Uma Introdução às Álgebras de Clifford

Arthur Garcia Tonus
Orientador: Igor Mencattini

Período: 01/08/2021 a 31/07/2022

Conteúdo

1 Introdução

Neste texto será apresentado o conteúdo estudado durante o projeto. O objetivo do projeto é estudar álgebras de Clifford, bem como introduzir o problema da classificação dessa estrutura. As álgebras de Clifford possuem aplicações em geometria diferencial e em física matemática, servindo como requisito para estudos mais avançados nessas áreas.

Para isso, foi necessário realizar um estudo das ferramentas algébricas necessárias para o entendimento do assunto. Mais especificamente, os tópicos abaixo foram abordados.

1. Álgebras associativas
2. Álgebra multilinear, produto tensorial e produto exterior
3. Produto tensorial de álgebras
4. Formas quadráticas
5. Álgebra de Clifford: definição e propriedades
6. Classificação das álgebras de Clifford

2 Ambiente algébrico

Álgebras de Clifford são álgebras de dimensão finita associativas com unidade. Nesta seção serão apresentados conceitos básicos sobre álgebras associativas e exemplos importantes, seguindo o que foi feito em [G].

2.1 Álgebras associativas

Durante todo o texto, denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos. Começaremos com uma definição geral de álgebra associativa.

Definição 2.1.1. *Uma álgebra associativa de dimensão finita A sobre o corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ munido de uma lei de composição $(a, b) \mapsto ab$ de $A \times A$ em A que, para quaisquer $a, b, c \in A$, $\lambda \in \mathbb{K}$, satisfaz:*

- $(ab)c = a(bc)$;
- $a(b + c) = ab + ac$;

- $(a+b)c = ac + bc$;
- $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Diremos que A é uma *álgebra com unidade* se existe $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$.

Um subespaço vetorial B de uma álgebra A é uma *subálgebra* de A se $b_1, b_2 \in B$ implica $b_1 b_2 \in B$.

Considerando A e B álgebras, uma aplicação linear $\varphi : A \to B$ é chamada de *homomorfismo de álgebras* se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para todos $x, y \in A$. Se, além disso, A e B forem álgebras com unidade e $\varphi(1_A) = 1_B$, em que 1_A é a unidade de A e 1_B é a unidade de B, então dizemos que φ é um *homomorfismo de álgebras unitário.*

Vejamos agora alguns exemplos importantes.

1. O corpo dos complexos $\mathbb{C}$, visto como espaço vetorial real, juntamente com a multiplicação usual forma uma álgebra associativa com unidade.

2. O espaço vetorial das matrizes quadradas $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, denotado por $M_n(\mathbb{K})$, sobre o corpo dos reais, com a multiplicação usual de matrizes, é também uma álgebra associativa com unidade. Evidentemente, a unidade é a matriz identidade $n \times n$.

3. Dada uma álgebra associativa com unidade A, podemos construir outra a partir do produto cartesiano de n cópias de A, denotado por A^n. Adição, multiplicação por escalar e composição são definidas termo a termo, e a unidade é $(1_A, \ldots, 1_A)$.

4. Mais geralmente, dada A como no exemplo anterior, o conjunto $M_n(A)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em A, munido da adição e multiplicação por escalar termo a termo e composição dada pela multiplicação matricial, é uma álgebra associativa com unidade.

Dizemos que um homomorfismo de álgebras $\theta : A \to A$ (ou seja, um endomorfismo de A) é uma *involução* se $\theta^2 = I$, sendo I a identidade. Essa definição é muito importante, já que, dada uma involução θ de uma álgebra com unidade A, podemos decompor a álgebra em

$$A^+ = \{a \in A : \theta(a) = a\} \text{ e } A^- = \{a \in A : \theta(a) = -a\},$$

de modo que $A = A^+ \oplus A^-$.

Proposição 2.1.1. *Seja $A = A^+ \oplus A^-$ como acima, $a^+ \in A^+$ e $a^- \in A^-$. Então*

$$a^+a^+ \in A^+; \qquad a^+a^- \in A^-; \qquad a^-a^+ \in A^-; \qquad a^-a^- \in A^+.$$

Vejamos agora por outro lado.

Proposição 2.1.2. *Se uma álgebra com unidade A pode ser decomposta em uma soma direta $A = A^+ \oplus A^-$ de modo que as quatro afirmações da* Proposição 2.1.1 *estão satisfeitas, então o endomorfismo $(a^+ + a^-) \mapsto (a^+ - a^-)$ é uma involução.*

Definição 2.1.2. *Uma álgebra com unidade A que pode ser decomposta em $A = A^+ \oplus A^-$ como na* Proposição 2.1.1 *é chamada* super álgebra *ou* álgebra graduada.

Esta definição é de grande importância, já que muitas álgebras estudadas durante o projeto, inclusive as álgebras de Clifford, são super álgebras.

