Trabalho 05 - Interpolação

Arthur Vieira Silva

09 de Junho de 2025

Sumário

1 Introdução

A interpolação é recorrente em algumas situações, tais como: a coleta de valores amostrais em experimentos para geração de base de dados, em sistemas de computação gráfica, o usuário indica alguns pontos de referência, ou controle, e o computador deve preencher os caminhos intermediários desses pontos sem distorções e com alta velocidade de resposta, alguns modelos matemáticos são representados por funções, cuja expressão algébrica pode ser de uso inviável e, assim, é preciso obter uma função aproximadora, entre outras aplicações. Dada uma sequência de n reais $x_1 < x_2 < ... < x_n$, um conjunto de pontos $\{(x_i, y_i) \in I \times \mathbb{R}\}_{i=1}^{n}$, onde $I = [x_1, x_n]$ e uma família de funções $F_1 = \{\varphi : I \to \mathbb{R}\}$, a interpolação consiste em encontrar alguma função $f \in F_1$ tal que, $f(x_i) = y_i, i = 1, 2, ..., n$. Chamamos uma tal f de **função interpoladora** dos pontos dados, dizemos também que f interpola os pontos dados.

Diante desse contexto, o objetivo deste trabalho é implementar alguns métodos para encontrar um polinômio interpolador, são eles: **Polinômio de Lagrange**, **Polinômio de Newton** e **Polinômio na forma canônica**. Além disso, os métodos serão implementados utilizando a linguagem *Python* e também serão determinados os coeficientes $(a_1, a_2, ..., a_n)$ do polinômio interpolador na forma canônica, além de realizar a elaboração do gráfico com a função polinomial encontrada, fazendo o *plot* dos pontos (x_i, y_i) fornecidos. Com isso, três conjuntos de dados foram dados no enunciado do problema:

Tabela 1: Valores de x e y fornecidos na letra a)

X	**Y**
0	0,9
2	2,0
4	2,8
6	3,1
8	5,9
10	6,0

Tabela 2: Valores de x e y fornecidos na letra b)

X	**Y**
0	1
2	9,389
4	58,598
6	409,429
8	2988,958

Tabela 3: Valores de x e y fornecidos na letra c)

X	**Y**
0	1
2	7
4	21
6	22
8	34
10	34,5
12	35
14	64,5
16	65

Com isso, os métodos serão aplicados para estimar o valor de $x = 5,2$, por meio do polinômio interpolador de Lagrange e de Newton. Em relação ao polinômio interpolador na forma canônica, ele será **único**, independentemente da maneira de expressá-lo, o que generaliza o fato conhecido de que por dois pontos quaisquer passa uma única reta.

2 Solução numérica dos problemas propostos

2.1 Polinômio de Lagrange

Dado um conjunto de pontos $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ distintos dois a dois, definimos os polinômios de Lagrange como os polinômios de grau n que satisfazem:

$$L_i(x_i) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \tag{1}$$

Nesse caso, o interpolador $P_n(x)$ é expresso na forma de uma combinação linear da base definida por polinômios de Lagrange de grau n, $L_i(x), i = 1, ..., n+1$:

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{2}$$

Cada polinômio $L_i(x)$ se anula em todos os pontos conhecidos x_j, com exceção de um deles, x_i. Assim, um interpolador genérico $P_n(x)$ de grau n pode ser expresso como combinação linear da base de polinômios de Lagrange $L_i(x)$, ponderados diretamente por coeficientes com valores iguais a y_i:

