1. (5 points) Représentez le nombre réel suivant dans le format de simple précision (single précision) de l'IEEE:

a) (3 points) -46.65625 =...

b) (1 point) Quel est le nombre réel le plus grand possible dans le format de simple précision de l'IEEE ?

c) (1 point) Quel est le nombre réel le plus petit possible dans le format de simple précision de l'IEEE ?

(À titre d'exemple: 0.15625=0 01111100 01000000000000000000000)

(5 points) Approximation des dérivées par les expressions de différences finies.

a) (2 points) Donnez les exemples des approximations aux dérivées de 1e et de 3e ordres d'une fonction $y(x)$ en utilisant les expressions des différences finies sur un maillage uniforme $x_i = i \cdot \Delta x,\ i \in \mathbb{Z},\ y_i = y(x_i)$.

IMPORTANTE : Les erreurs de discrétisation associées avec les formules proposées pour dy/dx et d^3y/dx^3 doivent être égales aux ordres 6 et 4 respectivement :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = \ldots + O(\Delta x^6)$$

$$\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_i} = \ldots + O(\Delta x^4).$$

b) (1 point) En utilisant les formules des différences finies présentées en a) trouver les valeurs des dérivées de 1ere et de 3e ordre d'une fonction $y(x) = \sin(x)$ à $x = 0$. Dans votre calcule utilisez deux valeurs du pas $\Delta x = 0.1$ et $\Delta x = 0.05$. Vérifiez si les prévisions théoriques concernant la forme polynomiale d'erreur de discrétisation des formules en a) conforment aux observations numériques.

(Indice : $y^{(1)}(x=0) = 1;\ y^{(3)}(x=0) = -1$)

c) (2 points) En utilisant les développements de Taylor au voisinage de x_i

$$y(x) = y_i + y_i^{(1)}(x - x_i) + y_i^{(2)}\frac{(x-x_i)^2}{2!} + y_i^{(3)}\frac{(x-x_i)^3}{3!} + O\left((x-x_i)^4\right)$$

ou $y_i = y(x_i)$ et $y_i^{(n)}$ signifie la dérivée d'ordre n évalué à x_i, trouvez l'expression exacte pour l'erreur de discrétisation associée à chacune de deux formules des différences finies suivantes:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} = \frac{-4y_{i-1} + 3y_i + y_{i+2}}{6\Delta x} + Err(\Delta x)$$

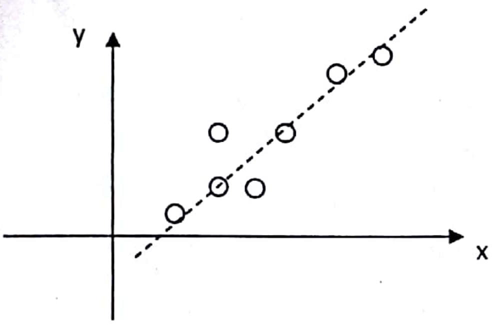
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_i} = \frac{2y_{i-1} - 3y_i + y_{i+2}}{3\Delta x^2} + Err(\Delta x)$$

À titre d'exemple:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} + y''(x_i)\Delta x/2 + O(\Delta x^2) \Rightarrow Err(\Delta x) = y''(x_i)\Delta x/2 + O(\Delta x^2)$$

(5 points) Ajustement des données par la méthode de moindres carrés.

a) (1 points) Supposons que les données expérimentales y_i doivent respecter une dépendance linéaire en fonction de paramètre x_i dans un sens que $y = Ax + B$, où les constantes A et B sont inconnues. Trouvez les expressions pour les paramètres A et B qui minimisent un écart carré des données expérimentales d'une dépendance analytique:



$-\frac{A}{x} - B$

$$Q = \sum_i \left(y_i - Ax_i - B\right)^2$$

$$\min_{A,B} Q - ?$$

b) (2 point). Considérons une fonction:

$$y = \frac{A}{x} + B. \quad (1)$$

Trouvez les expressions pour les paramètres A et B qui ajustent les données numériques par une dépendance analytique (1). (Indice, utiliser directement les résultats de a) pour répondre à b), cependant, considérez $\frac{1}{x}$ en place de x).

c) (2 points) Trouver les valeurs des paramètres A et B qui ajustent par une fonction analytique (1) les données numériques suivantes :

y=[8.25 5.20 3.85 3.64 3.24 2.87 2.79] ; x=[0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5]

(5 points) Méthode de tir pour la résolution des équations différentielles en 1D.

