



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE FÍSICA

## Aplicando a Teoria Mie-Debye para Caracterização de Parâmetros Físicos em Pinças Óticas

Arthur Luna da Fonseca

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

**Orientador: Paulo Américo Maia Neto**

**Coorientador: Nome do Coorientador**

Rio de Janeiro

Agosto de 2019

P436(mudar)      Fonseca, Arthur Luna da  
Interação de Momento Angular de Spin e Orbital na Pinça  
Ótica. / Arthur Luna da Fonseca - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2019.  
xiv, 154f(mudar).  
Orientador: Paulo Américo Maia Neto  
Coorientador:  
Dissertação (mestrado) - UFRJ / Instituto de Física /  
Programa de Pós-graduação em Física, 2019.  
Referências Bibliográficas: f. 124-145.(mudar)  
1. Pinça ótica. 2. Momento angular ótico. 3. Feixes não  
paraxiais. 4. Interação spin-órbita. 5. Astigmatismo. I. Wotzasek,  
Clóvis José. II. Guimarães, Marcelo Santos. III. Universidade Federal  
do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação  
em Física. IV. Abordagem de Julia-Toulouse para condensação de  
correntes topológicas e aplicações.(mudar)

# Resumo

## Título da Tese

Nome do Estudante

Orientador: Nome do Orientador

Coorientador: Nome do Coorientador

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Neste trabalho discutimos aplicações do modelo Mie-Debye para pinças óticas com correções para aberrações óticas(MDSA+). Apresentamos duas simulações com métodos numéricos. A primeira é de um experimento que mede a transferência de momento angular de spin para a microesfera aprisionada, e pelo resultado do experimento pode-se ajustar o parâmetro que caracteriza o astigmatismo do sistema. A segunda é uma sugestão de experimento, que ainda não foi realizado, para ajustar a parte imaginária do índice de refração da microesfera aprisionada. O modelo MDSA+ também é discutido para esclarecer o resultado do experimento realizado.

O resultado para o ajuste do parâmetro de astigmatismo está de acordo com outro método de obtenção dessa grandeza, o que valida o método desenvolvido no trabalho da dissertação. Comparando os dois métodos, ainda podemos concluir que o ajuste do parâmetro pelos dados experimentais se mostra mais simples e fácil de se realizar.

A proposta do experimento se baseia no cálculo de barreiras potenciais que uma esfera deve ultrapassar para sair do aprisionamento. A intenção de medir esse parâmetro apare-

ceu quando cálculos da força ótica com o modelo MDSA+ não previam aprisionamento de esferas grandes com o índice de refração fornecido pela literatura, enquanto o experimento apontava aprisionamento.

**Palavras-chave:** Insira as palavras-chave aqui.

# Abstract

## Title of the Thesis

Name of the Student

**Orientador:** Name of the Advisor

**Coorientador:** Name of the Coadvisor

*Abstract* da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Abstract in English.

**Keywords:** Insert the keywords here.

# Agradecimentos

Listar agradecimentos aqui, inclusive à agência de fomento que concedeu a bolsa de pós-graduação.

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
<b>2 Teoria da Pinça Ótica</b>	<b>3</b>
2.1 Ótica geométrica e limite de Rayleigh . . . . .	3
2.2 Uma abordagem de ótica ondulatória . . . . .	8
2.3 Modelo Mie-Debye . . . . .	9
2.4 Efeito do perfil gaussiano . . . . .	14
2.5 Efeitos de polarização . . . . .	15
2.6 Aberração esférica produzida por refração na interface com o porta-amostra	16
2.7 Aberrações óticas . . . . .	19
2.8 Força ótica em termos da expansão em multipolos . . . . .	21
2.9 Interação Spin-Órbita . . . . .	23
<b>3 Experimento e Simulação</b>	<b>26</b>
3.1 Aparato Experimental . . . . .	26
3.2 Procedimento Experimental . . . . .	30

3.3	Simulação do experimento de transferência de momento angular . . . . .	33
3.4	Condições de Pinçamento . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>39</b>
4.1	Transferência de momento angular e caracterização do astigmatismo . . . .	39
4.2	Caracterização da amostra na pinça ótica . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>46</b>
<b>A</b>	<b>Fator de eficiência e coeficientes de multipolo</b>	<b>52</b>
<b>B</b>	<b>Formalismos de Zernike e Seidel para astigmatismo</b>	<b>55</b>



# Lista de Figuras

2.1	Centro da esfera (indicado pelo $\times$ ) na posição do foco do feixe ótico aprisionador (indicado pelo centro do círculo). Não há transferência de momento por refração, mas há transferência de momento por absorção e reflexão. . . . .	4
2.2	Centro da microesfera sobre o eixo de simetria do cone, abaixo (esquerda) e acima (direita) da posição do foco , para onde o vetor $\delta\mathbf{p}$ aponta. O momento que a esfera adquire $\delta\mathbf{P}$ é $-(\mathbf{P}' - \mathbf{P})$ , que é menos a variação de momento do campo, por conservação. . . . .	5
2.3	Centro de massa da microesfera ganha momento na direção do foco do feixe por causa da refração. . . . .	6
2.4	Ilustração dos efeitos de reflexão (esquerda) e absorção (direita). O momento que a esfera ganha é $\delta\mathbf{p}$ , enquanto $\mathbf{p}$ é a fração do raio incidente que é refletido ou absorvido, e $\mathbf{p}'$ é o raio refletido. . . . .	7
2.5	Ilustração do efeito de aberração esférica. Na figura, $\mathbf{L}_a$ e $\mathbf{L}$ são as distância entre a interface e o plano focal na ausência da interface e o plano focal efetivo, e $\mathbf{S}$ é a distância do eixo ótico ao ponto de incidência de um raio na interface. . . . .	17
2.6	Feixe com astigmatismo. . . . .	20

2.7	Constante de torção $\kappa_\phi$ em função do raio da microesfera. O comprimento de onda do laser é de $1064nm$ , a distância $L$ entre o foco e a lamínula é de 4,5 unidades de raio e a polarização $\sigma+$ . Astigmatismo não é levado em conta nessa simulação. <b>colocar informações sobre os dados (comp de onda, aberração esférica, ausencia de astig, polarização, etc.).</b> . . . .	25
3.1	. . . . .	27
3.2	. . . . .	28
3.3	<b>explicar essa figura: e1 é o eixo rápido, etc</b> . . . . .	29
3.4	. . . . .	32
3.5	Pontos experimentais do experimento. São mostradas várias baterias de dados, cada uma representada por uma velocidade. Podemos ver o efeito do movimento browniano ao redor das posições de equilíbrio. <b>deixo um agradecimento/referencia para o Kainã?</b> . . . . .	33
3.6	Comportamento da posição de equilíbrio em função do ângulo da placa de quarto de onda $\psi$ . O valor do parâmetro de astigmatismo para essas posições é de $A_{ast} = 0.25$ . . . . .	35
3.7	Comportamento do fator de eficiência axial em função de $z$ . O ponto $z_{eq}$ indicado no gráfico corresponde à posição de equilíbrio estável na direção $z$ , enquanto o ponto $z_{inst}$ corresponde a um ponto de equilíbrio instável. Esse último também será o ponto em que $V(z)$ será um máximo local. . . .	37
3.8	Região onde há uma posição de equilíbrio estável a pelo menos 3 unidades de raio de distância do foco. O aumento da absorção de luz pela microesfera faz com que a posição de equilíbrio se desloque no sentido positivo do eixo $z$ (sentido de propagação). Efeitos de aberração esférica e astigmatismo não são levados em conta nessa simulação. . . . .	38
4.1	Simulação com $A_{ast} = 0$ (à esquerda) e $A_{ast} = 0.36$ (à direita). . . . .	40

4.2	Valores da função erro (equação 4.1) em função do parâmetro de astigmatismo $A_{ast}$ . O mínimo se encontra aproximadamente em $A_{ast} = 0.24$ . . . . .	41
4.3	Pontos teóricos em azul, com o parâmetro $A_{ast} = 0.24$ , ajustado como mínimo da função erro. . . . .	42
4.4	Componente $Q_z$ do fator de eficiência em função de $z$ . O raio da esfera é $a = 7.9\mu m$ , o índice de refração $n_2 = 1.576 + 10^{-3}i$ , o parâmetro de astigmatismo $A_{ast} = 0.1$ e a distância entre o plano focal e a interface com a lamínula $L = 2a$ . . . . .	43
4.5	O parâmetro de astigmatismo e a distância entre o foco e interface são iguais ao caso anterior. À esquerda, $\text{Im}(n_2) = 3 \times 10^{-4}$ , a direita, $\text{Im}(n_2) = 4 \times 10^{-4}$ . . . . .	43
4.6	Componente $Q_z$ do fator de eficiência (em laranja) e o potencial (em azul) em função de $z$ . O potencial nesse gráfico é adimensional, e vem da integração do fator de eficiência no eixo em unidades de raio. Representamos também no gráfico a altura $\Delta$ da barreira de potencial. O raio da esfera é $a = 0.5\mu m$ , o índice de refração $n_2 = 1.576 + 10^{-3}i$ , não estão sendo levados em conta astigmatismo e aberração esférica nessa simulação. . . . .	44
4.7	Altura da barreira potencial adimensional em função da parte imaginária do índice de refração. . . . .	45

## Lista de Tabelas

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução

A presente dissertação é um resultado do trabalho do grupo de pinças óticas da UFRJ, que tem sido desenvolvido há quase duas décadas. Os trabalhos de teoria do grupo têm como objetivo descrever o aparato de pinças óticas, descoberta por Arthur Ashkin em 1986[4, 3]. Suas contribuições para o ramo de armadilhamento ótico vêm desde 1970, com seu primeiro artigo publicado sobre o assunto[1]. Em 2018, seus trabalhos sobre a pinça ótica e toda a sua importancia para aplicação em biologia lhe renderam o prêmio Nobel de 2018.

A importância desse aparato exigiu uma descrição teórica satisfatória. Os primeiros modelos que tentam descrever as forças da pinça ótica fazem uso de diversas aproximações para descrever o feixe que sai da objetiva e a interação da esfera com o campo. O capítulo 2 introduzirá alguns destes modelos. De acordo com Ashkin [5], a teoria que descreve o feixe as interações da pinça ótica de forma exata se deve a Maia Neto e Nussenzveig. No artigo publicado em 2000 [26] é obtida a força axial (na direção  $z$ ) na microesfera em cima do eixo para um feixe de polarização circular. Resultados seguintes estendem o anterior para uma posição arbitrária da microesfera em relação ao foco do feixe e derivam forças nas demais direções (em coordenadas cilíndricas: azimutal e radial) [23]. O caso da polarização linear é discutido em [14]. Posteriormente, também são inseridas correções à

aberração esférica [35] (para interface vidro-água no porta-amostra) e para aberrações do feixe antes da objetiva (como astigmatismo e coma) [15].

Na seção/ No capítulo **inserir seção**, discutirei brevemente o modelo desenvolvido pelo grupo (MDSA+, do inglês Mie-Debye Spherical Aberration, com correção de outras aberrações). Este foi usado para obter os resultados da presente dissertação. Ele leva em conta diversos efeitos, como efeitos de polarização da luz e acoplamentos de momento angular de spin e orbital, que são ignorados pelos demais, além de ser válido para um espectro maior de razões entre o comprimento de onda  $\lambda$  e o raio  $a$  (também chamado de parâmetro de tamanho, ou  $\beta$ ). Esse tema já foi abordado em teses de doutorado de ex-alunos do grupo [22, 11], que tomaremos e recomendamos como referência para este texto.

Ajustes de dados experimentais com o modelo MDSA foram feitos e publicados pelo grupo [34, 12]. Uma vez demonstrada que a teoria tem boa concordância com o experimento, podemos tentar prever parâmetros experimentais a partir dela. Esse é um dos objetivos do presente trabalho, e assim, discutiremos no capítulo 3 um pouco sobre o a simulação com o modelo Mie-Debye e suas extensões, bem como o experimento simulado.

No capítulo 4 discutiremos os resultados das simulações. Nesse mesmo capítulo discutiremos também formas alternativas de se obter os parâmetros obtidos na simulação. Comparações e conclusões serão tratadas no capítulo 5.

## Capítulo 2

# Teoria da Pinça Ótica

Esse capítulo será dedicado a apresentar teorias que descrevem o aparato de pinça ótica. A ênfase será no modelo Mie-Debye (MD), que foi usado para as simulações e obtenções dos resultados. Outros modelos importantes serão introduzidos, com a finalidade de gerar uma intuição acerca do assunto.

Alguns resultados que parecem contra-intuitivos pedem a introdução de alguns efeitos que os explicam. Portanto, a interação de momento angular de spin e orbital do feixe será discutida no contexto da teoria MD, onde a alta abertura numérica da objetiva é a responsável por efeitos de conversão entre os dois tipos de momento angular[7].

### 2.1 Ótica geométrica e limite de Rayleigh

Uma forma intuitiva de entender o aprisionamento ótico de objetos esféricos e transparentes é no regime em que estes possuem um raio muito maior que o comprimento de onda do feixe incidente. Este limite é chamado de ótica geométrica, ou ótica de raios, no qual feixes podem ser tratados de forma geométrica definindo-se sua trajetória.

Por outro lado, no limite em que o raio é muito menor que o comprimento de onda, temos o limite de Rayleigh, em que nós podemos aproximar a microesfera por um dipolo elétrico.

O feixe presente em uma pinça ótica tem a forma de um cone sólido com um perfil de

intensidade radial. Nessa explicação, vamos olhar o comportamento de uma casca desse cone sólido com ângulo de abertura  $\theta$  fixo. Dependendo de como os vetores de momento  $\mathbf{p}$  diametralmente opostos mudarão ao passar pela esfera, podemos inferir a força que ela sofrerá pela variação dos pares desses vetores. Inicialmente, vamos ignorar efeitos de absorção e reflexão.

Começamos pelo caso mais simples: quando o vértice do cone, ou a posição focal do feixe, coincide com o centro da esfera (figura 2.1). Nesse caso, o ângulo de incidência dos raios é normal à superfície da esfera, e o ângulo de transmissão é igual ao de incidência pela lei de Snell. Assim como ao entrar na esfera, o raio que sai da esfera também incide

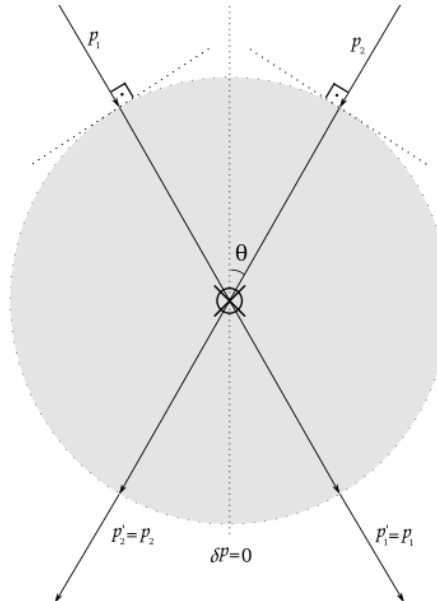


Figura 2.1: Centro da esfera (indicado pelo  $\times$ ) na posição do foco do feixe óptico aprisionador (indicado pelo centro do círculo). Não há transferência de momento por refração, mas há transferência de momento por absorção e reflexão.

normalmente à superfície de dentro. Não há mudança na direção do vetor momento, e portanto não há força sendo exercida sobre a esfera por efeito da refração. Por simetria, não esperamos que as outras componentes do cone sólido façam força sobre a esfera.

Quando deslocamos a posição do foco em relação ao centro da microesfera, a lei de Snell prevê que os raios serão refratados. Começamos deslocando na direção axial, ou



seja, com o centro da esfera sobre o eixo de simetria do cone (eixo ótico), como ilustra a figura 2.2.

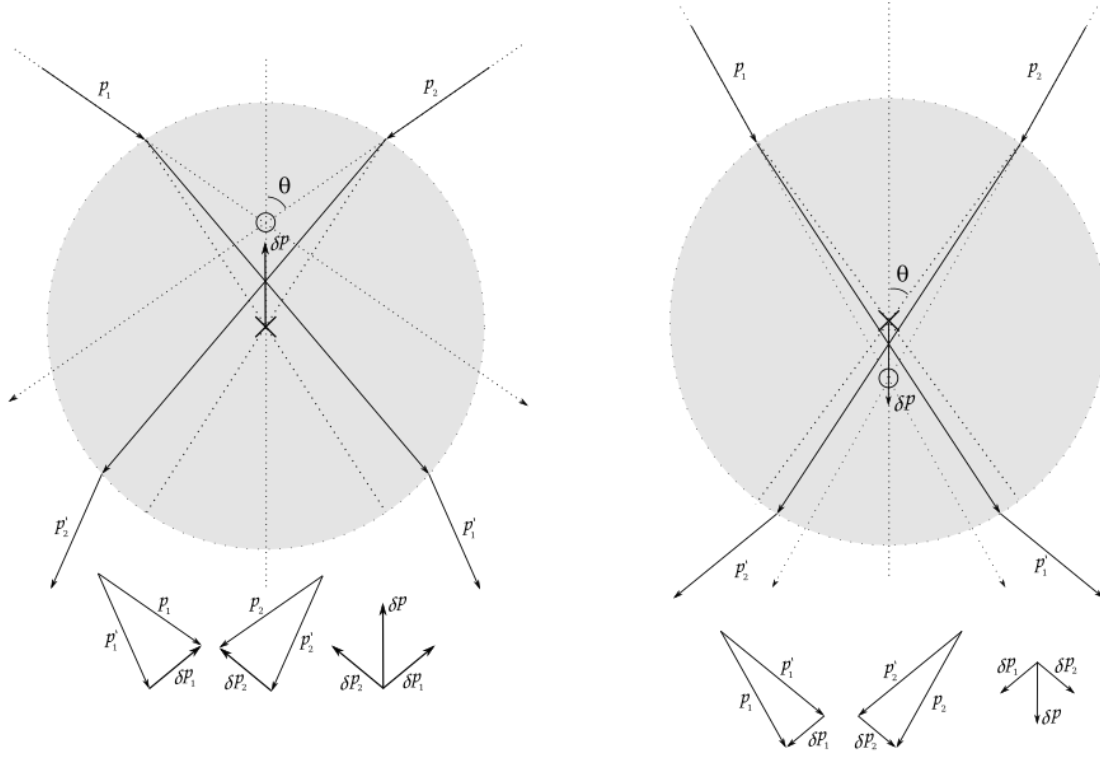


Figura 2.2: Centro da microesfera sobre o eixo de simetria do cone, abaixo (esquerda) e acima (direita) da posição do foco, para onde o vetor  $\delta \mathbf{p}$  aponta. O momento que a esfera adquire  $\delta \mathbf{P}$  é  $-(\mathbf{P}' - \mathbf{P})$ , que é menos a variação de momento do campo, por conservação.

