



Aplicando a Teoria Mie-Debye para Caracterização de Parâmetros Físicos em Pinças Óticas

Defesa de Dissertação de Mestrado

Arthur Luna da Fonseca

Orientadores: Paulo Américo Maia Neto, Rafael de Sousa Dutra

10 de Setembro de 2019

Instituto de Física - Universidade Federal do Rio de Janeiro

1. Introdução
2. Simulação do experimento de transferência de momento angular
3. Electromagnetic Fields description
4. Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)
5. Conclusion

Introdução

Objetivo

Caracterização de parâmetros na pinça ótica:

→ Teoria MDSA+ para pinças óticas:

→ Correções de aberrações óticas na teoria MDSA → Astigmatismo.

→ Espalhamento Mie → Parâmetro de absorção da microesfera.

→ Cálculo numérico usando a teoria MDSA+:

→ Simulação do experimento de transferência de momento angular na pinça ótica.

→ Cálculos da posição de equilíbrio da esfera variando o parâmetro de absorção.

Introdução à teoria de pinças óticas:

Modelagens da pinça ótica: interação de um campo (feixe) com o objeto espalhador (esfera pinçada).

Campo: feixe fortemente focalizado.

Objeto espalhador: simetria esférica \rightarrow espalhamento Mie.

Regimes de tamanhos do objeto espalhador.

Dois regimes distintos:

Regime Rayleigh: raio da esfera muito menor que o comprimento de onda do feixe ($a \ll \lambda$).

Aproximamos a esfera por um dipolo induzido:

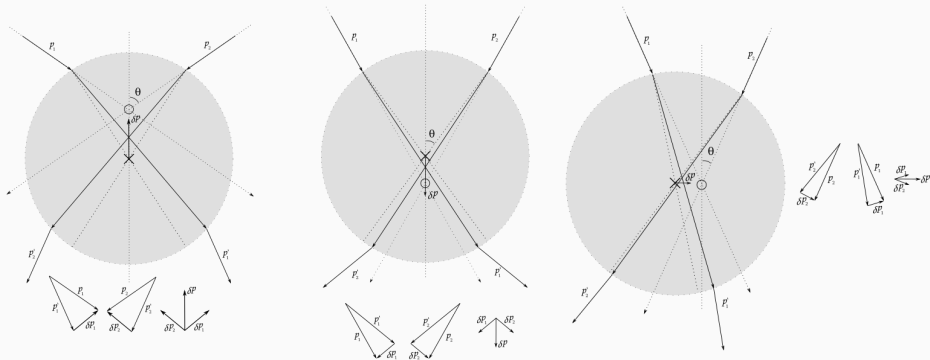
$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla(\alpha \mathbf{E}^2). \quad (1)$$

Força aponta para região de maior intensidade do campo. Para o feixe fortemente focalizado, a região de maior intensidade é o foco.

Regimes de tamanhos do objeto espalhador.

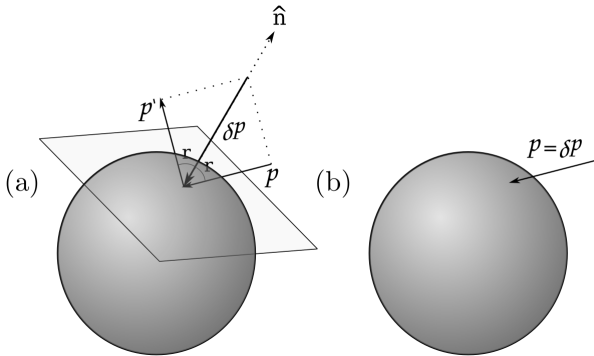
Regime de ótica geométrica: raio da esfera muito maior que o comprimento de onda do feixe ($a \gg \lambda$).

Ignorando efeitos de reflexão e de absorção, raios diametralmente opostos transferem momento para esfera na direção do foco.



Regimes de tamanhos do objeto espalhador.

