Lista 3 - Organização Industrial

Arthur M. Rodrigues

October 2023

Decisão dinâmica em t do nível de estoque $I_t \in \{0, 1, 2, ...\}$, que possui custo $D(I_t) = \delta I_t^2$; $n_t \in \{0, 1, 2, ...\}$ é a quantidade demandada (exógeno), de modo que $n_t \leq I_t \implies R_t = pn_t$ e $n_t > I_t \implies R_t = pI_t$. Antes de observar n_t, firma decide encomendar $x_t \in \{0, 1, 2, ...\} = X$ (a ser entregue em $t + 1$) com custo $cx_t + E$. Suponha $\beta = 0.95$.

Questão 1

(a)

Em t, as variáveis de estado são I_t (endógena) e n_t (exógena), enquanto a variável de controle é x_t (e indiretamente I_{t+1}). A equação de Bellman é dada por:

$$V(I) = \max_{x \in X} \{\mathbb{E}[p \min(n, I) - cx - \mathbb{1}_{(x>0)} E - \delta I^2] + \beta \mathbb{E}[V(I + x - \min(n, I)]\} \tag{1}$$

Note que embora n_t seja variável de estado, ela não é observada antes da escolha da firma. Portanto, a maximização de lucros da firma depende do valor esperado da demanda.

(b)

O maior lucro possível para a firma em um dado período é $\Pi_t = pI_t - \delta I_t^2$, caso ela venda seu estoque completo e opte por não encomendar nenhuma unidade. Portanto, para que o lucro seja positivo, precisamos que:

$$pI_t - \delta I_t^2 \geq 0 \iff I_t(p - \delta I_t) \geq 0$$

Isto é, $\Pi_t \geq 0 \implies I_t \leq \frac{p}{\delta}$. Como I_t é endógeno e resultado da escolha em $t - 1$ (e t e $t - 1$ são arbitrários), temos que o estoque escolhido para a maximização de lucro é sempre finito (já que p e δ são parâmetros finitos). Intuitivamente, a convexidade do custo de estocagem limita o valor do lucro possível mesmo para uma demanda arbitrariamente alta.

(c)

Assumindo um choque que não seja magninitude suficientemente alta para que a firma saia do mercado, esperamos que os parâmetros (δ, p, c, E) alterem a função política da firma da seguinte forma:

p: Com o aumento do preço, a receita para um dada quantidade vendida aumenta. Assim, a quantidade que a firma deixaria de vender pela demanda ser maior do que o estoque se torna mais "valiosa", aumentando o custo de subestimar a demanda. Espera-se que a firma então esteja disposta a carregar um estoque maior e, tudo mais constante, aumente a quantidade encomendada para os níveis de estoque em que realiza encomendas se torne mais propensa a realizar uma encomenda para dado nível de estoque.

δ: Com o aumento do custo de estoque, cada unidade não vendida torna-se mais custosa para a firma. Ou seja, aumenta-se o custo de superestimar a demanda. Espera-se que a firma deseje um estoque menor e, tudo mais constante, reduza a quantidade encomendada para os níveis de estoque em que realiza encomendas e se torne menos propensa a realizar uma encomenda para dado nível de estoque.

E: Com o aumento no custo fixo de realizar uma encomenda, encomendas pequenas ficaram relativamente mais caras (tudo mais constante). Assim, esperamos que a firma encomende menos vezes (ou seja, apenas para quantidades menores de estoque) e que realize encomendas maiores quando opta por realizá-las.

c: Para uma redução no custo unitário da mercadoria encomendada, encomendas pequenas ficaram relativamente mais caras (se o custo fixo de encomenda E se mantiver constante, efeito análogo a um aumento de E). Assim, também esperamos que a firma realize encomendas maiores quando opta por realizá-las.

