CORRECTION

E3FIC 2022-2023 Exercices - Mathématiques 3D

Formules trigonométriques de base

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

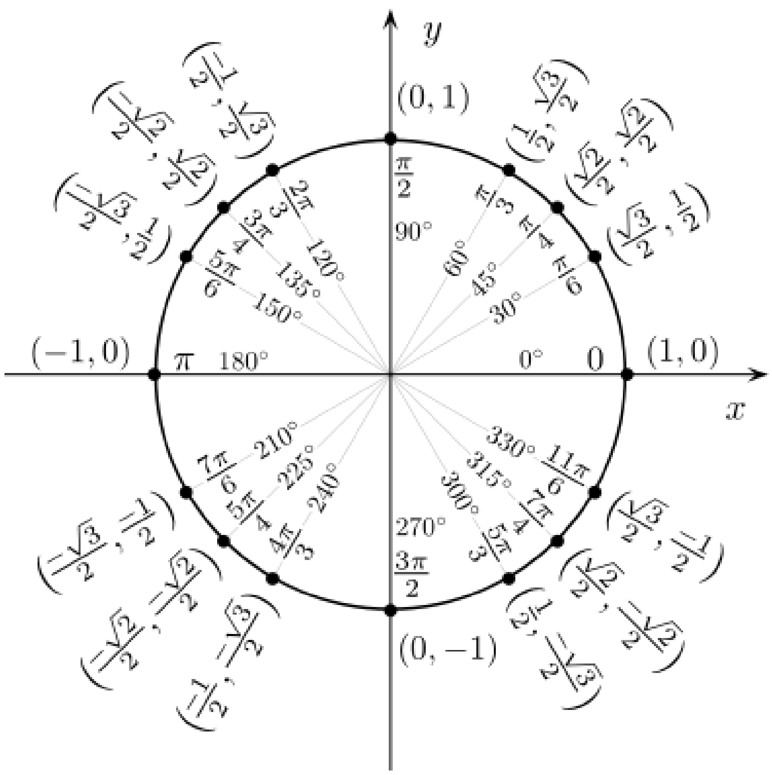
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

sec = sécante, csc = cosécante, cot = cotangente

Formulaire trigonométrique

https://www.maths-france.fr/MathSup/Cours/FormulaireTrigo.pdf

Cercle trigonométrique et valeurs trigonométriques courantes : $\cos$ et $\sin$



Exercice 0

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

$$
\begin{array}{ll}
A. & 2\sin x - 1 = 0 \\
B. & \sin x \cos x = 0 \\
C. & (\tan x - 1)(4\sin^2 x - 3) = 0 \\
D. & \sin^2 x + \sin x - 2 = 0 \\
E. & 3\cos^2 x = \sin^2 x \\
F. & 2\sin x - \csc x = 1 \\
G. & 2\sec x = \tan x + \cot x \\
H. & \tan x + 3\cot x = 4 \\
I. & \csc x + \cot x = \sqrt{3} \\
J. & \cos x - \sqrt{3}\sin x = 1 \\
K. & 2\cos x = 1 - \sin x
\end{array}
$$

CORRECTION:

A. $S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

B. $S = \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

C. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

D. $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

E. $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

F. $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

G. $S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

H. $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \tan^{-1}(3) + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

I. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

J. $S = \left\{2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

K. $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 1   Equation de droite

Soit une droite *(d)* passant par un point *A* (2;-1;3) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (-1;2;1).

1. Donnez l'équation vectorielle paramétrique qui définit la droite *(d)*. Vous nommerez le paramètre *t*.
2. Projetez cette équation vectorielle sur les trois axes *(Ox), (Oy)* et *(Oz)* du référentiel orthonormé et exprimez *x,y et z* (coordonnées d'un point M situé sur *(d)*) en fonction du paramètre *t*.

CORRECTION:

Tout point M(x,y,z) de (d) vérifie l'équation vectorielle $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ avec *t* réel quelconque
En projetant sur les 3 axes cardinaux on obtient:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Exercice 2   Plan & Droite

Soit le plan d'équation $-x + y - 3z - 10 = 0$
La droite de l'exercice 1 est-elle sécante avec ce plan ? Justifiez précisément.

