



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Aplicando a Teoria Mie-Debye para Caracterização de Parâmetros Físicos em Pinças Óticas

Arthur Luna da Fonseca

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Paulo Américo Maia Neto

Coorientador: Nome do Coorientador

Rio de Janeiro

Agosto de 2019

P436(mudar) Fonseca, Arthur Luna da
Interação de Momento Angular de Spin e Orbital na Pinça
Ótica. / Arthur Luna da Fonseca - Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2019.
xiv, 154f(mudar).
Orientador: Paulo Américo Maia Neto
Coorientador:
Dissertação (mestrado) - UFRJ / Instituto de Física /
Programa de Pós-graduação em Física, 2019.
Referências Bibliográficas: f. 124-145.(mudar)
1. Pinça ótica. 2. Momento angular ótico. 3. Feixes não
paraxiais. 4. Interação spin-órbita. 5. Astigmatismo. I. Wotzasek,
Clóvis José. II. Guimarães, Marcelo Santos. III. Universidade Federal
do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-graduação
em Física. IV. Abordagem de Julia-Toulouse para condensação de
correntes topológicas e aplicações.(mudar)

Resumo

Título da Tese

Nome do Estudante

Orientador: Nome do Orientador

Coorientador: Nome do Coorientador

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Resumo da tese.

Palavras-chave: Insira as palavras-chave aqui.

Abstract

Title of the Thesis

Name of the Student

Orientador: Name of the Advisor

Coorientador: Name of the Coadvisor

Abstract da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Abstract in English.

Keywords: Insert the keywords here.

Agradecimentos

Listar agradecimentos aqui, inclusive à agência de fomento que concedeu a bolsa de pós-graduação.

Sumário

Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
2 Teoria da Pinça Ótica	3
2.1 Ótica geométrica e limite de Rayleigh.	3
2.2 Modelo Mie-Debye.	6
2.3 Efeito do perfil gaussiano.	11
2.4 Efeitos de polarização.	12
2.5 Aberração esférica.	13
2.6 Aberrações óticas.	15
2.7 Expressões para força.	17
2.8 Interação Spin-Órbita.	18
3 Experimento e Simulação	22
3.1 Aparato Experimental	22
3.2 Procedimento Experimental	26
3.3 Simulação do experimento de transferência de momento angular	29

3.4	Condições de Pinçamento	32
4	Resultados	35
4.1	Transferência de momento angular e caracterização do astigmatismo	35
4.2	Caracterização da amostra na pinça ótica	38
5	Considerações Finais	40
A	Título do Primeiro Apêndice	44
B	Título do Segundo Apêndice	45

Lista de Figuras

2.1	Foco coincidente ao centro da esfera. Essa corresponde a posição de equilíbrio estável da esfera.	4
2.2	Centro da microesfera (ponto vermelho) no eixo do cone, acima (esquerda) e abaixo (direita) da posição do foco (ponto azul). O momento que a esfera adquire δP é $-(P' - P)$, que é menos a variação de momento do campo, por conservação.	5
2.3	Centro de massa da microesfera ganha momento na direção do foco do feixe.	6
2.4	Operadores vetoriais no espaço de Fourier usados para encontrar as soluções vetoriais.	9
2.5	14
2.6	Feixe com astigmatismo.	16
2.7	Constante de torção κ_ϕ em função do raio da microesfera. O comprimento de onda do laser é de $1064nm$, a distância L entre o foco e a lamínula é de 4,5 unidades de raio e a polarização $\sigma+$. Astigmatismo não é levado em conta nessa simulação. colocar informações sobre os dados (comp de onda, aberração esferica, ausencia de astig, polarização, etc.).	21
3.1	23
3.2	24
3.3	explicar essa figura: e1 é o eixo rápido, etc	25
3.4	28

3.5	Pontos experimentais do experimento. São mostradas várias baterias de dados, cada uma representada por uma velocidade. Podemos ver o efeito do movimento browniano ao redor das posições de equilíbrio. deixo um agradecimento/referencia para o Kainã?	29
3.6	Comportamento da posição de equilíbrio em função do ângulo da placa de quarto de onda ψ . O valor do parâmetro de astigmatismo para essas posições é de $A_{ast} = 0.25$	31
3.7	Região onde há uma posição de equilíbrio estável a pelo menos 3 unidades de raio de distância do foco. O aumento da absorção de luz pela microesfera faz com que a posição de equilíbrio se desloque no sentido positivo do eixo z (sentido de propagação). Efeitos de aberração esférica e astigmatismo não são levados em conta nessa simulação.	33
4.1	Simulação com $A_{ast} = 0$ (à esquerda) e $A_{ast} = 0.36$ (à direita).	36
4.2	Valores da função erro (equação 4.1) em função do parâmetro de astigmatismo A_{ast} . O mínimo se encontra aproximadamente em $A_{ast} = 0.24$	37
4.3	Pontos teóricos em azul, com o parâmetro $A_{ast} = 0.24$, ajustado como mínimo da função erro.	38
4.4	Componente axial do fator de eficiência (Q_z) em função de z . O raio da esfera é $a = 7.9\mu m$, o índice de refração $n_2 = 1.576 + 10^{-3}i$, o parâmetro de astigmatismo $A_{ast} = 0.1$ e a distância entre o plano focal e a interface com a lamínula $L = 2a$. Podemos ver no gráfico à esquerda que não há valor de Q_z menor que zero, ou seja, a microesfera não pode ser pinçada. À direita, o zoom da região do plano focal.	39
4.5	O parâmetro de astigmatismo e a distância entre o foco e interface são iguais ao caso anterior. À esquerda, $\text{Im}(n_2) = 3 \times 10^{-4}$, a direita, $\text{Im}(n_2) = 4 \times 10^{-4}$	39

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

A presente dissertação é um resultado do trabalho do grupo de pinças óticas da UFRJ, que tem sido desenvolvido há quase duas décadas. Os trabalhos de teoria do grupo têm como objetivo descrever o aparato de pinças óticas, descoberta por Arthur Ashkin em 1986[3] [2]. Suas contribuições para o ramo de armadilhamento ótico vêm desde 1970, com seu primeiro artigo publicado sobre o assunto[1]. Em 2018, seus trabalhos sobre a pinça ótica e toda a sua importância para aplicação em biologia lhe renderam o prêmio Nobel de 2018.

A importância desse aparato exigiu uma descrição teórica satisfatória. Os primeiros modelos que tentam descrever as forças da pinça ótica fazem uso de diversas aproximações para descrever o feixe que sai da objetiva e a interação da esfera com o campo. O capítulo 2 introduzirá alguns destes modelos. De acordo com Ashkin [4], a teoria que descreve o feixe as interações da pinça ótica de forma exata se deve a Maia Neto e Nussenzveig. No artigo publicado em 2000 [16] é obtida a força axial (na direção z) na microesfera em cima do eixo para um feixe de polarização circular. Resultados seguintes estendem o anterior para uma posição arbitrária da microesfera em relação ao foco do feixe e derivam forças nas demais direções (em coordenadas cilíndricas: azimutal e radial) [15]. O caso da polarização linear é discutido em [10]. Posteriormente, também são inseridas correções à

aberração esférica [20] (para interface vidro-água no porta-amostra) e para aberrações do feixe antes da objetiva (como astigmatismo e coma) [11].

Na seção/ No capítulo **inserir seção**, discutirei brevemente o modelo desenvolvido pelo grupo (MDSA+, do inglês Mie-Debye Spherical Aberration, com correção de outras aberrações). Este foi usado para obter os resultados da presente dissertação. Ele leva em conta diversos efeitos, como efeitos de polarização da luz e acoplamentos de momento angular de spin e orbital, que são ignorados pelos demais, além de ser válido para um espectro maior de razões entre o comprimento de onda λ e o raio a (também chamado de parâmetro de tamanho, ou β). Esse tema já foi abordado em teses de doutorado de ex-alunos do grupo [14, 7], que tomaremos e recomendamos como referência para este texto.

Ajustes de dados experimentais com o modelo MDSA foram feitos e publicados pelo grupo [19, 8]. Uma vez demonstrada que a teoria tem boa concordância com o experimento, podemos tentar prever parâmetros experimentais a partir dela. Esse é um dos objetivos do presente trabalho, e assim, discutiremos no capítulo 3 um pouco sobre o a simulação com o modelo Mie-Debye e suas extensões, bem como o experimento simulado.

No capítulo 4 discutiremos os resultados das simulações. Nesse mesmo capítulo discutiremos também formas alternativas de se obter os parâmetros obtidos na simulação. Comparações e conclusões serão tratadas no capítulo 5.

Capítulo 2

Teoria da Pinça Ótica

Esse capítulo será dedicado a apresentar teorias que descrevem o aparato de pinça ótica. A ênfase será no modelo Mie-Debye (MD), que foi usado para as simulações e obtenções dos resultados. Outros modelos importantes serão introduzidos, com a finalidade de gerar uma intuição acerca do assunto.

Alguns resultados que parecem contra-intuitivos pedem a introdução de alguns efeitos que os explicam. Portanto, a interação de momento angular de spin e orbital do feixe será discutida no contexto da teoria MD, onde a alta abertura numérica da objetiva é a responsável por efeitos de conversão entre os momentos angulares[5].

2.1 Ótica geométrica e limite de Rayleigh.

Uma forma intuitiva de entender o aprisionamento ótico de objetos esféricos e transparentes é no regime em que estes possuem um raio muito maior que o comprimento de onda do feixe incidente. Este limite é chamado de ótica geométrica, ou ótica de raios, no qual feixes podem ser tratados de forma geométrica definindo-se sua trajetória.

Por outro lado, no limite em que o raio é muito menor que o comprimento de onda, temos o limite de Rayleigh, em que nós podemos aproximar a microesfera por um dipolo elétrico.

O feixe presente em uma pinça ótica tem a forma de um cone sólido com um perfil de

intensidade radial. Nessa explicação, vamos olhar o comportamento de uma casca desse cone sólido com ângulo de abertura θ fixo. Dependendo de como os vetores de momento p diametralmente opostos mudarão ao passar pela esfera, podemos inferir a força que ela sofrerá pela variação dos pares desses vetores. Como só estamos interessados em ver o comportamento de aprisionamento da esfera pelo feixe, vamos ignorar efeitos de absorção e reflexão.

Começamos pelo caso mais simples: quando a ponta da casca do cone, ou a posição focal do feixe, coincide com o centro da esfera (figura 2.1). Nesse caso, o ângulo de incidência dos raios é normal a superfície da esfera, e o ângulo de transmissão é igual ao de incidência pela lei de Snell. Assim como ao entrar na esfera, o raio que sai da esfera

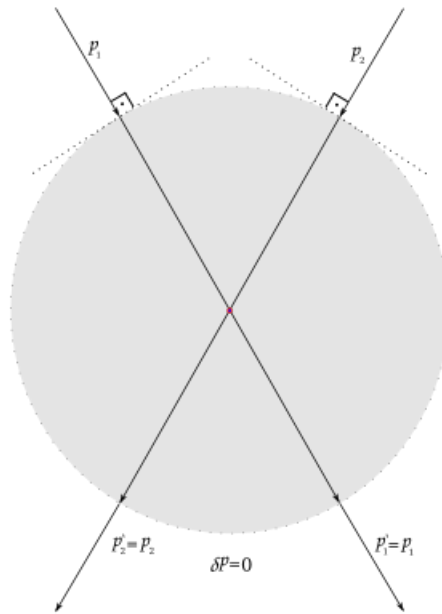


Figura 2.1: Foco coincidente ao centro da esfera. Essa corresponde a posição de equilíbrio estável da esfera.

também incide normalmente à superfície de dentro. Não há mudança na direção do vetor momento, e portanto não há força sendo exercida na esfera. Por simetria, não esperamos que as outras componentes do cone sólido façam força na esfera.

Quando deslocamos a posição do foco em relação ao centro da microesfera, a lei de

Snell preve que os raios serão refratados. Começamos deslocando na direção axial, ou seja, com o centro da esfera no eixo do cone (figura 2.2).