Questão 2

(a)

A partir dos dados de estoque e fluxo de encomendas, conseguimos inferir o número de vendas $n_t^* = I_{t+1} - (I_t + x_t)$ para os períodos $t = 1$ até $t = 29$. Ao gerar um histograma[1], verificamos que a quantidade vendida varia entre 1 e 8 unidades com frequência similar.

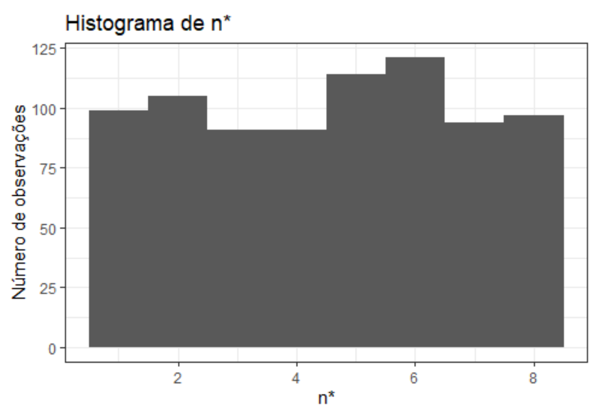

Figure 1: Distribuição observada de n_t^*

Entretanto, ao analisar a relação entre cada observação de I_t e n_t^*, percebemos que 257 das 812 observações possuem $n_t^* > I_t$ (contra 114 com $n_t^* = I_t$ e 441 com $n_t^* = I_t$). Parece que a dinâmica proposta de encomendas não se aplica diretamente aos dados, e algumas encomendas realizadas chegaram antes da semana terminar, viabilizando que a empresa continuasse vendendo mesmo quando a demanda observada foi maior que o estoque inicial. Criamos uma variável de estoque expandido $I_{ex,t} = I_t + x_t$ para criar uma base restrita removendo observações com $n_t^* = I_t$ ou $n_t^* = I_{ex,t}$, visto que que a demanda nesses casos não está bem identificada (pois não sabemos se n_t^* é a demanda real ou está subestimada pela restrição de estoque)[2]. Regredimos I_t em n_t na base completa e restrita.

[1] Para esta e todas as outras análises realizadas na Questão 2, retiramos as firmas $id = 1$ e $id = 9$, pois apresentam 0 em todas as variáveis para todas as observações.

[2] Note que o acontecimento de $n_t^* = I_t$ ou $n_t^* = I_{ex,t}$ não é exógeno, pois a probabilidade da firma possuir cada nível de estoque não é constante. Entretanto, a base restrita só possui 123 observações a menos que a base não restrita, de modo que a magnitude deste problema não deve ser alta.

Dependent Variable:	n_t^*	
Model:	(1)	(2)
Variables		
Constant	4.592***	4.586***
	(0.1551)	(0.1679)
I_t	-0.0118	-0.0365
	(0.0242)	(0.0255)
Fit statistics		
Observations	812	689
R^2	0.00029	0.00299
Adjusted R^2	-0.00094	0.00154

IID standard-errors in parentheses
*Signif. Codes: ***: 0.01, **: 0.05, *: 0.1*

Table 1: Regressão do nível de estoque e quantidade vendida

Como nenhum dos coeficientes é significante, consideramos que o nível de estoque e a demanda são independentes, de modo que $\mathbb{E}[n_t|I_t] = \mathbb{E}[n_t]$. Outra preocupação é se há correlação serial na demanda (i.e., se n_{t-1} afeta $\mathbb{E}[n_t]$). Para verificar se esse é o caso, regredimos a quantidade vendida na quantidade vendida no período seguinte:

Dependent Variable:	n_{t+1}^*
Model:	(1)
Variables	
Constant	4.565***
	(0.1899)
n_t^*	-0.0178
	(0.0383)
Fit statistics	
Observations	670
R^2	0.00032
Adjusted R^2	-0.00117