CORRECTION:

Le vecteur normal au plan est $\vec{n}$ (-1; 1;-3)

Le vecteur directeur de la droite est $\vec{u}$ (-1;2;1)

Or, $\vec{n}.\vec{u} = (-1) \times (-1) + 1 \times 2 + (-3) \times 1 = 0$

donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. La droite (d) est donc parallèle au plan.

De plus, les coordonnées du point A ne vérifient pas l'équation du plan, on peut dire que le point A n'appartient pas au plan.
On en conclut que la droite (d) et le plan sont strictement parallèles. Ils ne s'intersectent donc pas.

Exercice 3   Distance d'un point à une droite

Soit une droite (PQ) de l'espace 3D. Soit un point M quelconque et H son projeté orthogonal sur (PQ). Retrouvez la formule qui donne la distance au carré du point M à la droite (PQ). La formule fait intervenir un produit scalaire de vecteurs bâtis sur les points M, P et Q.

CORRECTION:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HM}$$
$$donc\ \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PH}$$
$$or\ \overrightarrow{PH} = \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} \times \overrightarrow{PQ}$$
$$et\ HM^2 = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HM}$$
$$donc\ HM^2 = \left(\overrightarrow{PM} - \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} \times \overrightarrow{PQ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PM} - \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} \times \overrightarrow{PQ}\right)$$

Exercice 4.1 Equation de Plan

Soit une droite *(d)* passant par les deux points A(1;2;3) et B(-1;1;-1).
Trouvez une équation cartésienne du plan perpendiculaire à *(d)* et passant par un point C (0;1;1) .

CORRECTION:

$\overrightarrow{AB}$ (-2 ; -1 ; -4) est un vecteur normal du plan

L'équation du plan est donc du type $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB} = 0$ où M(x,y,z) est un point quelconque du plan.

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB} = -2x - y - 4z$

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB} = -5$

L'équation du plan est donc $-2x - y - 4z + 5 = 0$, ou bien $2x + y + 4z - 5 = 0$

Exercice 4.2 Forme de Hesse d'un plan

Donnez le vecteur normal et la distance signée de la forme de Hesse d'un plan défini par l'équation cartésienne suivante:

$$-2x + y - z + 7 = 0$$

CORRECTION

Un vecteur normal au plan, mais non unitaire, est le vecteur de coordonnées (-2 ; 1 ; -1).
La norme de ce vecteur est $\sqrt{6}$.
On divise donc l'équation cartésienne du plan par la norme du vecteur normal:

$$-\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z = -\frac{7}{\sqrt{6}}$$

Ainsi les éléments du plan sous sa forme de Hesse sont:

$$d = \frac{7}{\sqrt{6}}$$
$$\vec{n}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\ ;\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Exercice 5 Equation de Plan & Distance d'un Point à un Plan

Soit le plan d'équation $2x + 3y - 16 = 0$

1. Quelle est la distance du plan à l'origine du référentiel ?
2. Quelle est la distance du plan au point A de coordonnées (1;2;3) ?

CORRECTION:

Le plan a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}$ (2 ; 3 ; 0) de norme $\sqrt{13}$

La distance du plan à l'origine du référentiel est $\dfrac{16}{\sqrt{13}}$

La distance du plan au point A est $\dfrac{|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{n} - 16|}{\sqrt{13}} = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$.

Exercice 6.1 Produit Vectoriel

Calculer les coordonnées cartésiennes du produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{u}\ (2;-1;3)$ et $\overrightarrow{v}\ (-1;2;-4)$.

CORRECTION:

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \quad (-2;5;3)$

Exercice 6.2 Produit Vectoriel

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}\ (1+t;1-t;2t)\ et\ \overrightarrow{v}\ (1;1;1)$, avec *t* nombre réel. Pour quelle valeur de *t* la norme de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est-elle minimale ?

