

Cobertura com Círculos

Idéias Iniciais

Arthur Gabriel de Santana
Orientador: Ernesto G. Birgin

2 de Março de 2020

1 Notação

Sendo C um conjunto mensurável em \mathbb{R}^n , denotamos:

$\bar{C} :=$ fecho de C

$\partial C :=$ borda de C

// preciso definir com mais precisão esses conceitos básicos de análise?

$\mu(C) :=$ área de C // medida boreliana? medida de lebesgue?

2 Definição do Problema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Queremos encontrar um $r \in \mathbb{R}$ mínimo e pontos $\{x_i\}_{i=1}^n$ em \mathbb{R}^2 , tais que as bolas fechadas com centro x_i e raio r cubram U :

$$\min_{(x,r) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}} r \quad (1a)$$

$$s.a \quad U \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}_r(x_i) \quad (1b)$$

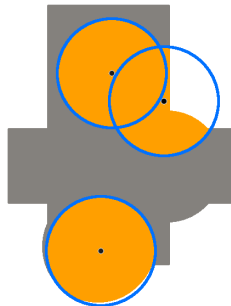


Figura 1: Um exemplo do problema para $n = 3$ e U sendo a união das áreas cinza e laranja. Esta configuração é inviável, pois as bolas não cobrem U .

Para resolver o problema utilizando métodos tradicionais de otimização não-linear, precisamos colocar (1b) na forma $g(x) = 0, h(x) \leq 0$, onde g e h são funções computáveis (com derivadas computáveis até um determinado grau, dependendo do método particular escolhido). Isso pode ser feito através da área da diferença entre U e a união das bolas:

$$\min_{(x,r) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}} \quad f(x, r) = r \quad (2a)$$

$$s.a \quad g(x, r) = \mu\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)\right) = 0 \quad (2b)$$

3 Avaliação de g

Como expressa a área descoberta de U , g pode ser escrita na forma

$$g(x, r) = \mu(U) - \mu\left(U \cap \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)\right).$$

Assumimos, daqui pra frente, U sendo um polígono convexo ou um círculo. Assim, $\mu(U)$, além de constante, é facilmente calculável. Logo, o problema se reduz a calcular a área da união das bolas, intersectada com U .

A seguir descrevemos dois possíveis métodos de encontrar, não somente a área desejada, mas também os arcos de circunferência e segmentos de reta que a definem, o que será útil para calcularmos derivadas, mais à frente.

3.1 Diagramas de Voronoi

Definição 1 (Diagrama de Voronoi). *Dados um conjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e um conjunto de pontos não coincidentes $Z = \{z_i\}_{i=1}^m$ em Ω , a região de Voronoi associada ao ponto gerador z_i é definida como o conjunto*

$$V_i(Z) = \{x \in \Omega \mid \|x - z_i\| < \|x - z_j\|, \forall j \neq i\}.$$

Chamamos o conjunto $V(Z) = \{V_i(Z)\}_{i=1}^m$ de diagrama de Voronoi.

Se particionarmos U pelos conjuntos de Voronoi gerados pelos pontos x , para cada ponto do i -ésimo conjunto, só precisamos nos preocupar com a i -ésima bola: se um ponto está dentro da i -ésima bola, está no conjunto desejado; se não está, não pode estar em nenhuma outra bola, por definição de região de Voronoi. Assim,

$$\mu\left(U \cap \bigcup_{i=1}^n B_r(x_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mu(V_i \cap U \cap B_r(x_i)).$$

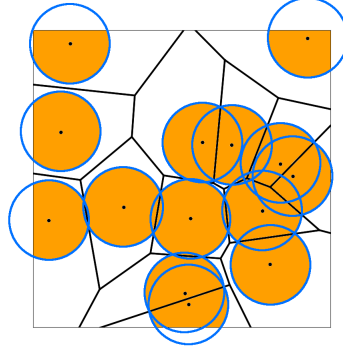


Figura 2: U é o quadrado de borda cinza. A área laranja é a área de interesse, cujo complemento é $g(x, r)$. Em cada conjunto de Voronoi, a área laranja é determinada apenas pelas arestas que definem o conjunto, pelo ponto gerador, por r e pela borda de U .

Para U sendo um círculo ou um polígono convexo, $V_i \cap U \cap B_r(x_i)$ é uma região convexa com bordas definidas apenas por segmentos de reta ou arcos de circunferência. A área de tal região pode ser calculada por um particionamento radial em volta de x_i .

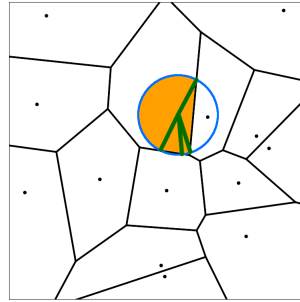


Figura 3: Particionando a região laranja pelas retas verdes, é fácil calcular a área.

3.2 Divisão em Polígonos Simples por Linha de Varredura

Imaginemos uma linha de varredura que corre verticalmente, por U , de uma ponta à outra, fazendo paradas nos seguintes pontos de interesse:

- inícios de uma das bolas $B_r(x_i)$, ou seja $x_i - (0, r)$;

- finais de uma das bolas $B_r(x_i)$, ou seja $x_i + (0, r)$;
- intersecções entre bolas;
- intersecções entre uma bola e as bordas de U .