IID standard-errors in parentheses
*Signif. Codes: ***: 0.01, **: 0.05, *: 0.1*

Table 2: Regressão da quantidade vendida hoje e no período seguinte

Mais uma vez, não encontramos coeficientes significativos, e portanto consideramos que $\mathbb{E}[n_t|n_{t-1}] = \mathbb{E}[n_t]$. Para estimar a distribuição da demanda que utilizaremos nas questões seguintes, vamos testar a hipótese de que a probabilidade de ocorrência de um nível de demanda é igual para todos os valores entre 1 e 8. Para isto, vamos utilizar o Teste qui-quadrado de Pearson para avaliar a qualidade do ajuste em relação aos dados observados para uma distribuição uniforme discreta com suporte entre 1 e 8.

	Test Statistic	Degrees of Freedom	P-Value
Chi squared	0.4659061	7	0.999562

Table 3: Teste qui-quadrado de Pearson - base completa

	Test Statistic	Degrees of Freedom	P-Value
Chi squared	0.6136328	7	0.998915

Table 4: Teste qui-quadrado de Pearson - base restrita

Rejeitamos a hipótese nula de que a distribuição observada é diferente da proposta na base completa e restrita. Assim, vamos considerar $n_t \sim \mathcal{U}\{1, 8\}$ iid para os exercícios subsequentes[3].

(b)

Queremos estimar a probabilidade de escolha de cada nível de encomendas para um determinado estoque $P_t(x|I)$.[4] Para tal, vamos utilizar um método não paramétrico a partir da distribuição de encomendas observadas nos dados. A primeira etapa é calcular a probabilidade conjunta observada para os níveis de encomendas e estoque:

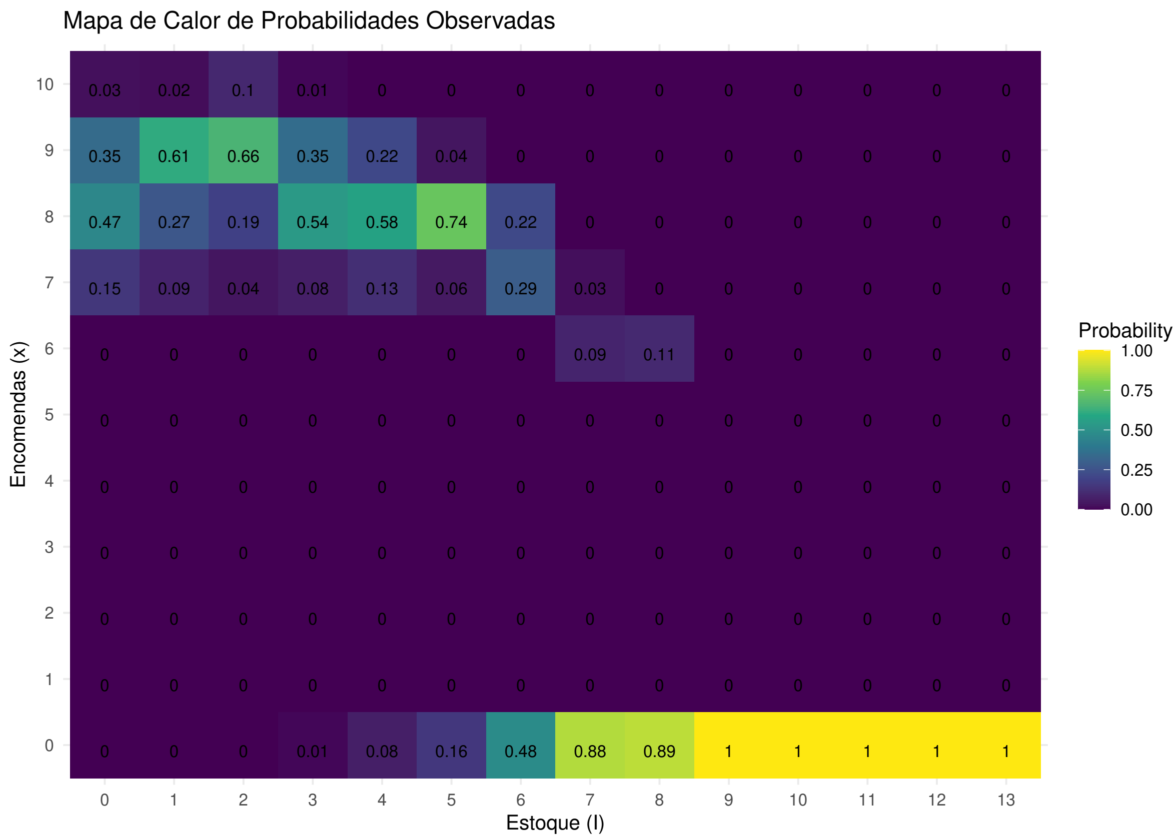

Figure 2: Probabilidades Observadas de Pares Estoque x Encomendas

Podemos visualizar que há relação clara entre escolha de x_t e a realização de I_t: para níveis de estoque baixos, a firma opta por por realizar encomendas (usualmente entre 7 e 9 unidades), e à medida que o estoque do período aumenta, menor a probabilidade de realizar encomendas (a partir de $I_t = 9$

[3]Dada a forma da função lucro, precisamos calcular $\mathbb{E}[n|n \leq I]$. Se $n_t \sim \mathcal{U}\{1, 8\}$ então $\mathbb{E}[n|n \leq I] = 0$ se $I = 0$, $\mathbb{E}[n|n \leq I] = (I + 1)/2$ se $I \in \{1, ..., 8\}$ e $\mathbb{E}[n|n \leq I] = 9/2$ se $I \in \{9, ..., 13\}$

[4]Mais precisamente, $P_t(x|I, \mathbb{E}[n_t])$. Como assumimos n_t iid, vamos omitir n_t da notação de todas as funções que dependem do vetor de estados.

não observamos mais encomendas nos dados). Entretanto, o modelo teórico da Questão 1 não se verifica literalmente. Isso, pois o modelo proposto é determinístico, e se $\mathbb{E}[n_t]$ é iid a firma sempre optará pela mesma encomenda para dado nível de estoque. Portanto, para estimar a função política vamos supor que o payoff da firma é aditivamente separável entre o lucro esperado e um vetor de choques específico para cada escolha $\nu_t = (\nu_t(1), \nu_t(2), ..., \nu_t(X))$. A firma escolhe a ação x que satisfaz:

$$v(x, I) + \nu(x) \geq v(x', I) + \nu(x') \quad \forall x' \in X$$

Assumindo $\nu \sim Gumbel$, podemos realizar a inversão de Hotz-Miller e obter:

$$v(x', I) - v_i(x, I) = \ln(P'(x'|I)) - \ln(P'(x|I)) \tag{2}$$

Essa igualdade nos permite calcular a função valor normalizada $\tilde{v}(x, I)$ para cada escolha (normalizando $\tilde{v}(0, I) = 0 \quad \forall I$ e comparando com cada x' possível). Para isso, realizamos uma suavização de Laplace para calcular probabilidade modificada $P'(x|I)$, de modo a remover os remover os eventos com probabilidade zero e impedir valores arbitrariamente negativos resultantes dos logaritmos da Equação (2). A suavização é dada por:

$$P'(x_i|I_j) = \frac{(count(x_i, y_j) + \alpha)}{(\sum_k (count(x_k, y_j) + \alpha))}$$

E definimos $\alpha = 0.1$. Assim, calculamos o valor $\tilde{v}(x, I)$ de cada escolha possível em cada nível de estoque, dada a suavização da amostra observada. Os resultados podem ser visualizados na Figura 3:

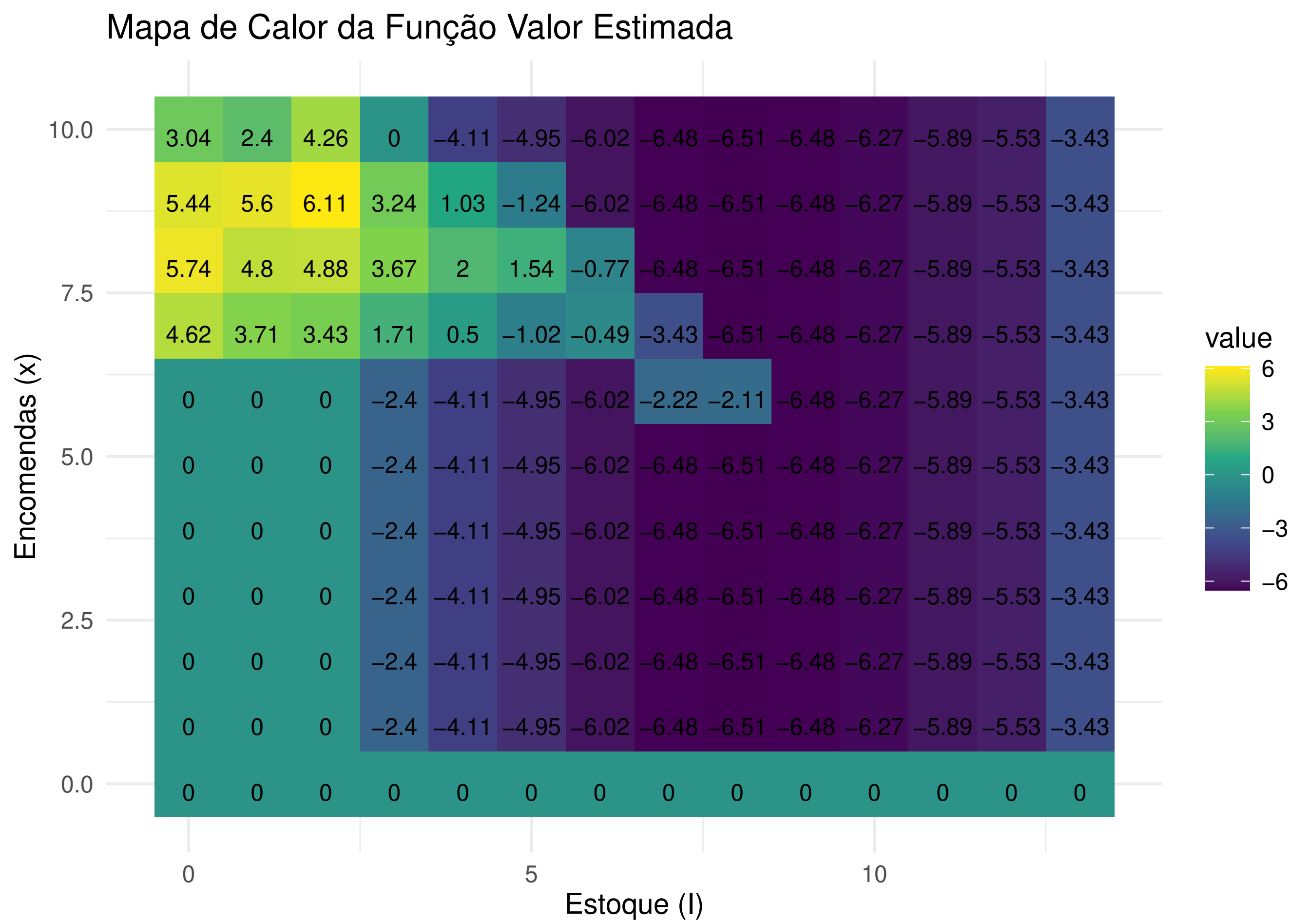

Figure 3: Valor de cada Encomenda para cada Estoque Estimado

Replicamos várias vezes a última coluna da matriz para poder especificar escolhas das firmas para níveis de estoque até $I = 100$ (assumindo valores equivalentes à escolha em $I = 13$). Então, a função política estimada a partir dos dados assume a forma:

$$x(I, \nu) = \arg\max_{x} \{\tilde{v}(x, I) + \nu_x\}$$

Para o restante da lista, utilizaremos a notação x para definir a ação (a na notação do BBL) e $x(I, \nu)$ para definir a função política (σ na notação do BBL).