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \tag{3}$$

A seguir, serão apresentadas as saídas obtidas na execução da função implementada para encontrar o valor do polinômio interpolador de Lagrange em $P(5,2)$ para cada uma das três alternativas, com os seus respectivos valores (x_i, y_i) previamente fornecidos:

```
A)

Interpolação de Lagrange:
        L_0(x) = 0.010752
        L_1(x) = -0.08735999999999998
        L_2(x) = 0.46591999999999983
        L_3(x) = 0.6988800000000002
        L_4(x) = -0.09984
        L_5(x) = 0.011648

        P(5.2) = 2.7868928

B)

Interpolação de Lagrange:
        L_0(x) = 0.0224
        L_1(x) = -0.14559999999999998
        L_2(x) = 0.5823999999999998
        L_3(x) = 0.5824000000000001
        L_4(x) = -0.0416

        P(5.2) = 146.89363360000004

C)

Interpolação de Lagrange:
        L_0(x) = 0.0025850880000000006
        L_1(x) = -0.03360614399999999
        L_2(x) = 0.3136573439999999
        L_3(x) = 0.9409720320000005
        L_4(x) = -0.33606144000000004
        L_5(x) = 0.156828672
        L_6(x) = -0.05535129600000001
        L_7(x) = 0.012220415999999998
        L_8(x) = -0.0012446719999999998

        P(5.2) = 19.810049024000005
```

Figura 1: Saída para o polinômio interpolador de Lagrange

2.2 Polinômio de Newton

Inicialmente, precisamos definir as diferenças divididas de Newton. Sendo assim, definimos as diferenças divididas $\Delta^k y_i$ no sentido ascendente por:

$f[x_i] = \Delta^0 y_i = y_i \Longrightarrow$ diferença de ordem 0;
$f[x_i, x_{i+1}] = \Delta^1 y_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \Longrightarrow$ diferença de 1° ordem;
$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \frac{\Delta y_{i+1}-\Delta y_i}{x_{i+2}-x_i}, \forall i = 1, ..., n-1 \Longrightarrow$ diferença de 2° ordem;
$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \Delta^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1}-\Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k}-x_i}, \forall i = 1, ..., n+1-k \Longrightarrow$ diferença de k-ésima ordem.

A partir disso, o polinômio interpolador de Newton é uma forma polinomial que interpola um conjunto de pontos previamente fornecidos utilizando o método das diferenças divididas, sendo definido da seguinte forma:

$$P_n(x) = f[x_0]+(x-x_0)f[x_0, x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2]+...+(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, ..., x_n] \quad (4)$$

Este método é extremamente vantajoso quando é preciso acrescentar um ponto qualquer no final de um conjunto de pontos discretos existente, mesmo que a sequência de pontos fique desordenada, e avaliar o novo interpolador correspondente incluindo mais uma parcela de diferenças divididas, permitindo a reutilização dos coeficientes já calculados e exigindo apenas o cálculo dos novos termos.

A seguir, serão apresentadas as saídas obtidas na execução das funções implementadas para encontrar tanto a tabela de diferenças divididas quanto o valor do polinômio interpolador de Newton em $P(5,2)$ para cada uma das três alternativas, com os seus respectivos valores (x_i, y_i) previamente fornecidos:

```
A)

Interpolação de Newton:
        Tabela de Diferenças Dividídas:
          0.9000          0.5500         -0.0375         -0.0042          0.0083         -0.0030
          2.0000          0.4000         -0.0625          0.0625         -0.0214
          2.8000          0.1500          0.3125         -0.1083
          3.1000          1.4000         -0.3375
          5.9000          0.0500
          6.0000

        P(5.2) = 2.7868928

B)

Interpolação de Newton:
        Tabela de Diferenças Dividídas:
          1.0000          4.1945          5.1025          5.4334          4.3393
          9.3890         24.6045         37.7027         40.1474
         58.5980        175.4155        278.5872
        409.4290       1289.7645
        2988.9580

        P(5.2) = 146.89363360000004

C)

Interpolação de Newton:
        Tabela de Diferenças Dividídas:
          1.0000          3.0000          1.0000         -0.4375          0.1172         -0.0238          0.0037         -0.0004          0.0000
          7.0000          7.0000         -1.6250          0.5000         -0.1211          0.0210         -0.0021          0.0000
         21.0000          0.5000          1.3750         -0.4688          0.0885         -0.0043         -0.0019
         22.0000          6.0000         -1.4375          0.2396          0.0456         -0.0272
         34.0000          0.2500          0.0000          0.6042         -0.2266
         34.5000          0.2500          3.6250         -1.2083
         35.0000         14.7500         -3.6250
         64.5000          0.2500
         65.0000

        P(5.2) = 19.810049024
```

