Mini-projet 4, 15min. Méthode de Newton pour la résolution d'une équation différentielle avec conditions frontières non-linéaires.

Considérons le problème de distribution de la température dans un mur thermiquement isolant. En particulier, considérons un mur en brique (d'épaisseur $L = 30cm$ et de conductivité thermique $k = 0.85\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$) qui sépare l'intérieur d'un four de l'extérieur. Dans les $dL = 5cm$ derniers centimètres du mur, le système de chauffage est intégré. Il est caractérisé par un taux volumique d'émission de la chaleur $q\ \left[W/m^3\right]$. Aux deux surfaces extérieures du mur nous supposons les conditions frontières mêlées radiatives / convectives (le coefficient de transfert thermique $h = 20\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K)}$). Dans ce cas, la formulation mathématique du problème est :

$$k\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} + S(x) = 0$$

Conditions aux limites :

$$-k\left.\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right|_{x=0} = h\left(T_0 - T(0)\right) - \sigma\cdot\left(T^4(0) - T_0^4\right)$$

$$-k\left.\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right|_{x=L} = -h\left(T_0 - T(L)\right) + \sigma\cdot\left(T^4(L) - T_0^4\right)$$

Source de chaleur :

$$S(x) = q\exp\left(-\left(\frac{x-L}{dL}\right)^2\right) \quad . (1)$$

Constante de Stefan-Boltzmann $\left[SI\right]$: $\sigma \approx 5.67\cdot 10^{-8}$; température ambiante $T_0 = 293K$

<u>1. (Travail préparatoire à la maison)</u> En utilisant le maillage uniforme $x_i = i \cdot dx, i = [0,...,N], dx = 3mm$, programmez une méthode de la matrice et une méthode de Newton pour modéliser la distribution de la température dans un mur d'isolation thermique avec deux conditions frontières mêlées. La méthode a été présentée en classe (Cours 9), et il est détaillé dans le document intitulé « Equations_nonlineaires.pdf » (page 3). Bien sûr, vous devez adapter cette approche pour traiter les conditions radiatives aux deux limites. Vous pouvez trouver utile le code «Equation_nonlineaire_independante_du_temps.m» présenté pendant le cours (il se trouve sur le site web du cours).

<u>2. (20 points. Mini-Quiz en classe)</u> À l'aide d'un code développé :

i) Avec la valeur du taux volumique d'émission de la chaleur q que je préciserai en classe, trouvez la distribution de la température dans un mur. Présentez $T(0)$, $T(L)$ et $\max\left(T(x)\right)$. Présentez les graphiques de la distribution de la température et de la convergence de la méthode de Newton.

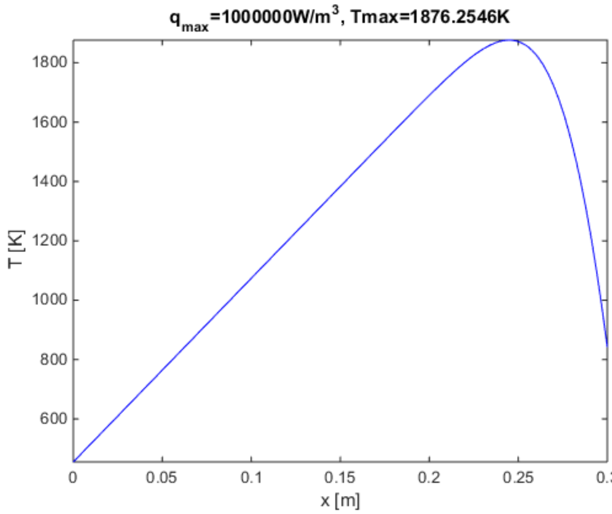
ii) Pour la température maximale admissible dans le mur $T_{\max}^{mur}$ (que je préciserai en classe), trouvez la valeur maximale admissible du taux volumique d'émission de la chaleur $q_{\max}$. Autrement dire, pour éviter effondrement de brick, trouver $q_{\max}$ telle que $\max\left(T(x)\right) = T_{\max}^{mur}$. Afin de trouver $q_{\max}$, utilisez la méthode de bissections sur l'intervalle $q_{\max} \subset \left[10^5, 10^7\right] W/m^3$. Présentez le graphique de la convergence de la méthode de bissections, aussi bien que les graphiques de la distribution de la température et de la convergence de la méthode de Newton pour la valeur $q_{\max}$ trouvée à la fin de la méthode de bissections.

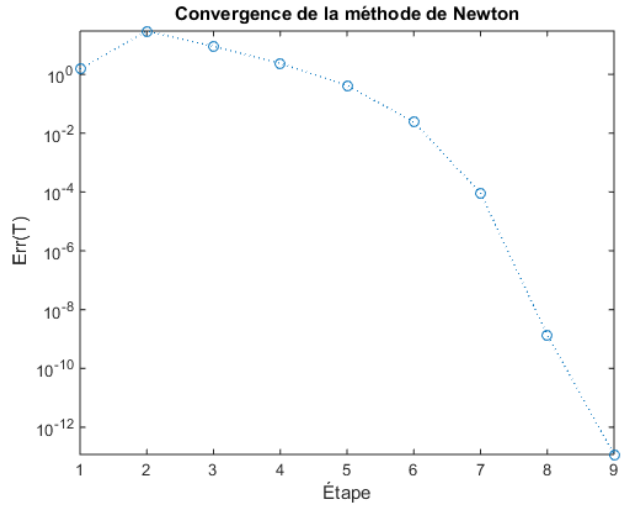
Comme la condition d'arrêt pour la méthode de Newton utilisez $\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N+1}\left|F_i\right| < 10^{-12}$ (pour les détailles consulter «Equation_nonlineaire_independante_du_temps.m»). Comme la condition d'arrêt pour la méthode de bissections utilisez $\left|q_n - q_{n-1}\right|/q_{n-1} < 10^{-12}$, où n est un nombre des itérations d'une méthode de bissections. Pour commencer les itérations supposez la distribution uniforme de la température dans le mur $T_0 = 293\ \mathrm{K}$.

Mini-projet 4, 15min. Méthode de Newton pour la résolution d'une équation différentielle avec conditions frontières non-linéaires.

Déboguer votre code en utilisant les exemples suivants :

i) Déboguer votre code en utilisant $q = 10^6 \ W/m^3$. Dans ce cas, les températures aux limites sont $T(0) = 455.18...\ K$, $T(L) = 841.90...\ K$, la température maximale est $\max\left(T(x)\right) = 1876.25...\ K$.





ii) Déboguer votre code en utilisant $T_{\max}^{mur} = 2000K$, $q_{\max} \approx 1093330.125958(5)\ W/m^3$, $Err\left(q_{\max}\right) \approx 5.6 \cdot 10^{-7}\ W/m^3$.