Trabalho 07 - Ajuste de Curvas

Arthur Vieira Silva

8 de Julho de 2025

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho, será abordado o problema de ajuste de curvas pelo **método dos mínimos quadrados**. Dessa forma, dado um conjunto de N pontos $\{(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2\}_{j=1}^{N}$ e uma família de funções $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y = f(x)\}$, o problema de ajuste de curvas consiste em encontrar uma função da família $\mathcal{F}$ que melhor se ajusta aos pontos dados, não necessariamente que os interpola. O termo "melhor se ajusta"é entendido no sentido de mínimos quadrados, isto é, buscamos encontrar uma função $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x)$ resolve o seguinte problema de minimização:

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \sum_{j=1}^{N} (f(x_j) - y_j)^2 \tag{1}$$

Diante desse contexto, o objetivo deste trabalho é implementar o método dos mínimos quadrados (caso discreto) para encontrar uma função de segundo grau que melhor se ajusta aos dados fornecidos pela Tab. 1, plotar o gráfico da função encontrada, compará-la com o polinômio interpolador gerado no trabalho de interpolação e também implementar o método dos mínimos quadrados (caso contínuo) para encontrar um polinômio de terceiro grau que melhor ajusta a função $f(x) = sin(x)$ no intervalo de $[0, \pi/2]$. Além disso, os métodos serão implementados utilizando a linguagem *Python* e, para o caso contínuo, será feita uma comparação entre o valor real da função e o valor encontrado pelo polinômio gerado para alguns valores de x, mostrando também o erro provocado.

Em relação ao caso discreto, os dados fornecidos foram os seguintes:

x	**y**
0.000	1.000
2.000	7.000
4.000	21.000
6.000	22.000
8.000	34.000
10.000	34.500
12.000	35.000
14.000	64.500
16.000	65.000

Tabela 1: Dados fornecidos para o caso discreto

2 Solução numérica dos problemas propostos

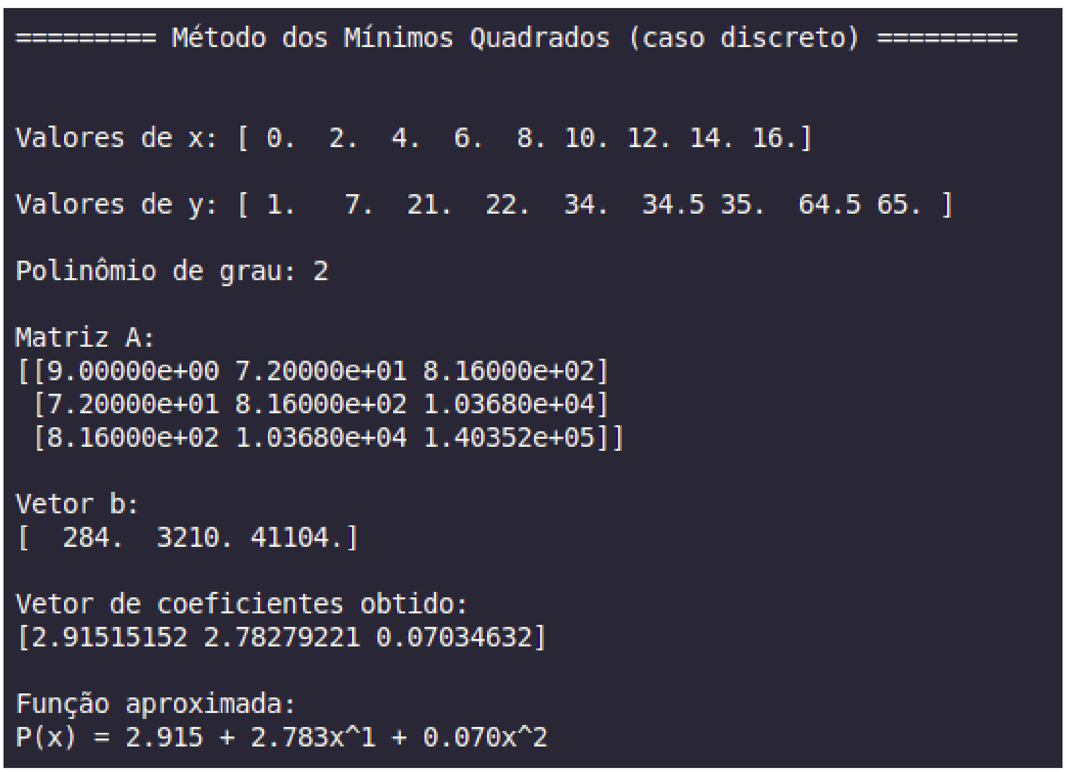
2.1 Método dos Mínimos Quadrados (caso discreto)

No Método dos Mínimos Quadrados (caso discreto), a ideia é ajustar a função $f(x)$, de forma que os desvios quadráticos sejam mínimos, isto é, os coeficientes a_i que fazem com que a função encontrada se ajuste ao máximo são os que minimizam a função de acordo com a Eq. 1. Sendo assim, como a função que melhor se ajusta aos dados fornecidos é de segundo grau, o sistema a ser solucionado possui o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i^3 & \sum_{i=1}^{N} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o sistema pode ser resolvido de várias maneiras diferentes mas, neste caso, utilizei a Eliminação de Gauss sem pivoteamento. Com a solução do sistema, os coeficientes a_i da função melhor ajustada são encontrados.