Sendo A uma álgebra com unidade, dizemos que $b \in A$ é *inverso à esquerda* de $a \in A$ se $ba = 1_A$. Definimos o inverso à direita de maneira análoga. a é invertível se possuir inverso tanto à direta quanto à esquerda (que serão iguais). Conforme a notação padrão, o inverso de a é denotado por a^{-1}.

Uma *álgebra de divisão* é uma álgebra em que todo elemento não nulo possui inverso. Uma estrutura desse tipo satisfaz quase todos os axiomas que definem um corpo, excluindo apenas a comutatividade. Podemos então pensar uma álgebra de divisão como um "corpo não comutativo".

2.1.1 Ideais e Álgebra Quociente

Durante o desenvolvimento do projeto, foi visto que muitas construções de álgebras podem ser feitas através de quocientes. A ideia de álgebra quociente é análoga à de espaço vetorial quociente, grupo quociente, anel quociente, etc. Precisaremos primeiro do conceito de ideal.

Uma subálgebra J de A é um *ideal à esquerda* se para cada $a \in A$ e para cada $j \in J$ temos que $aj \in J$, ou seja, multiplicar um elemento de J à esquerda por qualquer elemento de A resulta em um elemento que continua em J. Definimos *ideal à direita* de maneira análoga.

Uma subálgebra que é um ideal tanto à esquerda quanto à direita é chamada *ideal bilateral*, ou simplesmente *ideal*.

Definição 2.1.3. *Uma álgebra A é chamada simples se seus únicos ideais são ela mesma e o ideal trivial $\{0\}$.*

Consideremos uma álgebra A e um ideal I de A. Recordemos que A é um espaço vetorial e I é um subespaço vetorial. Podemos criar o espaço vetorial quociente A/I.

Conforme enunciado em [SY], A/I também possui uma estrutura de álgebra associativa com unidade, de modo que a aplicação linear canônica $\pi : A \to A/I$, $a \mapsto \overline{a} = a + I$ é um homomorfismo de álgebras.

2.2 Álgebra dos quatérnions

Seguindo a construção de [G], vamos considerar as *matrizes associadas de Pauli* de $M_2(\mathbb{C})$, dadas abaixo.

$$\tau_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \tau_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Vamos considerar $M_2(\mathbb{C})$ como uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Dessa forma, $M_2(\mathbb{C})$ tem dimensão 8 e unidade $\tau_0 = I$. As matrizes associadas de Pauli formam um subconjunto linearmente independente de $M_2(\mathbb{C})$, de modo que o subespaço

$$H := \operatorname{span}(\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3\})$$

tem dimensão 4. Além disso, temos que H é uma subálgebra com unidade de $M_2(\mathbb{C})$.

Definimos agora a álgebra $\mathbb{H}$ dos quatérnions como sendo qualquer álgebra real isomorfa como álgebra a H. Vamos denotar os elementos de $\mathbb{H}$ correspondentes às matrizes associadas de Pauli da seguinte maneira:

$$\tau_0 \mapsto 1 \quad \tau_1 \mapsto \boldsymbol{i} \quad \tau_2 \mapsto \boldsymbol{j} \quad \tau_3 \mapsto \boldsymbol{k}$$

Podemos ver, realizando multiplicações matriciais em H, que os elementos de $\mathbb{H}$ satisfazem a relação

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1,$$

como foi idealizado pelo matemático William Rowan Hamilton, o "inventor" dos quatérnions, no século XIX.

Chamaremos os elementos pertencentes a $\operatorname{span}(\{1\})$ de quatérnions reais e os elementos pertencentes a $\operatorname{span}(\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\})$ de quatérnions puros. Diferentemente da álgebra real $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ não é comutativa, porém podemos caracterizar seus elementos com a proposição abaixo.

Proposição 2.2.1. *(i) Um quatérnion x é real se, e somente se, ele comuta com todos os elementos de $\mathbb{H}$ (ou seja, pertence ao centro da álgebra);*

(ii) Um quatérnion x é puro se, e somente se, x^2 é real e não positivo.

Todo elemento não nulo de $\mathbb{H}$ possui inverso. De fato, seja $x \in \mathbb{H}$, $x = a1 + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, vamos definir a *conjugação* de x como $\overline{x} = a1 - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k}$ e uma *norma quadrática* em $\mathbb{H}$ como $\Delta(x) = x\overline{x}$. Dessa forma, temos que, se $x \neq 0$,

$$x\frac{\overline{x}}{\Delta(x)} = \frac{\overline{x}}{\Delta(x)}x = 1,$$

logo o inverso de x é $\overline{x}/\Delta(x)$ e $\mathbb{H}$ é uma álgebra de divisão.

3 Preliminares

Introduziremos agora conceitos que serão importantes para a construção das álgebras de Clifford. Definiremos a *álgebra exterior* de um espaço vetorial, que é uma álgebra associativa com unidade e um exemplo de álgebra de Clifford. Essa álgebra será definida como um quociente de outra álgebra, chamada *álgebra tensorial*.