De forma análoga ao caso anterior, ao deslocar verticalmente o foco em relação ao centro da esfera, o momento que a esfera recebe do feixe aponta para o centro deste.

A contribuição da reflexão é a transferência de momento na direção normal ao plano tangente à esfera onde o raio de luz é refletido, como mostra a imagem 2.4. Os raios refletidos têm sua componente de momento perpendicular à superfície reflexora (tangente) invertidas. Por conservação de momento, a esfera ganha o dobro de momento nessa direção. O efeito de absorção é devido a uma parte imaginária do índice de refração, como veremos mais adiante. Podemos entendê-la assumindo que uma fração  $\mathbf{p}$  do raio é

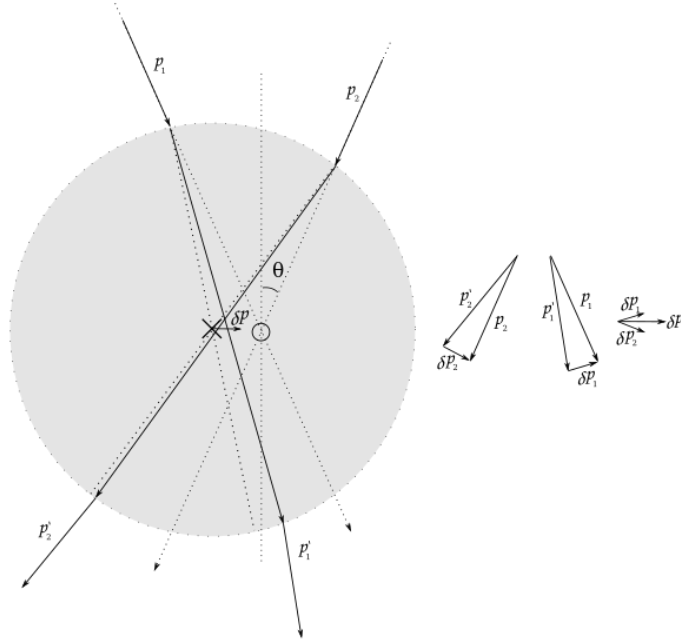


Figura 2.3: Centro de massa da microesfera ganha momento na direção do foco do feixe por causa da refração.

absorvida, e por conservação, a esfera ganha o momento dessa fração do raio com mesma direção e sentido.

Um modelo proposto por Ashkin [2] usa a taxa de mudança do momento de um raio de luz no regime de ótica geométrica para obter a força ótica exercida por esse raio sobre a esfera. Nesse modelo, no entanto, múltiplas reflexões internas do raio são levadas em conta, o que não fizemos na explicação acima. Soma-se então os vários raios que compõem o feixe gaussiano  $TEM_{00}$ , e também é feito o cálculo para o modo Laguerre-Gaussiano  $TEM_{01}$ . A condição do seno de Abbe, à qual as objetivas de alta abertura numérica satisfazem, não é levada em conta em nenhum dos casos [35].

Recentemente, em 2015, a aproximação de ótica geométrica foi usada para se desenvolver um programa que calcula a força ótica em objetos elipsoidais numericamente [9].

No caso em que a microesfera é muito menor que o comprimento de onda, chamado limite Rayleigh, podemos aproximar o centro espalhador por um dipolo induzido pelo

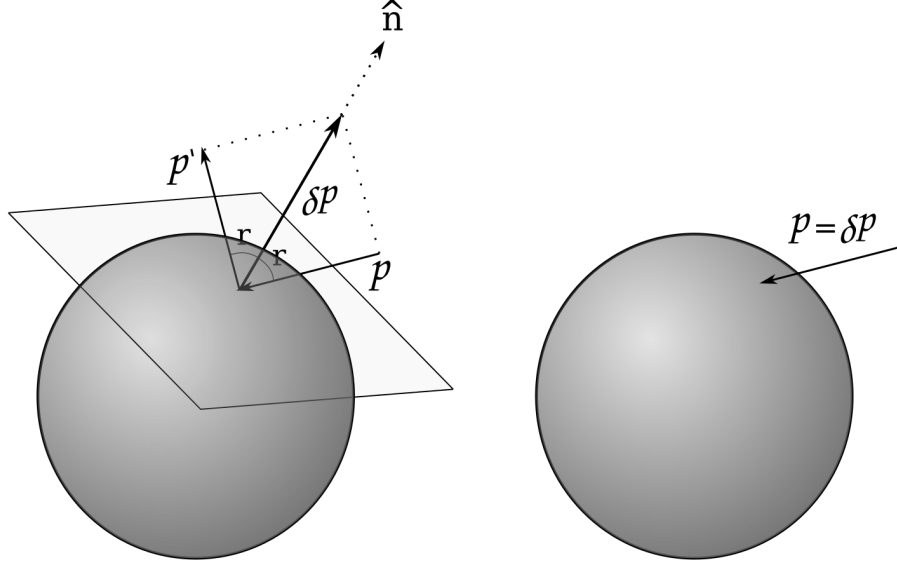


Figura 2.4: Ilustração dos efeitos de reflexão (esquerda) e absorção (direita). O momento que a esfera ganha é  $\delta \mathbf{p}$ , enquanto  $\mathbf{p}$  é a fração do raio incidente que é refletido ou absorvido, e  $\mathbf{p}'$  é o raio refletido.

campo. Dessa forma, a força no dipolo induzido  $\mathbf{p}$  será dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}), \quad (2.1)$$

com  $\mathbf{p}$  sendo dado por [19]:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

onde  $\alpha$  é a polarizabilidade da microesfera.

Podemos concluir que a força vai ser proporcional a  $\mathbf{E}^2$ , que é proporcional por sua vez à intensidade do campo. Se  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{p}$  têm o mesmo sentido, a força apontará sempre para a região de maior intensidade. Isso ocorre desde que  $\alpha > 0$ . Essa é a força que chamamos de força de gradiente.

Essa abordagem foi usada para um feixe gaussiano não perturbado na região focal por [32], apresentando incompatibilidades com experimentos [35]. Abordagens seguintes [31] usam um modelo para o feixe focalizado devido a Richards e Wolf [30], o mesmo utilizado para a teoria MDSA que será discutida na seção 2.3, porém usando a aproximação de dipolo para a força de gradiente, e restringindo a validade da força devido ao espalhamento

para raios menores ou da ordem de  $\lambda/2(n_1 - n_3)$  ( $n_1$  e  $n_3$  são respectivamente os índices de refração do meio e da microesfera), pela aproximação de Rayleigh-Gans.

Os modelos baseados em ótica geométrica e aproximação do centro espalhador por um dipolo tem uma concordância relativamente boa com dados experimentais de esferas com raios condizentes com cada limite. Por outro lado, não são válidos para os tamanhos intermediários de raios, que são mais fáceis de se visualizar e amplamente utilizados nos experimentos.

Para descrever esses casos, é necessário um modelo baseado em ótica ondulatória, que leve em conta o feixe produzido pelas objetivas de alta abertura numérica e o espalhamento desses campo pela esfera. Antes de tratar do modelo MD, apresentaremos outros modelos e formas de cálculos de forças óticas.

## 2.2 Uma abordagem de ótica ondulatória

Na tentativa de obter um modelo baseado em ótica ondulatória, o modelo de Gouesbet e Gréhan [17] faz uma generalização do modelo de Mie para o espalhamento de uma onda plana (circularmente polarizada) por uma esfera [24, 20], onde o feixe incidente passa a ser definido por uma combinação linear de funções de onda que são soluções da equação de Helmholtz [28]. Os coeficientes da expansão, ou coeficientes de formato do feixe (*beam shape coefficients*, ou BSC), são obtidos através de projeções (**ou expansões?**) do campo nessas funções, que formam uma base discreta [18].

Na abordagem do artigo de 1985 [17], o campo incidente na esfera é um feixe de Davis (de 5ª ordem) [10], que consiste em um feixe paraxial com correções em ordens de  $1/k w_0$ , onde  $k$  é módulo do vetor de onda e  $w_0$  é a cintura do feixe. Essa aproximação foi usada pois o feixe paraxial não é solução da equação de Helmholtz, porém o feixe de Davis tampouco o é. O método proposto por Gouesbet e Gréhan é atualmente conhecido na literatura como *generalized Lorenz-Mie theory* (LGMT), e programas computacionais para o cálculo da força ótica baseados em tal teoria estão disponíveis na internet [28].

Uma formulação de espalhamento chamada matriz-T (matriz de transferência) é utilizada em conjunto com a expansão em ondas esféricas para obter os campos espalhados para um objeto não esférico [25, 16]. A discussão desse caso, porém, não está no escopo do trabalho.

No caso em que os coeficientes de expansão são os correspondentes aos do feixe proposto por Richards e Wolf [30], e o objeto espalhador é uma esfera, recupera-se o resultado do modelo Mie-Debye [27], que será discutido a seguir.

## 2.3 Modelo Mie-Debye

Nessa seção será discutido o modelo Mie-Debye. O nome desse modelo faz alusão aos cientistas que propuseram os dois principais elementos desse modelo: o espalhamento de uma onda plana por uma esfera por Mie, como visto na seção anterior, e Debye, que propôs um modelo com campo escalar para o feixe produzido por uma objetiva de alta abertura numérica. A extensão do modelo para um campo vetorial foi feita por Richards e Wolf, citados no final da última seção.

Começaremos a explicação do modelo pelo caso de espalhamento mais simples: uma onda plana de polarização circular direita ou esquerda incidindo sobre uma esfera. Obteremos os coeficientes do espalhamentos, chamados coeficientes de Mie. A seguir, faremos a descrição do feixe incidente como uma superposição de ondas planas com a forma [30]:

$$\mathbf{E}_{IN} = \int d\Omega_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (2.3)$$

onde a região de integração é um cone sólido definido por um ângulo chamado abertura angular do feixe. Nesse modelo também é levado em conta efeitos da objetiva que serão discutidos mais à frente.

Os detalhes dos cálculos desta seção podem ser encontrados em [22], e não estarão no presente trabalho para evitar repetição.

Nossa finalidade é encontrar a força eletromagnética em uma amostra na pinça ótica.

Obtemos ela com [19]:

$$\vec{F} = \oint_{\sigma} \hat{n} \cdot \mathbf{T} d\sigma - \mu\epsilon \frac{d}{dt} \int_{\nu} \mathbf{S} d\nu, \quad (2.4)$$

onde  $\sigma$  é uma superfície que envolve a amostra na pinça ótica,  $\nu$  é o interior dessa superfície,  $T$  é o tensor das tensões de Maxwell e  $\mu$  e  $\epsilon$  são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do meio envolvendo a amostra, respectivamente.

Assim, queremos obter os campos incidentes na esfera e espalhados por ela. Começamos tratando do caso de uma onda plana se propagando na direção  $z$ , com polarização circular. Essa é a polarização conveniente para expansão do campo em multipolos (ondas esféricas ou ondas parciais), que por sua vez é a base ideal para analisarmos o espalhamento de um objeto esférico. Outros casos de polarização serão tratados na seção 2.5.

A simetria esférica do centro espalhador impõe condições de contorno sobre as partes radiais e transversais do campo. Por isso, dividimos o campo eletromagnético nessas duas partes: o modo transversal elétrico  $\Pi^M$ , que possui as componentes do campo elétrico tangenciais à superfície esférica concêntrica à esfera e do campo magnético na direção radial dessa superfície; e o modo transversal magnético  $\Pi^E$ , com o elétrico radial e o magnético tangencial à superfície. Para isso, fazemos o produto interno dos campos com  $\mathbf{r}$ , e obtemos os potenciais de Debye:

$$\Pi^E = \sum_J \Pi_J^E = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_J}{J(J+1)} \quad e \quad \Pi^M = \sum_J \Pi_J^M = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})_J}{J(J+1)}. \quad (2.5)$$

com

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{ikz-i\omega t} \quad e \quad \mathbf{H} = \frac{n_1}{\mu c}(\mp i)\mathbf{E}. \quad (2.6)$$

onde  $n_1$  é o índice de refração do meio ao redor da amostra,  $k$  e  $\omega$  são o vetor de onda e a frequência angular do feixe, sendo  $\omega/k = c$  a velocidade da luz no vácuo. Os somatórios em  $J$  nas equações acima indicam a expansão em multipolos.

A base de multipolos são compostas pelos harmônicos esféricos na parte angular, que são autofunções dos operadores de momento angular  $L^2$  e  $L_z$ . Esse fato será importante

para obter os campos vetoriais a partir dos potenciais de Debye, pois podemos usar um conjunto de operadores vetoriais que comutam com  $\nabla^2$  e não alteram as soluções da equação de Helmholtz. Esses operadores são:  $-i\mathbf{r} \times \nabla = \mathbf{L}$ ,  $\nabla \times \mathbf{L}$  e  $\nabla$  [6], onde o operador  $\nabla$  fornece campos com divergência não nula, ou seja, com componentes na direção de propagação  $\mathbf{k}$  e que assumimos serem nulas desde o começo.

A expansão em multipolos forma a base para se aplicar as condições de contorno e obter os coeficientes de Mie, que podemos entender como as amplitudes de espalhamento de cada onda parcial. Com elas podemos obter os campos espalhados a partir do campo incidente. Os coeficientes de Mie para o espalhamento são:

$$a_J = \frac{\psi_J(\beta)\psi'_J(\alpha) - N_{12}\psi'_J(\beta)\psi_J(\alpha)}{\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi'_J(\alpha) - N_{12}\zeta_J'^{(1)}(\beta)\psi_J(\alpha)}, \quad b_J = \frac{\psi'_J(\beta)\psi_J(\alpha) - N_{12}\psi_J(\beta)\psi'_J(\alpha)}{\zeta_J'^{(1)}(\beta)\psi_J(\alpha) - N_{12}\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi'_J(\alpha)}, \quad (2.7)$$

onde  $\beta = ka$ ,  $\alpha = N_{12}ka$ ,  $a$  é o raio da esfera e  $N_{12}$  é a razão entre o índice de refração do meio  $n_1$  e do centro espalhador (esfera)  $n_2$ ;  $\psi_J = xj_J(x)$  e  $\zeta_J^{(1)} = xh_J^{(1)}(x)$  são as funções de Bessel-Riccati e  $j_J(x)$  e  $h_J^{(1)}(x)$  são as funções esféricas de Bessel e Henkel, respectivamente. Os campos espalhados provenientes de  $\Pi^E$  e  $\Pi^M$  terão os termos  $a_J$  e  $b_J$  respectivamente multiplicando as expressões dentro dos somatórios em  $J$ .

Obtemos, até então, os potenciais de ondas planas incidentes e espalhadas na direção  $z$  em coordenadas esféricas. Queremos usá-las para montar um feixe de alta abertura numérica, de acordo com a equação 2.3. Faremos isso rotacionando e superpondo diversas ondas planas usando o operador momento angular total  $\mathbf{J}$ , que é o gerador de rotações no espaço.

