Trabalho 08 - EDO

Arthur Vieira Silva

16 de Julho de 2025

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho, será abordado o problema da aplicação de métodos numéricos para a resolução de uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem. Uma **equação diferencial** é toda equação que envolve derivada(s) de uma função desconhecida $y = y(t)$. Se nessa equação estiverem envolvidas derivadas em relação a uma única variável, até a ordem n, ela será denominada de **Equação Diferencial Ordinária** de ordem n, genericamente representada por:

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{'}, ..., y^{(n-1)}), t \in [a, b] \tag{1}$$

em que $y = y(t)$ é uma função desconhecida, $y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n-1)}$ são as suas respectivas derivadas ordinárias até a ordem $(n - 1)$.

Diante desse contexto, o objetivo deste trabalho é determinar o valor da equação $y(t)$ no ponto $t = 2$ utilizando o **Método de Euler Simples** (16 e 64 passos) e o **Método de Euler Melhorado** (8 e 32 passos). Ambos os métodos foram implementados utilizando a linguagem, *Python*. Com isso, a equação dada é a seguinte:

$$y^{'} = y + e^{(2t)} + \sin(t) + \cos(t), y_0 = f(0) = 0.0 \tag{2}$$

Após a aplicação dos métodos, os resultados obtidos serão comparados com a solução exata da equação, dada por: $y = e^{(2t)} - \cos(t)$. Além disso, serão plotados os gráficos em cada caso, visando avaliar o impacto do número de passos na aproximação da solução exata.

2 Solução numérica dos problemas propostos

2.1 Método de Euler Simples

No Método de Euler Simples, não temos a solução de $y = y(t)$, mas o seu valor aproximado em alguns pontos no intervalo $[a, b]$. Inicialmente, é preciso definir pontos de malha igualmente espaçados dentro desse intervalo, dividindo o domínio em n partes iguais, resulta o passo constante $h = \frac{(b-a)}{n}$.

Sendo assim, a seguinte forma recursiva é utilizada para calcular o valor aproximado de y em pontos sucessivos:

$$y_{n+1} = y_n + h \times f(t_n.y_n) \tag{3}$$

onde: h é o tamanho do passo (ou subintervalo), $t_n = t_0 + h$, e y_n representa a aproximação numérica da solução no ponto t_n.

A seguir, serão apresentadas as saídas obtidas na execução da função implementada para encontrar a aproximação da Eq. 2 para o Método de Euler Simples, juntamente com o gráfico plotado para 16 e 64 passos:

```
========= Método de Euler Simples (16 passos) =========

t = [0.    0.125 0.25  0.375 0.5   0.625 0.75  0.875 1.    1.125 1.25  1.375
 1.5   1.625 1.75  1.875 2.   ]
 y = [ 0.          0.25        0.58136223  1.01216221  1.56540501  2.27049188
  3.16510378  4.29761884  5.73021407  7.54284451  9.83834756 12.74899113
 16.4448741  21.1447045  27.12962933 34.76098198 44.50305901]

========= Método de Euler Simples (64 passos) =========

t = [0.      0.03125 0.0625  0.09375 0.125   0.15625 0.1875  0.21875 0.25
 0.28125 0.3125  0.34375 0.375   0.40625 0.4375  0.46875 0.5     0.53125
 0.5625  0.59375 0.625   0.65625 0.6875  0.71875 0.75    0.78125 0.8125
 0.84375 0.875   0.90625 0.9375  0.96875 1.      1.03125 1.0625  1.09375
 1.125   1.15625 1.1875  1.21875 1.25    1.28125 1.3125  1.34375 1.375
 1.40625 1.4375  1.46875 1.5     1.53125 1.5625  1.59375 1.625   1.65625
 1.6875  1.71875 1.75    1.78125 1.8125  1.84375 1.875   1.90625 1.9375
 1.96875 2.     ]
 y = [ 0.          0.0625      0.12992972  0.20254175  0.28060405  0.36440098
  0.45423447  0.55042518  0.65331375  0.76326224  0.88065545  1.00590257
  1.13943875  1.28172684  1.43325928  1.59456004  1.76618675  1.9487329
  2.14283024  2.34915131  2.56841214  2.80137513  3.04885206  3.31170739
  3.59086172  3.88729542  4.20205261  4.53624529  4.89105782  5.26775159
  5.66767012  6.09224436  6.54299838  7.0215555   7.52964467  8.06910738
  8.64190496  9.25012637  9.89599644 10.58188476 11.31031498 12.08397486
 12.90572683 13.77861937 14.705899   15.69102312 16.73767361 17.84977138
 19.03149183 20.28728123 21.6218743  23.04031278 24.54796527 26.15054838
 27.85414912 29.66524886 31.59074878 33.63799693 35.81481707 38.12953941
 40.59103319 43.20874155 45.99271847 48.95366818 52.10298714]

Valor exato de y(2) = 55.01429686969138
```