A posição de equilíbrio não necessariamente é no foco, pois a reflexão (a) transfere momento na direção normal ao plano tangente ao ponto de reflexão na esfera, enquanto a absorção (b) transfere na direção da propagação do raio:



Introdução ao modelo MDSA.

O modelo Mie-Debye para a pinça ótica é um modelo exato para o espalhamento por uma esfera de um campo fortemente focalizado (por uma objetiva).

O modelo para o campo foi desenvolvido por Richards e Wolf, baseado em uma proposição de Debye para um campo escalar produzido por uma objetiva de alta abertura numérica.

O campo é expresso como uma superposição de ondas planas onde os vetores $\mathbf{k}(\theta_k, \phi_k)$ formam um cone de meia abertura θ_0 no espaço de momento:

$$\mathbf{E}_{IN} = \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \int_0^{2\pi} d\phi_k \sqrt{\sin \theta_k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (2)$$

onde o termo $\sqrt{\sin \theta_k}$ vem da condição de seno de Abbe ($f^2 \sin^2 \theta_k = \rho^2$) que as objetivas de alta abertura numérica satisfazem.

Introdução ao modelo MDSA.

Para encontrarmos os campos espalhados pela esfera, calculamos os potenciais de Debye do campo incidente para cada caso de polarização circular, que são definidos por:

$$\Pi^E = \sum_J \Pi_J^E = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_J}{J(J+1)} \quad e \quad \Pi^M = \sum_J \Pi_J^M = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})_J}{J(J+1)}. \quad (3)$$

O somatório em J denota a expansão do campo em multipolos. Cada multipolo do campo incidente será espalhado com uma amplitude, dada pelos coeficiente de Mie a_j (para os multipolos elétricos) e b_j (para o multipolo magnético).

Introdução ao modelo MDSA.

Para introduzirmos o efeito causado pelo perfil do feixe paraxial incidente na objetiva, inserimos a amplitude de campo em cada ponto da entrada da objetiva na equação 2:

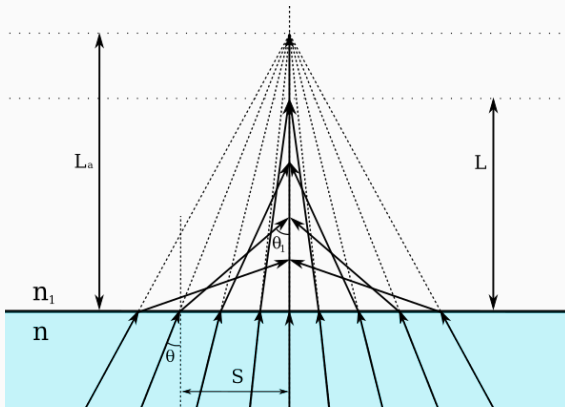
$$\mathbf{E}_{IN} = \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \int_0^{2\pi} d\phi_k \sqrt{\sin \theta_k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{\omega_0^2}} \hat{\varepsilon}_k. \quad (4)$$

O caso de um feixe elipticamente polarizado é obtido tomando o feixe na entrada da objetiva como uma superposição de ondas circularmente polarizadas:

$$\hat{\varepsilon}_k = \sum_{\sigma=+1,-1} \frac{1 - ie^{-2i\sigma\psi}}{2} \hat{\varepsilon}_\sigma. \quad (5)$$

Introdução ao modelo MDSA.

Depois que o feixe focalizado é produzido pela objetiva, ele incide no porta amostra, passando por uma interface de vidro e água. Algumas objetivas de alta abertura numérica são de imersão em óleo, o que faz com que haja um efeito de aberração esférica que deve ser levado em conta no modelo.