Questão 3

(a)

No modelo teórico proposto na Questão 1, o valor esperado do fluxo dos lucros descontados é dado por:

$$V(I, x(I, \nu)) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(p \min(n_t, I_t) - c x(I_t, \nu_t) - \mathbb{1}_{(x_t > 0)} E - \delta I_t^2 + \nu_t \right) \middle| I_0 = I; p, c, E, \delta, \right]$$

Pela linearidade da função lucro nos parâmetros, podemos definir $\theta = (p, c, E, \delta)$ e escrever:

$$V(I, x(I,\nu); \theta) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\min(n_t, I_t), -x(I_t, \nu_t), \mathbb{1}_{(x_t>0)}, I_t^2\right)\right] \cdot \theta = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Psi(x(I_t, \nu_t), I_t)\right] \cdot \theta$$

Então, definimos $W(I, x(I,\nu)) = \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \Psi(x(I_t,\nu_t), I_t)\right]$. Essa simplificação é útil pois os componentes de W não dependem dos parâmetros, de modo que a a simulação de W pode ser realizada de forma independente antes da estimação de θ, o que reduz bastante o requisito computacional do exercício. Para simular um dado $W(I)$, realizamos as seguintes etapas:

1. Definimos $I_0 = I$ e sorteamos um choque ν_0
2. Definimos a ação da firma x(I, ν_0) e calculamos $\beta^0 \Psi(x(I, \nu_0), I)$
3. Sorteamos n_t e calculamos $I_{t+1} = I_t + x(I_t, \nu_t) - n_t$
4. Repetimos o passos 1-3 por T períodos e obtemos $W(\cdot) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \Psi(x(I_t, \nu_t), I_t)$

Para melhorar a simulação, tomamos a média dos resultados para cada nível de estoque inicial de N paths simulados.

(b)

Vamos calcular os Ws explicitados na seção anterior com $T = 100$ períodos e $N = 100$ paths. O código que realiza essa estimação em R está disponível no anexo *'Lista3ArthurRodrigues.R'*. Considerando os níveis de estoque inicial de 0 a 11 (níveis com mais de 25 observações nos dados), essa simulação nos retorna uma matriz com 12 linhas (uma referente a cada estoque inicial cogitado I_0) e quatro colunas (pois $\Psi(\cdot)$ é um vetor de quatro elementos).

Para estimar os parâmetros a partir do modelo de BBL, também precisaremos especificar funções política alterativas cujos resultados serão comparados com os da política inferida a partir dos dados. Esses choques foram simulados a partir da função valor normalizada obtida na questão 2.b, de modo que $v'(x, I) = \tilde{v}(x, I) + \epsilon$, com $\epsilon \sim U[-2, 2]$. Ao dar choques pequenos na matriz de valores, na prática fazemos com que, para dado ν, a firma escolha níveis de encomenda marginalmente menos atrativos (por exemplo, escolher encomendar 7 ou 9 unidades ao invés de 8 quando $I = 0$ ou optar por não encomendar nenhuma unidade quando $I = 5$). Esse tipo de alteração no comportamento é justamente o que esperaríamos para uma mudança nos parâmetros c, δ, E ou p, como discutido no item 1.c.