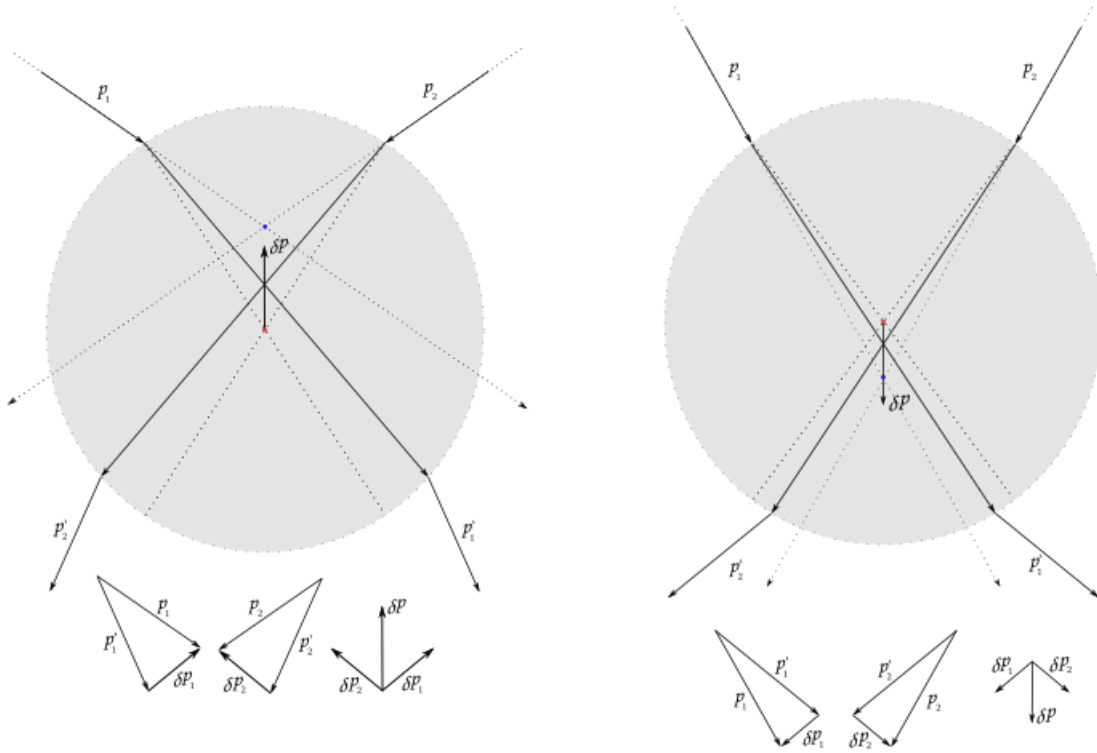


Figura 2.2: Centro da microesfera (ponto vermelho) no eixo do cone, acima (esquerda) e abaixo (direita) da posição do foco (ponto azul). O momento que a esfera adquire δP é $-(P' - P)$, que é menos a variação de momento do campo, por conservação.

De forma análoga ao caso anterior, ao deslocar verticalmente o foco em relação ao centro da esfera, o momento que a esfera recebe do feixe aponta para o centro deste.

Para os casos em que há reflexão e absorção, o efeito resultante é sempre uma força na direção da propagação do feixe. O motivo é que feixes que são refletidos têm sua componente de momento perpendicular à superfície reflexora invertidas. Por conservação de momento, a esfera ganha o dobro de momento nessa direção. No caso da absorção é ainda mais simples: a esfera ganha todo o momento da parte do feixe absorvido.

No caso em que a microesfera é muito menor que o comprimento de onda, chamado limite Rayleigh, podemos aproximar o centro espalhador por um dipolo induzido pelo

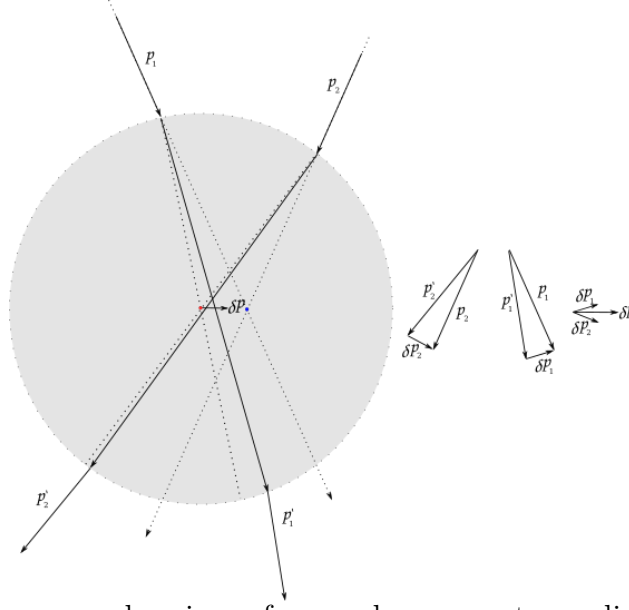


Figura 2.3: Centro de massa da microesfera ganha momento na direção do foco do feixe.

campo. Dessa forma, a força no dipolo \mathbf{p} será dada por [14]:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}), \quad (2.1)$$

com \mathbf{p} sendo dado por [12]:

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 \mathbf{E}. \quad (2.2)$$

Podemos concluir que a força vai ser proporcional a \mathbf{E}^2 , que é proporcional por sua vez à intensidade do campo. Se \mathbf{E} e \mathbf{p} têm o mesmo sentido, a força apontará sempre para a região de maior intensidade. Isso ocorre desde que $\epsilon > 1$. Essa é a força que chamamos de força de gradiente.

2.2 Modelo Mie-Debye.

Discutiremos brevemente nesse capítulo o modelo MDSA+. Para entender a origem das expressões para a força, vamos começar do problema mais simples. Trataremos nessa seção as bases do modelo Mie-Debye, para uma onda de polarização circular (direita ou esquerda). Os detalhes de tais cálculos podem ser encontrados em [14], e não estarão no presente trabalho para evitar repetição.

Começamos pela forma como se faz o cálculo da força em uma amostra na pinça ótica [12]:

$$\vec{F} = \oint_{\sigma} \hat{n} \cdot T d\sigma - \mu\epsilon \frac{d}{dt} \int_{\nu} \vec{S} d\nu, \quad (2.3)$$

onde σ é uma superfície que envolve a amostra na pinça ótica, ν é o interior dessa superfície, T é o tensor das tensões de Maxwell e μ e ϵ são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica do meio envolvendo a amostra, respectivamente.

O primeiro passo, portanto, é calcular o campo eletromagnético incidente e espalhado nessa amostra (centro espalhador). O campo incidente na amostra tem formato cônico sólido, gerado pela objetiva. Montaremos esse campo superpondo ondas planas. Para tanto, começamos tratando do caso de uma onda plana se propagando na direção z , com polarização circular. Essa é a polarização conveniente para expansão do campo em multipolo (ondas esféricas ou ondas parciais). Outros casos de polarização serão discutidos adiante.

A base de multipolos é a ideal para problemas com simetria esférica, pois são compostas pelos harmônicos esféricos na parte radial, que são autofunções dos operadores de momento angular L^2 e L_z . Esse fato será importante para obter os campos vetoriais a partir dos potenciais de Debye, que serão definidos a seguir:

$$\Pi^E = \sum_J \Pi_J^E = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})_J}{J(J+1)} \quad e \quad \Pi^M = \sum_J \Pi_J^M = \sum_J \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H})_J}{J(J+1)}. \quad (2.4)$$

com

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{ikz-i\omega t} \quad e \quad \mathbf{H} = \frac{n_1}{\mu c}(\mp i)\mathbf{E}. \quad (2.5)$$

onde n_1 é o índice de refração do meio ao redor da amostra, k e ω são o vetor de onda e a frequência angular do feixe, sendo $\omega/k = c$ a velocidade da luz no vácuo. Tais potenciais serão úteis para resolver o problema do espalhamento Mie. Estes decompõem os campos

em dois modos, um deles com o campo \mathbf{E} paralelo à superfície do objeto espalhador (Π^M , modo transversal elétrico) e outra perpendicular (Π^E , modo transversal magnético).

Essa decomposição forma a base para se aplicar as condições de contorno e obter os coeficientes de Mie, que podemos entender como as amplitudes de espalhamento de cada onda parcial. Os coeficientes de Mie para o espalhamento são:

$$a_J = \frac{\psi_J(\beta)\psi'_J(\alpha) - N\psi'_J(\beta)\psi_J(\alpha)}{\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi'_J(\alpha) - N\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi_J(\alpha)}, \quad b_J = \frac{\psi'_J(\beta)\psi_J(\alpha) - N\psi_J(\beta)\psi'_J(\alpha)}{\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi_J(\alpha) - N\zeta_J^{(1)}(\beta)\psi'_J(\alpha)}, \quad (2.6)$$

onde $\beta = ka$, $\alpha = Nka$, a é o raio da esfera e N é a razão entre o índice de refração do meio n_1 e do centro espalhador (esfera) n_2 ; $\psi_J = xj_J(x)$ e $\zeta_J^{(1)} = xh_J^{(1)}(x)$ são as funções de Bessel-Riccati e $j_J(x)$ e $h_J^{(1)}(x)$ são as funções esféricas de Bessel e Henkel, respectivamente. Os campos espalhados provenientes de Π^E e Π^M terão os termos a_J e b_J respectivamente multiplicando as expressões dentro dos somatórios em J .

Assim, uma vez encontradas as soluções escalares para os campos espalhados e incidentes, temos que reobter os campos vetoriais. Fazemos isso usando um conjunto de operadores vetoriais que comutam com ∇^2 e são perpendiculares entre si: $-i\mathbf{r} \times \nabla = \mathbf{L}$, $\nabla \times \mathbf{L}$ e ∇ . No espaço de Fourier, esses operadores são proporcionais a $\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}})$ e \mathbf{k} , respectivamente. A figura 2.4 mostra os vetores em questão. O operador \mathbf{k} fornece as soluções com campos na direção de propagação, ou seja, campos com divergência não nula e que não são soluções do nosso problema. Obtemos, até então, os potenciais de ondas planas incidentes e espalhadas na direção z em coordenadas esféricas. Queremos usá-las para montar um feixe cônico de alta abertura numérica. Faremos isso rotacionando e superpondo diversas ondas planas usando o operador \mathbf{J} , que é o gerador de rotações no espaço. Como a dependência angular dos potenciais de Debye estão contidas nos harmônicos esféricos, o procedimento se resume em fazer a rotação dos mesmos. Usando o operador $D(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$ e o fato de que os harmônicos esféricos

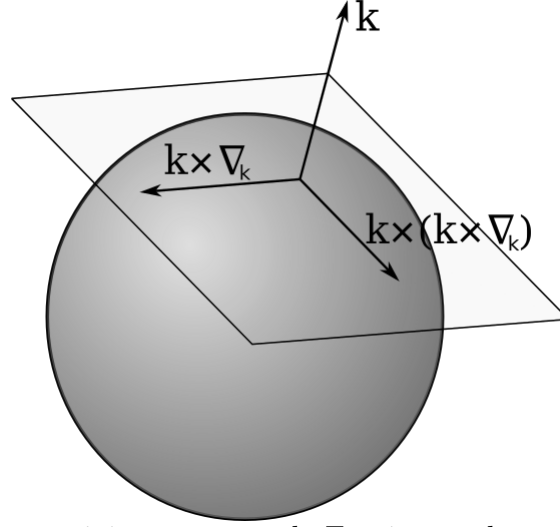


Figura 2.4: Operadores vetoriais no espaço de Fourier usados para encontrar as soluções vetoriais.

são autofunções de J_z , obtemos:

$$Y_{JM}(\theta', \phi') = \sum_{M'=-J}^J Y_{JM'}(\theta, \phi) e^{-i(\alpha M' + \gamma M)} d_{M'M}^J(\beta), \quad (2.7)$$

que representa um harmônico esférico em um eixo rodado com coordenadas θ' e ϕ' , onde $d_{M',M}^J(\beta) = e^{-i\beta J_y}$ é o elemento da matriz- d de Wigner e α , β , e γ são os ângulos de Euler. A rotação é feita de forma que o eixo z coincida com o eixo $\hat{\mathbf{k}}$ de propagação. Para isso, $\alpha = \phi_k$ e $\beta = \theta_k$. Usamos o último ângulo de Euler para determinar corretamente a direção de polarização do feixe fazendo $\gamma = -\phi_k$. Substituindo em 2.4, os potenciais de Debye rotacionados ficam:

$$\Pi^E = \pm \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{k} \sum_{J=1}^{\infty} (i)^{J+1} j_J(kr) \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} \sum_{M'=-J}^J e^{i\phi_k(M' \mp 1)} d_{M', \pm 1}^J(\theta_k) Y_{JM'}(\theta, \phi), \quad (2.8)$$

e

$$\Pi^M = \frac{H_0 e^{-i\omega t}}{k} \sum_{J=1}^{\infty} (i)^J j_J(kr) \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} \sum_{M'=-J}^J e^{i\phi_k(M' \mp 1)} d_{M', \pm 1}^J(\theta_k) Y_{JM'}(\theta, \phi). \quad (2.9)$$

O próximo passo é integrar no ângulo solido do cone. Começando pela varável ϕ_k (ou seja, componente ϕ da direção do vetor de onda \mathbf{k} ; notação que será usada para θ_k também), obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi_{\theta_k}^E = & \pm \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{k} \sqrt{\cos(\theta_k)} \sum_{J=1}^{\infty} (i)^{J+1} j_J(kr) \sqrt{\frac{4\pi(2J+1)}{J(J+1)}} \times \\ & \times \sum_{M'=-J}^J d_{M',\pm 1}^J(\theta_k) Y_{JM'}(\theta, \phi) \int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\phi_k(M' \mp 1)}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde o termo $\sqrt{\cos(\theta_k)}$ vem da condição do seno de Abbe. O cone sólido se obtém integrando em θ_k :

$$\begin{aligned} \Pi^E &= \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \Pi_{\theta_k}^E, \\ \Pi^M &= \int_0^{\theta_0} d\theta_k \sin \theta_k \Pi_{\theta_k}^M, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde θ_0 é a meia abertura do feixe.