Figura 2: Saída para o polinômio interpolador de Newton

2.3 Polinômio na forma canônica

Para aproximar uma função $y = f(x)$ contínua em $[a, b]$, podemos tomar n pontos $(x_i, y_i = f(x_i))$, com $i = 1, 2, ..., n$, $x_i \in [a, b]$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$, ou usamos uma função já representada por n pontos de uma tabela proveniente de um levantamento de dados. Tomamos um polinômio interpolador na forma canônica de grau n por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n \tag{5}$$

E aplicamos a seguinte condição:

$P_n(x_i) = y_i, i = 1, 2, ..., n$

Com isso, temos como resultado a seguinte expressão:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + ... + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n = y_0 \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n = y_1 \\ ... \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + ... + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{6}$$

que é um sistema com n equações lineares e n incógnitas a_i, com a seguinte forma matricial, chamada de **matriz de Vandermonde**:

$$
\begin{bmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\
1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n
\end{bmatrix}
$$

Resolvendo o sistema, obtemos os n coeficientes a_i do polinômio que passa por todos os n pontos $(x_i, y_i = f(x_i))$.

A seguir serão apresentadas as saídas obtidas na execução das funções implementadas para encontrar tanto o polinômio interpolador na forma canônica quanto o gráfico da função polinomial encontrada para cada uma das três alternativas, com os seus respectivos valores (x_i, y_i) previamente fornecidos:

```
A)
        Coeficientes a = [[ 0.9        -0.94833333  1.54166667 -0.51979167  0.06770833 -0.00296875]]

        P(x) = 0.900 - 0.948x^1 + 1.542x^2 - 0.520x^3 + 0.068x^4 - 0.003x^5

B)
        Coeficientes a = [[   1.          -170.82775     163.42947917  -46.6376875     4.33925521]]

        P(x) = 1.000 - 170.828x^1 + 163.429x^2 - 46.638x^3 + 4.339x^4

C)
        Coeficientes a = [[ 1.00000000e+00 -6.81976190e+01  8.07393353e+01 -3.40510417e+01
  7.23161892e+00 -8.50000000e-01  5.59353299e-02 -1.92522321e-03
  2.69329737e-05]]

        P(x) = 1.000 - 68.198x^1 + 80.739x^2 - 34.051x^3 + 7.232x^4 - 0.850x^5 + 0.056x^6 - 0.002x^7 + 0.000x^8
```