Como a dependência angular dos potenciais de Debye estão contidas nos harmônicos esféricos, o procedimento se resume a fazer a rotação dos mesmos. Usando o operador  $D(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$  [6] e o fato de que os harmônicos esféricos são autofunções de  $J_z$ , obtemos:

$$Y_{JM}(\theta', \phi') = \sum_{M'=-J}^J Y_{JM'}(\theta, \phi) e^{-i(\alpha M' + \gamma M)} d_{M'M}^J(\beta), \quad (2.8)$$

que representa um harmônico esférico em um eixo rodado com coordenadas  $\theta'$  e  $\phi'$ , onde  $d_{M',M}^J(\beta) = e^{-i\beta J_y}$  é o elemento da matriz de rotação de Wigner e  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  são os ângulos de Euler. A rotação é feita de forma que o eixo  $z$  coincida com o eixo  $\hat{\mathbf{k}}$  de propagação. Para isso,  $\alpha = \phi_k$  e  $\beta = \theta_k$ . Usamos o último ângulo de Euler para determinar corretamente a direção de polarização do feixe fazendo  $\gamma = -\phi_k$ . Substituindo em 2.5, os potenciais de Debye rotacionados ficam: **discutir o porque M=1?**

$$\Pi^E = \pm \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{k} \sum_{J=1}^{\infty} (i)^{J+1} j_J(kr) \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} \sum_{M'=-J}^J e^{i\phi_k(M' \mp 1)} d_{M', \pm 1}^J(\theta_k) Y_{JM'}(\theta, \phi), \quad (2.9)$$

e

$$\Pi^M = \frac{H_0 e^{-i\omega t}}{k} \sum_{J=1}^{\infty} (i)^J j_J(kr) \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} \sum_{M'=-J}^J e^{i\phi_k(M' \mp 1)} d_{M', \pm 1}^J(\theta_k) Y_{JM'}(\theta, \phi). \quad (2.10)$$

O próximo passo é integrar no ângulo solido do cone no espaço de Fourier. Começando pela variável  $\phi_k$  (ou seja, componente  $\phi$  da direção do vetor de onda  $\mathbf{k}$ ; notação que será usada para  $\theta_k$  também), obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi_{\theta_k}^E = & \pm \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{k} \sqrt{\cos(\theta_k)} \sum_{J=1}^{\infty} (i)^{J+1} j_J(kr) \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} \times \\ & \times \sum_{M'=-J}^J d_{M', \pm 1}^J(\theta_k) Y_{JM'}(\theta, \phi) \int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\phi_k(M' \mp 1)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde o termo  $\sqrt{\cos(\theta_k)}$  vem da condição do seno de Abbe [33]. O cone sólido se obtém integrando em  $\theta_k$ :



$$\begin{aligned}
\Pi^E &= \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \Pi_{\theta_k}^E, \\
\Pi^M &= \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \Pi_{\theta_k}^M,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

onde  $\theta_0$  é a abertura angular do feixe aprisionador.

Para derivar a força na microesfera em função da sua posição relativa ao foco do feixe, temos que calcular os campos deslocados em relação ao centro do objeto espalhador, ou seja, a origem. Fazemos isso usando o gerador de translações no espaço, com o operador  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$ , onde  $\mathbf{R} = q_x\hat{x} + q_y\hat{y} + q_z\hat{z}$  é o vetor de deslocamento. Multiplicamos esse operador em cada coeficiente de multipolo, e dessa forma, o operador fica dentro da integral em  $\phi_k$ , que leva ao seguinte resultado:

$$\int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} e^{-i\phi_k(M'\mp 1)} = e^{-ikz \cos \theta_k} 2\pi (-i)^{M'\mp 1} J_{M'\mp 1} \left( k \sin \theta_k \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \right) e^{-i(M'\mp 1)\phi}. \tag{2.13}$$

Uma vez determinados os potenciais de Debye incidentes e espalhados, podemos obter os campos aplicando os operadores  $-i\nabla \times \mathbf{L}$  e  $-i\mathbf{L}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_T &= \mathbf{E}_{IN} + \mathbf{E}_S = -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{IN}^E + \Pi_S^E) + i\omega\mu(-i)\mathbf{L}(\Pi_{IN}^M + \Pi_S^M), \\
\mathbf{H}_T &= \mathbf{H}_{IN} + \mathbf{H}_S = -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{IN}^M + \Pi_S^M) - i\omega\epsilon(-i)\mathbf{L}(\Pi_{IN}^E + \Pi_S^E).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Finalmente, calculando a integral 2.4, obtemos a força na microesfera de um campo produzido pela passagem de uma onda plana sendo focalizada por uma objetiva. Essa integral pode ser resolvida tomando a superfície  $\sigma$  como uma esfera (com centro na origem) com raio tendendo a infinito. Isso faz com que as componentes radiais do campo sejam desprezadas no cálculo, pois caem com  $\frac{1}{r^2}$ , comparado às componentes tangenciais que caem com  $\frac{1}{r}$ . Temos, então:

$$\mathbf{F} = \frac{-1}{2}r \left( \int d\Omega (\epsilon E_{tan}^2 \mathbf{r}) + \int d\Omega (\mu H_{tan}^2 \mathbf{r}) \right), \quad (2.15)$$

onde as duas integrais dentro do parentesis são iguais. Sendo assim, a força vai depender do quadrado dos campos ( $E^2$  e  $H^2$ ), e de termos proporcionais a  $\mathbf{E}_{IN} \cdot \mathbf{E}_{IN}^*$  (incidente-incidente),  $\text{Re}(\mathbf{E}_{IN} \cdot \mathbf{E}_S^*)$  (espalhado-incidente) e  $\mathbf{E}_S \cdot \mathbf{E}_S^*$  (espalhado-espalhado). O primeiro desses termos (campo incidente-incidente) não contribui para a força, pois trata-se do caso onde não há centro espalhador. O produto dos campos espalhado-incidente é chamado termo de extinção, e representa a taxa com que o momento linear é subtraído do campo incidente. Por fim, o termo de espalhamento (espalhado-espalhado) é menos a taxa de transferência de momento para o campo espalhado.

Finalmente, podemos definir o fator de eficiência vetorial  $\mathbf{Q}$ , ou força adimensional:

$$\mathbf{Q} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{n_1 P / c} = \mathbf{Q}_s + \mathbf{Q}_e, \quad (2.16)$$

onde  $\langle \mathbf{F} \rangle$  é a média temporal da força,  $P$  é a potência do feixe incidente na amostra,  $\mathbf{Q}_s$  é a contribuição devida ao espalhamento ao fator de eficiência, e  $\mathbf{Q}_e$  é a contribuição devida à extinção. Para obtermos expressões do  $\mathbf{Q}$  que condizem com um feixe usado em um experimento, devemos levar em conta o perfil gaussiano, a polarização e as aberrações óticas do feixe na entrada da objetiva. Esses serão os temas discutidos nas próximas seções. **talvez trocar perfil gaussiano por modo transverso?**

## 2.4 Efeito do perfil gaussiano

O modo gaussiano  $\text{TEM}_{00}$  do feixe laser é o mais amplamente usado nos experimentos de pinça ótica. Para incorporar o efeito do perfil gaussiano no modelo, analisamos o campo paraxial na entrada da objetiva.

Para introduzir o efeito que o perfil do feixe produz, basta saber como é o feixe paraxial antes de ser focalizado. Primeiramente, assumimos que tal feixe incidente esteja com a

altura da cintura mínima coincidente com a entrada da objetiva. Isso nos permite tratar-lo como um feixe cilíndrico (de raio de curvatura infinito) [36]. O campo fica:

$$\mathbf{E}_{IN}^{antes}(\vec{r}, t) = E_0 e^{ikz} e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{\omega_0^2}} (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) e^{i\omega t}, \quad (2.17)$$

onde  $\omega_0$  é a cintura (waist) mínima,  $f^2 \sin^2 \theta_k = \rho^2$  (pela condição do seno) é a distância ao eixo do feixe ao quadrado. Ao passar pela objetiva, o campo também ganha uma correção de efeitos de difração [30], o fator multiplicativo  $-i\frac{f}{\lambda}$ . O fator  $e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{\omega_0^2}}$  deve ser inserido dentro da integral em  $\theta_k$ . Assim, as expressões para os multipolos na equação 2.12 são alteradas.

## 2.5 Efeitos de polarização

Até então, discutimos o caso de polarização circular direita e esquerda do feixe na porta de entrada da objetiva. Essas polarizações fazem com que o momento angular de spin seja bem definido, o que facilita a rotação e a expansão multipolar dos campos que compõem o feixe focalizado. Nas simulações realizadas, que serão descritas no capítulo 3, calculamos forças sobre a microesfera realizadas por feixes focalizados com diferentes polarizações na entrada da objetiva. Por isso, determinar a dependência explícita das forças com a polarização é de extrema importância do ponto de vista computacional.

Modelamos esse caso assumindo o feixe na entrada da objetiva como uma superposição de feixes com polarização circular à direita e à esquerda. O único procedimento que muda em relação ao caso de polarização circular é quando tomamos os quadrados dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ . Teremos campos espalhados e incidentes de ambas as polarizações, com as quais montamos os respectivos potenciais de Debye. Produtos de campos de mesma polarização serão chamados puros, e produtos de campos de polarização oposta serão chamados cruzados.

A força exercida por uma polarização elíptica pode ser obtida introduzindo a de-

pendência com o ângulo  $\psi$  do eixo rápido da placa de quarto de onda (PQO, ou QWP) no feixe paraxial incidente na entrada da objetiva:

$$\mathbf{E}^{ent}(\rho, \phi, z) = E_{centro} e^{ik_0 z} e^{\frac{-\rho^2}{w_0^2}} \sum_{\sigma=+1, -1} \frac{1 - ie^{-2i\sigma\psi}}{2} \hat{e}_\sigma. \quad (2.18)$$

Dessa forma, o fator de eficiência pode ser dividido de acordo com a contribuição dos termos puros e cruzados:

$$\mathbf{Q} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{n_1 P/c} = |a_+|^2 \mathbf{Q}^{(\sigma+)} + |a_-|^2 \mathbf{Q}^{(\sigma-)} + \mathbf{Q}^{(cross,+-)} + \mathbf{Q}^{(cross,-+)} \quad (2.19)$$

Os termos  $\mathbf{Q}^{(\sigma\pm)}$  são os termos que encontraríamos para a polarização circular direita ou esquerda (tanto de espalhamento quanto de extinção). Os coeficientes  $a_\pm$  são dados pelo fator  $(1 - ie^{-2i\sigma\psi})/2$  da equação 2.18, onde  $a_+$  ( $a_-$ ) corresponde a  $\sigma = +1$  ( $\sigma = -1$ ). Dessa forma,  $|a_\pm|^2 = (1 \mp \sin 2\psi)/2$ .

Os termos  $\mathbf{Q}^{(cross)}$  são os que chamamos de cruzados, pois contêm produtos de campos com polarizações opostas. Como, nesse caso, o produto dos campos fornece uma fase complexa, a dependência desses termos com  $\psi$  é menos trivial que no caso dos termos puros.

Dessa forma, os potenciais de Debye ganham um termo a mais devido ao ângulo da placa de quarto de onda. Podemos, então, identificar 4 tipos de termos nas forças de extinção e de espalhamento: diretos ou puros devidos as polarizações  $\sigma_\pm$ , e termos cruzados com os produtos  $\sigma_\pm^* \cdot \sigma_\mp$ .

## 2.6 Aberração esférica produzida por refração na interface com o porta-amostra

A aberração esférica é um efeito ótico onde os raios que compõem o feixe são focalizados em pontos distintos do eixo ótico. Uma lente esférica, por exemplo, fará com que os raios marginais de um feixe colimado sejam mais refratados que os raios mais próximos ao eixo ótico. Esse efeito faz com que o perfil de intensidade do feixe seja difundido ao longo do eixo ótico.

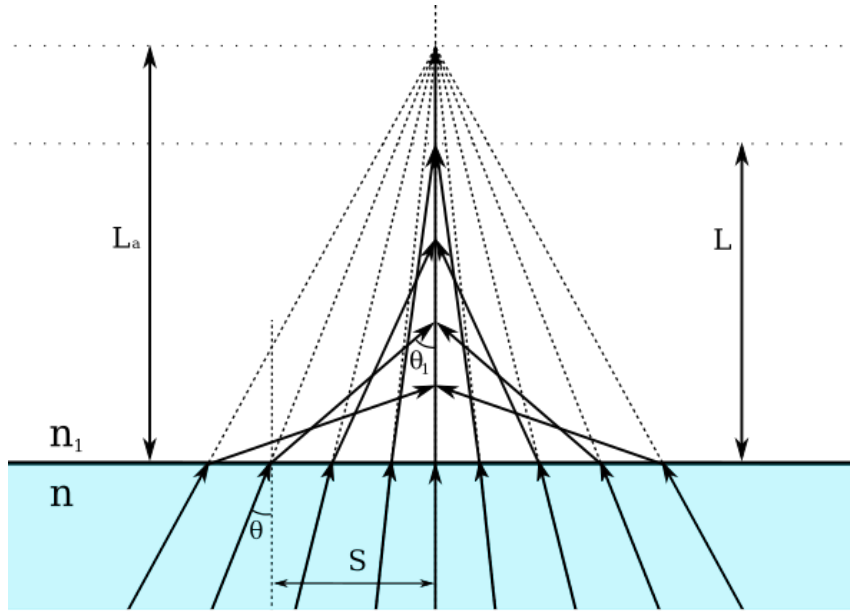


Figura 2.5: Ilustração do efeito de aberração esférica. Na figura,  $L_a$  e  $L$  são as distâncias entre a interface e o plano focal na ausência da interface e o plano focal efetivo, e  $S$  é a distância do eixo óptico ao ponto de incidência de um raio na interface.

No aparato de pinças óticas esse efeito ocorre quando usamos uma lente objetiva de imersão em óleo, que não é corrigida para aberração esférica, e o feixe incide em um porta-amostra contendo algum fluido com índice de refração diferente do óleo e do vidro do porta-amostra, que são iguais. Esse efeito faz com que a posição de equilíbrio da microesfera se desloque para mais perto da interface.

Também pode haver aberração esférica no feixe paraxial antes da entrada da objetiva, mas trataremos esse caso somente na seção 2.7.

No caso do feixe focalizado atravessando uma interface de dois meios com índices de refração diferentes, é fácil de mostrar como o efeito funciona em uma abordagem de ótica de raios e a lei de Snell. Componentes do feixe no meio com índice  $n$  que incidem na interface com ângulo  $\theta$ , por refração, são transmitidos com um ângulo  $\theta_1$  no meio com índice de refração  $n_1$ , de forma a respeitar a lei de Snell:

$$n \sin \theta = n_1 \sin \theta_1. \quad (2.20)$$

Fica claro, então, que para um feixe focalizado incidindo com seu eixo perpendicular à interface, raios que incidem em direções com ângulo  $\theta \neq 0$ , ao mudarem de meio, não mais incidem no foco. Portanto, a região de maior intensidade não se localiza mais no ponto focal, e sim difundida e mais próxima à interface, de forma a produzir um novo plano focal.

A distância a esse plano focal ( $\mathbf{L}$  na figura 2.5) pode ser calculada usando a lei de Snell e geometria. Assumindo ângulos pequenos (situação em que os raios incidem aproximadamente no mesmo ponto), tomamos  $\sin \theta \approx \theta$  e a lei de Snell fornece:

$$\frac{\theta_1}{\theta} \approx \frac{n}{n_1}. \quad (2.21)$$

E usando a distância do ponto de incidência do raio na interface até o eixo ótico e a distância entre a interface e o plano focal na ausência da interface ( $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{L}_a$  na figura 2.5), temos  $\tan \theta = s/L_a$  e  $\tan \theta_1 = s/L$ . Em ângulos pequenos, temos  $\theta \approx s/L_a$  e  $\theta_1 \approx s/L$ , e usando a lei de Snell:

$$\frac{\theta_1}{\theta} \approx \frac{L_a}{L} \approx \frac{n}{n_1}, \quad (2.22)$$

de onde concluímos que  $L = L_a n_1 / n = L_a N$ , onde  $N = n_1 / n$  é o índice de refração relativo.

Podemos entender esse efeito também como uma fase induzida no feixe pela diferença de caminho ótico. Somente a componente de  $\mathbf{k}$  na mesma direção do eixo ótico (eixo  $z$ ) vai sofrer uma mudança. Portanto, a fase que cada componente de onda-plana  $\mathbf{k}(\theta)$  ganha por se propagar no meio de índice de refração  $n_1$  será:

$$\Psi_+(z, \theta) = k_1 L \cos \theta_1, \quad (2.23)$$

onde  $k_1 = Nk$  é o módulo do vetor de onda nesse meio.

Como essa onda se propagou nesse meio de índice de refração  $n_1$ , ela deixou de se propagar no meio de índice de refração  $n$ , e portanto deve ser subtraída a fase esta deixou de ganhar:

$$\Psi_-(z, \theta) = k L_a \cos \theta. \quad (2.24)$$

Portanto, ao serem refratadas, as componetes de onda-plana ganham a fase  $e^{i\Psi(z,\theta)}$ , onde

$$\Psi(z, \theta) = \Psi_+(z, \theta) - \Psi_-(z, \theta) = k \left( -\frac{L}{N} \cos \theta + NL \cos \theta_1 \right) \quad (2.25)$$

é a função de aberração esférica [12].

Para modelar a passagem de um meio para outro, levamos em conta a amplitude de transmissão de Fresnel de cada componente  $\mathbf{k}$  do campo, dada por:

$$T(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + N \cos \theta_1}, \quad (2.26)$$

onde, pela lei de Snell,  $\theta_1 = \arcsin(\frac{\sin \theta}{N})$ .

## 2.7 Aberrações óticas

As aberrações óticas são modificações nos feixes paraxiais induzidas por uma série de fatores, entre eles imperfeições nas lentes e desalinhamentos no sistema ótico. O estudo das aberrações é inspirado pelo fato de que a teoria MDSA subestima a força radial na pinça ótica quando o raio da microesfera aprisionada é menor ou da ordem do comprimento de onda  $\lambda$  do laser[15]. Raios maiores que  $\lambda$  recuperam tanto os resultados da teoria MDSA quanto os da ótica geométrica. Isso ocorre porque a esfera passa a sondar uma média do perfil do feixe, em contraste com o caso anterior, em que ela sonda diferenças de fase e distribuição de intensidade do feixe focalizado.

O formalismo de Seidel é um dos possíveis métodos para se descrever as aberrações em um feixe paraxial. Entre as aberrações primárias, que aparecem como os primeiros termos de uma expansão nesse formalismo, são relevantes para o nosso modelo o astigmatismo, a coma e a aberração esférica [15]. Estamos tratando aqui de aberrações antes da objetiva, ou seja, a aberração esférica tratada aqui tem origem diferente da descrita na sessão anterior, apesar de serem o mesmo fenômeno físico.