Para derivar a força na microesfera em função da sua posição relativa ao foco do feixe, temos que calcular os campos deslocados em relação ao centro do objeto espalhador, ou seja, a origem. Fazemos isso usando o gerador de translações no espaço \mathbf{k} , com o operador $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}$, onde $\mathbf{R} = q_x \hat{x} + q_y \hat{y} + q_z \hat{z}$ é o vetor de deslocamento. Multiplicamos esse operador em cada coeficiente de multipolo, e dessa forma, o operador fica dentro da integral em ϕ_k , que leva ao seguinte resultado:

$$\int_0^{2\pi} d\phi_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} e^{-i\phi_k(M' \mp 1)} = e^{-ikz \cos \theta_k} 2\pi (-i)^{M' \mp 1} J_{M' \mp 1} \left(k \sin \theta_k \sqrt{q_x^2 + q_y^2} \right) e^{-i(M' \mp 1)\phi}. \quad (2.12)$$

Uma vez determinados os potenciais de Debye incidentes e espalhados, podemos obter os campos aplicando os operadores $-i\nabla \times \mathbf{L}$ e $-i\mathbf{L}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_T &= \mathbf{E}_{IN} + \mathbf{E}_S = -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{IN}^E + \Pi_S^E) + i\omega\mu(-i)\mathbf{L}(\Pi_{IN}^M + \Pi_S^M), \\
\mathbf{H}_T &= \mathbf{H}_{IN} + \mathbf{H}_S = -i\nabla \times \mathbf{L}(\Pi_{IN}^M + \Pi_S^M) - i\omega\epsilon(-i)\mathbf{L}(\Pi_{IN}^E + \Pi_S^E).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Finalmente, calculando a integral 2.3, obtemos a força na microesfera de um campo cônico e com perfil de intensidade constante antes de entrar na objetiva. Essa integral pode ser resolvida tomando a superfície σ como uma esfera (com centro na origem) com raio tendendo a infinito. Isso faz com que as componentes radiais do campo sejam desprezadas no cálculo, pois caem com $\frac{1}{r^2}$, comparado às componentes tangenciais que caem com $\frac{1}{r}$. Temos, então:

$$\mathbf{F} = \frac{-1}{2}r \left(\int d\Omega(\epsilon E_{tan}^2 \mathbf{r}) + \int d\Omega(\mu H_{tan}^2 \mathbf{r}) \right), \tag{2.14}$$

onde as duas integrais dentro do parentesis são iguais. Sendo assim, a força vai depender do quadrado dos campos (E^2 e H^2), e de termos proporcionais a $\mathbf{E}_{IN} \cdot \mathbf{E}_{IN}^*$ (incidente-incidente), $\text{Re}(\mathbf{E}_{IN} \cdot \mathbf{E}_S^*)$ (espalhado-incidente) e $\mathbf{E}_S \cdot \mathbf{E}_S^*$ (espalhado-espalhado). O primeiro desses termos (campo incidente-incidente) não contribui para a força, pois trata-se do caso onde não há centro espalhador. O produtos dos campos espalhado-incidente é chamado termo de extinção, e representa a taxa de perda de momento do campo incidente para o centro espalhador. Por fim, o termo de espalhamento (espalhado-espalhado) é menos a taxa de transferência de momento para o campo espalhado.

A expressão para a força será mostrada depois de introduzirmos o perfil do feixe e a polarização, uma vez que tanto os campos mudam, quanto as expressões da força ganham termos adicionais. Junto com a expressão para a força, serão mostrados os coeficientes de multipolo $\mathcal{G}_J M$, que carregam as informações de aberrações e do perfil de intensidade.

2.3 Efeito do perfil gaussiano.

O efeitos do perfil gaussiano no feixe. Faremos isso analisando o campo paraxial na entrada da objetiva. Trataremos também do efeito da aberração esférica causada pela

objetiva quando a lente é imersa em um meio com índice de refração diferente do meio que envolve a microesfera.

Para introduzir o efeito que o perfil do feixe produz, basta saber como é o feixe paraxial antes de ser focalizado. Primeiramente, assumimos que tal feixe incidente esteja com a altura da cintura mínima coincidente com a entrada da objetiva. Isso nos permite tratá-lo como um feixe cilíndrico (de raio de curvatura infinito). **colocar discussão sobre feixe paraxial em algum apêndice, e fazer a referência aqui.** O campo fica:

$$\mathbf{E}_{IN}^{antes}(\vec{r}, t) = E_0 e^{ikz} e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{\omega_0^2}} (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) e^{i\omega t}, \quad (2.15)$$

onde ω_0 é a cintura (waist) mínima, $f^2 \sin^2 \theta_k = \rho^2$ (pela condição do seno) é a distância ao eixo do feixe ao quadrado. Ao passar pela objetiva, o campo também ganha uma correção de efeitos de difração [18], o fator multiplicativo $-i\frac{f}{\lambda}$. O fator $e^{-\frac{f^2 \sin^2 \theta_k}{\omega_0^2}}$ deve ser inserido dentro da integral em θ_k . Assim, as expressões para os multipolos 2.11 são alteradas.

2.4 Efeitos de polarização.

Entender o caso de polarização linear vai tornar possível a compreensão do caso de polarização elíptica. Começamos modelando o feixe como uma superposição de polarização circular a direita e esquerda, com pesos iguais. O único procedimento que muda em relação ao caso de polarização circular é quando tomamos os quadrados dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} . Teremos campos espalhados e incidentes de ambas as polarizações, com as quais montamos os respectivos potenciais de Debye. Produtos de campos de mesma polarização serão chamados puros, e produtos de campos de polarização oposta serão chamados cruzados. Introduzimos, então, o fator de eficiência vetorial, também chamado de força normalizada, para o feixe de polarização linear:

$$\mathbf{Q} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{n_1 P / c} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{(\sigma+)} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^{(\sigma-)} + \mathbf{Q}^{(cross)} \quad (2.16)$$

onde $\langle \mathbf{F} \rangle$ é a média temporal da força e P é a potência do feixe incidente na amostra. Os termos $\mathbf{Q}^{(\sigma\pm)}$ são os termos que encontraríamos para a polarização circular direita ou esquerda (tanto de espalhamento quanto de extinção). O termo $\mathbf{Q}^{(cross)}$ é o que chamamos de cruzado, pois contem produtos de campos com polarizações opostas.

A força exercida por uma polarização elíptica pode ser obtida introduzindo a dependência com o ângulo ψ do eixo rápido da placa de quarto de onda (PQO, ou QWP) no feixe paraxial incidente na entrada da objetiva:

$$\mathbf{E}^{ent}(\rho, \phi, z) = E_{centro} e^{ik_0 z} e^{\frac{-\rho^2}{w_0^2}} \sum_{\sigma=+1,-1} \frac{1 - ie^{-2i\sigma\psi}}{2} \hat{e}_\sigma. \quad (2.17)$$

Dessa forma, os potenciais de Debye ganham um termo a mais devido ao ângulo da placa de quarto de onda. Podemos, então, identificar 4 tipos de termos nas forças de extinção e de espalhamento: diretos ou puros devidos as polarizações σ_\pm , e termos cruzados com os produtos $\sigma_\pm^* \cdot \sigma_\mp$.

2.5 Aberração esférica.

Uma das formas que a aberração esférica pode aparecer é quando há algum tipo de feixe focalizado atravessando a interface de meios com índices de refração diferentes. Essa não é a única aberração ótica presente no aparato de pinça ótica. Antes mesmo do feixe ser focalizado, este pode conter aberração esférica, como veremos na próxima seção. Para o caso do feixe focalizado passando por uma interface, é fácil de mostrar como o efeito funciona em uma abordagem de ótica de raios e a lei de Snell. Componentes do feixe no meio com índice n que incidem na interface com ângulo θ , por refração, são transmitidos com um ângulo θ_1 no meio com índice de refração n_1 , de forma a respeitar a lei de Snell:

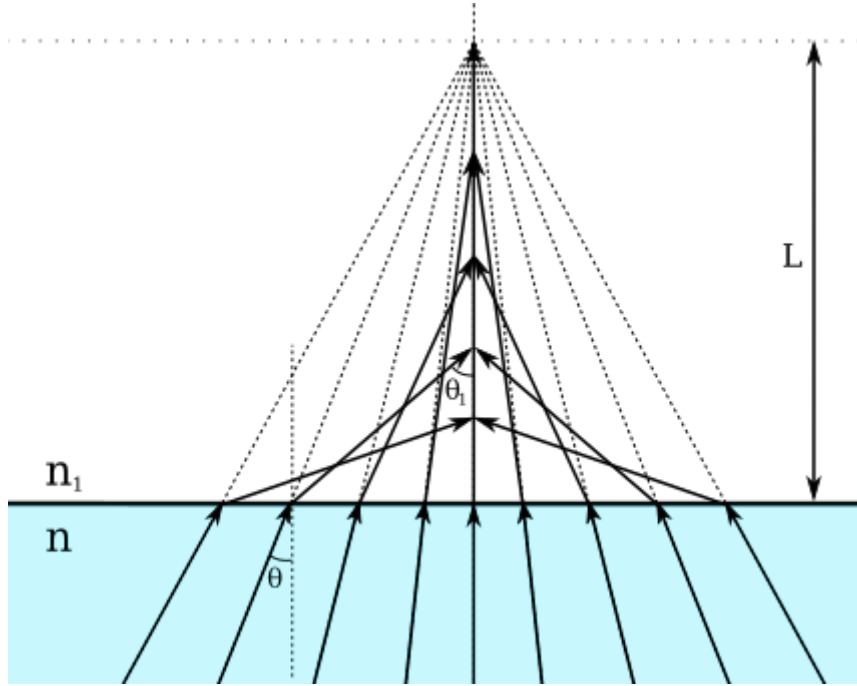


Figura 2.5

$$n \sin \theta = n_1 \sin \theta_1. \quad (2.18)$$

Fica claro, então, que para um feixe focalizado incidindo com seu eixo perpendicular à interface, raios que incidem em direções com ângulo $\theta \neq 0$, ao mudarem de meio, não mais incidem no foco. Portanto, a região de maior intensidade não se localiza mais no ponto focal, e sim difundida e mais próxima à interface. Isso faz com que a posição de equilíbrio da microesfera se desloque para mais perto da interface, o que pode ser entendido como um efeito de força de gradiente.

Para modelar a passagem de um meio para outro, levamos em conta a amplitude de transmissão de Fresnel de cada componente \mathbf{k} do campo, dada por [20]:

$$T(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + N \cos \theta_1}, \quad (2.19)$$

onde, por 2.18, $\theta_1 = \arcsin(\frac{\sin \theta}{N})$. Ao serem refratadas, as componetes de onda-plana ganham também uma fase $e^{i\Psi(z,\theta)}$, onde

$$\Psi(z, \theta) = k \left(-\frac{L}{N^2} \cos \theta + (L + z) \cos \theta_1 \right) \quad (2.20)$$

é a função de aberração esférica. No experimento, essa aberração aparece depois que o feixe é focalizado pela objetiva de imersão em óleo (que tem o mesmo índice de refração do vidro) e passa pela interface vidro-água para dentro do porta-amostra.

2.6 Aberrações óticas.

As aberrações óticas são modificações nos feixes paraxiais induzidas por uma série de fatores, entre eles imperfeições nas lentes e desalinhamentos no sistema ótico. O estudo das aberrações é inspirado pelo fato de que a teoria MDSA subestima a força radial na pinça ótica quando o raio da microesfera aprisionada é menor ou da ordem do comprimento de onda λ do laser[11]. Raios maiores que λ recuperam tanto os resultados da teoria MDSA quanto os da ótica geométrica. Isso ocorre porque a esfera passa a sondar uma média do perfil do feixe, em contraste com o caso anterior, em que ela sonda diferenças de fase e distribuição de intensidade do feixe focalizado.

O formalismo de Seidel é um dos possíveis métodos para se descrever as aberrações em um feixe paraxial. Entre as aberrações primárias, que aparecem como os primeiros termos de uma expansão nesse formalismo, são relevantes para o nosso modelo o astigmatismo, a coma e a aberração esférica [11]. Estamos tratando aqui de aberrações antes da objetiva, ou seja, a aberração esférica tratada aqui tem origem diferente da descrita na sessão anterior, apesar de serem o mesmo fenômeno físico.