Esse efeito insere uma fase em cada componente de onda plana do campo, de acordo com seu ângulo de incidência, que pode ser obtida através da lei de Snell:

$$\Psi(z, \theta) = k \left(-\frac{L}{N} \cos \theta + NL \cos \theta_1 \right). \quad (6)$$

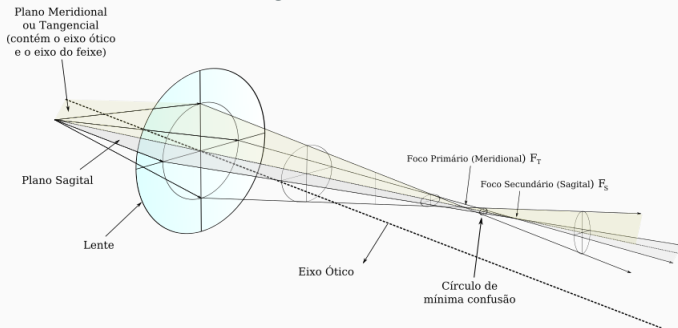
Também haverá reflexão nessa interface, e portanto devemos levar a amplitude de transmissão de Fresnel em consideração:

$$T(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + N \cos \theta_1}. \quad (7)$$

Introdução ao modelo MDSA.

Outras aberrações óticas também podem ser incluídas no modelo usado o formalismo de Zernike, que utiliza um conjunto de polinômios que formam uma base para descrever as fases de cada aberração ótica de um feixe. Os polinômios de Zernike formam uma base ortonormal no círculo unitário, o que nos permite descrever qualquer aberração ótica do sistema.

Nos experimentos realizados pelo grupo, a aberração de interesse é o astigmatismo.



A fase associada ao astigmatismo é:

$$\Phi_{astigmatismo}(\theta, \phi) = 2\pi A_{ast} \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^2 \cos 2(\phi - \varphi_a), \quad (8)$$

onde o círculo unitário foi definido como o círculo formado pela entrada da objetiva, que tem raio $R_p = f \sin \theta_0$ (pela condição do seno de Abbe).

O parâmetro A_{ast} é o chamado parâmetro de astigmatismo. Um dos objetivos do trabalho é a determinação desse parâmetro por meio de ajustes do modelo.

Finalmente, expressamos a força em termos do fator de eficiência \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{n_1 P / c} = |a_+|^2 \mathbf{Q}^{(\sigma+)} + |a_-|^2 \mathbf{Q}^{(\sigma-)} + \mathbf{Q}^{(cross,+-)} + \mathbf{Q}^{(cross,-+)} . \quad (9)$$

onde n_1 é o índice de refração do meio em que a microesfera está inserida e P é a potência do laser.

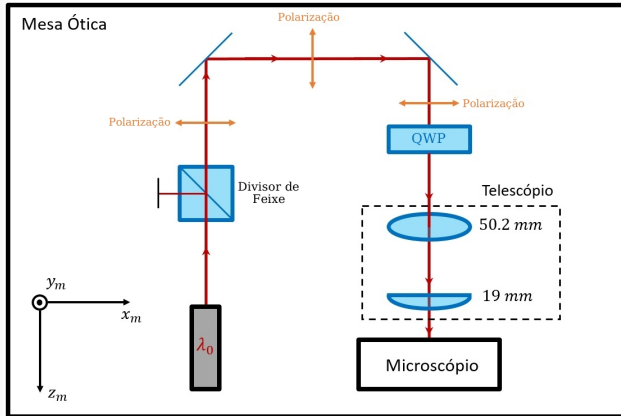
O fator de eficiência na direção z será usado para calcular a posição de equilíbrio axial nas simulações. Uma das grandezas medidas no experimento são as constante elásticas κ_ρ e κ_ϕ , definidas como:

$$\kappa_\rho = -\frac{n_1 P}{c} \frac{\partial Q_\rho}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0, z=z_{eq}} , \quad \kappa_\phi = \frac{n_1 P}{c} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0, z=z_{eq}} . \quad (10)$$

Simulação do experimento de transferência de momento angular

Experimento de transferência de momento angular

Para entender a simulação, é necessário discutir o experimento que mede o torque ótico na microesfera. Começamos pela geração do feixe paraxial na mesa ótica, ilustrada a seguir:



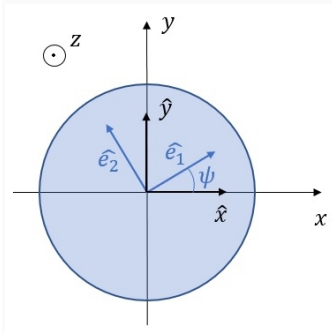
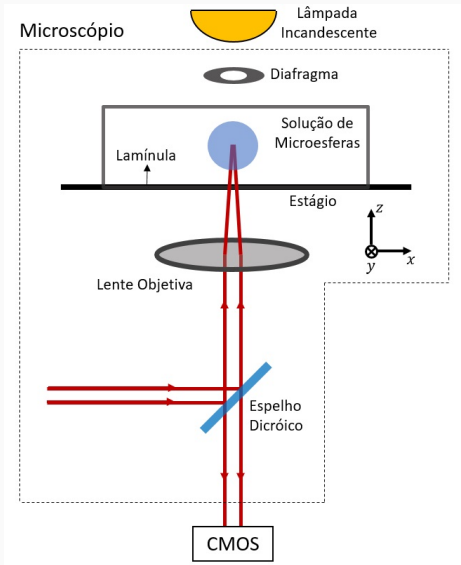
Experimento de transferência de momento angular

Dessa forma, o feixe entra no microscópio com polarização definida e cintura bem determinada, parâmetros estes que são de grande importância para simulação.

O feixe, então, é refletido por um espelho dicróico, passa pela objetiva e incide no porta amostra, onde há a solução de microesfera.

Através do espelho dicróico podemos tomar as imagens da amostra com uma câmera (CMOS).

Experimento de transferência de momento angular



Experimento de transferência de momento angular

O procedimento do experimento começa encostando a microesfera na lamínula. Em seguida, abaixa-se o estágio por uma distância bem determinada e o deslocamos na direção de \hat{x} com velocidades bem definidas. A força de arrasto do líquido (força de Stokes) é proporcional à velocidade de deslocamento do fluido, e desloca a microesfera na mesma direção e sentido.

Assumimos que as forças que são realizadas na esfera pelo feixe ao ser deslocada do eixo em que $\rho = 0$ são harmônicas.

Teremos, então, no equilíbrio de forças, $\vec{F}_\phi + \vec{F}_\rho = -\vec{F}_s$. Observando a projeção na direção y , onde $\vec{F}_s \cdot \hat{y} = 0$ e $F_\rho \sin \phi = F_\phi \cos \phi$:

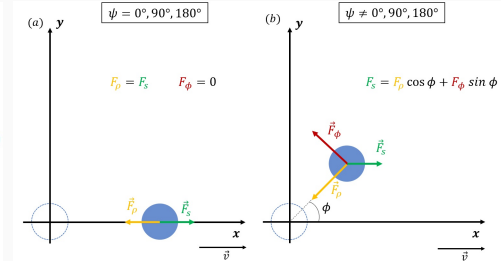
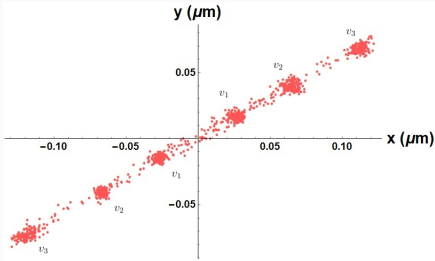
$$\frac{F_\phi}{F_\rho} = \tan \phi \approx \phi, \quad (11)$$

onde ϕ é a coordenada angular da posição de equilíbrio. Como as forças óticas são lineares, temos:

$$\frac{\kappa_\phi}{\kappa_\rho} \approx \phi. \quad (12)$$

Experimento de transferência de momento angular

É importante destacar que o ângulo ϕ não varia com a velocidade. Podemos ver abaixo o diagrama de forças da microesfera deslocada do eixo, e a reta formada pelas posições de equilíbrio de várias velocidades do estágio diferentes.