Podemos introduzir essas aberrações no modelo colocando a fase adicional  $e^{i\Phi_{adicional}(\theta,\phi)}$

nos campos na entrada da objetiva (modificando a equação 2.18), com:

$$\Phi_{adicional}(\theta, \phi) = 2\pi \left[ A'_{sa} \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^4 + A'_c \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^3 \cos(\phi - \varphi_c) + A'_a \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^2 \cos^2(\phi - \varphi_a) \right]. \quad (2.27)$$

**atenção aqui! tese do Rafael – > cos do  $A_{ast}$  é diferente (2(angulo), elevado ao quad), no artigo do Kaina, essa fase é referida como fase de Zernike, e tirei da tese do Rafa como fase de Seidel.** Identificamos  $A'_{sa}$ ,  $A'_c$  e  $A'_a$  como os parâmetros de aberração esférica (*sa* do inglês, *spherical aberration*), coma e astigmatismo. Para entender os parâmetros  $\varphi_c$  e  $\varphi_a$ , temos que entender o que são essas aberrações. A primeira característica delas é a quebra de simetria no plano perpendicular a propagação do feixe paraxial (eixo  $z$ ), e os parâmetros  $\varphi_c$  e  $\varphi_a$  são os eixos da orientação dos efeitos de coma e astigmatismo respectivamente. Isso também explica o porquê de não haver um parâmetro angular para aberração esférica: trata-se de uma aberração simétrica em  $\phi$ , o que fica muito claro pela seção anterior.

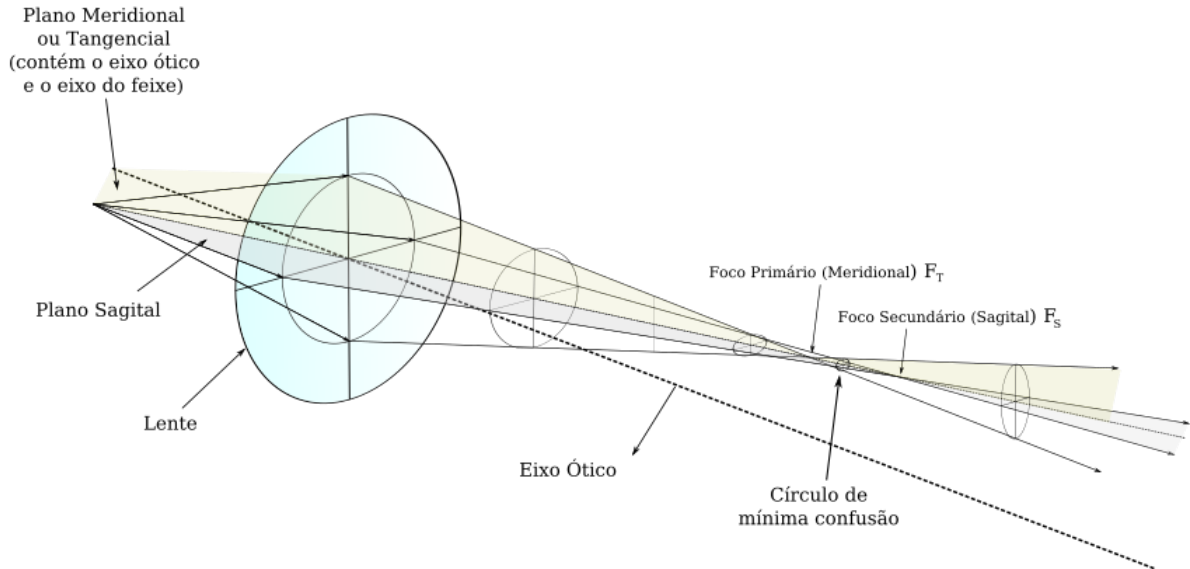


Figura 2.6: Feixe com astigmatismo.

Uma breve explicação das aberrações será feita a seguir, baseada em trabalhos do



grupo [11, 13, 15, 12], onde detalhes do seguinte desenvolvimento podem ser encontrados.

Considemos agora o problema prático: os experimentos que serviram de base comparatória para as simulações desenvolvidas não possuem coma e os efeitos de aberração esférica podem ser negligenciados. Portanto, somente o astigmatismo será levado em conta nas equações apresentadas. Como a fase referente ao astigmatismo possui uma dependência em  $\phi$ , podemos concluir que a integral da equação 2.13 será modificada.

Uma vez apresentadas todas as correções feitas ao modelo MD, vamos apresentar as expressões para força em termos dos coeficientes de multipolo.

## 2.8 Força ótica em termos da expansão em multipolos

Como apresentado no começo do capítulo, o método para se obter a força na pinça ótica é resolver a integral 2.4. A forma mais fácil de fazer-lo é tomando a superfície  $\sigma$  no infinito, já que a escolha dessa é arbitrária. Podemos argumentar também que a integral envolvendo o vetor de Poynting é zero. No limite que tal superfície está no infinito, usamos as expressões assintóticas das funções de Bessel (com dependência em  $kr$ ) dentro dos potenciais de Debye.

Portanto, a expressão para as contribuições de espalhamento e extinção do fator de eficiência na direção  $z$ , para uma polarização qualquer, corrigida para aberração esférica e astigmatismo, tem a forma [12]:

$$\begin{aligned}
 Q_{sz}(\rho, \phi, z) = & -\frac{4\gamma^2}{AN} \operatorname{Re} \sum_{jm\sigma} \left[ \frac{\sqrt{j(j+2)(j+m+1)(j-m+1)}}{j+1} \left( (a_j a_{j+1}^* + b_j b_{j+1}^*) \times \right. \right. \\
 & \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m}^{(\sigma)*} (1 - \sigma \sin 2\psi) + (a_j a_{j+1}^* - b_j b_{j+1}^*) \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m}^{(-\sigma)*} \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)} \Big) + \\
 & \left. \frac{2j+1}{j(j+1)} m \sigma a_j b_j^* (|\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)}|^2 (1 - \sigma \sin 2\psi) - \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j,m}^{(-\sigma)*} \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)}) \right],
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$Q_{ez}(\rho, \phi, z) = \frac{2\gamma^2}{AN} \operatorname{Re} \sum_{jm\sigma} (2j+1) \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \left[ (a_j + b_j) \mathcal{G}_{j,m}^{C,(\sigma)*} (1 - \sigma \sin 2\psi) + (a_j - b_j) \mathcal{G}_{j,m}^{C,(-\sigma)*} \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)} \right]. \quad (2.29)$$

O fator  $\gamma = f/\omega_0$  é a razão entre a distância focal e a cintura do feixe na entrada da objetiva, enquanto o fator  $A$ , denominado *filling factor*, é a fração de potência que é transmitida pela objetiva. Deixamos para o apêndice A as expressões para os coeficiente de multipolo  $\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)}$  e  $\mathcal{G}_{j,m}^{C,(\sigma)}$ , além das expressões para as componentes radiais e azimutais do fator de eficiência  $Q_\rho$  e  $Q_\phi$ , e dos multipolos  $\mathcal{G}_{j,m}^{\pm,(\sigma)}$  dos quais os dois últimos dependem.

No capítulo 3 serão descritas as medidas feitas com o aparato da pinça ótica. As forças não são medidas diretamente: como as microesferas estão em movimento browniano na solução, quando pinçadas elas passam flutuar ao redor da posição de equilíbrio na pinça. Seus movimento pode ser descrito por meio de um potencial harmônico, que permite uma expansão de Taylor da força em  $\rho$ , e uma constante elástica associada a pinça. Temos, então, a constante transversa  $\kappa_\rho$  de rigidez dada por[35]:

$$\kappa_\rho = -\frac{n_1 P}{c} \frac{\partial Q_\rho}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0, z=z_{eq}}, \quad (2.30)$$

onde  $P$  é a potência do laser; e a constante de torção [12]:

$$\kappa_\phi = -\frac{n_1 P}{c} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0, z=z_{eq}}. \quad (2.31)$$

Os somatórios em  $j$  e  $m$  são feitos da mesma forma que na expressão 2.11:  $j$  vai de 0 a  $\infty$ , e  $m$  de  $-j$  a  $j$ . Os valores da soma de  $\sigma$  são  $\pm 1$ , como na equação 2.18. O importante de observarmos aqui é a dependência de  $Q_z$  com  $\psi$ , que será um parâmetro livre no experimento e portanto na simulação. Podemos identificar nas expressões 4 tipos de termos: com multipolos com mesmo índice de polarização  $\mathcal{G}^{(+1)}\mathcal{G}^{(+1)*}$  e  $\mathcal{G}^{(-1)}\mathcal{G}^{(-1)*}$ , e com índices invertidos  $\mathcal{G}^{(+1)}\mathcal{G}^{(-1)*}$  e  $\mathcal{G}^{(-1)}\mathcal{G}^{(+1)*}$ . Os dois primeiros termos são proporcionais, respectivamente, a  $(1 - \sin 2\psi)$  e  $(1 + \sin 2\psi)$ , e os dois últimos, a  $\cos 2\psi e^{i2\psi}$  e  $\cos 2\psi e^{-i2\psi}$ .

Explicitar essa soma é de grande importância para os cálculos numéricos, pois podemos calcular esses 4 termos de forma independente, e teremos o valor de  $Q_z$  para qualquer ângulo da placa de quarto de onda.

## 2.9 Interação Spin-Órbita

Uma das características da pinça ótica que faz com que a modelagem teórica seja tão difícil é o fato de que o feixe que emerge da objetiva é muito focalizado, e portanto não paraxial. Um dos efeitos resultantes da focalização do feixe é a conversão de momento angular de spin do feixe, associado a polarização (ou helicidade) do campo, em momento angular orbital [7]. O momento angular orbital insere uma fase com dependência na variável cilíndrica  $\phi$ .

Evidências experimentais apontam que o campo espalhado por uma microesfera no aparato de pinça ótica pode carregar mais momento angular do que o campo incidente. Usamos o efeito de conversão de momento angular de spin para orbital junto com a teoria MD para pinça ótica para trazer luz a esse fenômeno.

De uma forma simples, podemos entender essa transferência de momento angular considerando um cone de ondas planas circularmente polarizadas com ângulo de meia abertura  $\theta$ , da mesma forma que fizemos no começo da seção 2.3.

Suas componentes de spin apontam para as respectivas direções de propagação, com o sentido definido pelo sentido da polarização circular **colocar referência**. Assumindo que o momento angular (intrínseco) total se conserve, vemos que a soma dos vetores diametralmente opostos terão suas componentes radiais se anulando, enquanto as na direção axial se somam. Se  $\mathbf{P}$  é o momento angular total do feixe e  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{L}$  são os momentos angulares de spin e orbital, temos a seguinte relação [7]:

$$\mathbf{S} = \sigma \cos \theta \mathbf{P}, \quad \mathbf{L} = \sigma(1 - \cos \theta) \mathbf{P}. \quad (2.32)$$

Na seção 2.3 rotacionamos os potenciais de Debye, que representam ondas parciais, utilizando um operador de rotação. Podemos, ao invés disso, rotacionar o campo vetorial  $\mathbf{E}$  diretamente. Essa rotação pode ser representada na base de polarização circular  $|\sigma+\rangle$ ,

$|\sigma-\rangle$  e  $|z\rangle$  com a seguinte transformação unitária [8]:

$$\begin{pmatrix} \langle\sigma+|E'\rangle \\ \langle\sigma-|E'\rangle \\ \langle z|E'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & be^{-i2\phi} & \sqrt{2abe^{-i\phi}} \\ -be^{i2\phi} & a & \sqrt{2abe^{i\phi}} \\ -\sqrt{2abe^{i\phi}} & -\sqrt{2abe^{-i\phi}} & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle\sigma+|E\rangle \\ \langle\sigma-|E\rangle \\ \langle z|E\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

A dependência com o ângulo  $\phi$  também aparece nas expressões dos campos rotacionados (equação 2.11), ao rotacionarmos os harmônicos esféricos (equação 2.8) com  $\alpha = -\gamma = \phi_k$ .

Uma vez que haja momento angular orbital incidindo na microesfera, podemos fazer um paralelo com a transferência de momento linear para explicar o excesso de momento angular no campo espalhado.

Como discutido na seção 2.3, os termos de extinção representa a quantidade de momento que é transferida do campo incidente à microesfera; enquanto o termo de espalhamento está relacionado à transferência de momento para o campo espalhado. Podemos entender que, na região de pequenos raios, o termo que domina na expressão da força é o de extinção, pois se o raio da esfera é muito menor que o comprimento de onda do laser, pode-se concluir que o campo não será tão afetado por esse centro espalhador ( $\mathbf{E}_S$  é muito pequeno e  $\text{Re}(\mathbf{E}_{IN} \cdot \mathbf{E}_S^*)$  domina sobre  $\mathbf{E}_S \cdot \mathbf{E}_S^*$ ).

Quanto maior for o centro espalhador, mais afetado o campo será, e a partir de um certo raio, o termo de espalhamento da força domina **[encontrar referência]**. A imagem 2.7 mostra o comportamento da constante de torção  $\kappa_\phi$ .

Podemos observar que na região em que o raio  $a$  é menor que  $0,15\mu m$ , a constante de torção é positiva, e o torque indica um ganho de momento angular na mesma direção ao de spin do campo incidente. Sendo essa a região onde o termo de extinção domina, podemos inferir que o campo está cedendo momento angular para a microesfera, e esta não está espalhando momento angular o suficiente para sofrer torque negativo.

Quando o raio aumenta, a componente de espalhamento da força começa a dominar, e efeitos de torque negativos a prevalecer. Podemos concluir que o campo espalhado carrega momento angular em excesso. Como a componente de spin do campo espalhado não podem ser maior que do incidente, por esta última já ser máxima, o excesso de

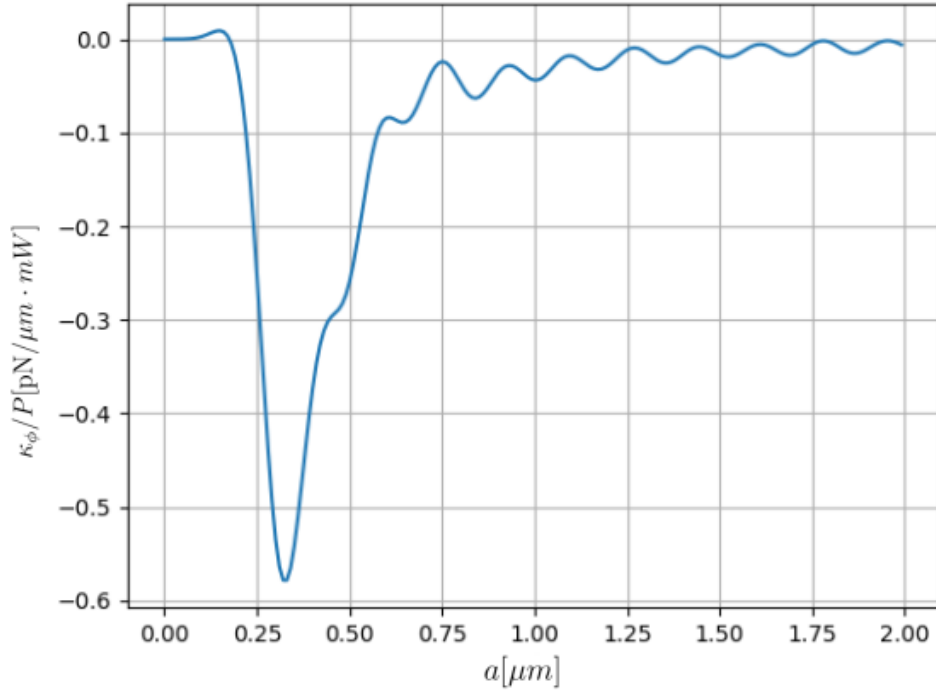


Figura 2.7: Constante de torção  $\kappa_\phi$  em função do raio da microesfera. O comprimento de onda do laser é de  $1064nm$ , a distância  $L$  entre o foco e a lamínula é de 4,5 unidades de raio e a polarização  $\sigma+$ . Astigmatismo não é levado em conta nessa simulação. **colocar informações sobre os dados (comp de onda, aberração esférica, ausência de astig, polarização, etc.).**

momento angular tem que ser de origem orbital.

## Capítulo 3

# Experimento e Simulação

Neste capítulo apresentamos o experimento que foi simulado com a teoria MDSA+ para obter os resultados da presente dissertação, bem como os procedimentos de tal simulação.

### 3.1 Aparato Experimental

O aparato que descrevemos nessa seção mede a transferência de momento angular da luz na pinça ótica. O experimento foi realizado em 2018 por Diniz *et al.* [12, 13]. Detalhes do procedimento experimental, do material e das ferramentas usadas nesse experimento podem ser encontradas nas referências citadas, e não serão abordados nesse trabalho.

A descrição do experimento deve ser dividida em partes. De forma geral, temos um feixe que é produzido na mesa ótica sendo levado para dentro de um microscópio. Dentro desse microscópio há uma lente objetiva e o porta-amostra, que contém um meio fluido com microesferas diluídas.

Este porta-amostra está acoplado a um suporte preso ao estágio do microscópio que pode ser movido em qualquer direção por meio de um controle piezo-elétrico ou manualmente. Tudo isso forma o aparato da pinça ótica, e deixaremos para o final a descrição do experimento que foi simulado.