Podemos introduzir essas aberrações no modelo colocando a fase adicional $e^{i\Phi_{adicional}(\theta, \phi)}$ nos campos na entrada da objetiva (modificando a equação 2.17), com:

$$\Phi_{adicional}(\theta, \phi) = 2\pi \left[A'_{sa} \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^4 + A'_c \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^3 \cos(\phi - \varphi_c) + A'_a \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^2 \cos^2(\phi - \varphi_a) \right]. \quad (2.21)$$

atenção aqui! tese do Rafael – \cos do A_{ast} é diferente ($2(\text{ângulo})$, elevado ao quad), no artigo do Kaina, essa fase é referida como fase de Zernike, e tirei da tese do Rafa como fase de Seidel. Identificamos A'_{sa} , A'_c e A'_a como os parâmetros de aberração esférica (*sa* do inglês, *spherical aberration*), coma e astigmatismo. Para entender os parâmetros φ_c e φ_a , temos que entender o que são essas aberrações. A primeira característica delas é a quebra de simetria no plano perpendicular a propagação do feixe paraxial (eixo z), e os parâmetros φ_c e φ_a são os eixos da orientação dos efeitos de coma e astigmatismo respectivamente. Isso também explica o porquê de não haver um parâmetro angular para aberração esférica: trata-se de uma aberração simétrica em ϕ , o que fica muito claro pela seção anterior.

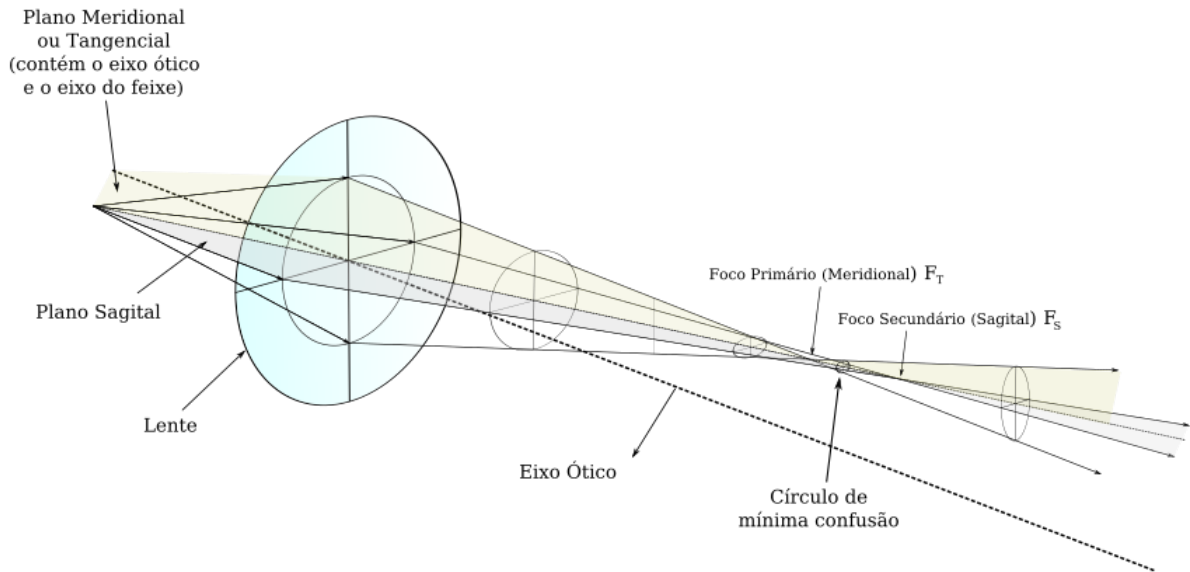


Figura 2.6: Feixe com astigmatismo.

Uma breve explicação das aberrações será feita a seguir, baseada em trabalhos do grupo [7, 8, 11], onde detalhes do seguinte desenvolvimento podem ser encontrados.

Considemos agora o problema prático: os experimentos que serviram de base comparatória para as simulações desenvolvidas não possuem coma e os efeitos de aberração esférica podem ser negligenciados. Portanto, somente o astigmatismo será levado em conta nas equações apresentadas. Como a fase referente ao astigmatismo possui uma

dependência em ϕ , podemos concluir que a integral da equação 2.12 será modificada.

Uma vez apresentadas todas as correções feitas ao modelo MD, vamos apresentar as expressões para força em termos dos coeficientes de multipolo.

2.7 Expressões para força.

Como dito no começo do capítulo, o método para se obter a força na pinça ótica é resolver a integral 2.3. A forma mais fácil de fazer-lo é tomando a superfície σ no infinito, já que a escolha dessa é arbitrária. Podemos argumentar também que a integral envolvendo o vetor de Poynting é zero. No limite que tal superfície está no infinito, usamos as expressões assintóticas das funções de Bessel (com dependência em kr) dentro dos potenciais de Debye.

Portanto, a expressão para as contribuições de espalhamento e extinção do fator de eficiência na direção z , para uma polarização qualquer, corrigida para aberração esférica e astigmatismo, tem a forma [8]:

$$Q_{sz}(\rho, \phi, z) = -\frac{4\gamma^2}{AN} \text{Re} \sum_{jm\sigma} \left[\frac{\sqrt{j(j+2)(j+m+1)(j-m+1)}}{j+1} \left((a_j a_{j+1}^* + b_j b_{j+1}^*) \times \right. \right. \\ \left. \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m}^{(\sigma)*} (1 - \sigma \sin 2\psi) + (a_j a_{j+1}^* - b_j b_{j+1}^*) \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j+1,m}^{(-\sigma)*} \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)} \right) + \\ \left. \frac{2j+1}{j(j+1)} m \sigma a_j b_j^* (|\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)}|^2 (1 - \sigma \sin 2\psi) - \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \mathcal{G}_{j,m}^{(-\sigma)*} \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)}) \right], \quad (2.22)$$

$$Q_{ez}(\rho, \phi, z) = \frac{2\gamma^2}{AN} \text{Re} \sum_{jm\sigma} (2j+1) \mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)} \left[(a_j + b_j) \mathcal{G}_{j,m}^{C,(\sigma)*} (1 - \sigma \sin 2\psi) + (a_j - b_j) \mathcal{G}_{j,m}^{C,(-\sigma)*} \cos 2\psi e^{i2\sigma(\phi-\psi)} \right]. \quad (2.23)$$

O fator $\gamma = f/\omega_0$ é a razão entre a distância focal e a cintura do feixe na entrada da objetiva, enquanto o fator A , denominado *filling factor*, é a fração de potência que é transmitida pela objetiva. Deixamos para o apêndice A as expressões para os coeficiente de multipolo $\mathcal{G}_{j,m}^{(\sigma)}$ e $\mathcal{G}_{j,m}^{C,(\sigma)}$, além das expressões para as componentes radiais e azimutais do fator de eficiência Q_ρ e Q_ϕ , e dos multipolos $\mathcal{G}_{j,m}^{\pm,(\sigma)}$ dos quais os dois últimos dependem.

No capítulo 3 serão descritas as medidas feitas com o aparato da pinça ótica. As forças não são medidas diretamente: como as microesferas estão em movimento browniano na solução, quando pinçadas elas passam flutuar ao redor da posição de equilíbrio na pinça. Seus movimento pode ser descrito por meio de um potencial harmônico, que permite uma expansão de Taylor da força em ρ , e uma constante elástica associada a pinça. Temos, então, a constante transversa κ_ρ de rigidez dada por[20]:

$$\kappa_\rho = -\frac{n_1 P}{c} \frac{\partial Q_\rho}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0, z=z_{eq}}, \quad (2.24)$$

onde P é a potência do laser; e a constante de torção [8]:

$$\kappa_\phi = -\frac{n_1 P}{c} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0, z=z_{eq}}. \quad (2.25)$$

Os somatórios em j e m são feitos da mesma forma que na expressão 2.10: j vai de 0 a ∞ , e m de $-j$ a j . Os valores da soma de σ são ± 1 , como na equação 2.17. O importante de observarmos aqui é a dependência de Q_z com ψ , que será um parâmetro livre no experimento e portanto na simulação. Podemos identificar nas expressões 4 tipos de termos: com multipolos com mesmo índice de polarização $\mathcal{G}^{(+1)}\mathcal{G}^{(+1)*}$ e $\mathcal{G}^{(-1)}\mathcal{G}^{(-1)*}$, e com índices invertidos $\mathcal{G}^{(+1)}\mathcal{G}^{(-1)*}$ e $\mathcal{G}^{(-1)}\mathcal{G}^{(+1)*}$. Os dois primeiros termos são proporcionais, respectivamente, a $(1 - \sin 2\psi)$ e $(1 + \sin 2\psi)$, e os dois últimos, a $\cos 2\psi e^{i2\psi}$ e $\cos 2\psi e^{-i2\psi}$.

Explicitar essa soma é de grande importância para os cálculos numéricos, pois podemos calcular esses 4 termos de forma independente, e teremos o valor de Q_z para qualquer ângulo da placa de quarto de onda.

2.8 Interação Spin-Órbita.

Uma das características da pinça ótica que faz com que a modelagem teórica seja tão difícil é o fato de que o feixe que emerge da objetiva é muito focalizado, e portanto não paraxial. Um dos efeitos resultantes da focalização do feixe é a conversão de momento angular de spin do feixe, associado a polarização (ou helicidade) do campo, em momento

angular orbital [5]. O momento angular orbital insere uma fase com dependência na variável cilíndrica ϕ .

Evidências experimentais apontam que o campo espalhado por uma microesfera no aparato de pinça ótica pode carregar mais momento angular do que o campo incidente. Usamos o efeito de conversão de momento angular de spin para orbital junto com a teoria MD para pinça ótica para trazer luz a esse fenômeno.

De uma forma simples, podemos entender essa transferência de momento angular considerando um cone de ondas planas circularmente polarizadas com ângulo de meia abertura θ , da mesma forma que fizemos no começo da seção 2.2.

Suas componentes de spin apontam para as respectivas direções de propagação, com o sentido definido pelo sentido da polarização circular **colocar referência**. Assumindo que o momento angular (intrínscio) total se conserve, vemos que a soma dos vetores diametralmente opostos terão suas componentes radiais se anulando, enquanto as na direção axial se somam. Se \mathbf{P} é o momento angular total do feixe e \mathbf{S} e \mathbf{L} são os momentos angulares de spin e orbital, temos a seguinte relação [5]:

$$\mathbf{S} = \sigma \cos \theta \mathbf{P}, \quad \mathbf{L} = \sigma(1 - \cos \theta) \mathbf{P}. \quad (2.26)$$

Na seção 2.2 rotacionamos os potenciais de Debye, que representam ondas paciais, utilizando um operador de rotação. Podemos, ao invés disso, rotacionar o campo vetorial \mathbf{E} diretamente. Essa rotação pode ser representada na base de polarização circular $|\sigma+\rangle$, $|\sigma-\rangle$ e $|z\rangle$ com a seguinte transformação unitária [6]:

$$\begin{pmatrix} \langle \sigma+ | E' \rangle \\ \langle \sigma- | E' \rangle \\ \langle z | E' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & be^{-i2\phi} & \sqrt{2abe^{-i\phi}} \\ -be^{i2\phi} & a & \sqrt{2abe^{i\phi}} \\ -\sqrt{2abe^{i\phi}} & -\sqrt{2abe^{-i\phi}} & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \sigma+ | E \rangle \\ \langle \sigma- | E \rangle \\ \langle z | E \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

A dependência com o ângulo ϕ também aparece nas expressões dos campos rotacionados (equação 2.10), ao rotacionarmos os harmônicos esféricos (equação 2.7) com $\alpha = -\gamma = \phi_k$.

Uma vez que haja momento angular orbital incidindo na microesfera, podemos fazer um paralelo com a transferência de momento linear para explicar o excesso de momento

angular no campo espalhado.

Como discutido na seção 2.2, os termos de extinção representa a quantidade de momento que é transferida do campo incidente à microesfera; enquanto o termo de espalhamento está relacionado à transferência de momento para o campo espalhado. Podemos entender que, na região de pequenos raios, o termo que domina na expressão da força é o de extinção, pois se o raio da esfera é muito menor que o comprimento de onda do laser, pode-se concluir que o campo não será tão afetado por esse centro espalhador (\mathbf{E}_S é muito pequeno e $\text{Re}(\mathbf{E}_{IN} \cdot \mathbf{E}_S^*)$ domina sobre $\mathbf{E}_S \cdot \mathbf{E}_S^*$).

Quanto maior for o centro espalhador, mais afetado o campo será, e a partir de um certo raio, o termo de espalhamento da força domina **[[encontrar referência]**. A imagem 2.7 mostra o comportamento da constante de torção κ_ϕ .

Podemos observar que na região em que o raio a é menor que $0,15\mu m$, a constante de torção é positiva, e o torque indica um ganho de momento angular na mesma direção ao de spin do campo incidente. Sendo essa a região onde o termo de extinção domina, podemos inferir que o campo está cedendo momento angular para a microesfera, e esta não está espalhando momento angular o suficiente para sofrer torque negativo.

Quando o raio aumenta, a componente de espalhamento da força começa a dominar, e efeitos de torque negativos a prevalecer. Podemos concluir que o campo espalhado carrega momento angular em excesso. Como a componente de spin do campo espalhado não podem ser maior que do incidente, por esta última já ser máxima, o excesso de momento angular tem que ser de origem orbital.