Simulação do experimento

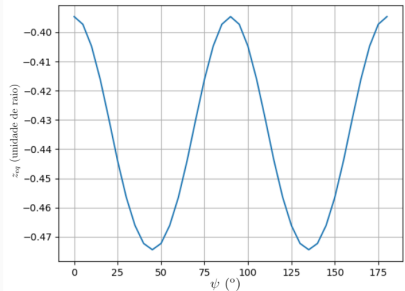
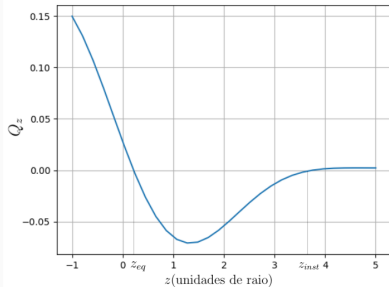
Para iniciar a simulação, calcula-se a posição do foco do feixe em relação à interface, quando a microesfera está encostada na lamínula e em uma posição de equilíbrio estável, com ângulo ψ da placa de quarto de onda (QWP) $\psi = 0$ (polarização linear). Esta posição será chamada de L_0 .

A seguir, desloca-se o estágio do microscópio na direção z por uma distância de $\delta z = 3\mu m$. O feixe, portanto, estará a uma distância

$$L = L_0 + 3\mu m \frac{n_1}{n} \text{ da interface vidro-água.}$$

Simulação do experimento

Uma vez que a posição do foco esteja determinada, calculamos a posição de equilíbrio para varias polarizações do feixe incidente diferentes, ou seja, variando ψ .

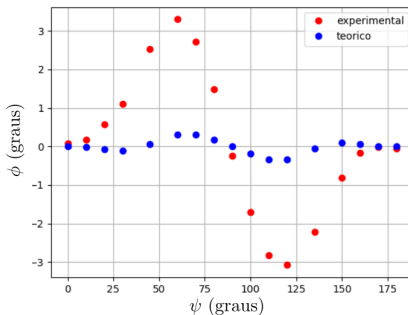
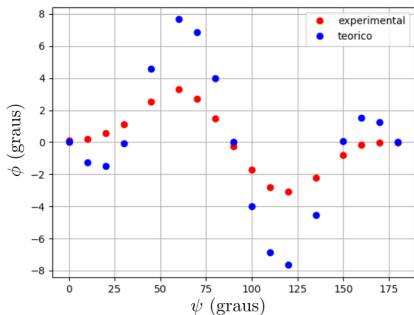


Usando as posições de equilíbrio, calculamos as derivadas do fator de eficiência nas direções ρ e ϕ , e temos assim o ângulo da posição de equilíbrio.

Variando o parâmetro de astigmatismo, usamos uma função erro para determinar qual conjunto de pontos numéricos tem maior verossimilhança com os dados experimentais.

Simulação do experimento

A seguir, dois exemplos de conjuntos de pontos teóricos com parâmetros de astigmatismo diferentes ($A_{ast} = 0$ na esquerda e $A_{ast} = 0.36$ na direita):



Electromagnetic Fields description

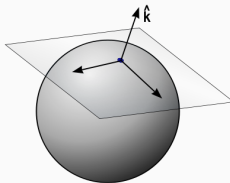
Electromagnetic Fields description

Motivation:

Right now we have the wave equation solution for a scalar field.

Transverse field can be obtained by multiplying the solution by a transverse vector.

But which transverse vector?

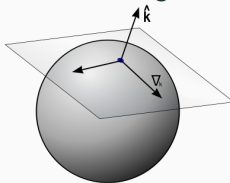


Electromagnetic Fields description

The vector operator ∇_k (in reciprocal space) is a good way to start. Assuming the field has no longitudinal component ($\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$), we can write the operator as:

$$\nabla_k = \frac{1}{k} \left(\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

where is clear that it is defined in the tangential plane.