CORRECTION:

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(1-3t;t-1;2t)$

$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = (1-3t)^2 + (t-1)^2 + 4t^2 = 2(7t^2 - 4t + 1)$

Cette expression est celle d'une fonction quadratique qui présente un minimum et ne s'annule jamais.

Son minimum est atteint pour $t = \dfrac{2}{7}$ (il s'agit de la valeur moyenne des racines du polynôme du 2nd degré, soit la valeur où la dérivée de la fonction s'annule, donc en $\dfrac{-b}{2a}$ pour une fonction du type $at^2 + bt + c$)

Exercice 7 Aire & Produit Vectoriel

Dans un référentiel 3D orthonormé (Oxyz), soit les deux points A (1;1;1) et B (2;1;1). Quelle est l'aire du triangle OAB ?

CORRECTION

$$Aire(AOB) = \frac{\left\| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \right\|}{2}$$

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées (0 ; 1 ; -1)

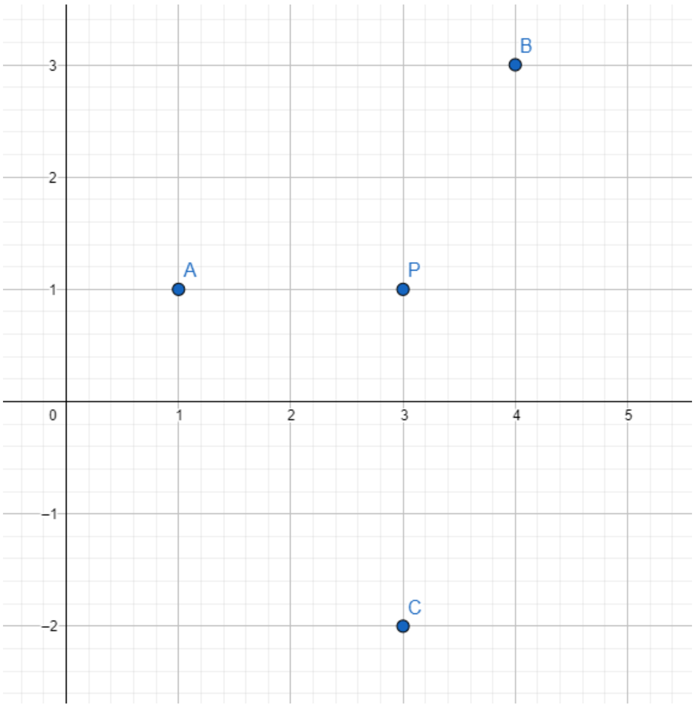
Ainsi $\quad Aire(AOB) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 8 Coordonnées barycentriques dans le triangle

Soit un triangle ABC et un point P.

1) Calculez l'aire des triangles ABC, APB, BPC et CPA.

En déduire les coordonnées barycentriques α, β, γ du point P dans le triangle ABC.



CORRECTION

$A(1;1;0)$, $B(4;3;0)$, $C(3;-2;0)$, $P(3;1;0)$

$\overrightarrow{AB}(3;2;0)$, $\overrightarrow{CA}(-2;3;0)$, $\overrightarrow{CB}(1;5;0)$, $\overrightarrow{AP}(2;0;0)$, $\overrightarrow{BP}(-1;-2;0)$, $\overrightarrow{CP}(0;3;0)$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CA}(0;0;13)$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}(0;0;-4)$, $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BP}(0;0;3)$, $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AP}(0;0;-6)$

$$Aire_{ABC} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CA}\right\|}{2} = \frac{13}{2}$$

$$Aire_{BPC} = \frac{\left\|\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BP}\right\|}{2} = \frac{3}{2}$$

$$Aire_{APC} = \frac{\left\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AP}\right\|}{2} = 3$$

$$Aire_{APB} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\right\|}{2} = 2$$

$$\alpha = \frac{Aire_{BPC}}{Aire_{ABC}} = \frac{3}{13}$$

$$\beta = \frac{Aire_{APC}}{Aire_{ABC}} = \frac{6}{13}$$

$$\gamma = \frac{Aire_{APB}}{Aire_{ABC}} = \frac{4}{13}$$

On peut vérifier l'exactitude des résultats en vérifiant que l'expression vectorielle …

$$\overrightarrow{OP} = \alpha \times \overrightarrow{OA} + \beta \times \overrightarrow{OB} + \gamma \times \overrightarrow{OC}$$