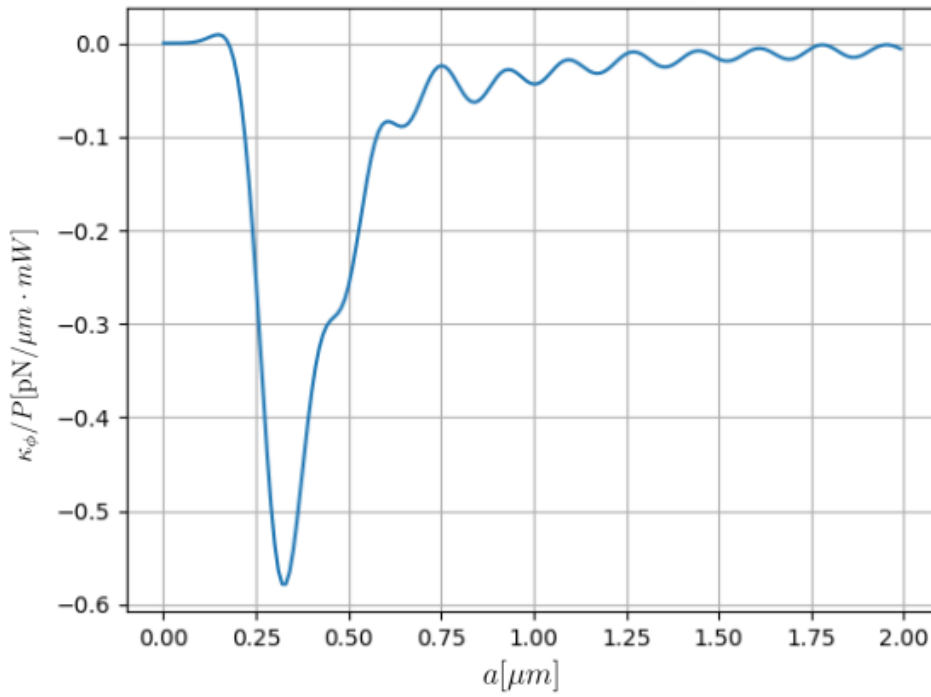


Figura 2.7: Constante de torção κ_ϕ em função do raio da microesfera. O comprimento de onda do laser é de 1064nm , a distância L entre o foco e a lamínula é de 4,5 unidades de raio e a polarização $\sigma+$. Astigmatismo não é levado em conta nessa simulação.

colocar informações sobre os dados (comp de onda, aberração esférica, ausência de astig, polarização, etc.).

Capítulo 3

Experimento e Simulação

Neste capítulo apresentamos o experimento que foi simulado com a teoria MDSA+ para obter os resultados da presente dissertação, bem como os procedimentos de tal simulação.

3.1 Aparato Experimental

O aparato que descrevemos nessa seção mede a transferência de momento angular da luz na pinça ótica. O experimento foi realizado em 2018 por Diniz *et al.* [8, 9]. Detalhes do procedimento experimental, do material e das ferramentas usadas nesse experimento podem ser encontradas nas referências citadas, e não serão abordados nesse trabalho.

A descrição do experimento deve ser dividida em partes. De forma geral, temos um feixe que é produzido na mesa ótica sendo levado para dentro de um microscópio. Dentro desse microscópio há uma lente objetiva e o porta-amostra, que contém um meio fluido com microesferas diluídas.

Este porta-amostra está acoplado a um suporte preso ao estágio do microscópio que pode ser movido em qualquer direção por meio de um controle piezo-elétrico ou manualmente. Tudo isso forma o aparato da pinça ótica, e deixaremos para o final a descrição do experimento que foi simulado.

Primeiramente, trataremos do feixe paraxial: trata-se de um laser com perfil gaussiano (TEM_{00}) e comprimento de onda $\lambda_0 = 1064nm$. Suas características são importantes para

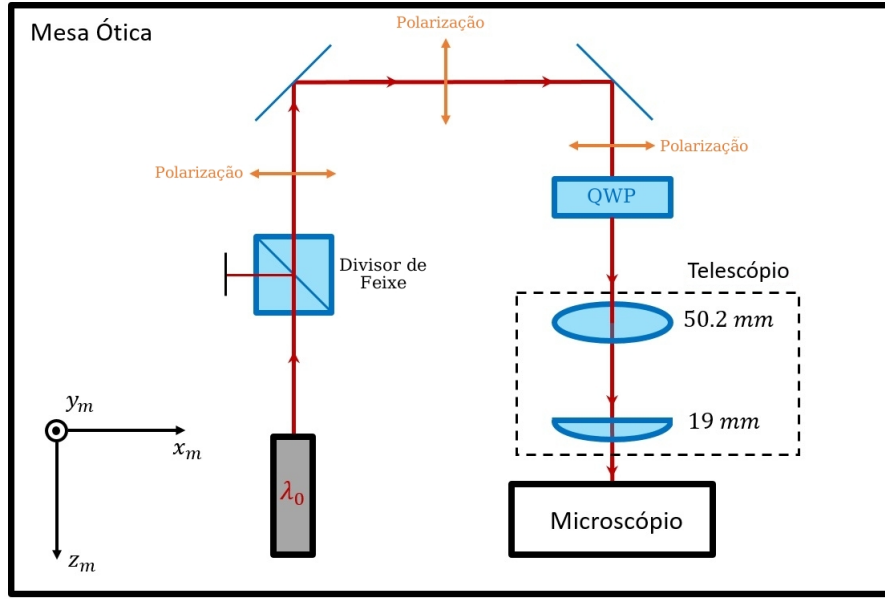
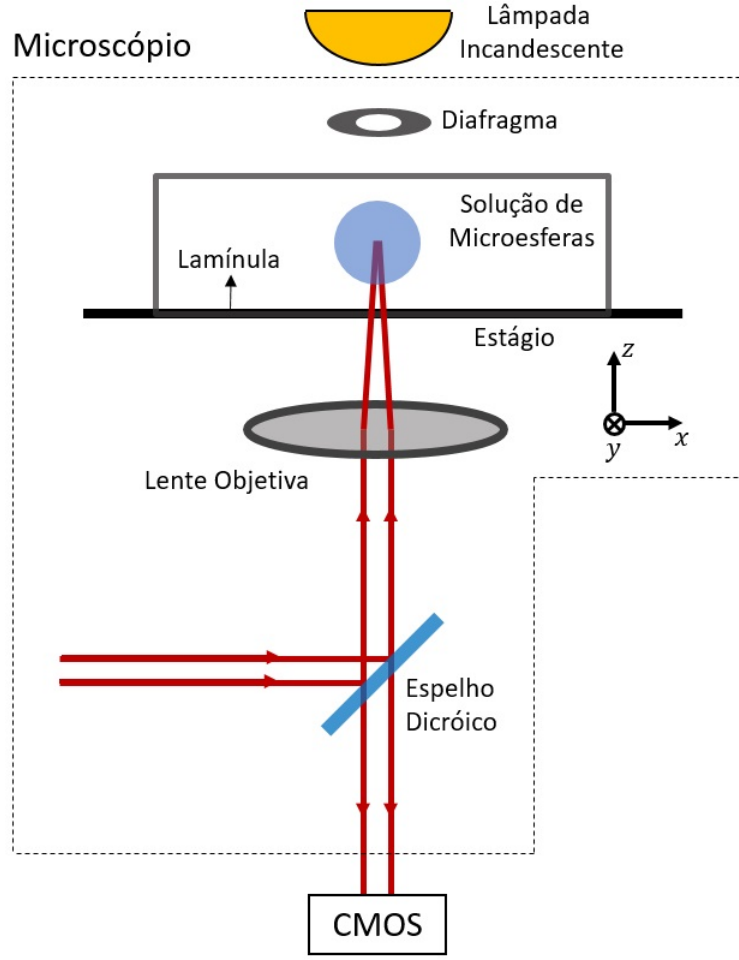


Figura 3.1

definir o feixe focalizado pela objetiva, como vimos no capítulo anterior.

O feixe laser, logo após ser gerado, incide sobre um divisor de feixe que o polariza linearmente. A direção de polarização é paralela à mesa, e no caso em que o feixe entra no porta-amostra com polarização linear, a direção de polarização passa a definir o eixo x das nossas coordenadas. É com esse eixo que vamos medir o ângulo ϕ das coordenadas cilíndricas da microesfera e o ângulo φ_a do eixo do astigmatismo. Como já foi explicado, o astigmatismo gera um alongamento no perfil do feixe, fazendo com que o *spot* tenha um formato elipsoidal ao invés de circular. O ângulo entre a direção do alongamento e o eixo de polarização linear (eixo x) é o ângulo φ_a . Dessa forma, medir esse ângulo é realizado de forma muito fácil uma vez que se obtenha a imagem do perfil do feixe. O valor medido e usado na simulação foi $\varphi_a = (1 \pm 1)^\circ$.

A largura da cintura ω_0 do feixe é essencial para garantir a condição de aprisionamento da microesfera, pois se esta for muito menor que a entrada da objetiva, teremos o que se chama de *underfilling*, que faz com que o fator de eficiência da pinça seja muito reduzido. Como, para alguns tamanhos de esfera aprisionada, a largura do feixe não é grande o



suficiente, usa-se um expensor de feixes, que consiste em um par de lentes, sendo uma biconvexa e a outra convexa, para se ampliar o perfil deste.

A cintura do feixe é medida fazendo-o passar por uma pupila e medindo-se a potência média transmitida. Como o campo tem perfil gaussiano e a potência é proporcional ao quadrado do campo, a potência transmitida deve obedecer [20]:

$$P(R) = P_i(1 - e^{\frac{-2R}{\omega_0}}), \quad (3.1)$$

onde R é o raio da pupila e P_i é a potência do laser. O ajuste dessa função com valores medidos da potência fornece o valor da cintura mínima $\omega_0 = 5.82 \pm 0.08$.

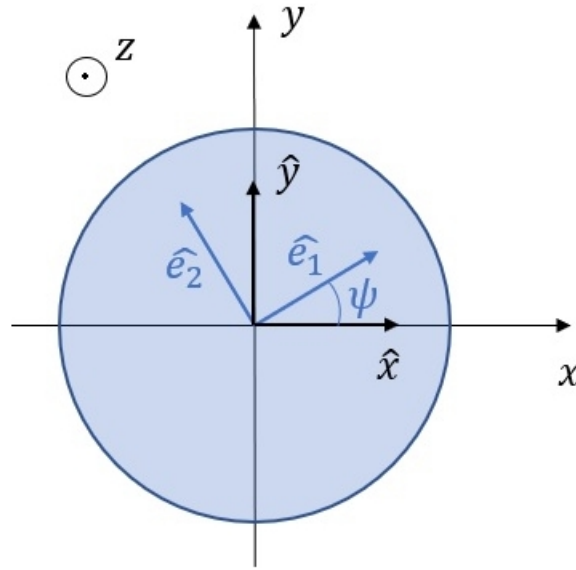


Figura 3.3: explicar essa figura: e1 é o eixo rápido, etc

Antes de entrar no microscópio, o feixe passa por uma placa de quarto de onda (QWP). O eixo rápido da placa faz um ângulo (controlável) ψ com a direção de polarização linear (eixo x), como dito na seção 2.4 e mostrado na equação 2.17. Inicialmente o feixe tem polarização linear, ou seja, $\psi = 0$. A direção e sentido de propagação do feixe definem o eixo z do nosso sistema de coordenadas. Ao entrar no microscópio, o feixe entra na objetiva de imersão em óleo. A objetiva tem abertura numérica nominal de $NA = 1.4$. Como a abertura numérica é maior que o índice de refração da água ($n_1 = 1.332$), o ângulo de abertura do feixe incidente sobre a microesfera será $\theta_0 = \arcsin(n_1/n)$, onde $n = 1.51$ é o índice de refração do vidro. Isso acontece porque parte do feixe que emerge da objetiva incide sobre a interface vidro-água com ângulos maiores que o ângulo crítico, gerando reflexão interna total e ondas evanescentes dentro do porta-amostra. A contribuição para a força das ondas evanescentes não são levadas em conta no modelo teórico, pois assumimos que o centro espalhador está a alguns comprimentos de onda de distância da interface.

Assim, o feixe com a polarização determinada pela QWP entra no microscópio, sendo

refletida por um espelho dicróico e incidindo na objetiva. O espelho dicróico reflete a luz com comprimento de onda igual do laser, mas transmite comprimentos de onda de luz visível (um pouco menor que o do laser). Isso permite que uma luz ilumine o porta-amostra e possamos ver a imagem da solução no microscópio através do espelho dicróico. Usando uma câmera podemos fazer filmes e obter as imagens de onde serão tirados os dados.

A solução dentro do porta-amostra é composta por microesferas de poliestireno dispersas em água deionizada. A parte real do índice de refração do poliestireno é de $\text{Re}(n_2) = 1.576$, e a parte imaginária, responsável pela absorção de luz por esse material, é de $\text{Im}(n_2) = 0.0011$ [13].

Uma vez que o feixe entre no porta-amostra, um procedimento é feito para definir a posição do foco no eixo z e a posição do *spot* no plano xy visualizado pela câmera [9]. Isso é feito antes de colocar a solução com microesferas, pois assim é possível observar o feixe com a câmera.

Após saber a posição do foco, é colocada a solução e a lamínula superior. Com o controle manual do estágio do microscópio pode-se mover a posição do plano focal e buscar esferas para serem aprisionadas.