Primeiramente, trataremos do feixe paraxial: trata-se de um laser com perfil gaussiano ( $TEM_{00}$ ) e comprimento de onda  $\lambda_0 = 1064nm$ . Suas características são importantes para

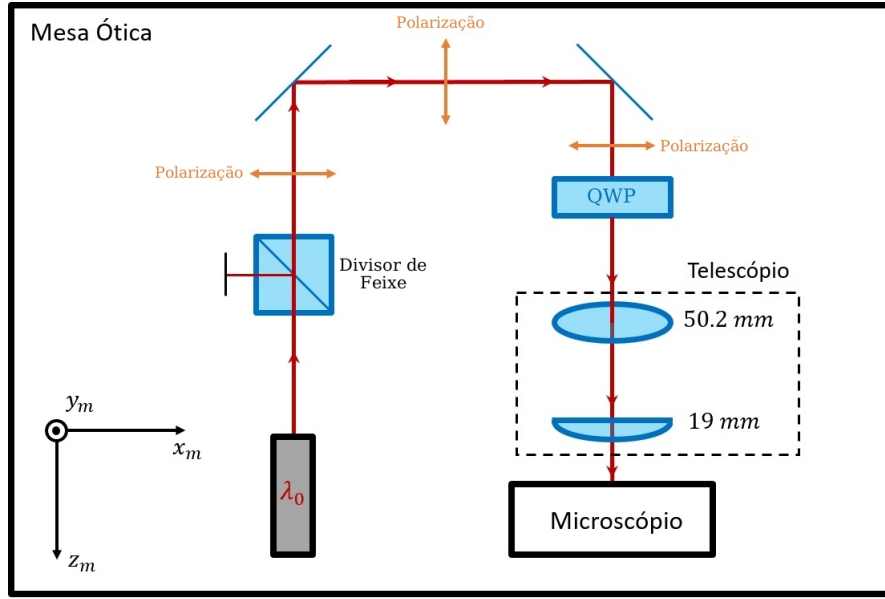


Figura 3.1

definir o feixe focalizado pela objetiva, como vimos no capítulo anterior.

O feixe laser, logo após ser gerado, incide sobre um divisor de feixe que o polariza linearmente. A direção de polarização é paralela à mesa, e no caso em que o feixe entra no porta-amostra com polarização linear, a direção de polarização passa a definir o eixo  $x$  das nossas coordenadas. É com esse eixo que vamos medir o ângulo  $\phi$  das coordenadas cilíndricas da microesfera e o ângulo  $\varphi_a$  do eixo do astigmatismo. Como já foi explicado, o astigmatismo gera um alongamento no perfil do feixe, fazendo com que o *spot* tenha um formato elipsoidal ao invés de circular. O ângulo entre a direção do alongamento e o eixo de polarização linear (eixo  $x$ ) é o ângulo  $\varphi_a$ . Dessa forma, medir esse ângulo é realizado de forma muito fácil uma vez que se obtenha a imagem do perfil do feixe. O valor medido e usado na simulação foi  $\varphi_a = (1 \pm 1)^\circ$ .

A largura da cintura  $\omega_0$  do feixe é essencial para garantir a condição de aprisionamento da microesfera, pois se esta for muito menor que a entrada da objetiva, teremos o que se chama de *underfilling*, que faz com que o fator de eficiência da pinça seja muito reduzido. Como, para alguns tamanhos de esfera aprisionada, a largura do feixe não é grande o

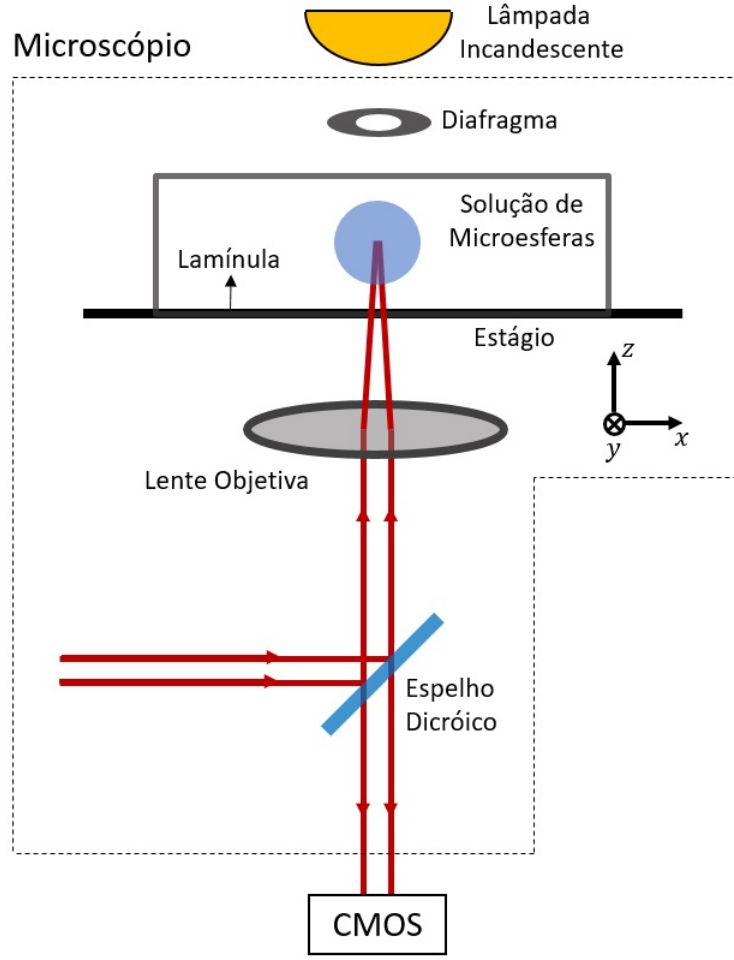


Figura 3.2

suficiente, usa-se um expensor de feixes, que consiste em um par de lentes, sendo uma biconvexa e a outra convexa, para se ampliar o perfil deste.

A cintura do feixe é medida fazendo-o passar por uma pupila e medindo-se a potência média transmitida. Como o campo tem perfil gaussiano e a potência é proporcional ao quadrado do campo, a potência transmitida deve obedecer [35]:

$$P(R) = P_i(1 - e^{\frac{-2R}{\omega_0}}), \quad (3.1)$$

onde  $R$  é o raio da pupila e  $P_i$  é a potência do laser. O ajuste dessa função com valores medidos da potência fornece o valor da cintura mínima  $\omega_0 = 5.82 \pm 0.08$ .



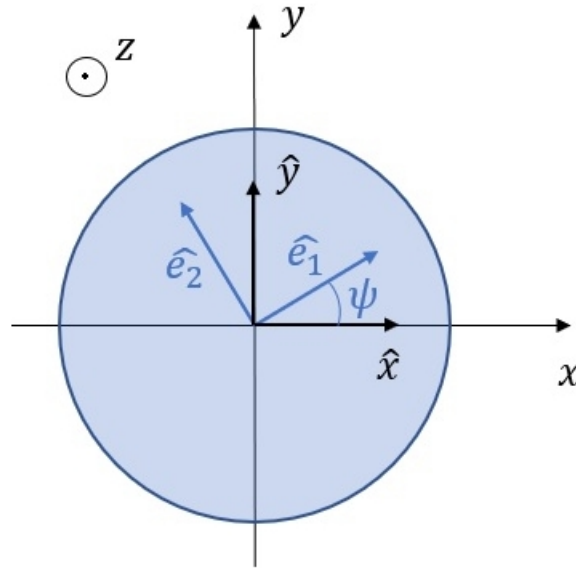


Figura 3.3: explicar essa figura: e1 é o eixo rápido, etc

Antes de entrar no microscópio, o feixe passa por uma placa de quarto de onda (QWP). O eixo rápido da placa faz um ângulo (controlável)  $\psi$  com a direção de polarização linear (eixo  $x$ ), como dito na seção 2.5 e mostrado na equação 2.18. Inicialmente o feixe tem polarização linear, ou seja,  $\psi = 0$ . A direção e sentido de propagação do feixe definem o eixo  $z$  do nosso sistema de coordenadas. Ao entrar no microscópio, o feixe entra na objetiva de imersão em óleo. A objetiva tem abertura numérica nominal de  $NA = 1.4$ . Como a abertura numérica é maior que o índice de refração da água ( $n_1 = 1.332$ ), o ângulo de abertura do feixe incidente sobre a microesfera será  $\theta_0 = \arcsin(n_1/n)$ , onde  $n = 1.51$  é o índice de refração do vidro. Isso acontece porque parte do feixe que emerge da objetiva incide sobre a interface vidro-água com ângulos maiores que o ângulo crítico, gerando reflexão interna total e ondas evanescentes dentro do porta-amostra. A contribuição para a força das ondas evanescentes não são levadas em conta no modelo teórico, pois assumimos que o centro espalhador está a alguns comprimentos de onda de distância da interface.

Assim, o feixe com a polarização determinada pela QWP entra no microscópio, sendo

refletida por um espelho dicróico e incidindo na objetiva. O espelho dicróico reflete a luz com comprimento de onda igual do laser, mas transmite comprimentos de onda de luz visível (um pouco menor que o do laser). Isso permite que uma luz ilumine o porta-amostra e possamos ver a imagem da solução no microscópio através do espelho dicróico. Usando uma câmera podemos fazer filmes e obter as imagens de onde serão tirados os dados.

A solução dentro do porta-amostra é composta por microesferas de poliestireno dispersas em água deionizada. A parte real do índice de refração do poliestireno é de  $\text{Re}(n_2) = 1.576$ , e a parte imaginária, responsável pela absorção de luz por esse material, é de  $\text{Im}(n_2) = 0.0011$  [21].

Uma vez que o feixe entre no porta-amostra, um procedimento é feito para definir a posição do foco no eixo  $z$  e a posição do *spot* no plano  $xy$  visualizado pela câmera [13]. Isso é feito antes de colocar a solução com microesferas, pois assim é possível observar o feixe com a câmera.

Após saber a posição do foco, é colocada a solução e a lamínula superior. Com o controle manual do estágio do microscópio pode-se mover a posição do plano focal e buscar esferas para serem aprisionadas.

## 3.2 Procedimento Experimental

Após o aprisionamento de uma microesfera, é feito um procedimento para determinar a posição de equilíbrio no eixo  $z$ . Para isso, vamos definir as coordenadas que estamos usando e que será usada na simulação. O eixo  $z$  tem como origem o foco paraxial (note a diferença em relação ao modelo teórico, em que a origem se encontra no centro da microesfera) e a coordenada  $z$  será a posição do centro da microesfera. A coordenada da interface será, para fins práticos,  $-L\hat{z}$ , com  $L$  sendo o módulo da distância entre o plano focal e o plano da interface (como definido na figura 2.5).

No procedimento, deslocamos a microesfera aprisionada até que ela toque a lamínula

de vidro. Nesse momento temos o vínculo  $z_{eq} = a - L_0$ , ou seja, a posição de equilíbrio estável da microesfera define uma distância inicial entre o plano focal e a interface ( $L_0$ ). Por causa do efeito de aberração esférica, discutido na seção 2.6, a posição de equilíbrio tende a ser um pouco abaixo do plano focal, e por isso, usualmente temos  $z_{eq} < 0$ .

Esse detalhe é muito importante para a simulação, pois este vínculo torna possível determinar essa distância inicial  $L_0$ . Depois de encostada a microesfera na lamínula, deslocamos o estágio do microscópio  $3\mu m$  para baixo. O foco tem um deslocamento efetivo de  $3\frac{n+1}{n}\mu m$ , por causa da diferença de caminho ótico(**perguntar pro paulo sobre referencia**).

Com a microesfera longe da lamínula, observamos seu movimento browniano ao redor da posição do *spot* do laser. A seguir, o estágio do microscópio é movido na direção  $x$  com o controle piezo-elétrico. O deslocamento tem uma velocidade de  $v_1 = 250\mu m/s$ . Faz-se, em seguida, um movimento no sentido contrário com mesma velocidade, e repete-se todo esse procedimento mais duas vezes, na primeira com velocidade de  $v_2 = 150\mu m/s$  e na segunda  $v_3 = 62.5\mu m/s$ .

Cada um desses movimentos arrasta o fluido dentro do porta-amostra, e portanto faz com que o fluido ao redor da esfera se desloque também. Dessa forma, a microesfera sofre uma força de arrasto (força de Stokes), dada pela lei de Stokes-Faxen:

$$\vec{F}_s = \beta \vec{v}, \quad (3.2)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade do porta-amostra e  $\beta$  é uma constante que depende da viscosidade do meio e da razão entre o raio da microesfera e a distância entre seu centro de massa e a interface.

Essa força de arrasto desloca a microesfera da posição de equilíbrio da pinça ótica (do centro do *spot*). Uma nova posição de equilíbrio é obtida com  $\vec{F}_\phi + \vec{F}_\rho = -\vec{F}_s$ . Uma vez que  $\vec{F}_s = F_s \hat{x}$ , podemos projetar  $\vec{F}_\phi$  e  $\vec{F}_\rho$  no eixo  $x$  e encontrar a condição de equilíbrio:  $F_s = F_\rho \cos \phi + F_\phi \sin \phi$ .

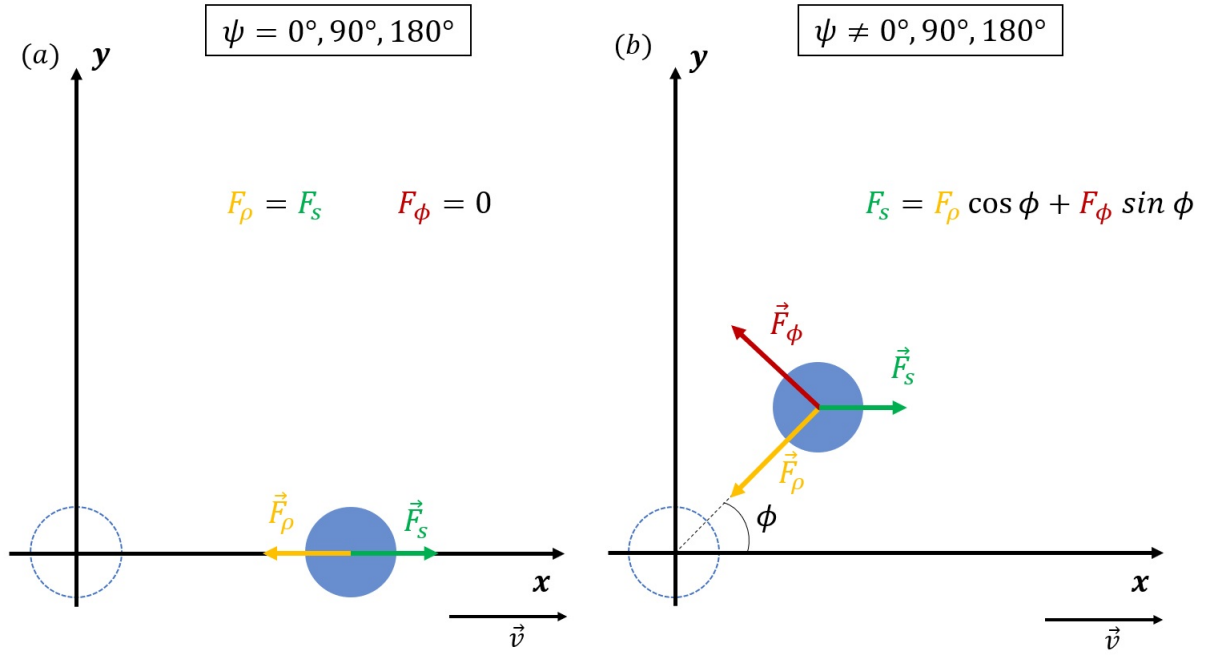


Figura 3.4

Como vimos anteriormente, as forças óticas  $\vec{F}_\phi$  e  $\vec{F}_\rho$  são lineares em  $\rho$  quando próximas da posição de equilíbrio. Como a força de arrasto não desloca a microesfera da pinça o suficiente para que a força não seja mais linear, o que esperamos é que o ângulo  $\phi$  seja constante para qualquer velocidade imposta pelo piezo-elétrico (como mostrado na figura 3.5).

Dessa forma, cada velocidade determina uma posição de equilíbrio, ao redor da qual a microesfera apresenta movimento browniano. As posições médias da esfera para cada velocidade formam uma reta que determinam  $\phi$ .