Na realidade, veremos que a partir da álgebra tensorial é possível construir muito mais do que apenas um exemplo de álgebra de Clifford.

Também definiremos e enunciaremos algumas propriedades de *formas quadráticas*, um ingrediente necessário para a construção de uma álgebra de Clifford.

A partir daqui, todo espaço vetorial considerado será real e de dimensão finita, a não ser que se explicite o contrário.

3.1 Produto tensorial

O produto tensorial de dois ou mais espaços vetoriais é um espaço vetorial com uma propriedade muito interessante: a universalidade com respeito a aplicações multilineares. Começaremos definindo aplicações multilineares.

Definição 3.1.1. *Sejam $V_1, \ldots, V_k$ e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ é dita multilinear, ou k-linear, se*

$$T(v_1, \ldots, \alpha u_i + \beta v_i, \ldots, v_k) = \alpha T(v_1, \ldots, u_i, \ldots, v_k) + \beta T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k),$$

para quaisquer $v_i, u_i \in V_i$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, com $i = 1, \ldots, k$. Ou seja, se T é linear em cada variável.

A motivação é construir um espaço vetorial U sobre $\mathbb{K}$ e uma aplicação k-linear $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_k \to U$ tal que para qualquer aplicação k-linear $f : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ é possível encontrar uma única aplicação linear

$g : U \to W$ de modo que $f = g \circ \varphi$. Ou seja, queremos um par U, φ que seja universal em relação a aplicações k-lineares de $V_1 \times \cdots \times V_k$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_k \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & U \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

A existência e unicidade desse espaço vetorial, juntamente com a aplicação φ, estão garantidas pelo seguinte teorema, conforme a referência [S].

Teorema 3.1.1. *Existe um espaço vetorial $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ juntamente com uma aplicação k-linear $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_k \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ que é universal em relação a aplicações k-lineares de $V_1 \times \cdots \times V_k$. É único a menos de um isomorfismo canônico.*

Usaremos a notação

$$\varphi(v_1, \ldots, v_k) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$$

e chamaremos $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ de *produto tensorial de* $V_1, \ldots, V_k$. É possível encontrar uma base para esse espaço a partir das bases dos espaços que o definem.

Proposição 3.1.1. *Dadas $\{e^1_{i_1}\}, \ldots, \{e^k_{i_k}\}$ bases de $V_1, \ldots, V_k$, respectivamente, o conjunto*

$$\{e^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^k_{i_k}\}$$

é uma base de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, com i_r variando de 1 a $\dim V_r$, para $r = 1, \ldots, k$.

Façamos um exemplo para elucidar a notação usada. Consideremos os espaços vetoriais V_1 e V_2, ambos de dimensão 2, com respectivas bases $\{e^1_1, e^1_2\}$ e $\{e^2_1, e^2_2\}$ e consideremos seu produto tensorial $V_1 \otimes V_2$. Assim, um elemento da forma $v_1 \otimes v_2$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} v_1 \otimes v_2 &= (\alpha e^1_1 + \beta e^1_2) \otimes (\gamma e^2_1 + \delta e^2_2) \\ &= \alpha\gamma(e^1_1 \otimes e^2_1) + \alpha\delta(e^1_1 \otimes e^2_2) + \beta\gamma(e^1_2 \otimes e^2_1) + \beta\delta(e^1_2 \otimes e^2_2), \end{aligned}$$

em que, na última igualdade, usamos a bilinearidade de $\otimes$.

Corolário 3.1.1.

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k) = \prod_{i=1}^{k} \dim V_i$$

Segue da propriedade universal do produto tensorial que, dados V_1, V_2, V_3 espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, o produto tensorial $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ é canonicamente isomorfo a $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$. Além disso, considerando o corpo $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre si mesmo, $\mathbb{K} \otimes V_1$ é canonicamente isomorfo a V_1.

Esses fatos nos permitem construir uma álgebra associativa com unidade a partir de um espaço vetorial V, chamada *álgebra tensorial de* V. Denotando o produto tensorial de k cópias de V como $\otimes^k V$, a álgebra tensorial de V é o espaço vetorial

$$\otimes^* V = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots \oplus (\otimes^k V) \oplus \cdots$$

com a lei de composição definida a partir do isomorfismo canônico $(\otimes^n V) \otimes (\otimes^m V) \cong \otimes^{n+m} V$

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_m.$$

A álgebra tensorial satisfaz uma propriedade universal:

Teorema 3.1.2. *Seja $S : V \to A$ uma aplicação linear de V em uma uma álgebra com unidade A. Então S se estende unicamente a um homomorfismo de álgebras $\tilde{S} : \otimes^* V \to A$ tal que $\tilde{S}(1) = 1_A$.*

Denotando por i a inclusão canônica de V em $\otimes^* V$, temos o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "S"'] & \otimes^* V \arrow[d, "\tilde{S}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

