Trabalho 03 - Sistemas Lineares

Arthur Vieira Silva

12 de Maio de 2025

Sumário

1 Introdução

A solução de equações lineares é um problema recorrente em várias áreas, como engenheria, matemática, física, entre outras. Dessa forma, há várias técnicas numéricas que podem ser utilizadas para solucionar tais sistemas lineares, sendo assim, dois métodos serão implementados neste trabalho utilizando a linguagem *Python*: **Eliminação de Gauss sem pivoteamento** e **fatoração LU com pivoteamento parcial**. Além disso, a precisão das soluções será verificada por meio do cálculo do erro $||Ax - b||$.

Diante desse contexto, ambos os algoritmos implementados foram testados utilizando-se dois sistemas, nos quais o primeiro fornece uma matriz A de ordem 3 e o segundo uma matriz A um pouco mais complexa, de ordem 6. Tais sistemas de equações, as suas matrizes A e os seus vetores b podem ser visualizados a seguir:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.1x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 14x_6 = 14 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 + 21x_6 = 26 \\ 1x_1 + 200x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 - 4x_6 = 19 \\ -1x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 22x_4 + 7x_5 - 8x_6 = -5 \\ 4x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 10x_4 - 9x_5 + 1x_6 = 7 \\ -55x_1 - 1x_2 + 35x_3 + 1x_4 + 11x_5 + 0.2x_6 = -4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & -3 & 4 & 7 & 4 & 14 \\ -2 & 4 & 2 & 5 & -5 & 21 \\ 1 & 200 & 3 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 5 & 4 & 22 & 7 & -8 \\ 4 & 8 & 7 & 10 & -9 & 1 \\ -55 & -1735 & 1 & 11 & 0.2 & \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 26 \\ 19 \\ -5 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

2 Solução numérica dos problemas propostos

2.1 Eliminação de Gauss sem pivoteamento

No primeiro método, aplica-se várias operações elementares, transformando uma matriz estendida em uma matriz triangular, para simplificar o sistema de equações de modo que a sua solução possa ser obtida diretamente por **substituições retroativas** ou **sucessivas**. Nesse processo de eliminação, também denominado **escalonamento**, o objetivo é anular elementos não nulos para tornar a matriz estendida em uma matriz triangular. Tais operações elementares são:

1. multiplicação de uma linha por uma constante não nula;
2. substituição de uma linha por ela mesma somada a um múltiplo de outra linha;
3. permutação de duas linhas.

Esse processo de triangularização deve seguir uma sequência otimizada de passos k e, cada passo k, corresponderá à utilização da linha $i = k$ para eliminar os coeficientes da coluna $j = k$ usando operações elementares sobre linhas.

O processo de retrossubstituição sucessiva é realizado a partir da última equação, determinando a última incógnita e substituindo-a na equação anterior, e assim sucessivamente até obtermos todas as incógnitas.

A saída obtida nos dois exemplos foi a seguinte:

```
Solução a): [ 1. -1.  2.]
||Ax - B||: 1.6011864169946884e-15
Solução b): [-0.2761112   0.12975411 -0.37116164  0.36420978 -0.34745075  1.05298961]
||Ax - B||: 3.808638801538198
```

Figura 1: Saída para a Eliminação de Gauss sem pivoteamento

2.2 Fatoração LU com pivoteamento parcial

Em relação a Fatoração LU com pivoteamento parcial, é realizada uma permutação de linhas de forma a escolher o maior pivô (em módulo) a cada passo, para evitar a presença de pivôs nulos e minimizar a acumulação de erros de arredondamento. Para a fatoração LU, considere um sistema linear $Ax = b$, onde a matriz A é densa. A fim de resolver o sistema, podemos fatorar a matriz A como o produto de uma matriz L triangular inferior e uma matriz U triangular superior, ou seja, $A = LU$. Dessa forma, o sistema pode ser reescrito da seguinte forma:

$$Ax = b \tag{1}$$

$$(LU)x = b \tag{2}$$

$$L(Ux) = b \tag{3}$$

$$Ly = b, Ux = y \tag{4}$$

Com isso, ao invés de resolver o sistema original, pode-se solucionar o sistema triangular inferior e o sistema triangular superior dados pela Equação 4, o qual nos fornece a solução da Equação 1.

A matriz U da fatoração LU é a matriz obtida ao final do escalonamento da matriz A. Por outro lado, a matriz L é construída a partir da matriz identidade I, ao longo do escalonamento de A. Os elementos da matriz L são os múltiplos do primeiro elemento da linha de A **a ser zerado** dividido pelo pivô acima na mesma coluna. Por exemplo, sabemos que para zerar o primeiro elemento da segunda linha de A, calculamos $L_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}$ e fazemos $A_{2,:} \Leftarrow A_{2,:} - L_{21}A_{1,:}$.

A principal vantagem da Fatoração LU sobre a Eliminação de Gauss é a possibilidade de reutilizar as matrizes L e U decompostas em outros sistemas que usem a mesma matriz A de coeficientes e com diferentes vetores b de termos independentes.

A saída obtida nos dois exemplos foi a seguinte:

```
Solução a): [ 1. -1.  2.]
||Ax - B||: 0.0
Solução b): [-0.11139017  0.12961284 -0.17011024  0.2833979  -0.41245904  1.05331924]
||Ax - B||: 8.236627820231227e-15
```

Figura 2: Saída para a Fatoração LU com pivoteamento parcial

3 Análise dos resultados

Após a execução dos algoritmos, é possível afirmar que ambos conseguiram encontrar soluções válidas para os sistemas propostos mas, a qualidade das soluções encontradas se diferencia bastante e ela pode ser avaliada por meio do cálculo do erro $||Ax - b||$, descrito anteriormente.

Em relação ao sistema do primeiro exemplo, temos que, no primeiro algoritmo, o erro calculado foi de, aproximadamente, 1.6012×10^{-15} e para o segundo algoritmo, o erro calculado foi de 0.0. Já em relação ao segundo sistema, o erro calculado para o primeiro algoritmo foi de, aproximadamente, 3.8086 e para o segundo algoritmo, o erro calculado foi de, aproximadamente, 8.2366×10^{-15}.

Portanto, é possível afirmar que as soluções com menores erros foram as que utilizaram a Fatoração LU com pivoteamento parcial, uma vez que as linhas das matrizes foram reorganizadas de modo que o erros de arredondamento foram evitados pois, divisões por valores muito pequenos não ocorreram. Por outro lado, nota-se que na Eliminação de Gauss, as soluções produziram um erro mais elevado, possivelmente, porque acontecerem divisões por valores muito pequenos, já que há alguns números bem menores presentes nas diagonais principais.