Cada parada define o começo e/ou o fim de uma ou mais regiões simples, que podem ser de uma das seguintes formas:

- um segmento circular definido por uma corda horizontal ou vertical;
 - um retângulo;
 - um triângulo;
 - uma união de regiões como as já descritas.
- /* faltou algo? pensar com mais carinho */*

Claramente, tal tipo de região pode ter a sua área facilmente calculada. A união de tais regiões é a região de interesse. Portanto, podemos calcular a área total de interesse iterativamente seguindo a linha de varredura e mantendo uma estrutura de dados que define esse tipo de região.

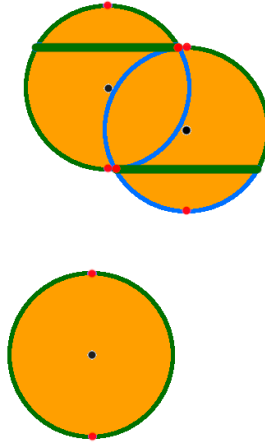


Figura 4: Os pontos vermelhos são os pontos de parada. As linhas verdes são as bordas das áreas definidas pelo algoritmo. */* Esqueci de desenhar U , vou refazer a imagem. */*

4 Calculando ∇g

4.1 Discretização

Seja ϕ a função característica de U , ou seja,

$$\phi(x) = 1 \ \forall x \in U, \phi(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus U.$$

Podemos então escrever g como

$$g(x, r) = \mu(U) - \int_{\cup_{i=1}^n B_r(x_i)} \phi(x) dx.$$

O primeiro termo é constante em relação a x e r . Para calcularmos as derivadas do segundo termo, podemos utilizar a Fórmula de Leibniz:

Teorema 1 (Fórmula de Leibniz). /* ainda estou confirmando as hipóteses para o caso multivariado. Mas é algo do tipo f e Ω são continuamente diferenciáveis nos domínios relevantes */

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dV = \int_{\Omega(t)} \frac{d}{dt} f(x, t) dV + \int_{\partial\Omega(t)} f(x, t) v_b \cdot n dx,$$

onde v_b é a velocidade euleriana da borda e $n dx$ é a componente normal do elemento de comprimento.

/* Prova: Kaplan só tem a versão unidimensional. Procurando. Talvez seja melhor procurar como “Reynolds transport theorem” */

Logo, como ϕ é constante em U e independente de r ,

/* abaixo estão os resultados do Antoine. Ainda estou me confundindo com os conceitos do teorema acima. $\frac{\partial g}{\partial r}$ vai dar certo, porque $n \cdot n = 1$, mas ainda não entendi porque exatamente, no caso de $\frac{\partial g}{\partial x_i}$, v_b some. (já entendi também porque o limite de integração muda, te explico na quinta) */

$$\frac{\partial g}{\partial r} = - \int_{\partial(\cup_{i=1}^n B_r(x_i))} \phi(x) dx, \quad (3)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = - \int_{\partial(\cup_{i=1}^n B_r(x_i)) \cap \partial B_r(x_j)} \phi(x) n(x) dx, \quad (4)$$

onde $n(x)$ é o vetor unitário normal à borda de $\cup_{i=1}^n B_r(x_i)$ calculado no ponto x .

/* também não entendi porque não precisamos nos preocupar com a mudança de posição dos extremos de cada arco quando r e x mudam */

Para cada bola $B_r(x_i)$, é fácil calcular o vetor $n(x)$, $x \in \partial B_r(x_i)$:

$$n(x) = \frac{x - x_i}{\|x - x_i\|_2}$$

(3) é o oposto do comprimento da borda de $\cup_i B_r(x_i) \cap U$. Podemos então, conhecendo, pela seção anterior, os pontos limítrofes dos arcos de círculo e segmentos de reta que compõem a região desejada, calcular exatamente (3) e aproximar (4) por regras de quadratura adequadas. /* quais? */

4.2 Fórmula fechada

/* ainda analisando se é possível */

5 Plano de ataque 1 detalhado

Para cada iteração do algoritmo de otimização escolhido, faremos:

- cálculo do diagrama de Voronoi gerado pelos centros atuais x_i (já feito, meu TCC);
- intersecção de cada V_i com U (já feito pro caso de U quadrado, meu TCC);
- intersecção de cada $V_i \cap U$ com $B_r(x_i)$:
 - caminhamos pelas arestas de $V_i \cap U$, calculando para cada uma onde estão as intersecções com a borda de $B_r(x_i)$;
 - podemos testar quais pontos q são de entrada ou saída olhando para o vetor normal a $(q - x_i)$ que aparece primeiro no sentido anti-horário;
 - terminamos quando todas as arestas tiverem sido visitadas e todas as saídas tenham voltado
- cálculo das áreas $A_i = \mu(V_i \cap U \cap B_r(x_i))$, utilizando o particionamento radial descrito anteriormente
- cálculo da área de interesse $A = \sum A_i$, que desejamos manter zerada
- aproximação de ∇g , calculando exatamente (3) e utilizando integração numérica sobre (4)