3.2 Produto exterior

Nesta seção, faremos as construções e enunciaremos os resultados usando a referência [BS]. Vamos considerar o ideal I de $\otimes^* V$ gerado por elementos da forma $v \otimes v$, com $v \in V$. Definimos a *álgebra exterior* como o quociente

$$\bigwedge^* V := \otimes^* V \;/\; I.$$

A álgebra exterior é uma álgebra associativa com unidade e denotaremos seu produto por $\wedge$. Por construção, $v \wedge v = 0$ para todo $v \in V$. Ademais,

$$\begin{aligned}
0 &= (v + u) \wedge (v + u) \\
&= v \wedge v + v \wedge u + u \wedge v + u \wedge u \\
&= v \wedge u + u \wedge v,
\end{aligned}$$

logo

$$v \wedge u = -u \wedge v.$$

De maneira mais geral, se σ é uma permutação de $\{1, \dots, k\}$,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)}$$

e, em particular, se $v_i = v_j$ com $1 \leq i < j \leq k$,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0.$$

Na realidade, para que a igualdade acima valha, basta que os vetores v_i e v_j sejam linearmente dependentes.

Definição 3.2.1. *O k-ésimo produto exterior de V é o subespaço vetorial de $\bigwedge^* V$ gerado pelos elementos do tipo*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k,$$

com $\{v_1, \dots, v_k\}$ linearmente independentes. Denotamos esse subespaço por $\bigwedge^k V$.

Com as propriedades de $\wedge$, vemos que se $\dim V = n$ e se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base de V, então $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ é uma base de $\bigwedge^k V$ e

$$\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Uma observação importante é que, se $k > n$, então $\bigwedge^k V = \{0\}$. É interessante notar também que $\bigwedge^1 V$ pode ser identificado com o espaço vetorial V. Logo, a álgebra exterior do espaço vetorial V pode ser expressa como soma direta do corpo $\mathbb{K}$ e dos produtos exteriores, ou seja,

$$\bigwedge^* V = \mathbb{K} \oplus V \oplus \bigwedge^2 V \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n V.$$

Com essas informações, deduzimos a dimensão da álgebra exterior: basta somar as dimensões de cada um dos espaços vetoriais acima.

Proposição 3.2.1. $\dim \bigwedge^* V = 2^n$

3.3 Produto tensorial de álgebras

Sejam A e B álgebras com unidade. Podemos formar o espaço vetorial $A \otimes B$ e torná-lo uma álgebra definindo a lei de composição $\cdot : (A \otimes B) \times (A \otimes B) \to A \otimes B$ como

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

$A \otimes B$ com essa lei de composição é uma álgebra associativa com unidade. Ademais

$$\{a \otimes 1_B : a \in A\} \cong A \quad \text{e} \quad \{1_A \otimes b : b \in B\} \cong B,$$

logo podemos considerar A e B como subálgebras de $A \otimes B$.

Notemos que

$$ab = (a \otimes 1_B)(1_A \otimes b) = a \otimes b = (1_A \otimes b)(a \otimes 1_B) = ba,$$

logo os elementos de A comutam com os elementos de B.

Será de interesse, na classificação das álgebras de Clifford, identificar (por meio de um isomorfismo) uma álgebra como produto tensorial de duas outras álgebras. Diremos que duas subálgebras F e G de uma álgebra C comutam se $fg = gf$ para quaisquer $f \in F$ e $g \in G$.

Proposição 3.3.1. *Sejam F, G subálgebras de uma álgebra com unidade de dimensão finita C que comutam e que geram C. Então existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : F \otimes G \to C$ que satisfaz $\phi(f \otimes g) = fg$ para quaisquer $f \in F$ e $g \in G$.*

A existência de tal homomorfismo é consequência da propriedade universal do produto tensorial. Notemos que temos um isomorfismo se, e somente se, $\dim C = (\dim F)(\dim G)$.

A partir dessa proposição, é possível estabelecer muitos isomorfismos de interesse. Vamos considerar $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $M_n(\mathbb{R})$ álgebras reais com suas operações usuais. Vamos também definir a álgebra $\mathbb{R}^n$ como sendo o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ com a lei de composição

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n) = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n).$$

Dessa forma, sendo A uma álgebra com unidade de dimensão finita, temos a seguinte proposição

Proposição 3.3.2. *(i)* $\mathbb{R}^n \otimes A \cong A^n$;

(ii) $M_n(\mathbb{R}) \otimes A \cong M_n(A)$;

(iii) $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{C})$.

3.4 Formas quadráticas reais

Nesta seção, estudaremos o último objeto matemático necessário para a construção das álgebras de Clifford: as formas quadráticas. Neste projeto, nos dedicamos apenas ao caso real, porém é possível definir formas quadráticas complexas e, com elas, álgebras de Clifford complexas. Nesta seção, as referências são [G] e [BS].