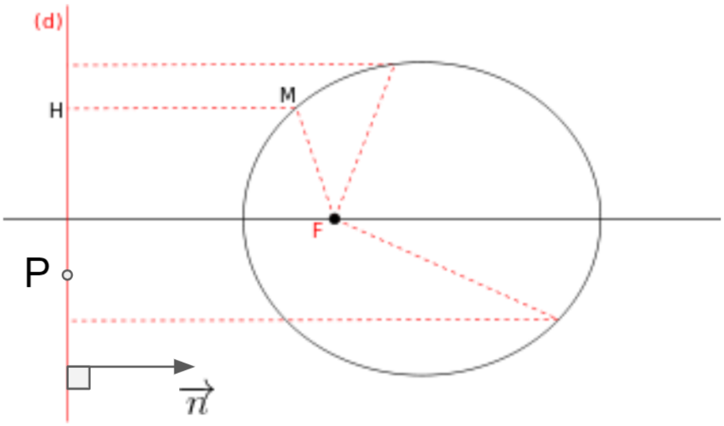
…redonne bien les coordonnées de P.

Exercice 9 Intersection d'une ellipse (ou d'un ellipsoïde de révolution) et d'un segment

Dans le plan 2D, une ellipse est définie géométriquement comme suit:
Soient (d) une droite passant par un point P et de vecteur normal **unitaire** $\vec{n}$, F un point n'appartenant pas à (d), et *e* un réel dans]0,1[. On appelle ellipse de *droite directrice* (d), de *foyer* F et d'*excentricité* e l'ensemble des points M du plan 2D vérifiant :

$$\frac{MF}{MH} = e$$

où H est le projeté orthogonal de M sur (d).



Une définition similaire s'applique à l'ellipsoïde de révolution dans l'espace 3D, la droite (d) étant alors remplacée par un plan.

Sachant que l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{MF^2}{MH^2} = e^2$$

Trouvez l'équation du second degré $at^2 + bt + c = 0$ d'inconnue *t* qui rend compte de l'intersection d'un ellipsoïde de révolution et d'un segment $[AB]$, *t* est bien entendu le paramètre réel compris entre 0 et 1 entrant dans l'équation vectorielle du segment $[AB]$. Les coefficients a, b, c de l'équation sont fonction de vecteurs bâtis sur les points A,B,P et F, du vecteur $\vec{n}$ et de l'excentricité e.

CORRECTION

$$\frac{MF^2}{MH^2} = e^2 \qquad (E)$$
$$(E) \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MF} = e^2 \times MH^2$$
$$\text{or } MH = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{n}$$
$$\text{et } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t \times \overrightarrow{AB}$$
$$(E) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AF} + t \times \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AF} + t \times \overrightarrow{AB}) = e^2 \times \left((\overrightarrow{PA} + t \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{n}\right)^2$$
$$(E) \Leftrightarrow t^2 \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - e^2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n})^2\right) + t \left(2\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BA} - 2e^2 \left(\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{n}\right) \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}\right)\right) +$$
$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AF} - e^2 \left(\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{n}\right)^2 = 0$$

Exercice 10 : Conversion entre systèmes de coordonnées

1. Ecrire le pseudo-code de l'algorithme de conversion des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées cylindriques
2. Ecrire le pseudo-code de l'algorithme de conversion des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées sphériques

CORRECTION

cf. cours

Exercice 11 : coordonnées polaires

Quelles sont, dans le plan, les coordonnées polaires du point $P(5\sqrt{3}, 5)$?

CORRECTION

$$\rho = 10$$
$$\theta = \frac{\pi}{6}$$