Figura 1: Saída para o Método de Euler Simples

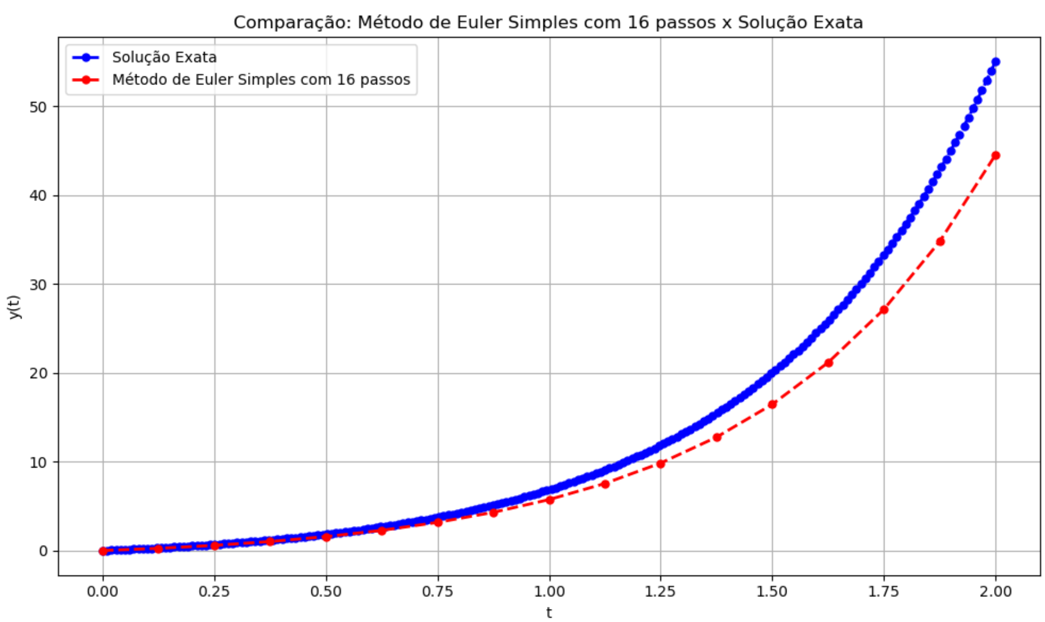

Figura 2: Gráfico para o Método de Euler Simples (16 passos)

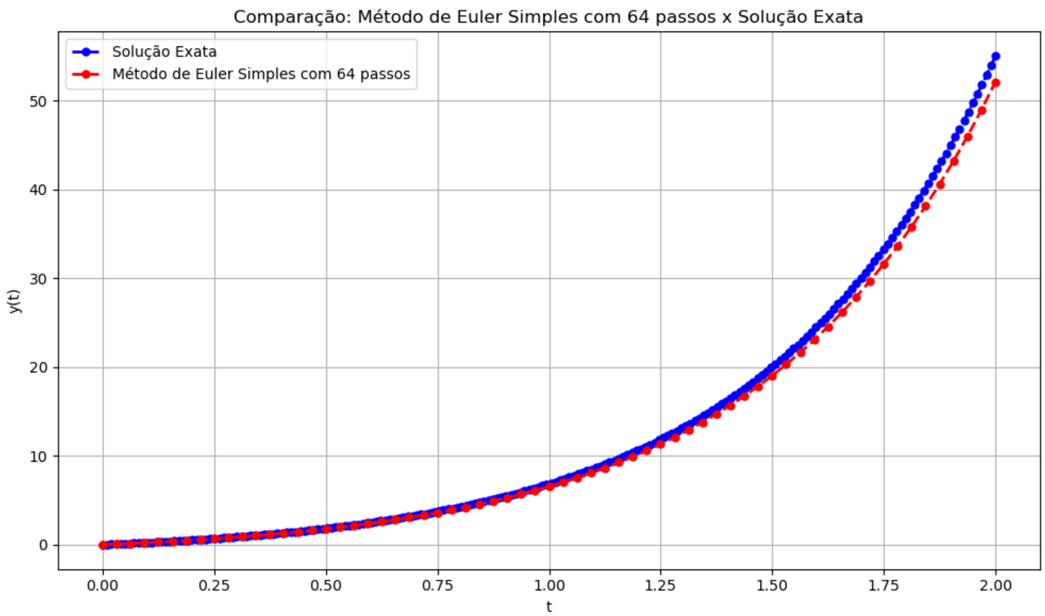

Figura 3: Gráfico para o Método de Euler Simples (64 passos)

2.2 Método de Euler Melhorado

O Método de Euler apresentado na seção anterior possui uma aplicação bastante restrita em função da sua baixa precisão, ou seja, normalmente precisamos escolher um passo h muito pequeno para obter soluções de boa qualidade, implicando em um número elevado de passos e, por conseguinte, alto custo computacional.