Definição 3.4.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $b : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Uma forma quadrática real associada a b é uma aplicação $q : V \to \mathbb{R}$ definida por $q(v) := b(v, v)$.*

Dada uma forma bilinear simétrica, podemos associar uma forma quadrática. Além disso, formas bilineares simétricas diferentes determinam formas quadráticas diferentes. Este fato segue das *formas de polarização*,

$$b(u, v) = \frac{q(u + v) - q(u) - q(v)}{2}, \quad b(u, v) = \frac{q(u + v) - q(u - v)}{4}.$$

Dado um espaço vetorial V equipado com uma forma quadrática q associada à forma bilinear simétrica b e $u, v \in V$, diremos que *u é ortogonal a v* ($u \perp v$) se $b(u, v) = 0$.

Proposição 3.4.1. *Toda forma bilinear simétrica pode ser escrita com o auxílio de um produto interno.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial n-dimensional, $b : V \times V \to V$ uma forma bilinear simétrica e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V. Dados $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i, v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \in V$, temos

$$\begin{aligned} b(u, v) &= b\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j b(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Definindo $b_{i,j} := b(e_i, e_j)$ e $B = (b_{ij})_{i,j}$ podemos reescrever da seguinte maneira

$$b(u, v) = \langle u, Bv \rangle,$$

sendo $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ e Bv um abuso de notação para denotar o produto da matriz B pelo vetor coluna formado pelos escalares v_i. $\square$

Graças à proposição acima e ao fato de que a matriz B pode ser diagonalizada, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1. *Seja b uma forma bilinear simétrica de um espaço vetorial V de dimensão n. Então existe uma base $\mathcal{B}$ de V e inteiros não negativos p e m tais que, se b é representada na base $\mathcal{B}$ pela matriz $B = (b_{ij})_{i,j}$, então*

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 1, \ \textit{para } 1 \leq i \leq p, \\ b_{ii} &= -1, \ \textit{para } p+1 \leq i \leq p+m, \\ b_{ij} &= 0, \ \textit{caso contrário.} \end{aligned}$$

Se $p + m = n$, dizemos que a forma quadrática associada q associada a b é não degenerada. Chamamos a base $\mathcal{B}$ de *base ortogonal* relativa a b e o par (p, m) de *assinatura* de q. É interessante chamar atenção ao fato de que, nas relações acima, há p sinais de $+$ e m sinais de $-$; de fato as letras escolhidas fazem referência a *"plus"* e *"minus"*.

Poderia acontecer que os inteiros p, m dependam da escolha da base ortogonal. Entretanto, um resultado muito importante conhecido como *Teorema de Sylvester*, ou *Lei da Inércia de Sylvester* garante que esses inteiros independem da escolha da base.

Chamaremos de *espaço quadrático* (V, q) um espaço vetorial V munido de uma forma quadrática q. Os espaços quadráticos cujas formas quadráticas são não degeneradas serão chamados de *regulares.* Denotaremos por $\mathbb{R}_{p,m}$ o espaço quadrático regular $\mathbb{R}^n$ cuja forma quadrática é

$$q(v) = \sum_{i=1}^{p} v_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} v_i^2.$$

Para finalizar essa seção, apresentaremos um fato que será importante para a classificação de álgebras de Clifford.

Se (V_1, q_1) e (V_2, q_2) são espaços quadráticos, então a soma direta $V = V_1 \oplus V_2$ também é um espaço quadrático com a forma quadrática $q(v_1+v_2) = q_1(v_1) + q_2(v_2)$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Se as assinaturas de (V_1, q_1) e (V_2, q_2) são (p_1, m_1) e (p_2, m_2), então a assinatura de (V, q) é $(p_1 + p_2, m_1 + m_2)$.

4 Álgebras de Clifford

Começaremos agora a estudar a estrutura algébrica central desse projeto. Nas seções anteriores, desenvolvemos todos os ingredientes necessários para a construção e classificação das álgebras de Clifford.

Há mais de uma forma de definir essa estrutura. Aqui, seguiremos a definição de [G].

4.1 Definição e exemplos

Definição 4.1.1. *Seja (V, q) um espaço quadrático de dimensão finita d sobre $\mathbb{R}$ e A uma álgebra associativa com unidade. Uma* aplicação de Clifford j *é uma aplicação linear injetora $j : V \to A$ tal que*

(i) $1 \notin j(V)$*;*

(ii) para todo $v \in V$, $(j(v))^2 = -q(v)1$.

Ademais, se

(iii) $j(V)$ gera A,

então A com a aplicação j é chamada álgebra de Clifford para (V, q) [G].

Em outras palavras, uma aplicação de Clifford é um isomorfismo de espaços vetoriais entre V e um subespaço de A que satisfaz as condições (i) e (ii).

Vale ressaltar que, no item (ii), $(j(v))^2$ significa operar o elemento $j(v) \in A$ com si próprio usando a lei de composição de A. O item (iii) significa que operar elementos da imagem de j usando as operações disponíveis em A (soma, multiplicação por escalar, composição de dois elementos) resulta em qualquer elemento de A que se queira.