A seguir, serão apresentadas as saídas obtidas na execução da função implementada para encontrar a função que melhor ajusta os dados fornecidos, juntamente com o gráfico plotado com os pontos e a função de segundo grau encontrada:



```
========= Método dos Mínimos Quadrados (caso discreto) =========


Valores de x: [ 0.  2.  4.  6.  8. 10. 12. 14. 16.]

Valores de y: [ 1.   7.   21.   22.   34.   34.5 35.   64.5 65. ]

Polinômio de grau: 2

Matriz A:
[[9.00000e+00 7.20000e+01 8.16000e+02]
 [7.20000e+01 8.16000e+02 1.03680e+04]
 [8.16000e+02 1.03680e+04 1.40352e+05]]

Vetor b:
[  284.  3210. 41104.]

Vetor de coeficientes obtido:
[2.91515152 2.78279221 0.07034632]

Função aproximada:
P(x) = 2.915 + 2.783x^1 + 0.070x^2
```

Figura 1: Saída para o Método dos Mínimos Quadrados (caso discreto)

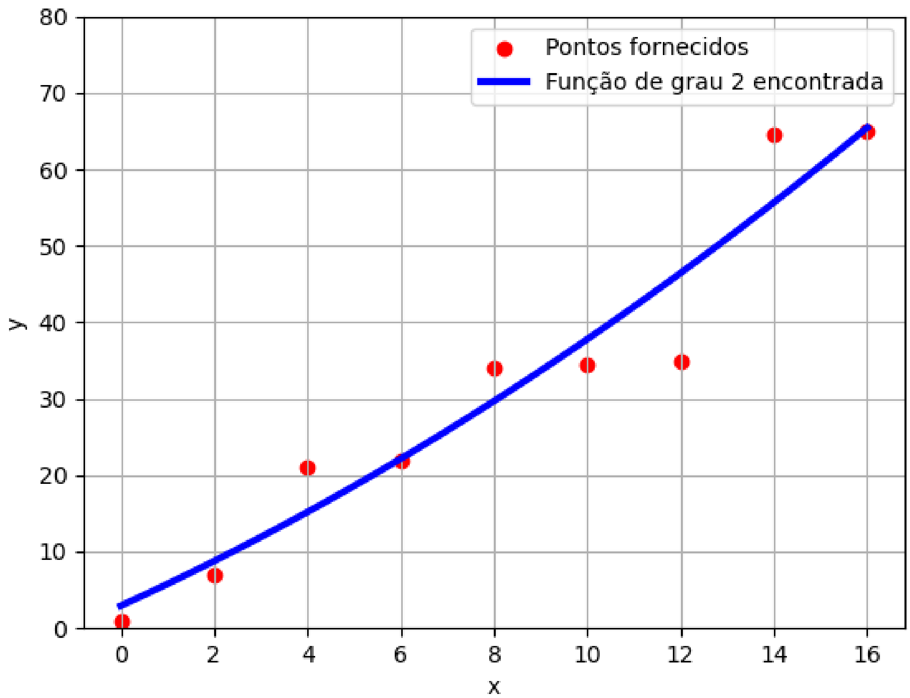


Figura 2: Gráfico dos pontos e da função de segundo grau encontrada

2.2 Método dos Mínimos Quadrados (caso contínuo)

Em relação ao Método dos Mínimos Quadrados (caso contínuo), a ideia é aproximar uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$ por uma combinação de funções: $f(x) = a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + ... + a_nP_n(x)$. Nesse caso, $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ representam funções contínuas nesse intervalo $[a, b]$. Logo, o objetivo é que a área entre as curvas de $f(x)$ e $P_n(x)$ seja mínima:

$$\int_a^b (f(x) - P_n(x))^2\, dx \tag{2}$$

Sabemos que o polinômio é dado por: $P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$. Assim, queremos minimizar $E = \int_a^b (f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_ix^i)^2\, dx$. Para isso, temos que anular as derivadas parciais em relação a cada coeficiente:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j} \int_a^b [f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_ix^i]^2\, dx = 0, \forall j = 0, ..., n \tag{3}$$

$$\int_a^b [f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_ix^i]^2 x^j\, dx = 0 \tag{4}$$