Dessa forma, no Método de Euler Melhorado, busca-se aumentar a precisão da solução, em vez de utilizar apenas a inclinação do início do intervalo, o método estima a inclinação média entre o início e o final do subintervalo. Assim sendo, a fórmula de iteração é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \times (f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y^*_{n+1})) \tag{4}$$

onde: $y^*_{n+1} = y_n + h \times f(t_n, y_n)$, $y_{n+1} = y_n + h$ e $h = \frac{(b-a)}{n}$.

Esse método é um método de segunda ordem, isto é, o erro global é proporcional a h^2. representando uma melhora significativa em relação ao Método de Euler Simples, principalmente, quando o número de passos é maior.

A seguir, serão apresentadas as saídas obtidas na execução da função implementada para encontrar a aproximação da Eq. 2 para o Método de Euler Melhorado, juntamente com o gráfico plotado para 8 e 32 passos:

```
========= Método de Euler Melhorado (8 passos) =========

t = [0.   0.25 0.5  0.75 1.   1.25 1.5  1.75 2.  ]
 y = [ 0.          0.67062971  1.81631769  3.70079817  6.75909769 11.71138613
 19.75049726 32.85075002 54.27662227]

========= Método de Euler Melhorado (32 passos) =========

t = [0.     0.0625 0.125  0.1875 0.25   0.3125 0.375  0.4375 0.5    0.5625
 0.625  0.6875 0.75   0.8125 0.875  0.9375 1.     1.0625 1.125  1.1875
 1.25   1.3125 1.375  1.4375 1.5    1.5625 1.625  1.6875 1.75   1.8125
 1.875  1.9375 2.    ]
 y = [ 0.          0.13495798  0.29152071  0.47202332  0.67909974  0.91572468
  1.18526118  1.49151455  1.83879351  2.23197949  2.67660512  3.17894326
  3.74610774  4.3861676   5.10827648  5.92281913  6.84157752  7.87791883
  9.04700859 10.36605198 11.85456729 13.53469558 15.43155164 17.57362142
 19.99321234 22.7269635  25.81642359 29.30870574 33.25722935 37.72256058
 42.7733647  48.48748496 54.95316512]

Valor exato de y(2) = 55.01429686969138
```

Figura 4: Saída para o Método de Euler Melhorado

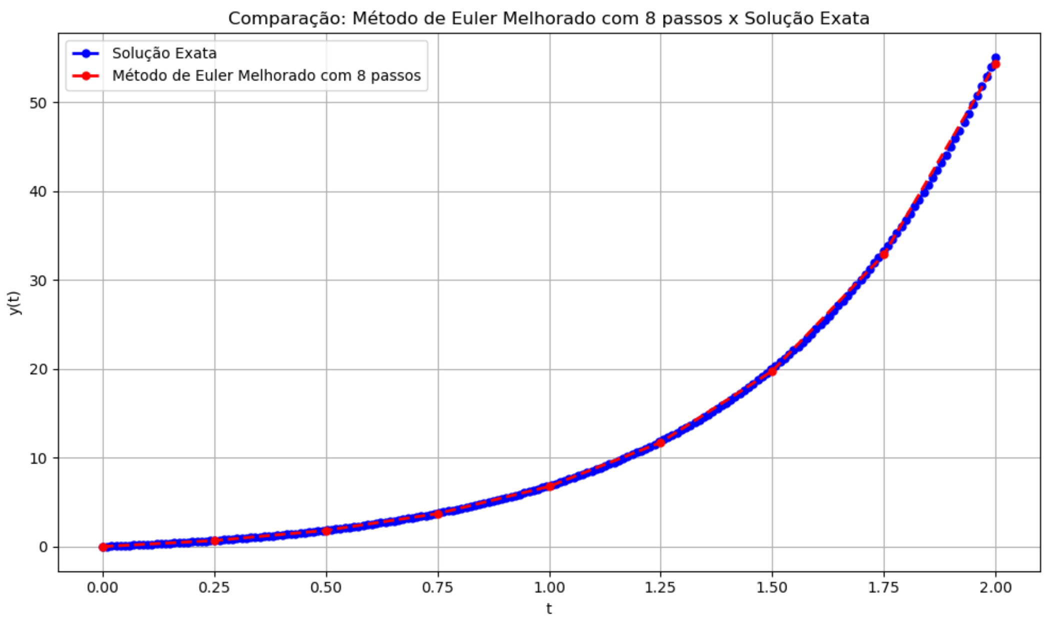

Figura 5: Gráfico para o Método de Euler Melhorado (8 passos)