É importante observar que esse ângulo será muito pequeno. Podemos aproveitar esse fato e aproximar a projeção das forças no eixo  $y$   $F_\rho \sin \phi = F_\phi \cos \phi$  como:

$$\frac{F_\phi}{F_\rho} = \tan \phi \approx \phi. \quad (3.3)$$

Com a linearidade da força  $F_\phi/F_\rho = \kappa_\phi \rho / \kappa_\rho \rho$ , temos:

$$\frac{\kappa_\phi}{\kappa_\rho} \approx \phi. \quad (3.4)$$

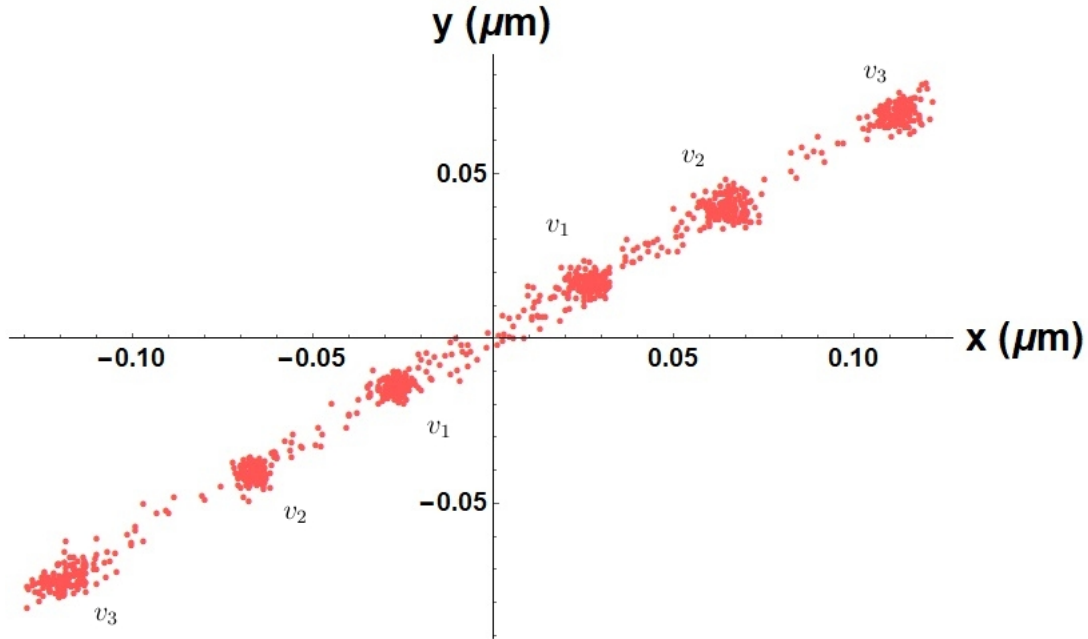


Figura 3.5: Pontos experimentais do experimento. São mostradas várias baterias de dados, cada uma representada por uma velocidade. Podemos ver o efeito do movimento browniano ao redor das posições de equilíbrio. **deixo um agradecimento/referencia para o Kainã?**

Por fim, o experimento consiste em medir o ângulo  $\phi$  para várias polarizações do feixe incidente. Espera-se que deslocamentos ao longo da direção  $x$  (de polarização linear) não produzam rotação em torno do eixo do feixe, que é o caso de (a) na figura 3.4. Se o deslocamento fosse em outras direções, poderíamos esperar uma força de gradiente na direção  $\phi$  causada por assimetrias no feixe. Da mesma forma, o astigmatismo pode gerar essa força azimutal pela quebra da simetria de rotação que este gera no spot. Nos pontos experimentais podemos ver que o eixo do astigmatismo é de aproximadamente  $1^\circ$ , e por isso não observamos rotação nenhuma quando  $\psi = 0$ .

### 3.3 Simulação do experimento de transferência de momento angular

A simulação do experimento leva em conta alguns processos que não foram explicados na seção anterior. Começamos por definir a posição inicial do foco em relação a lamínula.

O fator de eficiência  $Q_z$  é calculado para várias posições onde o vínculo  $z = a - L$  é válido, com  $L - a$  como *input* para a posição  $z$  onde é calculada a força e  $L$  para a distância entre o plano focal e a interface. **inserir gráfico** No experimento, esse primeiro passo é feito com  $\psi = 0$ .

A forma como são tratadas medidas de distância no programa é por unidades de raio. Dessa forma as distâncias ficam adimensionais, e portanto mais fáceis de se interpretar. A distância entre o foco e a interface fica definida a menos do deslocamento inicial (de  $3\mu m$ ):  $L = L_0 + 3\frac{n_1/n}{a}$  (com  $a$  em  $\mu m$  e  $L$  e  $L_0$  em unidades de raio).

Após esse cálculo podemos procurar a posição de equilíbrio estável da microesfera em função da sua posição relativa ao plano focal. Fazemos  $\rho = 0$  e calculamos  $Q_z$  para vários valores de  $z$ . Buscamos os pontos em que cruzam o eixo  $Q_z = 0$ , de forma que  $Q_z(z_i) > 0$  e  $Q_z(i + 1) < 0$ . Essa é a condição para posição de equilíbrio estável.

Com esses dois pontos podemos traçar uma reta, e como a força é linear ao redor da posição de equilíbrio, o valor de  $z$  em que  $Q_z = 0$  pode ser calculado com:

$$z_{eq} = -\frac{B}{A}, \quad (3.5)$$

onde  $A$  e  $B$  são os coeficientes de ajuste da reta  $Q_z(z) = Az + B$ .

No experimento, a posição de equilíbrio não é diretamente medida, mas sabe-se que ela varia quando a polarização do feixe incidente muda. Levar isso em conta no código implica em calcular  $Q_z$  várias vezes até que o valor desse mude de sinal como descrito anteriormente.

Calcular tal posição de equilíbrio para cada polarização do feixe incidente seria computacionalmente muito custoso. Dessa forma, a dependência com o ângulo  $\psi$  da placa de quarto de onda é explicitada e o fator de eficiência  $Q_z$  para várias posições  $z$  da microesfera pode ser calculado para qualquer polarização uma vez só. Uma vez tendo os valores de  $Q_z(z)$  e  $z$ , podemos calcular a posição de equilíbrio em função do ângulo da placa de onda.

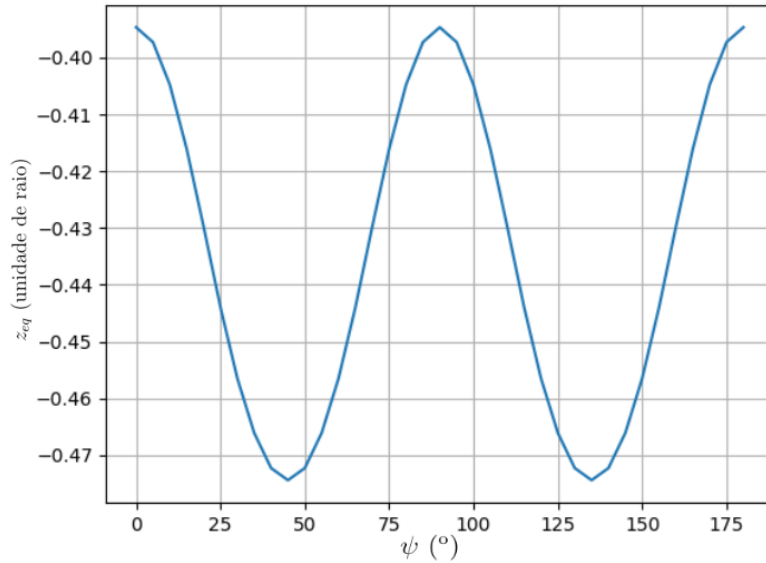


Figura 3.6: Comportamento da posição de equilíbrio em função do ângulo da placa de quarto de onda  $\psi$ . O valor do parâmetro de astigmatismo para essas posições é de  $A_{ast} = 0.25$

É possível também que o intervalo em  $z$  em que se calcula o fator de eficiência  $Q_z$  não possua nenhuma posição de equilíbrio estável. Constatações experimentais nos levam a definir tal intervalo, como por exemplo, se vemos a microesfera focalizada na câmera, ela só pode estar frações de unidades de raio ( $a \approx 0.5\mu m$ ) de distância do foco paraxial. Portanto, se o programa não encontrar tal posição de equilíbrio dentro desse intervalo, as condições de pinçamento para os parâmetros de entrada não são satisfeitos.

Isso ocorre principalmente quando fazemos simulações com parâmetros de astigmatismo altos ( $A_{ast} > 0.4$ ). **rever esse paragrafo, pois nao tenho nenhuma imagem ou medida: o programa retorna erro quando busca por posicoes de eq acima desse valor de  $A_{ast}$ , justamente por nao achar dentro do intervalo de 4 unidades de raio, por volta de  $2\mu m$**

Com as posições de equilíbrio para cada  $\psi$  do experimento e a posição inicial  $L_0$  podemos calcular  $\kappa_\phi/\kappa_\rho$  numericamente. Assim, toda vez que a posição de equilíbrio

mude, todo o cálculo tem que ser feito novamente. Por esse motivo, as posições de equilíbrio são arredondadas até a 4ª casa decimal dos valores em unidades de raio, que corresponderia a considerar variações menores que  $1nm$ .

De fato, o movimento browniano da microesfera tem amplitudes muito maiores que  $1nm$ , que significa que fazer tal aproximação não deve mudar o resultado final. Valores exatos da posição de equilíbrio fornecidos pelo código que diferem por um valor menor ou igual a  $10^{-5}$  serão arredondados para o mesmo valor, e o cálculo de  $\kappa_\phi/\kappa_\rho$  será feito uma vez só.

Reproduzimos todo esse procedimento para vários valores do parâmetro de astigmatismo e comparamos o valor obtido de  $\kappa_\phi/\kappa_\rho$  com o ângulo  $\phi$  de rotação do experimento. Para determinar qual valor de  $A_{ast}$  melhor descreve o experimento, utilizamos o método de mínimos quadrados: subtraímos o valor de  $\phi$  e de  $\kappa_\phi/\kappa_\rho$  e tomamos o quadrado dessa diferença. Quanto menor for o valor desse quadrado, maior a verossimilhança com as medidas do experimento.

### 3.4 Condições de Pinçamento

Outro uso para o modelo MDSA é testar condições de pinçamento baseado nas observações experimentais. Sabemos que microesferas são aprisionadas próximas ao foco, coincidindo com esse na ausência de aberrações e absorção. Podemos usar o modelo para calcular o fator de eficiência  $Q_z$  nessa vizinhança e entender o comportamento da força perto do foco.

O simples fato de existir um ponto onde  $Q_z$  mude de sinal de positivo para negativo (equilíbrio estável) não é suficiente. Como foi dito anteriormente, a microesfera apresenta movimento browniano perto da posição de equilíbrio. Flutuações térmicas podem ser suficientes para a microesfera fugir do aprisionamento, que ocorre quando a barreira de potencial ótico não é grande o suficiente.

Apesar da força ótica não ser conservativa, no caso em que estamos confinados ao eixo



do feixe ( $\rho = 0$ ) podemos definir um potencial ótico a partir do trabalho realizado entre dois pontos do eixo. Usando a equação 2.19, obtemos:

$$V(z) = - \int_{z_0}^z \frac{n_1 P}{c} Q_z dz + V(z_0). \quad (3.6)$$

O que nos importa de fato é o tamanho da barreira potencial. Por isso, podemos fazer  $z_0 = z_{eq}$  e buscar o próximo ponto em que  $Q_z > 0$ , que será o máximo local do potencial. Esse valor de  $z$  será maior que  $z_{eq}$ , com sentido de  $z$  positivo na mesma direção de propagação do feixe, como podemos ver na figura 3.7. O critério para haver pinçamento é que a barreira potencial seja maior que  $3k_B T$ .

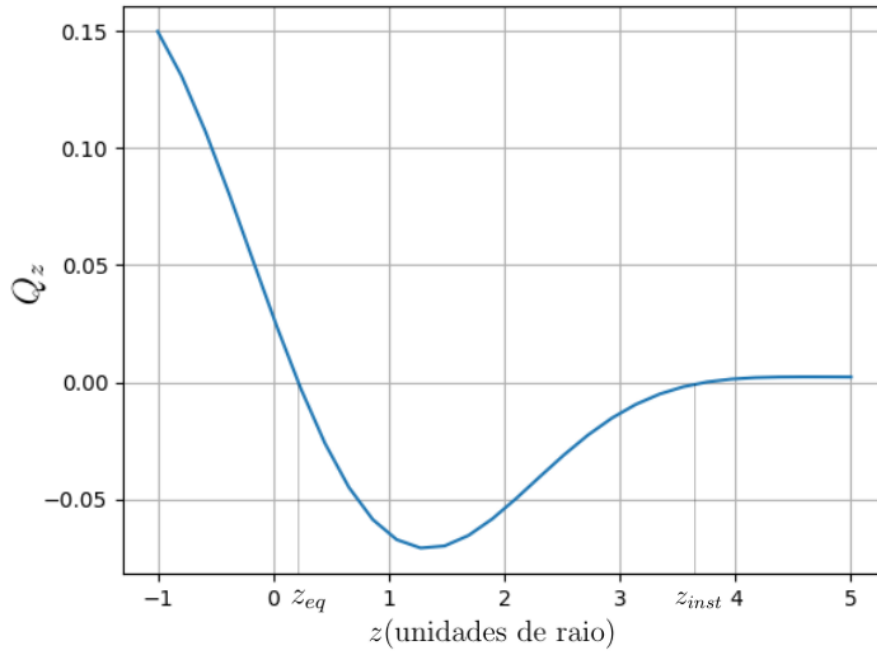


Figura 3.7: Comportamento do fator de eficiência axial em função de  $z$ . O ponto  $z_{eq}$  indicado no gráfico corresponde à posição de equilíbrio estável na direção  $z$ , enquanto o ponto  $z_{inst}$  corresponde a um ponto de equilíbrio instável. Esse último também será o ponto em que  $V(z)$  será um máximo local.

A parte imaginária do índice de refração é responsável pelo efeito de absorção de luz pela microesfera. A região descrita na figura 3.8 sugere a região onde haverá pinçamento

pelo critério da barreira de potencial. O interesse em estudar essa região de pinçamento é determinar um limite superior para a parte imaginária do índice de refração do material da microesfera.

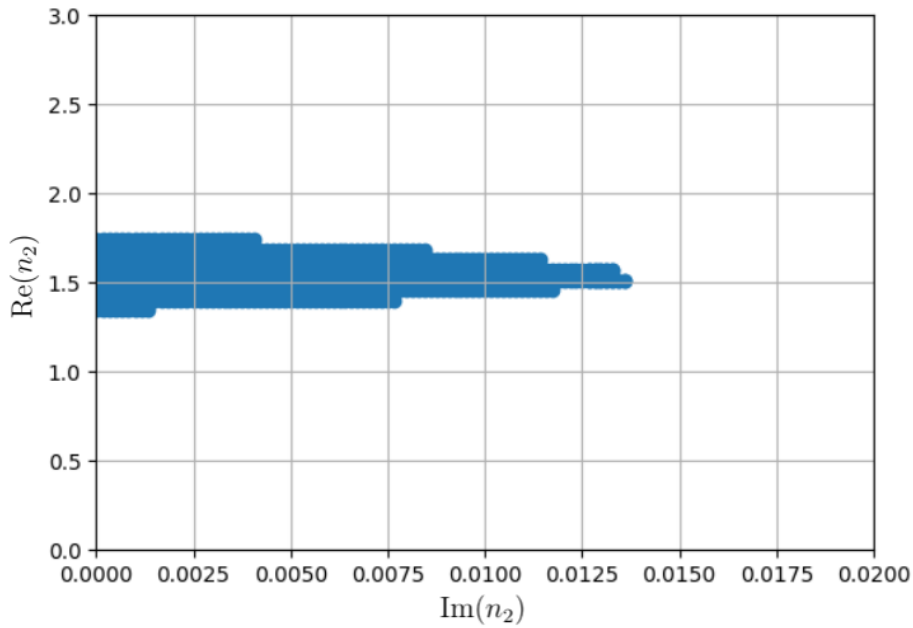


Figura 3.8: Região onde há uma posição de equilíbrio estável a pelo menos 3 unidades de raio de distância do foco. O aumento da absorção de luz pela microesfera faz com que a posição de equilíbrio se desloque no sentido positivo do eixo  $z$  (sentido de propagação). Efeitos de aberração esférica e astigmatismo não são levados em conta nessa simulação.

O efeito de absorção desempenha um papel muito mais importante nos experimentos com esferas de raios maiores, da ordem de  $8\mu m$ . Microesferas com esse raio foram apri-sionadas no laboratório, porém simulações que levam absorção em conta não conseguem encontrar um ponto em que  $Q_z$  seja menor que zero ao longo do eixo  $z$ .

Por outro lado, fazer simulações com esferas grandes em relação ao comprimento de onda é muito custoso do ponto de vista computacional. Uma vez determinado um limite superior para a parte imaginária do índice de refração, podemos buscar condições de pinçamento para esferas menores via simulação e determinar um valor para este.

# Capítulo 4

## Resultados

Nesse capítulo discutiremos sobre os resultados obtidos nas simulações descritas no capítulo anterior. Resultados obtidos de métodos alternativos são usados como comparação e validação.

### 4.1 Transferência de momento angular e caracterização do astigmatismo

Primeiramente, devemos observar que o efeito de torque negativo é dependente de aberrações óticas. O astigmatismo desempenha um papel de atenuar esse efeito, podendo até trocar o sinal de  $\kappa_\phi$  [12]. No nosso caso, os ângulos de rotação da microesfera ao redor da posição de equilíbrio ( $\phi$ ) são simplesmente diminuídos. Isso nos possibilita tentar ajustar uma curva simulada com o modelo MDSA+ com o parâmetro de astigmatismo  $A_{ast}$  como variável livre.

Usamos um método de mínimos quadrados para realizar esse ajuste. Dado o conjunto de pontos experimentais  $\phi_i^{exp}$ , calculamos a função erro  $E$  do conjunto de pontos simulados  $\phi_i^{sim}$ , onde cada índice  $i$  corresponde a um ângulo  $\psi$  na placa de quarto de onda. A função erro é definida como:

$$E(A_{ast}) = \sum_i [\phi_i^{exp} - \phi_i^{sim}(A_{ast})]^2. \quad (4.1)$$

A figura 4.1 mostra o conjunto de pontos experimentais em vermelho e os pontos para

a teoria MDSA+ com parâmetros de astigmatismo diferentes em azul. Podemos ver que a ausência de correções para o astigmatismo superestima o efeito de torque negativo (figura da esquerda), enquanto o valor de  $A_{ast} = 0.36$ , considerado alto, faz com que o torque quase desapareça. Isso é explicado pelo efeito de degradação da região focal causado pelo astigmatismo.

Ao considerar parâmetros de astigmatismo altos, começamos a ter problemas para achar uma posição de equilíbrio para a microesfera, e os ângulos de rotação simulados passam a ser muito menores que os valores obtidos experimentalmente.