Identificaremos $\mathbb{R}$ com span($\{1\}$) e chamaremos esses elementos de escalares. Identificaremos V com $j(V)$, de modo que V é visto como subespaço vetorial de A, e chamaremos esses elementos de vetores.

Eventualmente usaremos a notação $A(V, q)$ para nos referirmos a uma álgebra de Clifford A para (V, q).

Proposição 4.1.1. *Sejam $j : V \to A$ uma aplicação de Clifford, $u, v \in V$ e b a forma bilinear simétrica associada a q. Então*

$$j(x)j(y) + j(y)j(x) = -2b(x, y)1.$$

Pela proposição acima, se $x \perp y$, então $j(x)j(y) = -j(y)j(x)$.

Vejamos alguns exemplos.

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, q a forma quadrática degenerada identicamente nula e $A = \bigwedge^* V$. Defina $j : V \to \bigwedge^* V$, $j(v) = v$ (inclusão canônica). Dessa forma, j é linear e injetora, $1 \notin j(V)$ e
$$j(v)^2 = v \wedge v = 0 = -q(v),$$
logo j é uma aplicação de Clifford. Além disso, V gera toda a álgebra $\bigwedge^* V$, portanto $\bigwedge^* V$ é uma álgebra de Clifford para (V, q).

2. Seja V um espaço vetorial de dimensão 1 com um produto interno e base ortonormal $\{v_1\}$. Consideremos q a forma quadrática definida pelo quadrado da norma, de modo que $q(v_1) = 1$. Consideremos $\mathbb{C}$ a álgebra dos complexos e a aplicação linear injetora $j : V \to \mathbb{C}$ dada por $j(\lambda v_1) = \lambda i$. Dessa forma, $1 \notin j(V)$,

$$j(\lambda v_1)^2 = (\lambda i)^2 = -\lambda^2 = -q(\lambda v_1),$$

logo j é uma aplicação de Clifford e $\mathbb{C}$ é uma álgebra de Clifford para (V, q).

Essa definição de álgebra de Clifford, apesar de precisa, pode parecer um pouco abstrata e sem sentido. Felizmente existe uma equivalência que facilita o entendimento, dado pelo teorema abaixo.

Teorema 4.1.1. *Sejam A uma álgebra associativa com unidade, (V, q) um espaço quadrático de dimensão n e $a_1, \ldots, a_n \in A$. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortogonal. Então existe uma aplicação de Clifford $j : V \to A$ satisfazendo $j(e_i) = a_i$, $1 \leq i \leq n$, se, e somente se,*

$$\begin{gathered} a_i^2 = -q(e_i)1, \ 1 \leq i \leq n, \\ a_i a_j + a_j a_i = 0, \ 1 \leq i < j \leq n \\ e \ 1 \notin \operatorname{span}(\{a_1, \ldots, a_n\}). \end{gathered}$$

4.2 Universalidade e existência

Vejamos agora uma noção importante para a continuidade dos estudos dessas estruturas.

Definição 4.2.1. *Sejam $A(V, q)$ e $B(W, r)$ álgebras de Clifford. Diremos que $A(V, q)$ é universal se toda isometria $T : (V, q) \to (W, r)$ se estende a um homomorfismo de álgebras $\tilde{T} : A(V, q) \to B(W, r)$.*

$$\begin{tikzcd} (V,q) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "j_V"'] & (W,r) \arrow[d, "j_W"] \\ A(V,q) \arrow[r, "\tilde{T}"] & B(W,r) \end{tikzcd}$$

É imediato que $\tilde{T}$ é único e que uma álgebra de Clifford universal é única a menos de um isomorfismo canônico. Usaremos a notação $Cl(V, q)$ para nos referirmos à álgebra de Clifford universal para (V, q).

Consideremos uma álgebra de Clifford $A(V,q)$, com $\dim V = n$. Definimos o conjunto de índices $\Omega = \Omega(n) = \{1,\ldots,n\}$. Dado um conjunto de índices $C = \{i_1,\ldots,i_k\}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, definimos o elemento $e_C = e_{i_1}\ldots e_{i_k} \in A$. Definimos também $e_\varnothing = 1$. Notemos que se $|C| > 1$, então o elemento e_C depende da ordenação do conjunto C.

Proposição 4.2.1. *Seja $A(V,q)$ uma álgebra de Clifford e $P = \{e_C \in A : C \subseteq \Omega\}$. Então $A = \operatorname{span}(P)$. Ademais, se P é linearmente independente, então A é universal.*

Façamos um exemplo. Seja $\bigwedge^* V$ a álgebra de Clifford descrita no primeiro exemplo da seção anterior, com $\dim V = 3$. Temos que

$$P = \{1, e_1, e_2, e_3, e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}.$$

De fato $\bigwedge^* V = \operatorname{span}(P)$. Além disso P é linearmente independente, logo $\bigwedge^* V$ é uma álgebra de Clifford universal.