Figura 3: Saída para o polinômio interpolador na forma canônica

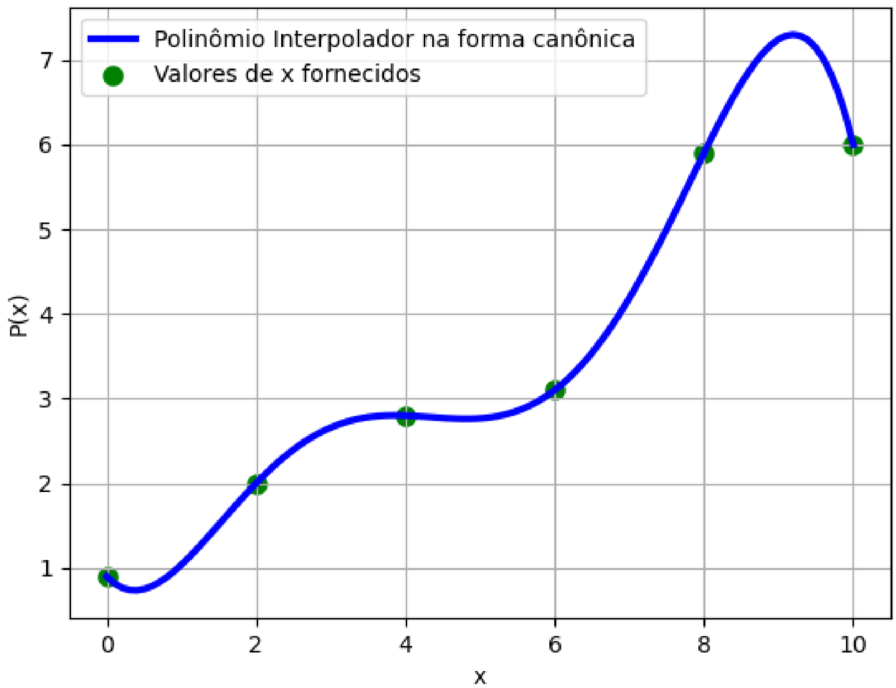

Figura 4: Gráfico do polinômio interpolador na forma canônica da letra a)

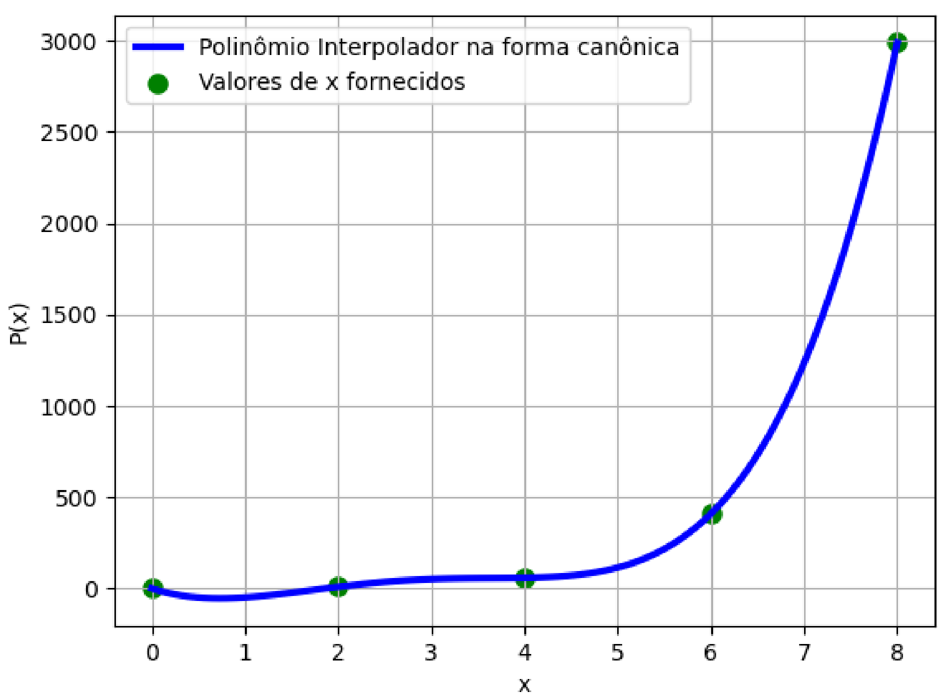

Figura 5: Gráfico do polinômio interpolador na forma canônica da letra b)