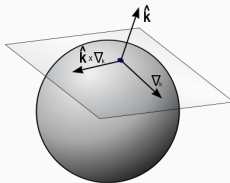


Electromagnetic Fields description

Now, the last component should be perpendicular to, not just \hat{k} , but also ∇_k . The obvious choice is to take the vector product:

$$\hat{k} \times \nabla_k = \alpha \vec{L}$$

and, now, we finally have a set of vectors that describes our vector field:



Electromagnetic Fields description

Since the spherical harmonics are eigenfunctions of the operator \vec{L} , we can build our fields with the normalized vector

$$\vec{X}_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \vec{L} Y_{lm}(\theta, \phi).$$

First, we build the magnetic multipole field, using the scalar field expansion found earlier:

$$\vec{E}_{lm}^{(M)}(\vec{r}) = c^2 g_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\vec{B}_{lm}^{(M)}(\vec{r}) = \frac{-i}{kc^2} \nabla \times \vec{E}_{lm}^{(M)}(\vec{r})$$

where

$$g_l(kr) = B_l^{(+)} h_l^{(+)}(kr) + B_l^{(-)} h_l^{(-)}(kr).$$

Electromagnetic Fields description

The same idea is used to construct the electric multipole field, which leads us to the final result:

$$\vec{E}(\vec{r}) = c^2 \sum_{l,m} \left[\frac{i}{k} a_E(l, m) \nabla \times f_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi) + a_M(l, m) g_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi) \right],$$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{l,m} \left[a_E(l, m) f_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi) - \frac{-i}{k} a_M(l, m) \nabla \times g_l(kr) \vec{X}_{lm}(\theta, \phi) \right].$$

Plane waves also have a spherical wave expansion. As an example, we have the case of $\hat{k} = \hat{z}$:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

where

$$P_l(\cos\theta) = Y_{l0}(\theta)$$

Electromagnetic Fields description

This leads to the field:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[j_l(kr) \vec{X}_{l,\pm 1}(\theta, \phi) \pm \frac{1}{k} \nabla \times j_l(kr) \vec{X}_{l,\pm 1}(\theta, \phi) \right],$$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\frac{-i}{k} \nabla \times j_l(kr) \vec{X}_{l,\pm 1}(\theta, \phi) \mp ij_l(kr) \vec{X}_{l,\pm 1}(\theta, \phi) \right].$$

Those will be a sum of *ingoing* spherical waves of various l 's.

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

We begin to discuss our problem by stating that we can divide our fields in 2 parts:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + \vec{E}_{sc}(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{B}_{inc}(\vec{r}) + \vec{B}_{sc}(\vec{r})\end{aligned}$$

We use the multipole basis to describe them all! But with caution...

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

$\vec{A}_{inc}(\vec{r})$ is an incoming wave, described by the plane wave expansion.

$\vec{A}_{sc}(\vec{r})$ is the scattered wave. Only one Henkel function describe *outgoing* spherical wave: $H_l^+(kr)$.

$$\vec{E}_{sc}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\alpha_{\pm} h_l^+ \vec{X}_{l,\pm 1} \pm \beta_{\pm} \frac{1}{k} \nabla \times h_l^+ \vec{X}_{l,\pm 1} \right],$$

$$\vec{B}_{sc}(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \sum_{l=1}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \left[\alpha_{\pm} \frac{-i}{k} \nabla \times h_l^+ \vec{X}_{l,\pm 1} \mp i\beta_{\pm} h_l^+ \vec{X}_{l,\pm 1} \right].$$

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

α_{\pm} and β_{\pm} are both determined by the boundary conditions. Since the scatterer is spherically symmetric, no direction will be treated differently; and assuming there is no absorption, the scattering effect only changes the

Scattering of Electromagnetic Waves by a sphere (Mie)

Conclusion
