

Relatório Parcial para o TCC

Resumo do artigo do Lloyd (1982)

RASCUNHO

Arthur Gabriel de Santana

15 de Março de 2018

1 Introdução

Um dos algoritmos mais utilizados para o cálculo de Tesselacões Centroidais de Voronoi é o algoritmo de Lloyd[2], proposto em 1957 em manuscrito interno da Bell Labs e publicado oficialmente em 1982[1].

O algoritmo de Lloyd foi originalmente desenvolvido para a quantização de sinais analógicos, problema que definiremos abaixo.

2 *Pulse-Code Modulation*

O teorema da amostragem de Shannon-Nyquist afirma que um sinal $s: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que possua apenas componentes de frequência menor que W pode ser recuperado perfeitamente a partir de um conjunto de amostras $s(t_j)$, onde $t_j = \frac{j}{2W}$, $j \in \mathbb{Z}$, através da fórmula:

$$s(t) = \sum_j s(t_j)K(t - t_j)$$

com $K(t) = \frac{\sin 2\pi Wt}{2\pi Wt}$.

Considere agora uma partição finita $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_v\}$ de \mathbb{R} e um conjunto de representantes $\{q_1, q_2, \dots, q_v\}$, com $q_i \in Q_i$, $i = 1, 2, \dots, v$. Seja γ a função que associa cada $x \in \mathbb{R}$ ao índice i da partição $Q_i \ni x$.

Na modulação por código de pulsos (do inglês *pulse-code modulation*, ou *PCM*), recuperamos o sinal utilizando os representantes de cada classe, transmitindo apenas $\gamma(s(t_j))$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$r(t) = \sum_j q_{\gamma(s(t_j))}K(t - t_j)$$

3 Função Objetivo

Definindo o sinal de ruído $n(t) = s(t) - r(t)$, estamos interessados em minimizar a potência de n , dada por $N = E(n^2(t))$, onde a esperança é tomada em relação ao processo estocástico estacionário que gerou o sinal $s(t)$. Lloyd prova no apêndice A de seu artigo que $N = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x)$, onde $F(x) = P(s(t) \leq x)$ ¹ é a distribuição acumulada de $s(t)$.

Fixando os $\{Q_i\}$, N é minimizada pelos centros de massa (onde a densidade corresponde à densidade de probabilidade) de cada região²:

$$q_i = \frac{\int_{Q_i} x dF(x)}{\int_{Q_i} dF(x)}$$

Fixando os $\{q_i\}$, N é minimizada pelas regiões de Voronoi geradas pelos $\{q_i\}$.

4 Algoritmo

Isso sugere um algoritmo de ponto fixo, cuja iteração é dada por: (i) calcular novos $\{q_i\}$ iguais aos centros de massa dos $\{Q_i\}$ e (ii) calcular novos $\{Q_i\}$ iguais às regiões de Voronoi geradas pelos pontos $\{q_i\}$.

Referências

- [1] Lloyd, Stuart P. (1982), “Least squares quantization in PCM”, IEEE Transactions on Information Theory, 28 (2): 129–137, doi:10.1109/TIT.1982.1056489.
- [2] Du, Qiang; Emelianenko, Maria; Ju, Lili (2006), “Convergence of the Lloyd algorithm for computing centroidal Voronoi tessellations”, SIAM Journal on Numerical Analysis, 44: 102–119, doi:10.1137/040617364.

¹note que, como se espera de um processo estacionário, F não depende de t .

²Lloyd não demonstra o resultado, apenas afirmando que é um resultado clássico.