Trabalho 06 - Integração

Arthur Vieira Silva

24 de Junho de 2025

Sumário

1 Introdução

Métodos de integração são muito utilizados em diversas áreas, tais como: engenharia, física, economia, computação, entre outras. Sendo assim, a ideia é discutir algumas técnicas numéricas para aproximar integrais de funções reais. Mais precisamente, calcular a integral de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$, ou seja, $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Há situações em que o cálculo analítico de uma determinada integral a partir de uma primitiva pode ser indesejável ou impossível. Desse modo, técnicas de integração surgem com uma possibilidade de aproximar essa integral usando fórmulas que envolvam apenas o cálculo da função que se deseja integrar em alguns pontos pré-selecionados.

Diante desse contexto, o objetivo deste trabalho é implementar três métodos para aproximar integrais de funções reais, são eles: **Método do trapézio**, **1° Fórmula de Simpson** e **Quadratura Gaussiana**. Além disso, os métodos serão implementados utilizando a linguagem *Python* e também serão determinados os erros absolutos em cada um dos casos, isto é, a diferença entre o resultado analítico e a aproximação encontrada. Com isso, serão calculadas as seguintes integrais:

$$\int_0^2 3 + 4x - 3x^2 + 5x^3 - x^4 + 4x^5\,dx \tag{1}$$

$$\int_0^{20} \sqrt{x}\,dx \tag{2}$$

Para a Equação 1, o **Método do trapézio** será utilizado com 2,5 e 13 pontos, a **1° Fórmula de Simpson** com 3,5 e 13 pontos e a **Quadratura Gaussiana** com 1,2 e 3 pontos. Já para a Equação 2, o **Método do trapézio** será utilizado com 2,5,99, 599 e 10001 pontos, a **1° Fórmula de Simpson** com 2,5,99, 599 e 10001 pontos e a **Quadratura Gaussiana** com 5,10,15, 20,50 e 100 pontos.

2 Solução numérica dos problemas propostos

2.1 Método do trapézio

A regra do trapézio é uma das Regras de Newton-Cotes e consiste em aproximar a função $f(x)$ por um polinômio de grau 1: $p_1(x) = y_1 \times L_1(x) + y_2 \times L_2(x)$. O nome do método vem do fato que a região entre o eixo x e a reta que liga os pontos sobre o gráfico da função nos extremos do intervalo forma um trapézio.

Sabemos que a fórmula da área do trapézio é dada por $A = \frac{(B+b)\times h}{2}$. No contexto da integração, as bases dos trapézio são os valores da função nos extremos dos subintervalos, isto é, $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$, e a altura h é a largura de cada subintervalo. Dessa maneira, a regra do trapézio simples em um dado subintervalo $[a,b]$ é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (f(a) + f(b)) \times \frac{h}{2} \tag{3}$$

Entretanto, a precisão da Equação 3 não é tão boa, para melhorá-la podemos utilizar a regra do trapézio composta, na qual o intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos de larguras iguais a h, ou seja, $h = \frac{(b-a)}{n}$. Para n subintervalos, temos que a fórmula da regra do trapézio composta é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} \times [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \int_a^b f(x)\,dx \approx \tag{4}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} \times [f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{2n-1} f(x_i) + f(x_n)] \tag{5}$$

onde $x_0 = a, x_n = b$ e $h = \frac{b-a}{n}$.

A seguir, serão apresentadas as saídas obtidas na execução da função implementada para encontrar o valor aproximado da integral das funções mostradas anteriormente pelas Equações 1 e 2 utilizando o Método do trapézio para cada um dos diferentes números de pontos fornecidos no enunciado dos problemas, juntamente com o valor da integral analítica obtida e com os seus respectivos valores do erro absoluto calculado:

```
Exercício 1)


Intervalo [a, b] = [0, 2]
Integral analítica: 62.266666666666666

============ método do trapézio ============


n = 2 pontos
1 subintervalos
        Resultado da integral com o método do trapézio: 154.0
        Erro Absoluto para o método do trapézio: 91.73333333333333

n = 5 pontos
4 subintervalos
        Resultado da integral com o método do trapézio: 69.1875
        Erro Absoluto para o método do trapézio: 6.920833333333334

n = 13 pontos
12 subintervalos
        Resultado da integral com o método do trapézio: 63.04346707818929
        Erro Absoluto para o método do trapézio: 0.7768004115226219
Integral analítica: 62.266666666666666
```