Notemos que, no exemplo acima, $|P| = 2^3$. Na verdade, sempre teremos que $|P| = 2^n$, com $n = \dim V$. Portanto, se $\dim A(V,q) = 2^n$, então A é universal.

Pelos exemplos dados, já vimos que existem pelo menos algumas álgebras de Clifford universais. Uma questão relevante é se existe uma estrutura dessa para cada espaço quadrático.

Teorema 4.2.1. *Seja (V,q) um espaço quadrático. Então existe a álgebra de Clifford universal $Cl(V,q)$.*

Uma das formas de demonstrar esse teorema é usando a álgebra tensorial $\otimes^* V$, seguindo o que foi feito em [BS]. Construímos o ideal I de $\otimes^* V$ gerado por elementos do tipo $v \otimes v + q(v)1$, com $v \in V$. A álgebra quociente $\otimes^* V/I$, juntamente com a inclusão canônica $j : V \to \otimes^* V/I$ é uma álgebra de Clifford. A universalidade segue da propriedade universal da álgebra tensorial.

É possível mostrar que, em uma álgebra de Clifford universal $Cl(V,q)$, $\dim V = n$, o subconjunto $P = \{e_C \in Cl(V,q) : C \subseteq \Omega\}$ é linearmente independente, o que implica que $\dim Cl(V,q) = 2^n$. Com tudo isso, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.2.2. *Uma álgebra de Clifford A para (V,q), $\dim V = n$, é universal se, e somente se, $\dim A = 2^n$.*

Chamaremos o elemento $e_\Omega = e_1 \cdots e_n$ de elemento de volume. Este elemento depende da orientação da base ortogonal, mas seu quadrado não. Na verdade, temos que, na álgebra de Clifford universal para um espaço quadrático regular,

$$e_\Omega = (-1)^{\frac{1}{2}d(d-1)+p}.$$

4.3 Classificação das álgebras de Clifford

Com todo o aparato que desenvolvemos até agora, podemos estudar a classificação das álgebras de Clifford universais. Faremos isso a partir dos espaços quadráticos regulares $\mathbb{R}_{p,m}$. Denotaremos a álgebra de Clifford universal para $\mathbb{R}_{p,m}$ por $Cl_{p,m}$.

Primeiramente, é imediado verificar os seguintes isomorfismos:

$$Cl_{2,0} \cong \mathbb{H}, \quad Cl_{1,1} \cong M_2(\mathbb{R}), \quad Cl_{0,2} \cong M_2(\mathbb{R}).$$

Construiremos outros isomorfismos a partir desses "bloquinhos", usando principalmente o produto tensorial de álgebras.

O teorema abaixo se refere ao caso em que o espaço vetorial tem dimensão par.

Teorema 4.3.1. *Seja (V, q) um espaço quadrático regular de dimensão $2k$ tal que V é a soma direta ortogonal $U \oplus W$, com $\dim U = 2k - 2$ e $\dim W = 2$. Sejam $\{w_1, w_2\}$ uma base ortonormal de W e ω um elemento de volume na subálgebra Cl_U de $Cl(V, q)$. Seja C a subálgebra de $Cl(V, q)$ gerada por $\{\omega w_1, \omega w_2\}$.*

Então C tem dimensão 4 e $Cl(V, q) \cong Cl_U \otimes C$.

Ademais, se W é hiperbólico ou se $w_1^2 = w_2^2 = \omega^2$, então $C \cong M_2(\mathbb{R})$; se $w_1^2 = w_2^2 = -\omega^2$, então $C \cong \mathbb{H}$.

Com esse resultado, podemos "quebrar" álgebras de Clifford (de espaços vetoriais de dimensão par) em álgebras de dimensão menor. Temos alguns resultados imediatos:

Corolário 4.3.1. *Se $p + m = 2k$, então $Cl_{p+1,m+1} \cong Cl_{p,m} \otimes M_2(\mathbb{R})$.*

Corolário 4.3.2. *Se $p - m \equiv 2$ ou $4 \pmod 8$, então $Cl_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbb{H})$. Se $p - m \equiv 0$ ou $6 \pmod 8$, então $Cl_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbb{R})$.*

Este último resultado é deduzido usando a Proposição 3.3.2. Aqui já é possível encontrar um comportamento 8-periódico nas álgebras de Clifford. Veremos mais adiante que esse padrão não é exclusivo para o caso em que o espaço quadrático tem dimensão par.

Se $n = p + m = 2k + 1$ for ímpar, teremos dois casos: ou $p - m \equiv 1$ $(mod\ 4)$, ou $p - m \equiv 3$ $(mod\ 4)$. Para verificar, basta supor n ímpar e $p - m$ algum dos outros dois casos e teremos um absurdo.

