, 11, 12
- [10] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons Inc, 1998. 3
- [11] A. Mazolli. *Teoria das Pinças Óticas*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003. 2, 3
- [12] A. Mazolli, P. A. Maia Neto, and H. M. Nussenzveig. Theory of trapping forces in optical tweezers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2040):3021–3041, dec 2003. 1
- [13] P. A. Maia Neto and H. M Nussenzveig. Theory of optical tweezers. *Europhysics Letters (EPL)*, 50(5):702–708, jun 2000. 1
- [14] B. Richards and E. Wolf. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. structure of the image field in an aplanatic system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274):358–379, dec 1959. 9
- [15] N. B. Viana, A. Mazolli, P. A. Maia Neto, H. M. Nussenzveig, M. S. Rocha, and O. N. Mesquita. Absolute calibration of optical tweezers. *Applied Physics Letters*, 88(13):131110, mar 2006. 2
- [16] N. B. Viana, M. S. Rocha, O. N. Mesquita, A. Mazolli, P. A. Maia Neto, and H. M. Nussenzveig. Towards absolute calibration of optical tweezers. *Physical Review E*, 75(2), feb 2007. 2, 11

# Apêndice A

## Título do Primeiro Apêndice

blablabla...

blablabla...

blablabla...

## Apêndice B

### Título do Segundo Apêndice

blablabla...

blablabla...

blablabla...