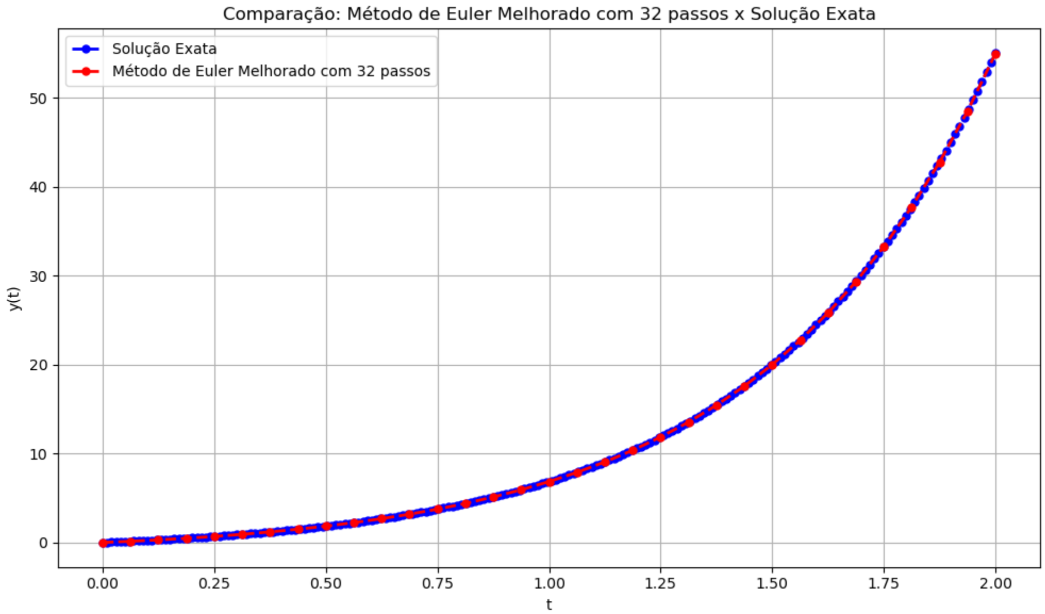

Figura 6: Gráfico para o Método de Euler Melhorado (32 passos)

3 Análise dos resultados

Após a execução dos métodos, é possível visualizar a aproximação final obtida na Tab. 1:

Método	**Passos (n)**	**Valor aproximado de $y(2)$**	**Erro absoluto**
Euler Simples	16	44,503059	10,511238
Euler Melhorado	8	54,276622	0,737675
Euler Simples	64	52,102987	2,911310
Euler Melhorado	32	54,953165	0,061132

Tabela 1: Comparação entre os métodos numéricos e a solução exata para $y(2)$.

Em relação ao Método de Euler Simples com 16 passos, o erro gerado foi significativo e a aproximação não foi tão boa. É possível visualizar isso na Fig. 2, onde a curva vermelha (solução numérica) se distancia da curva azul (solução exata), principalmente, em $t > 1$.

No caso do Método de Euler Simples com 64 passos, a aproximação melhorou, mas ainda apresenta um erro absoluto consideravelmente alto. Na Fig. 3, é possível notar que a curva vermelha está um pouco afastada ainda da curva azul, isto é, aumentar o número de passos ajudou, apesar de não compensar as limitações do método.

Em relação ao Método de Euler Melhorado com 8 passos, é possível notar que, apesar de ser um número muito menor de passos, a aproximação já foi consideravelmente melhor, fornecendo um erro absoluto baixo. Na Fig. 5, é possível visualizar que as duas curvas estão quase coladas, ou seja, esse método reduz o erro significativamente, mesmo com um número de passos baixo.

Por fim, no caso do Método de Euler Melhorado com 32 passos, a solução aproximada é bem mais próxima da solução exata, com um erro absoluto de apenas cerca de $0,0611$. Na Fig. 6, as curvas praticamente coincidem em todo o intervalo $[0,2]$, evidenciando o quão pequeno é o erro absoluto.

4 Referências

JUSTO, Dagoberto Adriano Rizzotto; SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio Souto de; GUIDI, Leonardo Fernandes; KONZEN, Pedro Henrique de Almeida (org.). Cálculo numérico: Um livro colaborativo versão Python. Porto Alegre: 2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf. Acesso em: 24 jan. 2023.

PETERS, Sérgio; SZEREMETA, Júlio Felipe. Cálculo numérico computacional. Florianópolis: Editora UFSC, 2018. 526 p. (Série Didática). Disponível em: https://sergiopeters.prof.ufsc.br/livro-calculo-numerico-computacional/. Acesso em: 27 maio 2025.