Considérons l'équation différentielle de second ordre qui décrit la distribution de température $T(x)$ $[K]$ en présence de la source de chaleur $S(x)$ $[W/m^3]$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right) - S(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \frac{S(x)}{k} = 0, \ (1)$$

où on suppose que la conductivité thermique k $[W/Km]$ est constante. De plus, nous considérons qu'au point extrême gauche, la valeur de la température est connue $T(x_0) = T_0$ et que la condition frontière convective s'applique dans la forme :

$$-k\frac{\partial T(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = H\cdot(T_a - T(x_0)) \ ; \ T_a - \text{température ambiante} \ . \ (2)$$

La méthode de tir est employée pour résoudre numériquement la distribution de température $T(x)$ dans l'intervalle $[0,1]$ avec un choix de k, $S(x)$ particulier. Définissant $g(x) = \frac{S(x)}{k}$; $\alpha = H\cdot T_a/k$; $\beta = H/k$ dans ce qui suit, on utilise une notation plus compacte pour l'équation (1) et condition au limite (2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - g(x) = 0, \ (3) \\ T(x)\big|_{x=x_0} = T_0 \ ; \ \dfrac{\partial T(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = \beta\cdot T_0 - \alpha \ . \ (4) \end{cases}$$

a) (1 point) Sur un maillage $x_i = i\cdot\Delta x$; $i = (0:N)$ avec $N = 1/\Delta x$ formulez une méthode de tir en $O(\Delta x^2)$ afin de trouver la distribution de température $T_i = T(x_i)$. Pour résoudre numériquement l'équation (3) utilisez une approximation en différences finis d'un dérivé d'ordre 2:

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \ . \ (5)$$

En particulière, réécrivez (3) dans telle manier que vous pourriez trouver T_{i+1} si la température est connue sur les deux points précédents du maillage (c.-à-d. T_i, T_{i-1}): $T_{i+1} = \mathit{fonction}(T_i, T_{i-1})$. Garder le terme d'erreur.

b) (1 point) Selon la méthode formulée en a), avec quelle précision en Δx on connait T_{i+1} si les valeurs de T_i, T_{i-1} sont connu exactement?

c) (2 points) L'utilisation de la méthode de tir (première itération $T_2 = \mathit{fonction}(T_1, T_0)$) nécessite la connaissance de la température sur les deux premiers points de maillage (T_0, T_1). Tandis que la valeur de T_0 est connu, trouver une expression pour T_1 en utilisant la formule non symétrique pour la dérivée première à x_0 :

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = \frac{-T_2 + 4T_1 - 3T_0}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \ (5)$$

aussi bien que l'expression pour la condition frontière (5) écrit à $i=1$.

Indice : Dans vos dérivations vous devez éliminer T_2 et trouver T_1 comme une fonction de $T_0, \Delta x, \alpha, \beta, g_1$.

d) (1 point) Selon la méthode formulée en c), avec quelle précision en Δx on connait T_1 si les valeurs de $T_0, \Delta x, \alpha, \beta, g_1$ sont connu exactement?

$\Delta x\, g(x) + T_0 + \boxed{O(\Delta x^4)} + \Delta x^2 T_2$

$T_0 + O(\Delta x)$

POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

[redacted]

IER D'EXAMEN

No du cours: PHS3902 Section: 01

Titre du cours: Projet de simulation

Directives

1. Remplissez la partie plus haut et signez immédiatement le cahier.
2. Sauf indication contraire, donnez une réponse complète à chaque question.
3. N'utilisez que le recto pour rédiger vos réponses; servez-vous du verso comme brouillon.
4. Écrivez aussi lisiblement que possible, de manière à ce que le correcteur comprenne vos réponses.
5. Si nécessaire, demandez un cahier supplémentaire, que vous insérerez dans le cahier principal.
6. Remettez tous les cahiers d'examen que vous avez reçus, utilisés ou pas.
7. Ne détachez aucune feuille d'un cahier d'examen.
8. N'écrivez que le numéro de la question dans la marge de gauche réservée à la correction.

[redacted]le la signature du code de conduite.