Lema 4.3.1. *Seja $Cl = Cl(V, q)$ uma álgebra de Clifford universal, com (V, q) regular n-dimensional, e e_Ω um elemento de volume de Cl. Seja $Z(Cl) := \{x \in Cl : xy = yx \quad \forall y \in Cl\}$, então*

$$Z(Cl) = \operatorname{span}(1, e_\Omega) \text{ se } n \text{ é ímpar, e } Z(Cl) = \operatorname{span}(1) \text{ se } n \text{ é par.}$$

Teorema 4.3.2. *Se $n = p + m = 2k + 1$ e $p - m \equiv 1 \pmod 4$, então $Cl_{p,m} \cong M_{2k}(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Consideremos F um subespaço de $\mathbb{R}_{p,m}$ de dimensão $2k$ e seja $Cl_F = Cl(F, q)$. Seja e_Ω um elemento de volume de $Cl_{p,m}$. Assim, pelo Lema 4.3.1,

$$Z(Cl_{p,m}) = \mathrm{span}(1, e_\Omega) =: C,$$

de modo que C e Cl_F comutam, geram $Cl_{p,m}$ e

$$2^{k+1} = \dim Cl_{p,m} = (\dim Cl_F)(\dim C),$$

portanto

$$Cl_{p,m} \cong Cl_F \otimes C.$$

Pelo que foi visto no final da seção 4.2, $e_\Omega^2 = -1$, logo $C \cong \mathbb{C}$. Pelo Corolário 4.3.2, temos duas possibilidades: $Cl_F \cong M_{2^{k-1}}(\mathbb{H})$ ou $Cl_F \cong M_{2^k}(\mathbb{R})$. No primeiro caso,

$$Cl_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{C} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbb{R}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \cong M_{2^k}(\mathbb{C}).$$

Já no segundo,

$$Cl_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \cong M_{2^k}(\mathbb{C}).$$

$\square$

O último caso restante é aquele em que $n = p + m$ é ímpar e $p - m \equiv 3 \pmod 4$. Separaremos em dois casos, descritos no teorema abaixo:

Teorema 4.3.3. *Seja $n = 2k + 1$ ímpar.*

(i) Se $p - m \equiv 3 \pmod 8$, então $Cl_{p,m} \cong M_{2^{k-1}}(\mathbb{H}) \oplus M_{2^{k-1}}(\mathbb{H})$.

(ii) Se $p - m \equiv 7 \pmod 8$, então $Cl_{p,m} \cong M_{2^k}(\mathbb{R}) \oplus M_{2^k}(\mathbb{R})$.

Dada uma álgebra de Clifford universal $Cl = Cl(V, q)$, definimos uma isometria de V como $m(v) = -v$. Pela propriedade universal, podemos estender essa isometria a um homomorfismo $\tilde{m}$ da álgebra $Cl(V, q)$ nela mesma. Temos que, para todo $a \in Cl(V, q)$, $\tilde{m}(\tilde{m}(a)) = a$, logo $\tilde{m}$ é uma involução e $Cl(V, q)$ é uma álgebra graduada, sendo

$$Cl^+ = \{a \in Cl : a = \tilde{m}(a)\} \text{ e } Cl^- = \{a \in Cl : a = -\tilde{m}(a)\}.$$

Finalizando o projeto, enunciaremos um dos teoremas mais importantes no estudo das álgebras de Clifford e de sua classificação, conhecido como Lei da Periodicidade de Cartan:

Teorema 4.3.4. *Existem isomorfismos que respeitam a graduação entre as álgebras graduadas* $Cl_{p+8,m}$, $Cl_{p,m+8}$ *e* $M_{16}(Cl_{p,m})$.

Este resultado expõe a 8-periodicidade presente nas álgebras de Clifford universais. Por conta disso, é suficiente expor os casos em que $0 \leq p, m \leq 7$. A tabela abaixo foi importada de [G], e resume todos os resultados dessa seção.

		p	$\rightarrow$						
		0	1	2	3	4	5	6	7
m	0	$\mathbb{R}$	C	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}^2$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}^2)$
$\downarrow$	1	$\mathbb{R}^2$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}^2)$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
	2	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}^2)$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}^2)$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$
	3	$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R}^2)$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}^2)$	$M_{16}(\mathbb{H})$
	4	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}^2)$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H}^2)$
	5	$M_2(\mathbb{H}^2)$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R}^2)$	$M_{32}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{H})$
	6	$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}^2)$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{R}^2)$	$M_{64}(\mathbb{R})$	$M_{64}(\mathbb{C})$
	7	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}^2)$	$M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{32}(\mathbb{C})$	$M_{64}(\mathbb{R})$	$M_{64}(\mathbb{R}^2)$	$M_{128}(\mathbb{R})$

Tabela 1: Álgebras de Clifford universais para espaços quadráticos regulares

Referências

[G] D. J. H. Garling, Clifford Algebras: An Introduction.

[S] S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry.

[BS] E. Batista e M. V. Santos, Rotações, Quatérnions e Álgebras de Clifford.

[SY] A. Skowroński e K. Yamagata, Frobenius Algebras I: Basic Representation Theory.

[P] I. R. Porteous, Clifford Algebras and the Classical Groups.

São Carlos, julho de 2022