Figura 1: Saída para o Método do trapézio no exercício 1

```
Exercício 2)

Intervalo [a, b] = [0, 20]
Integral analítica: 59.6284793999944

============ método do trapézio ============


n = 2 pontos
1 subintervalos
        Resultado da integral com o método do trapézio: 44.721359549995796
        Erro Absoluto para o método do trapézio: 14.907119849998601

n = 5 pontos
4 subintervalos
        Resultado da integral com o método do trapézio: 57.53698480687689
        Erro Absoluto para o método do trapézio: 2.0914945931175097

n = 99 pontos
98 subintervalos
        Resultado da integral com o método do trapézio: 59.60970143923674
        Erro Absoluto para o método do trapézio: 0.01877796075766014

n = 599 pontos
598 subintervalos
        Resultado da integral com o método do trapézio: 59.62721831400929
        Erro Absoluto para o método do trapézio: 0.001261085985106547

n = 10001 pontos
10000 subintervalos
        Resultado da integral com o método do trapézio: 59.628460843353025
        Erro Absoluto para o método do trapézio: 1.855664137195845e-05
Integral analítica: 59.6284793999944
```

Figura 2: Saída para o Método do trapézio no exercício 2

2.2 1° Fórmula de Simpson

A 1° Fórmula de Simpson, também chamada de Regra de $\frac{1}{3}$ de Simpson, é outra Regra de Newton-Cotes na qual aproximamos uma função f por um polinômio de grau 2, portanto precisamos de três pontos do intervalo $[a, b]$. Utilizando, por definição, $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$, com $h = \frac{x_2 - x_0}{2}$, isto é, a distância entre dois pontos consecutivos, podemos obter o polinômio de Lagrange: $p_2(x) = y_1 \times L_1(x) + y_2 \times L_2(x) + y_3 \times L_3(x)$. Para a 1° Fórmula de Simpson simples aplicada em um dado intervalo $[a, b]$, a integral é aproximada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}h \times [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \tag{6}$$

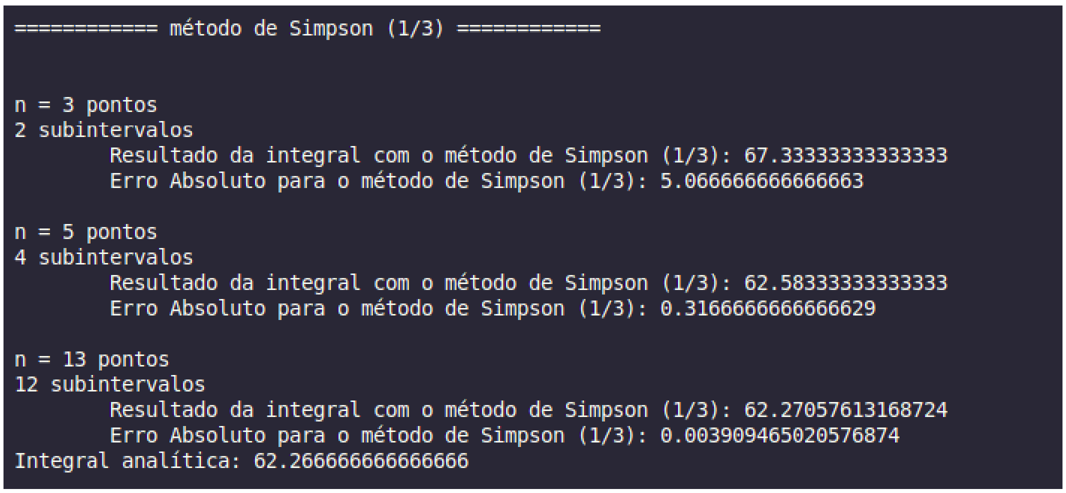
Contudo, assim como no método do trapézio, a Equação 6 também não possui uma boa precisão e, para melhorá-la, utilizamos a 1° Fórmula de Simpson composta, na qual o intervalo $[a, b]$ é dividido em um número par de subintervalos n (número de pontos ímpar). A 1° Fórmula de Simpson composta é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}h \times [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 2f(x_{n-1}) + 4(f(x_{n-1}) + f(x_n)] \tag{7}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}h \times \left[f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right] \tag{8}$$

onde $x_0 = a, x_n = b$ e $h = \frac{b-a}{n}$.