19 janvier 2018
Date

Réservé	
1	5
2	5
3	5
4	4
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Total:	19
sur:	20
Initiales du correcteur	

Inscrire le numéro de chaque cahier supplémentaire utilisé:

B1				

P

Réponses

5/5

Q1

a) -46.65625

signe négatif $\Rightarrow$ 1

46	0		0,65625	1
23	1		0,3125	0
11	1		0,625	1
5	1		0,25	0
2	0		0,5	1
1	1			
0				

$(46)_{10} \Rightarrow (101110)_2$

$= 1.01110 \times 2^5$

exposant $5+127 = (132)_{10} = (1000\ 0100)_2$

Donc

S exposant Mantisse

1 1000 0100 0111 0101 0100 0000 0000 000

3/3

b)

le nombre réel le plus grand possible en simple précision est donné par

0 1111 1110 1111 1111 1111 1111 1111 111

qui correspond à

$\simeq 3,4 \times 10^{38}$ en décimales

1/1

Réponses

c) le plus petit nombre possible en simple précision est, en binaire.

0 0000 0001 0000 0000 0000 0000 0000 000.

qui correspond en décimale à

$\simeq 1.2 \times 10^{-38}$. //

Q2)

a) Calcul la dérivée $\frac{dy}{dx}\Big|_{x_i} = y'_i$, on pose $h = \Delta x$

On suppose ici, que l'on veut des différences finies centrée.

$$y_{i+a} = y_i + ah\, y'_i + \frac{(ah)^2}{2} y''_i + \frac{(ah)^3}{3!} y'''_i + \frac{(ah)^4}{4!} y_i^{(4)} + \frac{(ah)^5}{5!} y_i^{(5)}$$

$$+ \frac{(ah)^6}{6!} y_i^{(6)} + \frac{(ah)^7}{6!} y_i^{(7)}$$

où $a \in \cancel{\in} [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]$

alors on écrit la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} y_{i+3} \\ y_{i+2} \\ y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ y_{i-3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9/2 & 9/2 & \frac{81}{24} & \frac{243}{120} & \frac{729}{720} \\ 1 & 2 & 2 & 4/3 & 2/3 & 4/15 & \frac{8}{15} \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & 1/24 & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 & -1/6 & 1/24 & -\frac{1}{120} & \frac{1}{720} \\ 1 & -2 & 2 & -4/3 & 2/3 & -\frac{4}{15} & \frac{8}{15} \\ 1 & -3 & 9/2 & -9/2 & \frac{81}{24} & \frac{-243}{120} & \frac{729}{720} \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} y_i \\ y'_i h \\ y''_i h^2 \\ y'''_i h^3 \\ y_i^{(4)} h^4 \\ y_i^{(5)} h^5 \\ y_i^{(6)} h^6 \end{bmatrix} + h^7 y_i^{(7)} \begin{bmatrix} \frac{243}{5040} \\ \frac{8}{315} \\ \frac{1}{5040} \\ 0 \\ -\frac{1}{5040} \\ -\frac{8}{315} \\ -\frac{243}{5040} \end{bmatrix}$$

2/2

Réponses

On peut maintenant inverser avec matlab.

$$M^{-1}\begin{pmatrix} y_{i+3} \\ \vdots \\ y_{i-3} \end{pmatrix} = M^{-1} M \begin{bmatrix} y_i \\ y_i' h \\ \vdots \\ y_i^{(6)} h^6 \end{bmatrix} + M^{-1} h^7 y_i^{(7)} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} y_i \\ y_i' h \\ \vdots \\ y_i^{(6)} h^6 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} y_{i+3} \\ \vdots \\ y_{i-3} \end{bmatrix} - M^{-1} h^7 y_i^{(7)} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

On regarde la 2ème ligne de M^{-1}

$$y_i' h = \frac{1}{60} y_{i+3} - \frac{9}{60} y_{i+2} + \frac{3}{4} y_{i+1} - \frac{3}{4} y_{i-1} + \frac{9}{60} y_{i-2} - \frac{1}{60} y_{i-3} + \Theta(h^7)$$

(1) $$\boxed{y_i' = \frac{y_{i+3} - 9 y_{i+2} + 45 y_{i+1} - 45 y_{i-1} + 9 y_{i-2} - y_{i-3}}{60h} + \Theta(h^6)}$$

et par $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x_i} = y_i^{(3)}$

pour ce faire il suffit de regarder la 4ème ligne de M^{-1}

$$y_i^{(3)} h^3 = -\frac{1}{8} y_{i+3} + y_{i+2} - \frac{13}{8} y_{i+1} + \frac{13}{8} y_{i-1} - y_{i-2} + \frac{1}{8} y_{i-3} + \Theta(h^7)$$

(2) $$\boxed{y_i^{(3)} = \frac{-y_{i+3} + 8 y_{i+2} - 13 y_{i+1} + 13 y_{i-1} - 8 y_{i-2} + y_{i-3}}{8h^3} + \Theta(h^4)}$$

Réponses

b)