A partir disso, conseguimos especificar funções escolha alternativas $x'(I, \nu)$ e estimar $W' \theta \cdot W(x(I, \nu), I) \geq \theta \cdot W'(x'(I, \nu), I) \qquad \forall I, x'(I, \nu)$

(c)

A partir das $k \in \{1, 2, ..., 120\}$ condições de equilíbrio calculadas no item (b), fixamos $\beta = 0.95$ e $p = 10$, e encontramos o vetor $\hat{\theta}$ que satisfaz:

$$\widehat{\theta} := \arg\min_{\theta} \sum_{k=1}^{K} \theta \cdot [W - W']$$

Os resultados da estimação podem ser vistos na tabela abaixo:

Parâmetros	Estimativa
c	1.73
E	19
δ	0.12

Table 5: Parâmetros Estimados

Dado o preço de \$10 por unidade de mercadoria, o valor financeiro de uma encomenda de 8 unidades (o tamanho de encomenda mais comum nos dados) é de \$80. Os parâmetros estimados indicam que inicialmente essa encomenda custaria $8 \times 1.73 + 19 \approx \$32.8$. Para cada período que essas mercadorias não forem vendidas, há um custo adicional de $0.12 \times 8^2 \approx 7.7$.

Questão 4

Para visualizar o impacto de uma mudança de preços dados os parâmetros estimados, realizaremos o processo de *Value function iteration* (VFI) para o novo preço de $p = 11$. Utilizaremos o modelo proposto na Questão 1, isto é, sem choques no lucro. Assim, o procedimento de VFI prevê o seguinte passo a passo:

1. Defina um vetor $V[I]$, indexado pelos valores possíveis da variável de estado I e atribua valores iniciais arbitrários (aqui, $V(I) = (1, 1, ..., 1)$).
2. Atualize o vetor a partir da equação de Bellman e do V proposto no passo 1: $V'[I] = \max_x\{\pi(\theta, x, V) + \beta \sum_{n=1}^{8} P(n)V[\tilde{I}]\ \}$, onde $\tilde{I}$ é definido pela lei de movimento do estoque ($I_{t+1} = I_t + x_t - \min(n_t, I_t)$).
3. Repita a atualização com $V = V'$ até a convergência de todos os elementos do vetor[5].
4. Recupere a função política pra cada nível I de estoque a partir equação de Bellman com o vetor $V[I]$ convergido.

A partir desta receita, primeiro estimamos a função política ótima calculada com o preço original de $p = 10$ e os parâmetros $\hat{\theta}$ estimados na questão anterior. A Tabela 6 mostra os resultados deste procedimento e, para efeitos de comparação, a escolha com maior frequência de observações para cada nível de estoque na amostra.

Estoque (I)	Encomenda (x)	
	Moda Obs.	VFI com $\widehat{\theta}$ e $p = 10$
0	8	9
1	9	9
2	9	9
3	8	9
4	8	8
5	8	8
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0
11	0	0
12	0	0
13	0	0

Table 6: Função Política com $p = 10$

A função política obtida por VFI a partir de $\hat{\theta}$ estimado e $p = 10$ é bem similar à escolha observada, o que indica que os parâmetros obtidos conseguem explicar bem o comportamento das firmas nos dados. Agora, vamos simular a função política no cenário contrafactual em que $p = 11$. Os resultados encontrados a partir do mesmo processo de VFI com o novo nível de preço são:

[5] Isto é, $\max(|V - V'|) < \epsilon$ para um ϵ suficientemente baixo

Estoque(I)	Encomenda (x) VFI com $\hat{\theta}$ e $p = 11$
0	10
1	10
2	9
3	9
4	9
5	8
6	8
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0

Table 7: Função Política com $p = 11$

Como esperado, um aumento do nível de preços aumenta o tamanho das encomendas e a propensão da firma a realizá-las. Para o novo preço, a empresa encomendaria uma unidade a mais nos períodos com estoque igual a 0, 1 e 4 (em comparação com o VFI para $p = 10$). Além disso, ela optaria por encomendar 8 unidades quando $I = 6$, quando no nível de preços anterior sua decisão era por não realizar encomendas.