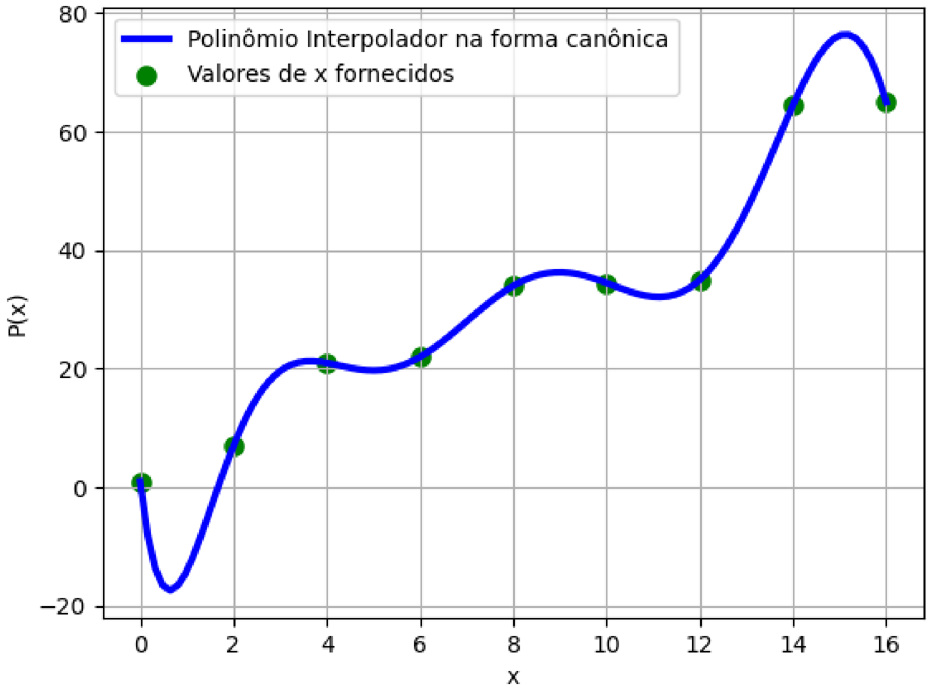

Figura 6: Gráfico do polinômio interpolador na forma canônica da letra c)

3 Análise dos resultados

Após a execução dos diferentes métodos, é possível afirmar que cada método será mais eficiente de acordo com a aplicação e o número de valores a serem estimados. O método de Newton, por exemplo, é mais eficiente quando é necessário realizar muitas estimativas em um mesmo conjunto de pontos, uma vez que as diferenças divididas podem ser reutilizadas sempre que necessário. Por outro lado, o método de Lagrange é mais eficiente quando é necessário efetuar estimativas em várias funções discretas com os mesmos valores independentes x, de maneira que os produtórios que envolvem apenas x, e que acompanham os valores independentes y_i, possam ser calculados anteriormente e reutilizados.

Na letra a), é possível notar que o valor estimado $P(5,2) = 2,7868928$ condiz com o gráfico gerado a partir do seu polinômio. O polinômio interpolador não oscila tanto, a tabela de diferenças dividas mostra uma diminuição gradual dos seus valores e o polinômio na forma canônica possui coeficientes com valores baixos.

Em relação a letra b), o valor estimado $P(5,2) = 146,8936$ também condiz com o gráfico. Além disso, valores maiores de x produzem uma maior oscilação nos valores de y, a tabela de diferenças divididas mostra como os valores de ordem mais alta são muito maiores e os coeficientes do polinômio na forma canônica possui coeficientes bastante elevados, evidenciando a instabilidade do polinômio interpolador.

Por fim, na letra c), o valor estimado $P(5,2) = 19,81$ também condiz com o gráfico. O polinômio interpolador oscila constantemente com mudanças de concavidade, a tabela de diferenças divididas mostra valores muito próximos de zero nas ordens menores e valores mais elevados nas ordens maiores e os coeficientes do polinômio na forma canônica variam de valores mais elevados para valores mais próximos de zero.

4 Referências

JUSTO, Dagoberto Adriano Rizzotto; SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio Souto de; GUIDI, Leonardo Fernandes; KONZEN, Pedro Henrique de Almeida (org.). Cálculo numérico: Um livro colaborativo versão Python. Porto Alegre: 2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf. Acesso em: 24 jan. 2023.

PETERS, Sérgio; SZEREMETA, Júlio Felipe. Cálculo numérico computacional. Florianópolis: Editora UFSC, 2018. 526 p. (Série Didática). Disponível em: https://sergiopeters.prof.ufsc.br/livro-calculo-numerico-computacional/. Acesso em: 27 maio 2025.