A seguir, serão apresentadas as saídas obtidas na execução da função implementada para encontrar o valor aproximado da integral das funções mostradas anteriormente pelas Equações 1 e 2 utilizando a 1° Fórmula de Simpson para cada um dos diferentes números de pontos fornecidos no enunciado dos problemas (o valor da integral analítica já foi fornecido previamente), juntamente com os seus respectivos valores do erro absoluto calculado:



```
============ método de Simpson (1/3) ============


n = 3 pontos
2 subintervalos
        Resultado da integral com o método de Simpson (1/3): 67.33333333333333
        Erro Absoluto para o método de Simpson (1/3): 5.066666666666663

n = 5 pontos
4 subintervalos
        Resultado da integral com o método de Simpson (1/3): 62.58333333333333
        Erro Absoluto para o método de Simpson (1/3): 0.3166666666666629

n = 13 pontos
12 subintervalos
        Resultado da integral com o método de Simpson (1/3): 62.27057613168724
        Erro Absoluto para o método de Simpson (1/3): 0.003909465020576874
Integral analítica: 62.266666666666666
```

Figura 3: Saída para a 1° Fórmula de Simpson no exercício 1

```
============ método de Simpson (1/3) ============


n = 2 pontos
Informe pelo menos 3 pontos!


n = 5 pontos
4 subintervalos
        Resultado da integral com o método de Simpson (1/3): 58.721494283608614
        Erro Absoluto para o método de Simpson (1/3): 0.9069851163857834

n = 99 pontos
98 subintervalos
        Resultado da integral com o método de Simpson (1/3): 59.62099461155891
        Erro Absoluto para o método de Simpson (1/3): 0.007484788435483836

n = 599 pontos
598 subintervalos
        Resultado da integral com o método de Simpson (1/3): 59.62798284542507
        Erro Absoluto para o método de Simpson (1/3): 0.0004965545693238482

n = 10001 pontos
10000 subintervalos
        Resultado da integral com o método de Simpson (1/3): 59.6284721386213
        Erro Absoluto para o método de Simpson (1/3): 7.261373099254342e-06
Integral analítica: 59.6284793999944
```

Figura 4: Saída para a 1° Fórmula de Simpson no exercício 2

2.3 Quadratura Gaussiana

No Método da Quadratura Gaussiana, para n pontos, conseguimos integrar polinômios de grau até $2n-1$, sendo significativamente mais precisa que as Regras de Newton-Cotes. Neste caso, ao contrário das Regras de Newton-Cotes, os métodos de integração são desenvolvidos de modo que os valores da integranda $f(x)$ são obtidos não em quaisquer pontos desejados do domínio $[a, b]$, mas em pontos previamente estabelecidos. A Quadratura Gaussiana escolhe os pontos para cálculo de uma forma ótima, em vez de igualmente espaçada.

A fórmula geral para a Quadratura Gaussiana é dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{9}$$

onde n é o número de pontos de amostragem, x_i são os nós gaussianos e w_i são os pesos gaussianos.

Resolvendo o sistema, obtemos os n coeficientes a_i do polinômio que passa por todos os n pontos $(x_i, y_i = f(x_i))$.

Como os pontos de cálculo da integranda são prefixados, temos de padronizar o domínio $[a, b]$ em um intervalo fixo e conhecido, então vamos padronizar o domínio de integração $[a, b]$ fixando em $[-1, 1]$. Por meio da seguinte mudança de variáveis:

$$x = \frac{1}{2}[(b-a) \times t + a + b], dx = \frac{(b-a)}{2})dt \tag{10}$$

Logo,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2} \times \int_{-1}^{1} f(\frac{1}{2}[(b-a)\times t + a + b])\,dt \tag{11}$$

Os valores dos nós e dos pesos são pré-tabelados para diferentes valores de n, alguns exemplos são:

Número de Pontos (n)	**Nós (x_i)**	**Pesos (w_i)**
1	$x_1 = 0$	$w_1 = 2$
2	$x_1 = -1/\sqrt{3}$	$w_1 = 1$
	$x_2 = 1/\sqrt{3}$	$w_2 = 1$
3	$x_1 = -\sqrt{3/5}$	$w_1 = 5/9$
	$x_2 = 0$	$w_2 = 8/9$
	$x_3 = \sqrt{3/5}$	$w_3 = 5/9$