Sendo assim, como o polinômio que melhor ajusta a função $f(x) = sin(x)$ no intervalo $[0, \pi/2]$ é de terceiro grau, o sistema a ser solucionado possui o seguinte formato:

$$
\begin{bmatrix}
\int_0^{\pi/2} 1\,dx & \int_0^{\pi/2} x\,dx & \int_0^{\pi/2} x^2\,dx & \int_0^{\pi/2} x^3\,dx \\
\int_0^{\pi/2} x\,dx & \int_0^{\pi/2} x^2\,dx & \int_0^{\pi/2} x^3\,dx & \int_0^{\pi/2} x^4\,dx \\
\int_0^{\pi/2} x^2\,dx & \int_0^{\pi/2} x^3\,dx & \int_0^{\pi/2} x^4\,dx & \int_0^{\pi/2} x^5\,dx \\
\int_0^{\pi/2} x^3\,dx & \int_0^{\pi/2} x^4\,dx & \int_0^{\pi/2} x^5\,dx & \int_0^{\pi/2} x^6\,dx
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx \\
\int_0^{\pi/2} \sin(x)x\,dx \\
\int_0^{\pi/2} \sin(x)x^2\,dx \\
\int_0^{\pi/2} \sin(x)x^3\,dx
\end{bmatrix}
$$

Dessa forma, o sistema pode ser resolvido de várias maneiras diferentes mas, neste caso, utilizei a Eliminação de Gauss sem pivoteamento e o Método da Quadratura Gaussiana com 20 pontos para aproximar os valores das integrais. Com a solução do sistema, os coeficientes a_i do polinômio que melhor ajusta a função $f(x)$ são encontrados.

A seguir, serão apresentadas as saídas obtidas na execução da função implementada para encontrar o polinômio que melhor ajusta a função $f(x)$, juntamente com os valores reais de alguns pontos selecionados para compará-los com o valor aproximado a partir do cálculo do erro (o módulo da diferença entre o valor real e o valor aproximado):

```
========= Método dos Mínimos Quadrados (caso contínuo) =========


Intervalo [a, b] = [0, 1.5707963267948966]

Polinômio de grau: 3

Matriz A:
[[1.57079633 1.23370055 1.2919282  1.52201705]
 [1.23370055 1.2919282  1.52201705 1.91262303]
 [1.2919282  1.52201705 1.91262303 2.50361769]
 [1.52201705 1.91262303 2.50361769 3.37086298]]

Vetor b:
[1.         1.         1.14159265 1.4022033 ]

Vetor de coeficientes obtido:
[-0.00225844  1.02716934 -0.06994342 -0.11386861]

Função aproximada:
P(x) = -0.002 + 1.027x^1 - 0.070x^2 - 0.114x^3

       x |   sin(x) |     P(x) |     Erro
=============================================
  0.0000 |   0.0000 |  -0.0023 |   0.0023
  0.3927 |   0.3827 |   0.3834 |   0.0007
  0.7854 |   0.7071 |   0.7062 |   0.0009
  1.1781 |   0.9239 |   0.9246 |   0.0007
  1.5708 |   1.0000 |   0.9973 |   0.0027
```

Figura 3: Saída para o Método dos Mínimos Quadrados (caso contínuo)

3 Análise dos resultados

Após a execução dos diferentes métodos, é possível afirmar que em ambos os casos o Método dos Mínimos Quadrados foi capaz de ajustar as curvas de maneira eficiente e estável, tanto para encontrar uma função que melhor ajusta um conjunto de dados fornecidos quanto para encontrar um polinômio que melhor ajusta uma função.

Em relação ao Método dos Mínimos Quadrados (caso discreto), a solução do sistema linear forneceu a seguinte função de segundo grau: $f(x) = 2.915 + 2.783x + 0.070x^2$. Note que, apesar de ser possível visualizar na Fig. 2 que o gráfico do polinômio não passa exatamente por todos os pontos, ele oferece uma boa aproximação geral dos dados. Por outro lado, o polinômio interpolador encontrado em um trabalho anterior: $P_8(x) = 1.000 - 68.198x + 80.739x^2 - 34.051x^3 + 7.232x^4 - 0.850x^5 + 0.056x^6 - 0.002x^7 + 0.000x^8$, apesar de passar por exatamente todos os pontos, apresenta grandes oscilações nas extremidades do intervalo, não representando tão bem a tendência dos dados.

Por fim, no Método dos Mínimos Quadrados (caso contínuo), a solução do sistema linear fornecu o seguinte polinômio de terceiro grau: $P_3(x) = -0.002 + 1.027x - 0.070x^2 - 0.114x^3$. É possível afirmar que esse polinômio aproxima bem a função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, tendo em vista que os erros encontrados foram extremamente pequenos, sendo o maior deles 0.0027.

4 Referências

JUSTO, Dagoberto Adriano Rizzotto; SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio Souto de; GUIDI, Leonardo Fernandes; KONZEN, Pedro Henrique de Almeida (org.). Cálculo numérico: Um livro colaborativo versão Python. Porto Alegre: 2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf. Acesso em: 24 jan. 2023.

PETERS, Sérgio; SZEREMETA, Júlio Felipe. Cálculo numérico computacional. Florianópolis: Editora UFSC, 2018. 526 p. (Série Didática). Disponível em: https://sergiopeters.prof.ufsc.br/livro-calculo-numerico-computacional/. Acesso em: 27 maio 2025.