3.2 Procedimento Experimental

Após o aprisionamento de uma microesfera, é feito um procedimento para determinar a posição de equilíbrio no eixo z . Para isso, vamos definir as coordenadas que estamos usando e que será usada na simulação. O eixo z tem como origem o foco paraxial (note a diferença em relação ao modelo teórico, em que a origem se encontra no centro da microesfera) e a coordenada z será a posição do centro da microesfera. A coordenada da interface será, para fins práticos, $-L\hat{z}$, com L sendo o módulo da distância entre o plano focal e o plano da interface (como definido na figura 2.5).

No procedimento, deslocamos a microesfera aprisionada até que ela toque a lamínula

de vidro. Nesse momento temos o vínculo $z_{eq} = a - L_0$, ou seja, a posição de equilíbrio estável da microesfera define uma distância inicial entre o plano focal e a interface (L_0). Por causa do efeito de aberração esférica, discutido na seção 2.5, a posição de equilíbrio tende a ser um pouco abaixo do plano focal, e por isso, usualmente temos $z_{eq} < 0$.

Esse detalhe é muito importante para a simulação, pois este vínculo torna possível determinar essa distância inicial L_0 . Depois de encostada a microesfera na lamínula, deslocamos o estágio do microscópio $3\mu m$ para baixo. O foco tem um deslocamento efetivo de $3\frac{n+1}{n}\mu m$, por causa da diferença de caminho ótico(**perguntar pro paulo sobre referencia**).

Com a microesfera longe da lamínula, observamos seu movimento browniano ao redor da posição do *spot* do laser. A seguir, o estágio do microscópio é movido na direção x com o controle piezo-elétrico. O deslocamento tem uma velocidade de $v_1 = 250\mu m/s$. Faz-se, em seguida, um movimento no sentido contrário com mesma velocidade, e repete-se todo esse procedimento mais duas vezes, na primeira com velocidade de $v_2 = 150\mu m/s$ e na segunda $v_3 = 62.5\mu m/s$.

Cada um desses movimentos arrasta o fluido dentro do porta-amostra, e portanto faz com que o fluido ao redor da esfera se desloque também. Dessa forma, a microesfera sofre uma força de arrasto (força de Stokes), dada pela lei de Stokes-Faxen:

$$\vec{F}_s = \beta \vec{v}, \quad (3.2)$$

onde \vec{v} é a velocidade do porta-amostra e β é uma constante que depende da viscosidade do meio e da razão entre o raio da microesfera e a distância entre seu centro de massa e a interface.

Essa força de arrasto desloca a microesfera da posição de equilíbrio da pinça ótica (do centro do *spot*). Uma nova posição de equilíbrio é obtida com $\vec{F}_\phi + \vec{F}_\rho = -\vec{F}_s$. Uma vez que $\vec{F}_s = F_s \hat{x}$, podemos projetar \vec{F}_ϕ e \vec{F}_ρ no eixo x e encontrar a condição de equilíbrio: $F_s = F_\rho \cos \phi + F_\phi \sin \phi$.

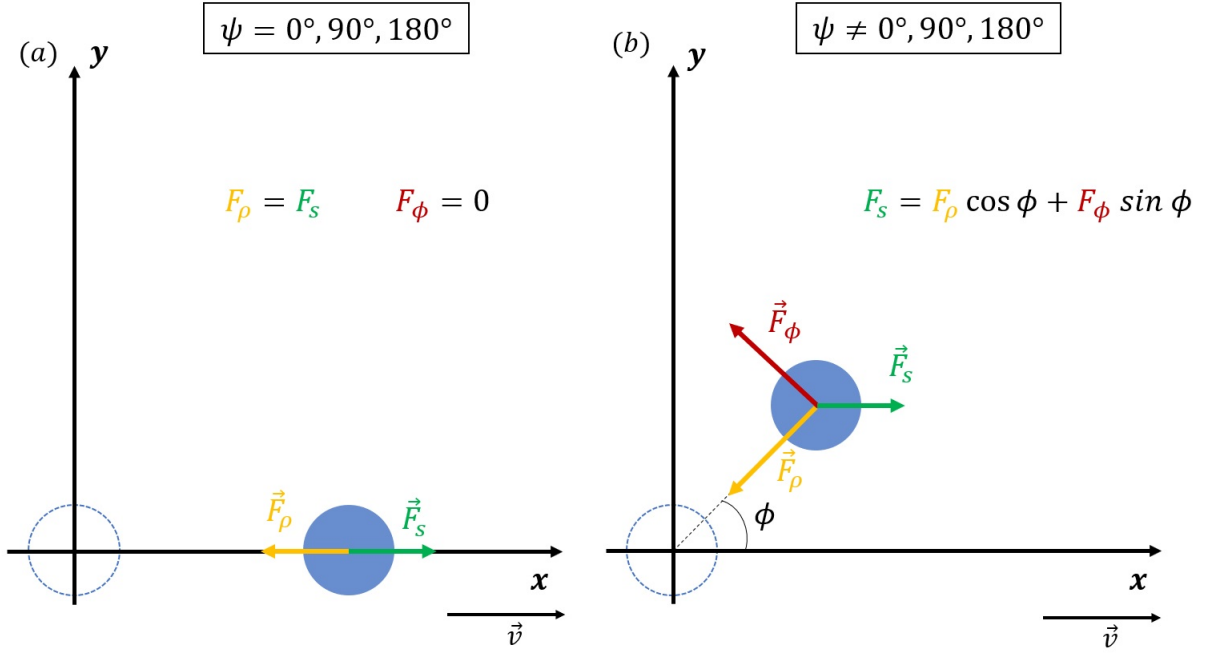


Figura 3.4

Como vimos anteriormente, as forças óticas \vec{F}_ϕ e \vec{F}_ρ são lineares em ρ quando próximas da posição de equilíbrio. Como a força de arrasto não desloca a microesfera da pinça o suficiente para que a força não seja mais linear, o que esperamos é que o ângulo ϕ seja constante para qualquer velocidade imposta pelo piezo-elétrico (como mostrado na figura 3.5).

Dessa forma, cada velocidade determina uma posição de equilíbrio, ao redor da qual a microesfera apresenta movimento browniano. As posições médias da esfera para cada velocidade formam uma reta que determinam ϕ .

É importante observar que esse ângulo será muito pequeno. Podemos aproveitar esse fato e aproximar a projeção das forças no eixo y $F_\rho \sin \phi = F_\phi \cos \phi$ como:

$$\frac{F_\phi}{F_\rho} = \tan \phi \approx \phi. \quad (3.3)$$

Com a linearidade da força $F_\phi/F_\rho = \kappa_\phi \rho / \kappa_\rho \rho$, temos:

$$\frac{\kappa_\phi}{\kappa_\rho} \approx \phi. \quad (3.4)$$

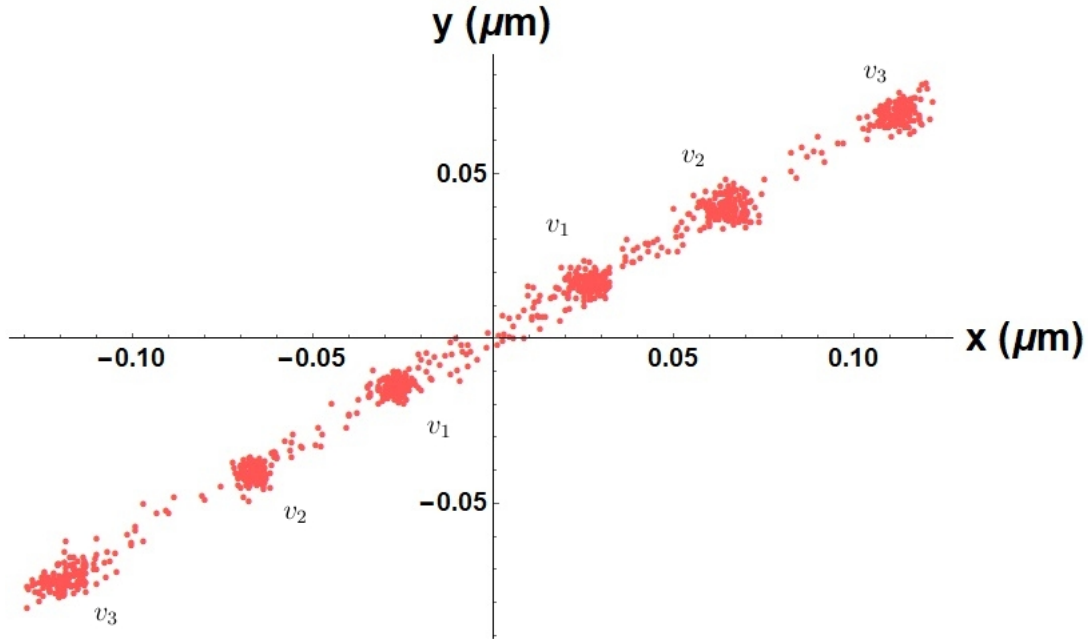


Figura 3.5: Pontos experimentais do experimento. São mostradas várias baterias de dados, cada uma representada por uma velocidade. Podemos ver o efeito do movimento browniano ao redor das posições de equilíbrio. **deixo um agradecimento/referencia para o Kainã?**

Por fim, o experimento consiste em medir o ângulo ϕ para várias polarizações do feixe incidente. Espera-se que deslocamentos ao longo da direção x (de polarização linear) não produzam rotação em torno do eixo do feixe, que é o caso de (a) na figura 3.4. Se o deslocamento fosse em outras direções, poderíamos esperar uma força de gradiente na direção ϕ causada por assimetrias no feixe. Da mesma forma, o astigmatismo pode gerar essa força azimutal pela quebra da simetria de rotação que este gera no spot. Nos pontos experimentais podemos ver que o eixo do astigmatismo é de aproximadamente 1° , e por isso não observamos rotação nenhuma quando $\psi = 0$.

3.3 Simulação do experimento de transferência de momento angular

A simulação do experimento leva em conta alguns processos que não foram explicados na seção anterior. Começamos por definir a posição inicial do foco em relação a lamínula.

O fator de eficiência Q_z é calculado para várias posições onde o vínculo $z = a - L$ é válido, com $L - a$ como *input* para a posição z onde é calculada a força e L para a distância entre o plano focal e a interface. **inserir gráfico** No experimento, esse primeiro passo é feito com $\psi = 0$.

A forma como são tratadas medidas de distância no programa é por unidades de raio. Dessa forma as distâncias ficam adimensionais, e portanto mais fáceis de se interpretar. A distância entre o foco e a interface fica definida a menos do deslocamento inicial (de $3\mu m$): $L = L_0 + 3\frac{n_1/n}{a}$ (com a em μm e L e L_0 em unidades de raio).

Após esse cálculo podemos procurar a posição de equilíbrio estável da microesfera em função da sua posição relativa ao plano focal. Fazemos $\rho = 0$ e calculamos Q_z para vários valores de z . Buscamos os pontos em que cruzam o eixo $Q_z = 0$, de forma que $Q_z(z_i) > 0$ e $Q_z(i + 1) < 0$. Essa é a condição para posição de equilíbrio estável.

Com esses dois pontos podemos traçar uma reta, e como a força é linear ao redor da posição de equilíbrio, o valor de z em que $Q_z = 0$ pode ser calculado com:

$$z_{eq} = -\frac{B}{A}, \quad (3.5)$$

onde A e B são os coeficientes de ajuste da reta $Q_z(z) = Az + B$.

No experimento, a posição de equilíbrio não é diretamente medida, mas sabe-se que ela varia quando a polarização do feixe incidente muda. Levar isso em conta no código implica em calcular Q_z várias vezes até que o valor desse mude de sinal como descrito anteriormente.

Calcular tal posição de equilíbrio para cada polarização do feixe incidente seria computacionalmente muito custoso. Dessa forma, a dependência com o ângulo ψ da placa de quarto de onda é explicitada e o fator de eficiência Q_z para várias posições z da microesfera pode ser calculado para qualquer polarização uma vez só. Uma vez tendo os valores de $Q_z(z)$ e z , podemos calcular a posição de equilíbrio em função do ângulo da placa de onda.