évaluons la dérivée première, avec les différences finies

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{\sin(3h) - 9\sin(2h) + 45\sin(h) - 45\sin(-h) + 9\sin(-2h) - \sin(-3h)}{60h}$$

Forme de la dérivée obtenue en a)

$\cong 0{,}9999\ 9999\ 2871018 = \beta_1$ (avec $h=0{,}1$) (1^{er})

$= 0{,}9999\ 9999\ 9888447 = \beta_2$ (avec $h=0{,}05$) (2^e)

Évaluons la dérivée 3^e avec les différences finies obtenues en a),

$$\left.\frac{d^3y}{dy^3}\right|_{y=0} = \frac{-\sin(3h) + 8\sin(2h) - 13\sin(h) + 13\sin(-h) - 8\sin(-2h) + \sin(-3h)}{8h^3}$$

$\cong -0{,}99999\ 41774039\,84 = \beta_3$ (avec $h=0{,}1$) (3^e)

$= -0{,}999999\ 63558469\,7 = \beta_4$ (avec $h=0{,}05$) (4^e)

On va vérifier l'ordre de l'erreur pour chacun de ces résultats :

Dérivée 1^{ere} : ordre de l'erreur $= n = \log(E_1/E_2)/\log(h_1/h_2)$

$$n = \frac{\log\left(\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}\right)}{\log(2)} \cong 5{,}998 \cong 6 \rightarrow \text{ok avec a)}$$

Dérivée 3^e : $$n = \frac{\log\left(\frac{-1-\beta_3}{-1-\beta_4}\right)}{\log(2)} \cong 3{,}998 \cong 4 \rightarrow \text{ok avec a)}$$

1/1

Réponses

c) 1)

$$-4y_{i-1} = -4y_i - 4y_i^{(1)}(-h) - 4y_i^{(2)}\frac{h^2}{2!} - 4y_i^{(3)}\frac{(-h^3)}{3!} + \Theta(h^4)$$

$$+ \quad 3y_i = 3y_i$$

$$+ \quad y_{i+2} = y_i + y_i^{(1)}2h + y_i^{(2)}\cdot\frac{4h^2}{2!} + y_i^{(3)}\frac{8h^3}{3!} + \Theta(h^4)$$

$$\frac{-4y_{i-1} + 3y_i + y_{i+2}}{6h} = \underbrace{y_i^{(1)}}_{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}} + \underbrace{\frac{1}{3}h^2 y_i^{(3)} + \Theta(h^3)}_{-Err(\Delta x = h)}$$

$$\boxed{Err(h) = -\frac{1}{3}h^2 y_i^{(3)} + \Theta(h^3)}$$

1

2)

$$2y_{i-1} = 2y_i + 2y_i^{(1)}(-h) + 2y_i^{(2)}\frac{h^2}{2!} + 2y_i^{(3)}\frac{(-h^3)}{3!} + \Theta(h^4)$$

$$+ \quad -3y_i = -3y_i$$

$$+ \quad y_{i+2} = y_i + y_i^{(1)}(2h) + y_i^{(2)}\frac{4h^2}{2!} + y_i^{(3)}\frac{8h^3}{6} + \Theta(h^4)$$

$$\frac{2y_{i-1} - 3y_i + y_{i+2}}{2h^2} = \underbrace{y_i^{(2)}}_{\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}} + \underbrace{y_i^{(3)}\frac{h}{3} + \Theta(h^2)}_{-Err(\Delta x = h)}$$

$$\boxed{Err(h) = -\frac{1}{3}h\, y_i^{(3)} + \Theta(h^2)}$$

1

2/2

Réponses

Question 3:

a) $y = ax+b$

$$Q = \sum_i (y_i - Ax_i - B)^2$$

On trouve le minimum en dérivant Q par A et B et en égalisant par 0.

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = -2 \sum_i (y_i - Ax_i - B) x_i = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = -2 \sum_i (y_i - Ax_i - B) = 0$$

~~On a les valeurs moyennes~~ $\cancel{\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i}$ $\cancel{\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i}$

$$\begin{cases} \sum y_i x_i - \sum_i A x_i - \sum B x_i = 0 \ (1) \\ \sum y_i - \sum A x_i - B = 0 \ (2) \end{cases}$$

$$\sum A_{x_i} = \sum y_i - B$$

$$A = \frac{\sum_i y_i}{\sum_i x_i} - \frac{B}{\sum x_i}$$

On insère dans (1)

$$\sum y_i x_i - \left(\frac{\sum y_i - BN}{\sum x} \right) \sum x_i^2 - B \sum_i x_i = 0$$