A seguir, serão apresentadas as saídas obtidas na execução da função implementada para encontrar o valor aproximado da integral das funções mostradas anteriormente pelas Equações 1 e 2 utilizando o Método da Quadratura Gaussiana para cada um dos diferentes números de pontos fornecidos no enunciado dos problemas (o valor da integral analítica já foi fornecido previamente), juntamente com os seus respectivos valores do erro absoluto calculado:

```
============ método da Quadratura Gaussiana ============


n = 1 pontos
        Resultado da integral com o método da Quadratura Gaussiana: 24.0
        Erro Absoluto para o método da Quadratura Gaussiana: 38.266666666666666

n = 2 pontos
        Resultado da integral com o método da Quadratura Gaussiana: 58.88888888888888
        Erro Absoluto para o método da Quadratura Gaussiana: 3.377777777777787

n = 3 pontos
        Resultado da integral com o método da Quadratura Gaussiana: 62.26666666666668
        Erro Absoluto para o método da Quadratura Gaussiana: 1.4210854715202004e-14
```

Figura 5: Saída para o Método da Quadratura Gaussiana no exercício 1

```
============ método da Quadratura Gaussiana ============


n = 5 pontos
        Resultado da integral com o método da Quadratura Gaussiana: 59.68483931697736
        Erro Absoluto para o método da Quadratura Gaussiana: 0.05635991698296294

n = 10 pontos
        Resultado da integral com o método da Quadratura Gaussiana: 59.63647345659208
        Erro Absoluto para o método da Quadratura Gaussiana: 0.007994056597681265

n = 15 pontos
        Resultado da integral com o método da Quadratura Gaussiana: 59.6309578513652
        Erro Absoluto para o método da Quadratura Gaussiana: 0.002478451370805601

n = 20 pontos
        Resultado da integral com o método da Quadratura Gaussiana: 59.62954967070384
        Erro Absoluto para o método da Quadratura Gaussiana: 0.0010702707094409902

n = 50 pontos
        Resultado da integral com o método da Quadratura Gaussiana: 59.6285509176345
        Erro Absoluto para o método da Quadratura Gaussiana: 7.151764010160377e-05

n = 100 pontos
        Resultado da integral com o método da Quadratura Gaussiana: 59.628488472352224
        Erro Absoluto para o método da Quadratura Gaussiana: 9.072357826767075e-06
```

Figura 6: Saída para o Método da Quadratura Gaussiana no exercício 2

3 Análise dos resultados

Após a execução dos diferentes métodos, é possível afirmar que nenhum deve ser descartado a *priori* pois, por exemplo, o Método dos trapézios será o mais adequado para funções integrandas com gráfico tipo escada, o Método de Simpson é mais indicado para funções integrandas discretas (definidas por tabela de pontos) e o Método da Quadratura Gaussiana é mais eficiente, em geral, para funções integrandas com expressão conhecida.

Em relação ao Método do trapézio, no exercício 1, é possível observar que é necessário um número mais elevado de pontos para que o valor do erro absoluto diminua consideravelmente e, no exercício 2, também há uma diminuição no valor do erro absoluto conforme o número de pontos aumenta mas, a convergência é ainda mais lenta.

Já na 1° Fórmula de Simpson, no exercício 1, ela foi bem mais eficiente do que o Método do trapézio mesmo com um número de pontos mínimo, o erro absoluto já foi bem menor, atingindo uma precisão consideravelmente maior e, no exercício 2, também foi bem mais eficiente do que o Método do trapézio mas, evidencia que uma quantidade tão elevada de pontos torna-se desnecessária, visto que o valor do erro absoluto já é pequeno, mesmo com um número de pontos baixo.

Por fim, no Método da Quadratura Gaussiana, no exercício 1, foi bem mais eficiente que os outros dois métodos, note que, como a função possui grau 5, com 3 pontos, a função é integrada exatamente e, no exercício 2, apesar de demonstrar uma boa precisão, ela não atinge exatamente a precisão como no exercício 1, haja vista que a função não é polinomial.

4 Referências

JUSTO, Dagoberto Adriano Rizzotto; SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio Souto de; GUIDI, Leonardo Fernandes; KONZEN, Pedro Henrique de Almeida (org.). Cálculo numérico: Um livro colaborativo versão Python. Porto Alegre: 2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf. Acesso em: 24 jan. 2023.

PETERS, Sérgio; SZEREMETA, Júlio Felipe. Cálculo numérico computacional. Florianópolis: Editora UFSC, 2018. 526 p. (Série Didática). Disponível em: https://sergiopeters.prof.ufsc.br/livro-calculo-numerico-computacional/. Acesso em: 27 maio 2025.