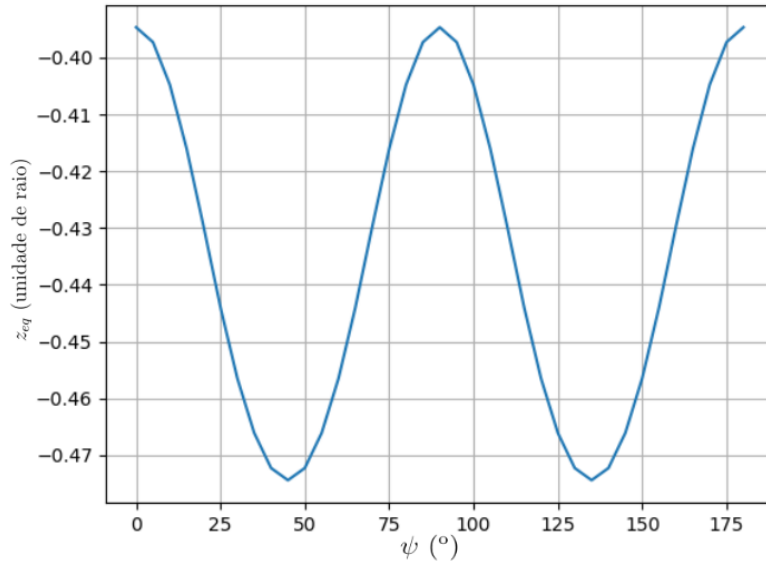


Figura 3.6: Comportamento da posição de equilíbrio em função do ângulo da placa de quarto de onda ψ . O valor do parâmetro de astigmatismo para essas posições é de $A_{ast} = 0.25$

É possível também que o intervalo em z em que se calcula o fator de eficiência Q_z não possua nenhuma posição de equilíbrio estável. Constatações experimentais nos levam a definir tal intervalo, como por exemplo, se vemos a microesfera focalizada na câmera, ela só pode estar frações de unidades de raio ($a \approx 0.5\mu m$) de distância do foco paraxial. Portanto, se o programa não encontrar tal posição de equilíbrio dentro desse intervalo, as condições de pinçamento para os parâmetros de entrada não são satisfeitos.

Isso ocorre principalmente quando fazemos simulações com parâmetros de astigmatismo altos ($A_{ast} > 0.4$). **rever esse paragrafo, pois nao tenho nenhuma imagem ou medida: o programa retorna erro quando busca por posicoes de eq acima desse valor de A_{ast} , justamente por nao achar dentro do intervalo de 4 unidades de raio, por volta de $2\mu m$**

Com as posições de equilíbrio para cada ψ do experimento e a posição inicial L_0 podemos calcular κ_ϕ/κ_ρ numericamente. Assim, toda vez que a posição de equilíbrio

mude, todo o cálculo tem que ser feito novamente. Por esse motivo, as posições de equilíbrio são arredondadas até a 4ª casa decimal dos valores em unidades de raio, que corresponderia a considerar variações menores que $1nm$.

De fato, o movimento browniano da microesfera tem amplitudes muito maiores que $1nm$, que significa que fazer tal aproximação não deve mudar o resultado final. Valores exatos da posição de equilíbrio fornecidos pelo código que diferem por um valor menor ou igual a 10^{-5} serão arredondados para o mesmo valor, e o cálculo de κ_ϕ/κ_ρ será feito uma vez só.

Reproduzimos todo esse procedimento para vários valores do parâmetro de astigmatismo e comparamos o valor obtido de κ_ϕ/κ_ρ com o ângulo ϕ de rotação do experimento. Para determinar qual valor de A_{ast} melhor descreve o experimento, utilizamos o método de mínimos quadrados: subtraímos o valor de ϕ e de κ_ϕ/κ_ρ e tomamos o quadrado dessa diferença. Quanto menor for o valor desse quadrado, maior a verossimilhança com as medidas do experimento.

3.4 Condições de Pinçamento

Outro uso para o modelo MDSA é testar condições de pinçamento baseado nas observações experimentais. Sabemos que microesferas são aprisionadas próximas ao foco, coincidindo com esse na ausência de aberrações e absorção. Podemos usar o modelo para calcular o fator de eficiência Q_z nessa vizinhança e entender o comportamento da força perto do foco.

O simples fato de existir um ponto onde Q_z mude de sinal de positivo para negativo (equilíbrio estável) não é suficiente. Como foi dito anteriormente, a microesfera apresenta movimento browniano perto da posição de equilíbrio. Flutuações térmicas podem ser suficientes para a microesfera fugir do aprisionamento, que ocorre quando a barreira de potencial ótico não é grande o suficiente.

Apesar da força ótica não ser conservativa, no caso em que estamos confinados ao eixo

do feixe ($\rho = 0$) podemos definir um potencial ótico a partir do trabalho realizado entre dois pontos do eixo. Usando a equação 2.16, obtemos:

$$V(z) = - \int_{z_0}^z \frac{n_1 P}{c} Q_z dz + V(z_0). \quad (3.6)$$

O que nos importa de fato é o tamanho da barreira potencial. Por isso, podemos fazer $z_0 = z_{eq}$ e buscar o máximo local mais próximo. Usualmente, ela vai ser para um valor de z maior que z_{eq} , com sentido de z positivo na mesma direção de propagação do feixe. O critério para haver pinçamento é que a barreira potencial seja maior que $3k_B T$.

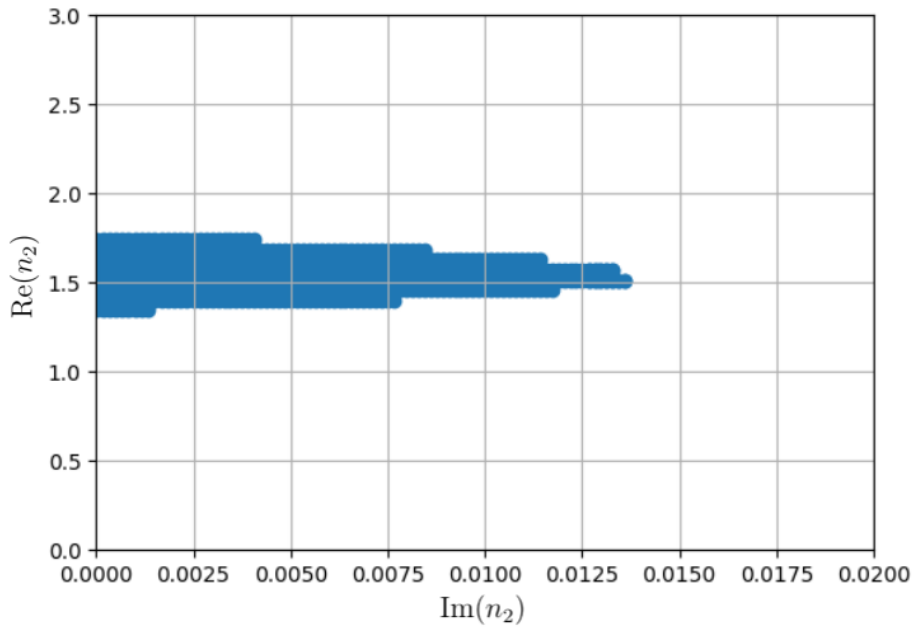


Figura 3.7: Região onde há uma posição de equilíbrio estável a pelo menos 3 unidades de raio de distância do foco. O aumento da absorção de luz pela microesfera faz com que a posição de equilíbrio se desloque no sentido positivo do eixo z (sentido de propagação). Efeitos de aberração esférica e astigmatismo não são levados em conta nessa simulação.

A parte imaginária do índice de refração é responsável pelo efeito de absorção de luz pela microesfera. A região descrita na figura 3.7 sugere a região onde haverá pinçamento pelo critério da barreira de potencial. O interesse em estudar essa região de pinçamento é determinar um limite superior para a parte imaginária do índice de refração do material da microesfera.

O efeito de absorção desempenha um papel muito mais importante nos experimentos com esferas de raios maiores, da ordem de $8\mu m$. Microesferas com esse raio foram aprisionadas no laboratório, porém simulações que levam absorção em conta não conseguem encontrar um ponto em que Q_z seja menor que zero ao longo do eixo z .

Por outro lado, fazer simulações com esferas grandes em relação ao comprimento de onda é muito custoso do ponto de vista computacional. Uma vez determinado um limite superior para a parte imaginária do índice de refração, podemos buscar condições de pinçamento para esferas menores via simulação e determinar um valor para este.

Capítulo 4

Resultados

Nesse capítulo discutiremos sobre os resultados obtidos nas simulações descritas no capítulo anterior. Resultados obtidos de métodos alternativos são usados como comparação e validação.

4.1 Transferência de momento angular e caracterização do astigmatismo

Primeiramente, devemos observar que o efeito de torque negativo é dependente de aberrações óticas. O astigmatismo desempenha um papel de atenuar esse efeito, podendo até trocar o sinal de κ_ϕ [8]. No nosso caso, os ângulos de rotação da microesfera ao redor da posição de equilíbrio (ϕ) são simplesmente diminuídos. Isso nos possibilita tentar ajustar uma curva simulada com o modelo MDSA+ com o parâmetro de astigmatismo A_{ast} como variável livre.

Usamos um método de mínimos quadrados para realizar esse ajuste. Dado o conjunto de pontos experimentais ϕ_i^{exp} , calculamos a função erro E do conjunto de pontos simulados ϕ_i^{sim} , onde cada índice i corresponde a um ângulo ψ na placa de quarto de onda. A função erro é definida como:

$$E(A_{ast}) = \sum_i [\phi_i^{exp} - \phi_i^{sim}(A_{ast})]^2. \quad (4.1)$$

A figura 4.1 mostra o conjunto de pontos experimentais em vermelho e os pontos para

a teoria MDSA+ com parâmetros de astigmatismo diferentes em azul. Podemos ver que a ausência de correções para o astigmatismo superestima o efeito de torque negativo (figura da esquerda), enquanto o valor de $A_{ast} = 0.36$, considerado alto, faz com que o torque quase desapareça. Isso é explicado pelo efeito de degradação da região focal causado pelo astigmatismo.

Ao considerar parâmetros de astigmatismo altos, começamos a ter problemas para achar uma posição de equilíbrio para a microesfera, e os ângulos de rotação simulados passam a ser muito menores que os valores obtidos experimentalmente.

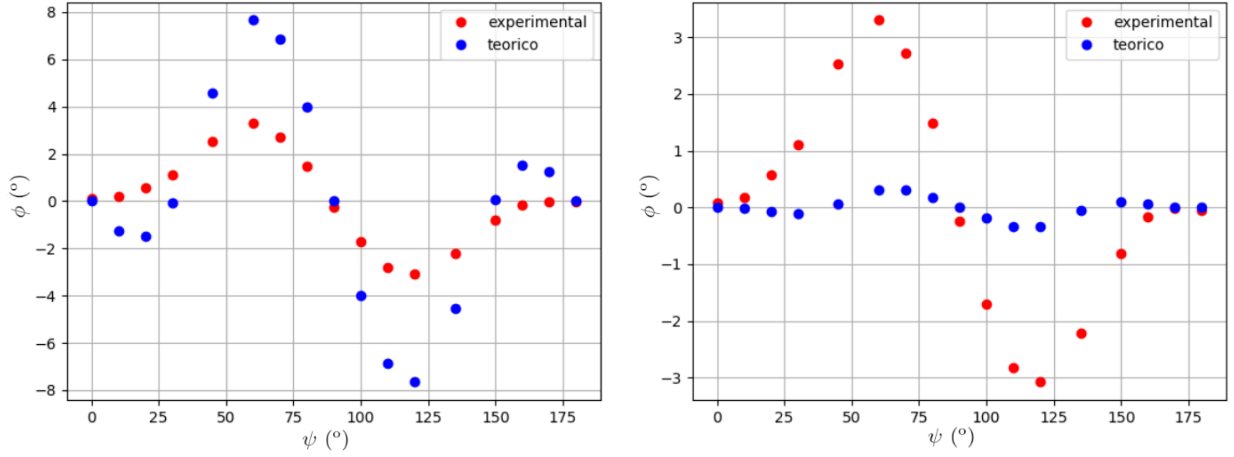


Figura 4.1: Simulação com $A_{ast} = 0$ (à esquerda) e $A_{ast} = 0.36$ (à direita).

A simulação dos vários parâmetros de astigmatismo mostraram que o valor que minimiza a função erro é $A_{ast} = 0.24 \pm 0.1$ (figura 4.2). A incerteza foi estimada tomando 20% do valor da função erro no mínimo $E(0.24) = 2.65$, e acrescentando a esse valor. Obtemos, então, a tolerância do erro $E_{tol} = 3.18$. Os valores da função erro para $A_{ast} = 0.23, 0.25$ são, respectivamente, 2.96 e 3.14. Como são menores que E_{tol} , assumimos que estão dentro da barra de erro. Valores do parâmetro de astigmatismo maiores que 0.26 e menores que 0.22 geram erros maiores que 4, indicando que $A_{ast} = 0.24$ é um mínimo global.