Réponses

$$B = \frac{\frac{\sum y_i \sum x_i^2}{\sum x_i} - \sum x_i y_i}{-\sum x_i + N \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i}}$$

$$\boxed{B = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

On remplace dans la formule pour trouver :

$$\sum y_i - \sum A x_i - BN = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum y_i - A \sum x_i - \frac{N \sum x_i^2 \sum y_i - N \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = 0$$

$$A \sum x_i = \frac{-N \sum x_i^2 \sum y_i + N \sum x_i \sum x_i y_i}{+N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} + \sum y_i$$

$$A \sum x_i = \frac{-N \sum x_i^2 \sum y_i + N \sum x_i \sum x_i y_i}{-(\sum x_i)^2 + N \sum x_i^2} + \frac{\sum y_i [+N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]}{+N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$A \sum x_i = \frac{-N \sum x_i^2 \sum y_i + N \sum x_i \sum x_i y_i + N \sum x_i^2 \sum y_i - \sum y_i (\sum x_i)^2}{-(\sum x_i)^2 + N \sum x_i^2}$$

$$\boxed{A = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

Réponses

1/1

b) $$A = \frac{N \sum_i \frac{y_i}{x_i} - \sum_i \frac{1}{x_i} \sum_i y_i}{N \sum_i \frac{1}{x_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{x_i}\right)^2}$$

$$B = \frac{\sum_i \frac{1}{x_i^2} \sum_i y_i - \sum_i \frac{1}{x_i} \sum_i \frac{y_i}{x_i}}{N \sum \frac{1}{x_i^2} - \left(\sum \frac{1}{x_i}\right)^2}$$

1/1

c) Avec Matlab, on résoud les équations ci-dessus en plugant les points données dans le questionnaire. On obtient $\boxed{A \simeq 3{,}1877 \text{ et } B \simeq 1{,}9014.}$

Réponses

Question 4

4/5

a) $\begin{cases} T''(x) - g(x) = 0 \\ T(x_0) = T_0 \\ T'(x_0) = \beta T_0 - \alpha \end{cases}$

où $T'' = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$

(T_i et T_{i-1} sont connues)

$g(x)$ est une fonction connue que l'on peut évaluer. L'équation différentielle devient :

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) - g(x) = 0$$

On isole T_{i+1},

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = g(x) + O(\Delta x^2)$$

$$T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = \Delta x^2 \left(g(x) + O(\Delta x^2) \right)$$

1/1

$$T_{i+1} = \Delta x^2 g(x) + O(\Delta x^4) + 2T_i - T_{i-1}$$

On peut itérer la méthode de tir, car la seule inconnue est T_{i+1}.

Scanned by CamScanner

$T_0 \quad T_1 \quad T_2$

Réponses

b) En regardant l'expression obtenue en a), on voit que le terme d'erreur est $O(\Delta x^4)$, donc la précision en Δx est d'ordre 4.

$4/1$

c) On nous donne,

$$T'(x_0) = \frac{-T_2 + 4T_1 - 3T_0}{2\Delta x} + O_1(\Delta x^2) = \beta T_0 - \alpha$$

On peut utiliser T_2 à partir de a), donc (en $i=1$)

$$T_2 = \Delta x^2 g_1 + O_2(\Delta x^4) + 2T_1 - T_0$$

la dérivée 1ère devient,

$$T'(x_0) = \frac{-(\Delta x^2 g_1 + O_2(\Delta x^4) + 2T_1 - T_0) + 4T_1 - 3T_0}{2\Delta x} + O_1(\Delta x^2)$$

$\beta T_0 - \alpha \quad = \quad$ idem $\quad$ somme donne $O(\Delta x^2)$

$$\Rightarrow 2\Delta x(\beta T_0 - \alpha) = -\Delta x^2 g_1 - O_2(\Delta x^4) + 2T_1 - 2T_0 + O_1(\Delta x^2)$$

$$\frac{2\Delta x(\beta T_0 - \alpha) + \Delta x^2 g_1 + O(\Delta x^2) + 2T_0}{2} = T_1$$

$$T_1 = \Delta x(\beta T_0 - \alpha) + \frac{\Delta x^2}{2} g_1 + O(\Delta x^2) + T_0$$

$2/2$

non $O(\Delta x^3)$ $\quad 0/1$

d) En regardant l'expression obtenue en c), le terme d'erreur est $O(\Delta x^2)$, donc la précision en Δx est d'ordre 2.