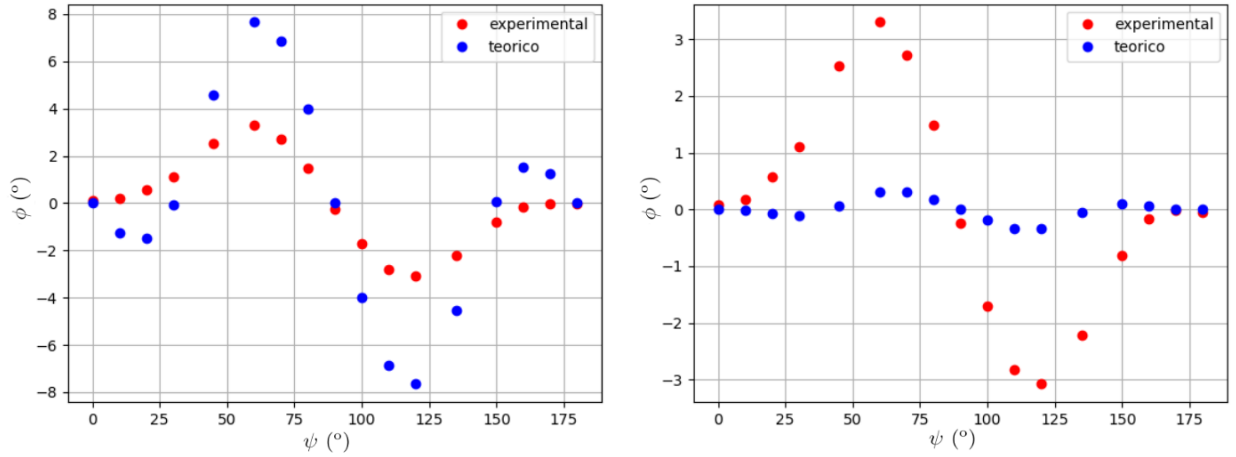


Figura 4.1: Simulação com  $A_{ast} = 0$  (à esquerda) e  $A_{ast} = 0.36$  (à direita).

A simulação dos vários parâmetros de astigmatismo mostraram que o valor que minimiza a função erro é  $A_{ast} = 0.24 \pm 0.1$  (figura 4.2). A incerteza foi estimada tomando 20% do valor da função erro no mínimo  $E(0.24) = 2.65$ , e acrescentando a esse valor. Obtemos, então, a tolerância do erro  $E_{tol} = 3.18$ . Os valores da função erro para  $A_{ast} = 0.23, 0.25$  são, respectivamente, 2.96 e 3.14. Como são menores que  $E_{tol}$ , assumimos que estão dentro da barra de erro. Valores do parâmetro de astigmatismo maiores que 0.26 e menores que 0.22 geram erros maiores que 4, indicando que  $A_{ast} = 0.24$  é um mínimo global.

Podemos ver que as contribuições mais importantes para o ajuste são os pontos em volta dos ângulos  $60^{\circ}$  e  $120^{\circ}$ . As previsões do modelo para as regiões entre  $0^{\circ}$  e  $30^{\circ}$  e entre

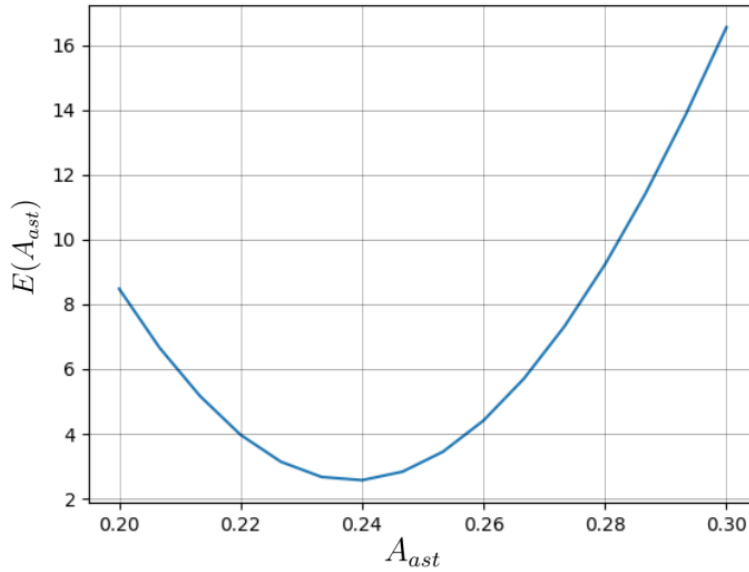


Figura 4.2: Valores da função erro (equação 4.1) em função do parâmetro de astigmatismo  $A_{ast}$ . O mínimo se encontra aproximadamente em  $A_{ast} = 0.24$ .

150° e 180° são de torque positivo, enquanto o experimento apresenta torque negativo para qualquer polarização que não seja linear. De acordo com a teoria, os termos de polarização cruzada da força são os responsáveis pelo torque nessa região, o que pode indicar que essa contribuição está sendo superestimada.

Podemos notar que a região ao redor de 60° e 120° na figura 4.7 está com um bom acordo com a teoria. Comparando com o gráfico à esquerda da figura 4.1, correspondente ao caso sem astigmatismo, fica claro que a região que prediz torque positivo também é atenuada, e não interfere de forma negativa com o ajuste.

Podemos comparar o resultado obtido com o ajuste pela simulação com o resultado da caracterização por nível de cinza [15, 12]. A curva teórica é obtida por meio da propagação do feixe não paraxial [29]. O valor é ajustado com medidas de intensidade do centro do *spot* do laser em alturas diferentes do eixo de propagação. Foi obtido  $A_{ast} = 0.25 \pm 0.4$  com esse método, o que está de acordo com o valor encontrado pelo ajuste.

Por fim, observamos que o resultado obtido é pouco sensível a alguns parâmetros

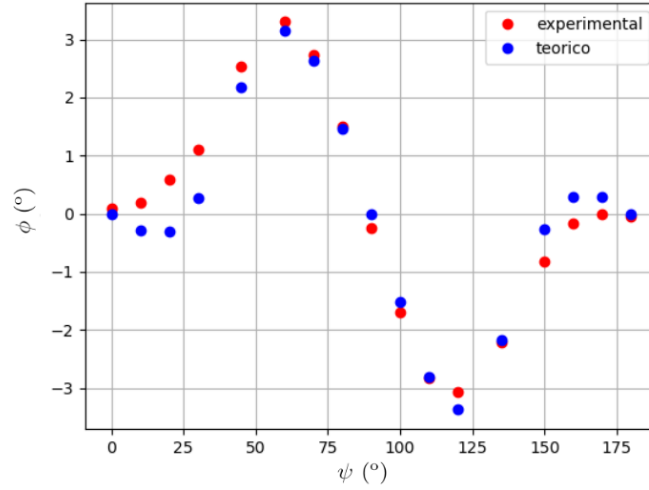


Figura 4.3: Pontos teóricos em azul, com o parâmetro  $A_{ast} = 0.24$ , ajustado como mínimo da função erro.

importantes do sistema. Se a absorção de luz pela microesfera não for levada em conta, ou seja, tomar  $\text{Im}(n_2) = 0$ ; o valor obtido para o parâmetro de astigmatismo é  $A_{ast} = 0.23$ , que está dentro das medidas de incerteza do ajuste anterior e do método de nível de cinza. Na próxima seção será discutido como efeitos de absorção exercem influências muito maiores sobre as condições de pinçamento.

## 4.2 Caracterização da amostra na pinça ótica

Os gráficos do fator de eficiência  $Q_z$  por  $z$  foram feitos para alguns valores de  $\text{Im}(n_2)$  e para alguns raios diferentes. O valor nominal do raio das microesferas pinçadas é de  $a = 7.9 \pm 0.1$ , e o valor encontrado na literatura para  $\text{Im}(n_2)$  é  $1.1 \times 10^{-3}$ . Foram feitas simulações para raios entre  $7.8$  e  $8\mu m$ , e  $\text{Im}(n_2)$  tão pequenos quanto  $3 \times 10^{-4}$ .

Podemos ver no gráfico à esquerda da figura 4.4 que não há valor de  $Q_z$  menor que zero, ou seja, a microesfera não pode ser pinçada. À direita, o zoom da região do plano focal, onde o pinçamento deveria estar ocorrendo.

Fazendo simulações com os parâmetros experimentais do sistema, não encontramos

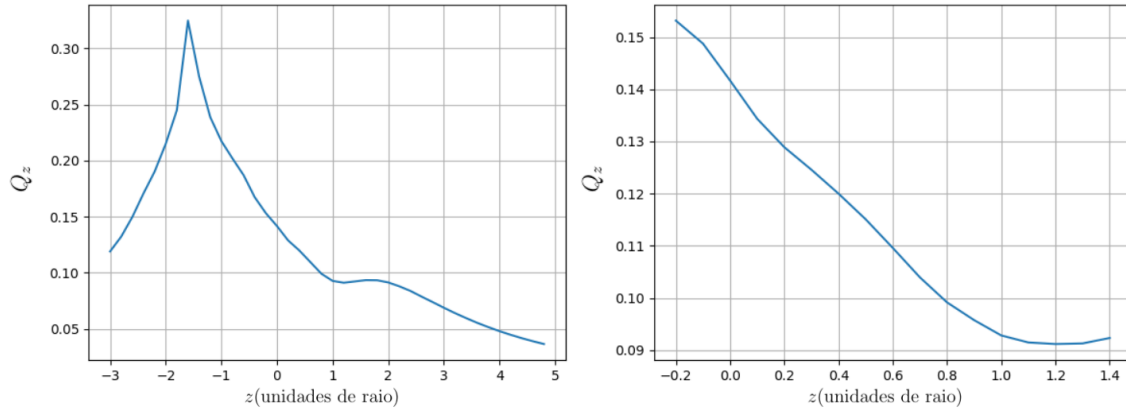


Figura 4.4: Componente  $Q_z$  do fator de eficiência em função de  $z$ . O raio da esfera é  $a = 7.9\mu\text{m}$ , o índice de refração  $n_2 = 1.576 + 10^{-3}i$ , o parâmetro de astigmatismo  $A_{ast} = 0.1$  e a distância entre o plano focal e a interface com a lamínula  $L = 2a$ .

nenhuma posição de equilíbrio estável, como podemos ver na figura 4.4. Nas simulações para valores de  $\text{Im}(n_2)$  menores, encontramos regiões suficientemente próximas do eixo  $Q_z = 0$  para assumir aprisionamento, como podemos ver na figura 4.7. No caso, podemos assumir que efeitos gravitacionais desempenham um papel significativo para esferas maiores, possibilitando o equilíbrio de forças no eixo.

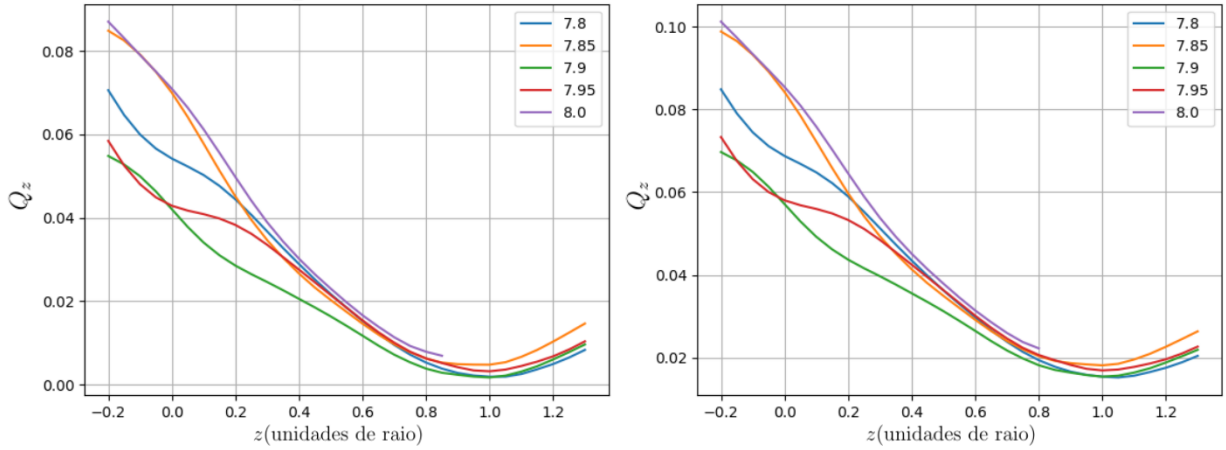


Figura 4.5: O parâmetro de astigmatismo e a distância entre o foco e interface são iguais ao caso anterior. À esquerda,  $\text{Im}(n_2) = 3 \times 10^{-4}$ , a direita,  $\text{Im}(n_2) = 4 \times 10^{-4}$ .

Para o caso de esferas menores, da mesma ordem de tamanho das microesferas do

experimento de transferência de momentos angular ( $a = 0.5\mu m$ ), efeitos gravitacionais não são tão relevantes, e podemos encontrar posições de equilíbrio no eixo  $z$ , como vimos na figura 3.8 da seção 3.4.

Tomando o valor da parte real do índice de refração do poliestireno como  $\text{Re}(n_2) = 1.576$ , de acordo com o gráfico referido acima, buscamos uma região da parte imaginária de  $n_2$  que seja propícia ao aprisionamento da microesfera.

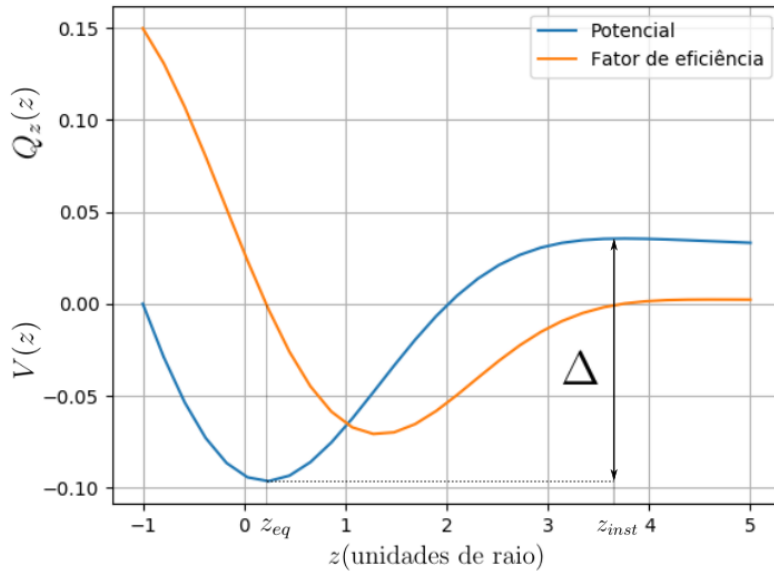


Figura 4.6: Componente  $Q_z$  do fator de eficiência (em laranja) e o potencial (em azul) em função de  $z$ . O potencial nesse gráfico é adimensional, e vem da integração do fator de eficiência no eixo em unidades de raio. Representamos também no gráfico a altura  $\Delta$  da barreira de potencial. O raio da esfera é  $a = 0.5\mu m$ , o índice de refração  $n_2 = 1.576 + 10^{-3}i$ , não estão sendo levados em conta astigmatismo e aberração esférica nessa simulação.

Como podemos ver na figura 4.6, a integral do fator de eficiência com respeito a  $z$  (em unidade de raio) entre a posição de equilíbrio estável  $z_{eq}$  e a de equilíbrio instável  $z_{inst}$  nos fornece a altura da barreira potencial adimensional. Multiplicando por  $(n_1 Pa)/c$ , obtemos o potencial no qual a microesfera está inserida.

Dessa forma, podemos procurar uma potência mínima para a qual haja pinçamento no laboratório. Podemos usar o critério que a barreira potencial tem que ter no mínimo



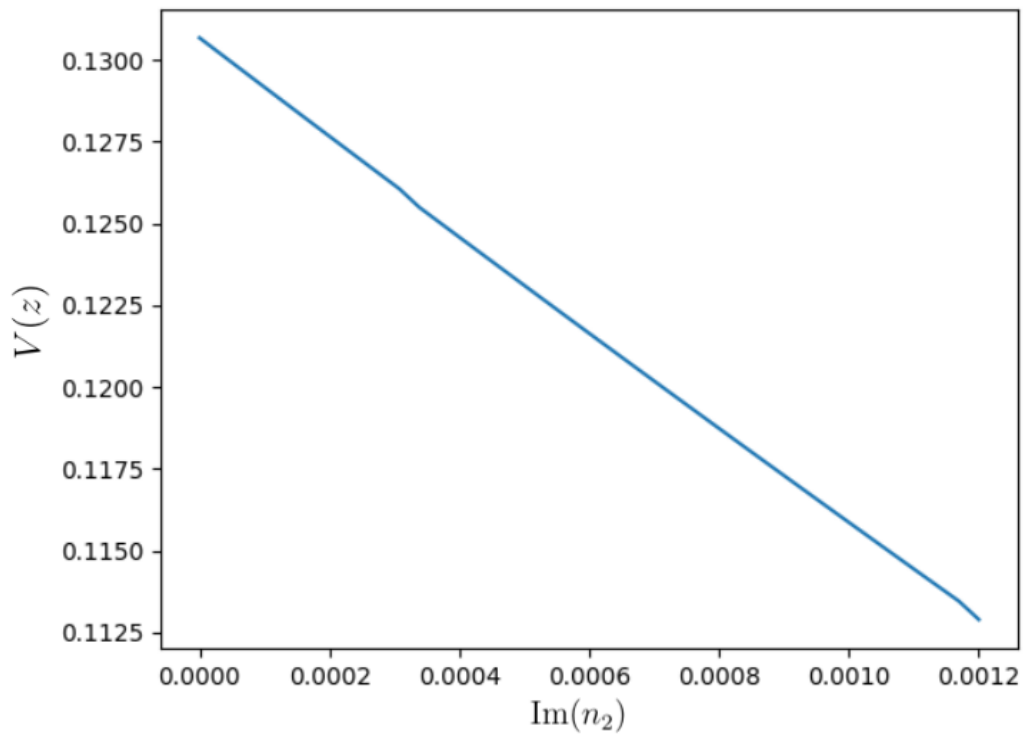


Figura 4.7: Altura da barreira potencial adimensional em função da parte imaginária do índice de refração.