Podemos ver que as contribuições mais importantes para o ajuste são os pontos em volta dos ângulos 60° e 120° . As previsões do modelo para as regiões entre 0° e 30° e entre

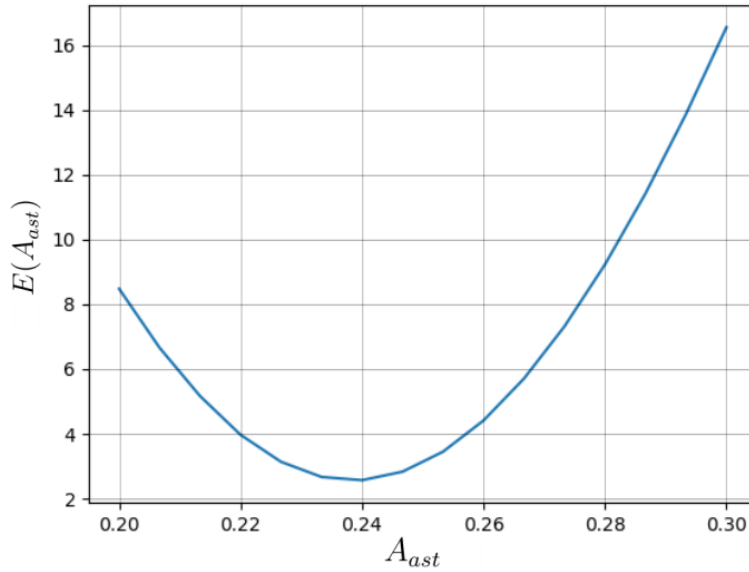


Figura 4.2: Valores da função erro (equação 4.1) em função do parâmetro de astigmatismo A_{ast} . O mínimo se encontra aproximadamente em $A_{ast} = 0.24$.

150° e 180° são de torque positivo, enquanto o experimento apresenta torque negativo para qualquer polarização que não seja linear. De acordo com a teoria, os termos de polarização cruzada da força são os responsáveis pelo torque nessa região, o que pode indicar que essa contribuição está sendo superestimada.

Podemos notar que a região ao redor de 60° e 120° na figura 4.5 está com um bom acordo com a teoria. Comparando com o gráfico à esquerda da figura 4.1, correspondente ao caso sem astigmatismo, fica claro que a região que prediz torque positivo também é atenuada, e não interfere de forma negativa com o ajuste.

Por fim, podemos comparar o resultado obtido com o ajuste pela simulação com o resultado da caracterização por nível de cinza [11, 8]. A curva teórica é obtida por meio da propagação do feixe não paraxial [17]. O valor é ajustado com medidas de intensidade do centro do *spot* do laser em alturas diferentes do eixo de propagação. Foi obtido $A_{ast} = 0.25 \pm 0.4$ com esse método, o que está de acordo com o valor encontrado pelo ajuste.

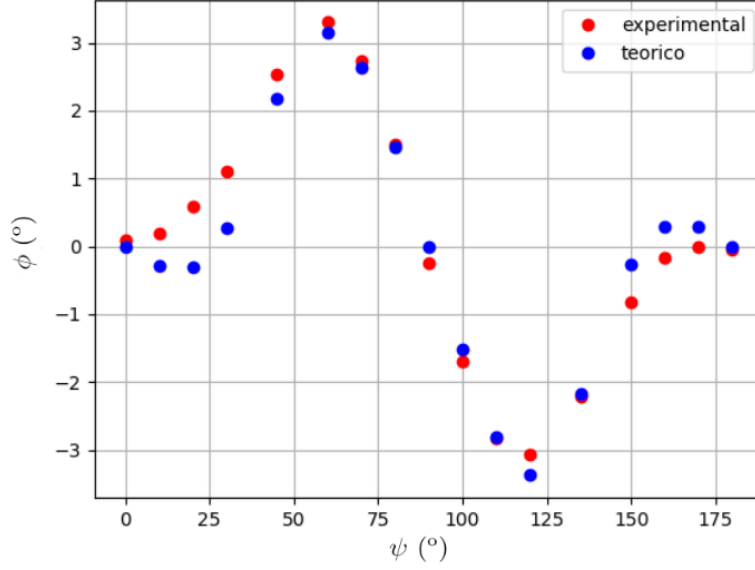


Figura 4.3: Pontos teóricos em azul, com o parâmetro $A_{ast} = 0.24$, ajustado como mínimo da função erro.

4.2 Caracterização da amostra na pinça ótica

Os gráficos do fator de eficiência Q_z por z foram feitos para alguns valores de $\text{Im}(n_2)$ e para alguns raios diferentes. O valor nominal do raio das microesferas pinçadas é de $a = 7.9 \pm 0.1$, e o valor encontrado na literatura para $\text{Im}(n_2)$ é 1.1×10^{-3} . Foram feitas simulações para raios entre 7.8 e 8, e $\text{Im}(n_2)$ tão pequenos quanto 3×10^{-4} .

Fazendo simulações com os parâmetros experimentais do sistema, não encontramos nenhuma posição de equilíbrio estável, como podemos ver na figura 4.4. Nas simulações para valores de $\text{Im}(n_2)$ menores, encontramos regiões suficientemente próximas do eixo $Q_z = 0$ para assumir aprisionamento. No caso, podemos assumir que efeitos gravitacionais desempenham um papel significativo para esferas maiores, possibilitando o equilíbrio de forças no eixo.

z_{inst}

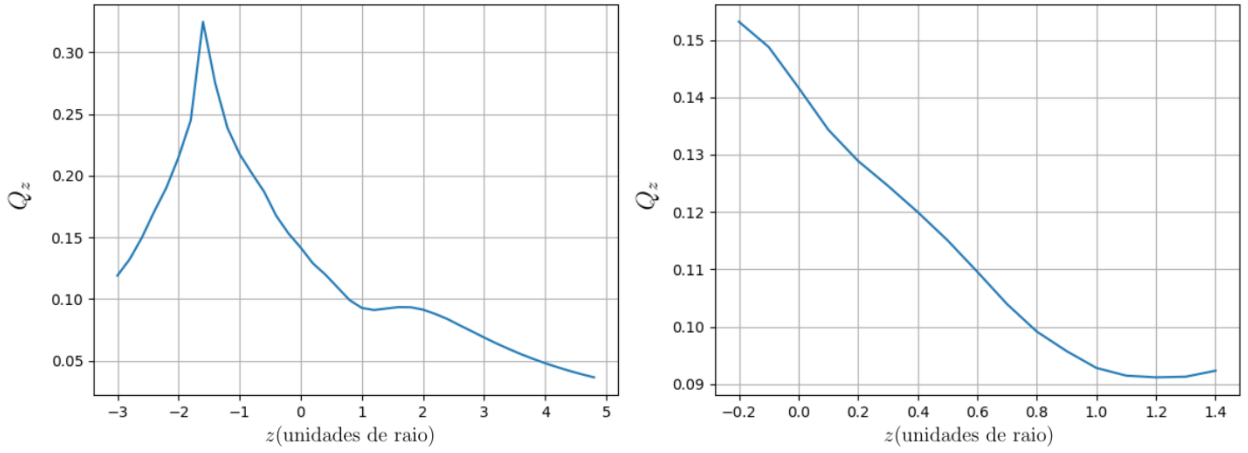


Figura 4.4: Componente axial do fator de eficiência (Q_z) em função de z . O raio da esfera é $a = 7.9\mu m$, o índice de refração $n_2 = 1.576 + 10^{-3}i$, o parâmetro de astigmatismo $A_{ast} = 0.1$ e a distância entre o plano focal e a interface com a lamínula $L = 2a$. Podemos ver no gráfico à esquerda que não ha valor de Q_z menor que zero, ou seja, a microesfera não pode ser pinçada. À direita, o zoom da região do plano focal.

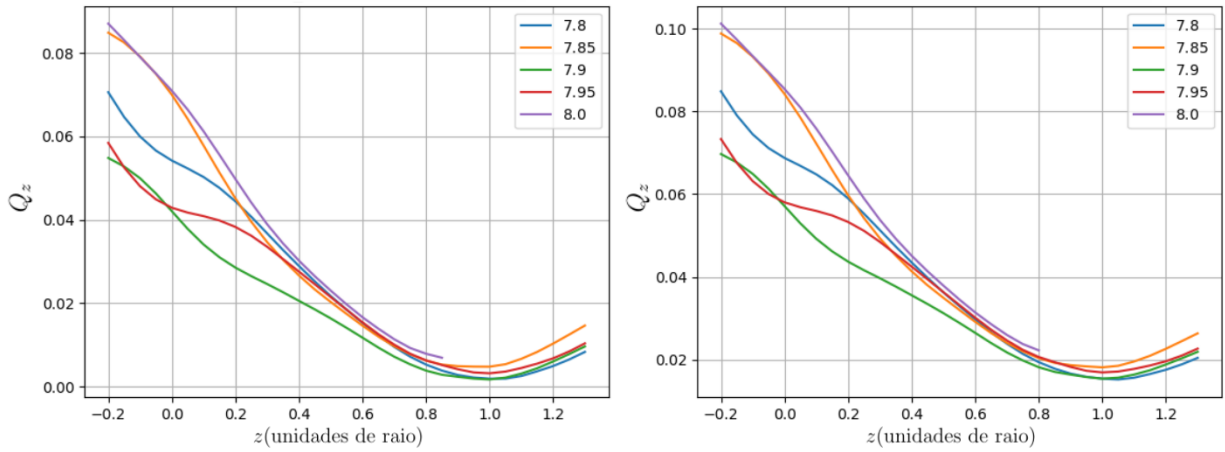


Figura 4.5: O parâmetro de astigmatismo e a distância entre o foco e interface são iguais ao caso anterior. À esquerda, $\text{Im}(n_2) = 3 \times 10^{-4}$, a direita, $\text{Im}(n_2) = 4 \times 10^{-4}$.

Capítulo 5

Considerações Finais

blablabla...

blablabla...

blablabla...

Referências Bibliográficas

- [1] A. Ashkin. Acceleration and trapping of particles by radiation pressure. *Physical Review Letters*, 24(4):156–159, jan 1970. 1
- [2] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. Observation of Resonances in the Radiation Pressure on Dielectric Spheres. *Physical Review Letters*, 38(23):1351–1354, jun 1977. 1
- [3] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and Steven Chu. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Optics Letters*, 11(5):288, may 1986. 1
- [4] Arthur Ashkin. *Optical Trapping and Manipulation of Neutral Particles Using Lasers: A Reprint Volume with Commentaries*. WORLD SCIENTIFIC PUB CO INC, 2007. 1
- [5] K. Y. Bliokh, F. J. Rodríguez-Fortuño, F. Nori, and A. V. Zayats. Spin–orbit interactions of light. *Nature Photonics*, 9(12):796–808, nov 2015. 3, 19
- [6] Konstantin Y. Bliokh, Elena A. Ostrovskaya, Miguel A. Alonso, Oscar G. Rodríguez-Herrera, David Lara, and Chris Dainty. Spin-to-orbital angular momentum conversion in focusing, scattering, and imaging systems. *Optics Express*, 19(27):26132, dec 2011. 19
- [7] Rafael de Sousa Dutra. *Parametrizando uma Pinça Ótica: Efeitos de Aberrações e Absorção*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011. 2, 16

- [8] K. Diniz, R. S. Dutra, L. B. Pires, N. B. Viana, H. M. Nussenzveig, and P. A. Maia Neto. Negative optical torque on a microsphere in optical tweezers. *Optics Express*, 27(5):5905, feb 2019. 2, 16, 17, 18, 22, 35, 37
- [9] Kainã Gonçalves Diniz. Momento angular de spin em pinças Óticas. Master's thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2018. 22, 26
- [10] R S Dutra, N B Viana, P A Maia Neto, and H M Nussenzveig. Polarization effects in optical tweezers. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 9(8):S221–S227, jul 2007. 1
- [11] R. S. Dutra, N. B. Viana, P. A. Maia Neto, and H. M. Nussenzveig. Absolute calibration of forces in optical tweezers. *Physical Review A*, 90(1), jul 2014. 2, 15, 16, 37
- [12] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons Inc, 1998. 6, 7
- [13] Xiaoyan Ma, Jun Q Lu, R Scott Brock, Kenneth M Jacobs, Ping Yang, and Xin-Hua Hu. Determination of complex refractive index of polystyrene microspheres from 370 to 1610 nm. *Physics in Medicine and Biology*, 48(24):4165–4172, dec 2003. 26
- [14] A. Mazolli. *Teoria das Pinças Óticas*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003. 2, 6
- [15] A. Mazolli, P. A. Maia Neto, and H. M. Nussenzveig. Theory of trapping forces in optical tweezers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2040):3021–3041, dec 2003. 1
- [16] P. A. Maia Neto and H. M Nussenzveig. Theory of optical tweezers. *Europhysics Letters (EPL)*, 50(5):702–708, jun 2000. 1
- [17] Lukas Novotny, Robert D. Grober, and Khaled Karrai. Reflected image of a strongly focused spot. *Optics Letters*, 26(11):789, jun 2001. 37

- [18] B. Richards and E. Wolf. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. structure of the image field in an aplanatic system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274):358–379, dec 1959. 12
- [19] N. B. Viana, A. Mazolli, P. A. Maia Neto, H. M. Nussenzweig, M. S. Rocha, and O. N. Mesquita. Absolute calibration of optical tweezers. *Applied Physics Letters*, 88(13):131110, mar 2006. 2
- [20] N. B. Viana, M. S. Rocha, O. N. Mesquita, A. Mazolli, P. A. Maia Neto, and H. M. Nussenzweig. Towards absolute calibration of optical tweezers. *Physical Review E*, 75(2), feb 2007. 2, 14, 18, 24

Apêndice A

Título do Primeiro Apêndice

blablabla...

blablabla...

blablabla...

Apêndice B

Título do Segundo Apêndice

blablabla...

blablabla...

blablabla...