$3k_B T$  para deduzir a parte imaginária do índice de refração. Uma alternativa para esse critério é medir a série temporal da posição da microesfera na pinça para obter sua energia

**entender melhor essa parte, conversar com paulo.**

## Capítulo 5

# Considerações Finais

Nesse capítulo comentamos sobre o trabalho apresentado nessa dissertação, sobre os resultados obtidos e as perspectivas futuras de aplicabilidade dos métodos desenvolvidos.

No capítulo 1 fazemos uma introdução histórica sobre a pinça ótica e sobre modelo teórico usado nesse trabalho. No capítulo 2 introduzimos outros modelos e os comparamos ao modelo MDSA+, o qual nós discutimos mais a fundo e realçamos partes fundamentais da teoria para explicar o trabalho, como a focalização da objetiva e o efeito de transferência de momento angular associado, e o astigmatismo, que foi o parâmetro ajustado a partir dos experimentos.

No capítulo 3 discutimos sobre o experimento de transferência de momento angular e a simulação computacional do mesmo. Também discutimos dois critérios para haver aprisionamento da partícula na direção axial: um deles referente a distância da posição de equilíbrio estável ao plano focal, e o outro referente ao tamanho da barreira de potencial ótico.

Finalmente, no capítulo 4 apresentamos os resultados do ajuste do parâmetro de astigmatismo, que foi a grande novidade trazida pelo trabalho. Mostramos também as simulações para o experimento de transferência de momento angular, e discutimos o resultado experimental e a previsão do modelo teórico. Mencionamos um outro método para medir o astigmatismo do sistema, do qual obtivemos um parâmetro equivalente, o que valida o método desenvolvido no trabalho. Por último propomos um experimento

para caracterizar a parte imaginária do índice de refração.

Foi observado que a mudança da parte imaginária do índice de refração influencia pouco o resultado do ajuste do astigmatismo. De fato, o valor encontrado para microesferas não absorvedoras está dentro dos limites de incerteza dos dois métodos mencionados ( $A_{ast} = 0.23 \pm 0.01$ ). Por esse motivo não foi feita uma análise mais aprofundada dos efeitos de absorção no experimento de transferência de momento angular. Como podemos ver, a diminuição do parâmetro de astigmatismo é esperada, pois ambos os efeitos fazem com que o torque negativo seja menos intenso: o astigmatismo por **difundir a intensidade do campo na região focal**, e a absorção pela transferência direta de momento angular de spin para a amostra.

Por outro lado, as simulações indicam que a posição de equilíbrio é bastante sensível ao efeito de absorção. Como foi dito, simulações com esferas absorvedoras de  $a = 7.9\mu m$  indicam que não há pinçamento, enquanto estas estavam sendo aprisionadas no laboratório. O experimento proposto foi inspirado por essas simulações e pelo fato de que simulações com microesferas menores são muito menos custosas.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Ashkin. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Physical Review Letters*, 24(4):156–159, jan 1970. 1
- [2] A. Ashkin. Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime. *Biophysical Journal*, 61(2):569–582, feb 1992. 6
- [3] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Observation of Resonances in the Radiation Pressure on Dielectric Spheres. *Physical Review Letters*, 38(23):1351–1354, jun 1977. 1
- [4] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and Steven Chu. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Optics Letters*, 11(5):288, may 1986. 1
- [5] Arthur Ashkin. *Optical Trapping and Manipulation of Neutral Particles Using Lasers: A Reprint Volume with Commentaries*. WORLD SCIENTIFIC PUB CO INC, 2007. 1
- [6] L. C. Biedenharn, James D. Louck, and J. D. Louck. *Angular Momentum in Quantum Physics*. Cambridge University Press, 2008. 11
- [7] K. Y. Bliokh, F. J. Rodríguez-Fortuño, F. Nori, and A. V. Zayats. Spin-orbit interactions of light. *Nature Photonics*, 9(12):796–808, nov 2015. 3, 23
- [8] Konstantin Y. Bliokh, Elena A. Ostrovskaya, Miguel A. Alonso, Oscar G. Rodríguez-Herrera, David Lara, and Chris Dainty. Spin-to-orbital angular momentum conver-

- sion in focusing, scattering, and imaging systems. *Optics Express*, 19(27):26132, dec 2011. 24
- [9] Agnese Callegari, Mite Mijalkov, A. Burak Gököz, and Giovanni Volpe. Computational toolbox for optical tweezers in geometrical optics. *Journal of the Optical Society of America B*, 32(5):B11, apr 2015. 6
- [10] L. W. Davis. Theory of electromagnetic beams. *Physical Review A*, 19(3):1177–1179, mar 1979. 8
- [11] Rafael de Sousa Dutra. *Parametrizando uma Pinça Ótica: Efeitos de Aberrações e Absorção*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011. 2, 21
- [12] K. Diniz, R. S. Dutra, L. B. Pires, N. B. Viana, H. M. Nussenzveig, and P. A. Maia Neto. Negative optical torque on a microsphere in optical tweezers. *Optics Express*, 27(5):5905, feb 2019. 2, 19, 21, 22, 26, 39, 41
- [13] Kainã Gonçalves Diniz. Momento angular de spin em pinças Óticas. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2018. 21, 26, 30
- [14] R S Dutra, N B Viana, P A Maia Neto, and H M Nussenzveig. Polarization effects in optical tweezers. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 9(8):S221–S227, jul 2007. 1
- [15] R. S. Dutra, N. B. Viana, P. A. Maia Neto, and H. M. Nussenzveig. Absolute calibration of forces in optical tweezers. *Physical Review A*, 90(1), jul 2014. 2, 19, 21, 41
- [16] G. Gouesbet. T-matrix formulation and generalized lorenz–mie theories in spherical coordinates. *Optics Communications*, 283(4):517–521, feb 2010. 9
- [17] G Gouesbet, G Grehan, and B Maheu. Scattering of a gaussian beam by a mie scatter center using a bromwich formalism. *Journal of Optics*, 16(2):83–93, mar 1985. 8

- [18] Gérard Gouesbet and Gérard Gréhan. *Generalized Lorenz-Mie Theories*. Springer Berlin Heidelberg, 2011. 8
- [19] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons Inc, 1998. 7, 10
- [20] Louis Lorenz. *Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle*. na, 1890. 8
- [21] Xiaoyan Ma, Jun Q Lu, R Scott Brock, Kenneth M Jacobs, Ping Yang, and Xin-Hua Hu. Determination of complex refractive index of polystyrene microspheres from 370 to 1610 nm. *Physics in Medicine and Biology*, 48(24):4165–4172, dec 2003. 30
- [22] A. Mazolli. *Teoria das Pinças Óticas*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003. 2, 9
- [23] A. Mazolli, P. A. Maia Neto, and H. M. Nussenzveig. Theory of trapping forces in optical tweezers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2040):3021–3041, dec 2003. 1
- [24] Gustav Mie. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der Physik*, 330(3):377–445, 1908. 8
- [25] Michael I. Mishchenko, Larry D. Travis, and Daniel W. Mackowski. T-matrix computations of light scattering by nonspherical particles: A review. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 55(5):535–575, may 1996. 9
- [26] P. A. Maia Neto and H. M Nussenzveig. Theory of optical tweezers. *Europhysics Letters (EPL)*, 50(5):702–708, jun 2000. 1
- [27] Antonio Alvaro Ranha Neves and Carlos Lenz Cesar. Analytical calculation of optical forces on spherical particles in optical tweezers: tutorial. *Journal of the Optical Society of America B*, 36(6):1525, may 2019. 9

- [28] Timo A Nieminen, Vincent L Y Loke, Alexander B Stilgoe, Gregor Knöner, Agata M Brańczyk, Norman R Heckenberg, and Halina Rubinsztein-Dunlop. Optical tweezers computational toolbox. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 9(8):S196–S203, jul 2007. 8
- [29] Lukas Novotny, Robert D. Grober, and Khaled Karrai. Reflected image of a strongly focused spot. *Optics Letters*, 26(11):789, jun 2001. 41
- [30] B. Richards and E. Wolf. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. structure of the image field in an aplanatic system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274):358–379, dec 1959. 7, 9, 15
- [31] Alexander Rohrbach and Ernst H. K. Stelzer. Optical trapping of dielectric particles in arbitrary fields. *Journal of the Optical Society of America A*, 18(4):839, apr 2001. 7
- [32] Tsvi Tlusty, Amit Meller, and Roy Bar-Ziv. Optical gradient forces of strongly localized fields. *Physical Review Letters*, 81(8):1738–1741, aug 1998. 7
- [33] H. C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Dover Publications Inc., 1981. 12
- [34] N. B. Viana, A. Mazolli, P. A. Maia Neto, H. M. Nussenzveig, M. S. Rocha, and O. N. Mesquita. Absolute calibration of optical tweezers. *Applied Physics Letters*, 88(13):131110, mar 2006. 2
- [35] N. B. Viana, M. S. Rocha, O. N. Mesquita, A. Mazolli, P. A. Maia Neto, and H. M. Nussenzveig. Towards absolute calibration of optical tweezers. *Physical Review E*, 75(2), feb 2007. 2, 6, 7, 22, 28
- [36] Andrew Zangwill. *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Pr., 2013. 558–560. 15

## Apêndice A

### Fator de eficiência e coeficientes de multipolo

Nesse apêndice são mostradas as expressões para as componentes cilíndricas azimutal e radial do fator de eficiência. Dividimos a força em componentes de extinção e espalhamento, como na seção 2.8. Também são mostrados os coeficientes de multipolo  $\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)}$ ,  $\mathcal{G}_{j,m}^{C,(\sigma)}$  e  $\mathcal{G}_{j,m}^{\pm,(\sigma)}$  e as funções  $f^{(\sigma)}(\rho, \phi, z)$ .

As componentes de extinção da força nas direções  $\rho$  e  $\phi$  são:

$$Q_{e\rho}(\rho, \phi, z) = \frac{\gamma^2}{AN} \text{Im} \sum_{jm\sigma} (2j+1) \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \left[ (a_j + b_j) \left( \mathcal{G}_{j,m+1}^{-,(\sigma)*} - \mathcal{G}_{j,m-1}^{+,(\sigma)*} \right) (1 - \sigma \sin 2\psi) + \right. \\ \left. + (a_j - b_j) \left( \mathcal{G}_{j,m+1}^{-,(-\sigma)*} - \mathcal{G}_{j,m-1}^{+,-(\sigma)*} \right) \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)} \right], \quad (\text{A.1})$$

$$Q_{e\phi}(\rho, \phi, z) = -\frac{\gamma^2}{AN} \text{Re} \sum_{jm\sigma} (2j+1) \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \left[ (a_j + b_j) \left( \mathcal{G}_{j,m+1}^{-,(\sigma)*} + \mathcal{G}_{j,m-1}^{+,(\sigma)*} \right) (1 - \sigma \sin 2\psi) + \right. \\ \left. + (a_j - b_j) \left( \mathcal{G}_{j,m+1}^{-,(-\sigma)*} + \mathcal{G}_{j,m-1}^{+,-(\sigma)*} \right) \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)} \right]. \quad (\text{A.2})$$

As componentes de espalhamento da força nas direções  $\rho$  e  $\phi$  são:



$$\begin{aligned}
Q_{s\rho}(\rho, \phi, z) = & \frac{2\gamma^2}{AN} \text{Im} \sum_{jm\sigma} \left[ \frac{\sqrt{j(j+2)(j+m+1)(j+m+2)}}{j+1} \left( (a_j a_{j+1}^* + b_j b_{j+1}^*) \times \right. \right. \\
& (\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m+1}^{(\sigma)*} + \mathcal{G}_{j,-m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,-(m+1)}^{(\sigma)*}) (1 - \sigma \sin 2\psi) + (a_j a_{j+1}^* - b_j b_{j+1}^*) \times \\
& \left. \left( (\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m+1}^{(-\sigma)*} + \mathcal{G}_{j,-m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,-(m+1)}^{(-\sigma)*}) \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)} \right) \right] - \\
& - \frac{4\gamma^2}{AN} \sum_{jm\sigma} \frac{2j+1}{j(j+1)} \sigma \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \left( \text{Re}(a_j b_j^*) \text{Im}(\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j,m+1}^{(\sigma)*} (1 - \sigma \sin 2\psi)) + \right. \\
& \left. + \text{Im}(a_j b_j^*) \text{Re}(\mathcal{G}_{j,m+1}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j,m}^{(-\sigma)*} \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)}) \right), \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{s\phi}(\rho, \phi, z) = & -\frac{2\gamma^2}{AN} \text{Re} \sum_{jm\sigma} \left[ \frac{\sqrt{j(j+2)(j+m+1)(j-m+1)}}{j+1} \left( (a_j a_{j+1}^* + b_j b_{j+1}^*) \times \right. \right. \\
& (\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m+1}^{(\sigma)*} - \mathcal{G}_{j,-m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,-(m+1)}^{(\sigma)*}) (1 - \sigma \sin 2\psi) + (a_j a_{j+1}^* - b_j b_{j+1}^*) \times \\
& \left. \left( (\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m+1}^{(-\sigma)*} - \mathcal{G}_{j,-m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,-(m+1)}^{(-\sigma)*}) \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)} \right) \right] + \\
& + \frac{4\gamma^2}{AN} \sum_{jm\sigma} \frac{2j+1}{j(j+1)} \sigma \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \left( \text{Re}(a_j b_j^*) \text{Re}(\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j,m+1}^{(\sigma)*} (1 - \sigma \sin 2\psi)) + \right. \\
& \left. + \text{Im}(a_j b_j^*) \text{Im}(\mathcal{G}_{j,m+1}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j,m}^{(-\sigma)*} \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)}) \right). \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Os coeficientes de multipolo são:

$$\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)}(\rho, \phi, z) = \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \sqrt{\cos \theta_k} e^{\gamma^2 \sin^2 \theta_k} T(\theta_k) d_{m,\sigma}^j(\theta_w) f_m^{(\sigma)}(\rho, \phi, z) e^{\Phi_{g-w}(\theta_k) + k_w z \cos \theta_w}, \tag{A.5}$$

$$\mathcal{G}_{j,m}^{C,(\sigma)}(\rho, \phi, z) = \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \cos \theta_w \sqrt{\cos \theta_k} e^{\gamma^2 \sin^2 \theta_k} T(\theta_k) d_{m,\sigma}^j(\theta_w) f_m^{(\sigma)}(\rho, \phi, z) e^{\Phi_{g-w}(\theta_k) + k_w z \cos \theta_w}, \tag{A.6}$$

$$\mathcal{G}_{j,m}^{\pm,(\sigma)}(\rho, \phi, z) = \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \sin \theta_w \sqrt{\cos \theta_k} e^{\gamma^2 \sin^2 \theta_k} T(\theta_k) d_{m,\sigma}^j(\theta_w) f_m^{(\sigma)}(\rho, \phi, z) e^{\Phi_{g-w}(\theta_k) + k_w z \cos \theta_w}. \tag{A.7}$$

**Falta double check e procurar as definições de cada termo ao longo da dissertação. Falta definir a função  $f$**

A função  $f^{(\sigma)}(\rho, \phi, z)$  usada nos coeficientes acima são:

$$f^{(\sigma)}(\rho, \phi, z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-i)^s J_s \left( 2\pi A_{ast} \frac{\sin^2 \theta_k}{\sin^2 \theta_0} \right) J_{2s+m-\sigma}(k\rho \sin \theta_k) e^{i2s(\varphi_a - \phi)}. \quad (\text{A.8})$$

Nesta função, o parâmetro  $A_{ast}$  é o parâmetro de astigmatismo no formalismo de Zernike, que é brevemente discutido no apêndice B. Temos também as funções  $J_m$ , que são funções de Bessel cilíndricas do primeiro tipo.

Como podemos ver, a equação A.8 apresenta um somatório que pode ser desafiador de ser resolver numericamente. Evitamos esse problema restringindo nossos cálculos ao caso em que  $\rho = 0$ , o que faz com que somente um termo da soma não seja igual a 0. Como a única função de Bessel que é diferente de 0 na origem é  $J_0(x)$ , o único índice  $s$  que corresponde a um termo não nulo é  $s = \sigma - m$ .

De fato isso não implica em problema algum para as simulações, pois para calcular as posições de equilíbrio, calculamos  $Q_z$  em cima do eixo, ou seja, com  $\rho = 0$ . O cálculo das constantes elásticas da pinça também não sofrem com essa condição, pois a derivada de  $f^{(\sigma)}(\rho, \phi, z)$  em relação a  $\rho$  é calculada na posição de equilíbrio, também com  $\rho = 0$ .

## Apêndice B

### Formalismos de Zernike e Seidel para astigmatismo

Na seção ?? foi discutida a incorporação dos efeitos de aberrações óticas no feixe focalizado pela objetiva. O formalismo de Seidel foi usado (dizer porque, tem a ver com posição do foco e etc em cada um dos formalismos)

blablabla...

blablabla...