Produtos Notáveis

Definição

Produtos notáveis são fórmulas que simplificam cálculos específicos, tornando o cálculo mais eficiente.

Quadrado da soma de dois termos

$$(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Quadrado da diferença de dois termos

$$(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cubo da soma de dois termos

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Cubo da diferença de dois termos

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^3 - b^3$$

Soma de dois cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Diferença de dois cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Exemplos:

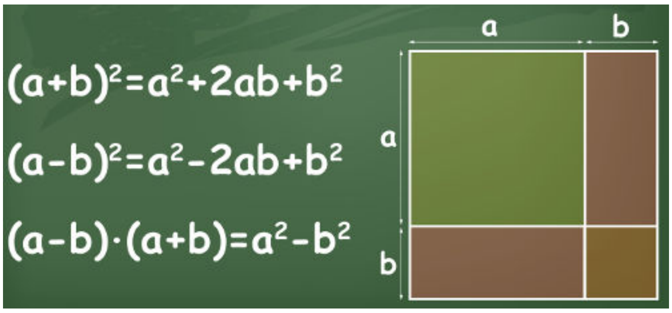
a) $(3x + 8)(3x - 8)$

b) $(x + 3)^2$

c) $(5y - 4)^2$

d) $(2x - 3y)^3$

Visualização Gráfica



Potenciação

Potenciação é uma maneira rápida de multiplicar um número várias vezes por ele mesmo. Ele é composto pela base e o expoente.

- Base : O número que será multiplicado.
- Expoente : Indica quantas vezes o número será multiplicado.

Exemplo: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Propriedades da Potenciação

Sendo a e b números reais e m e n naturais, valem as seguintes propriedades:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0 \;\text{ e }\; m \geq n)$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

1. Potência de expoente natural

O expoente natural significa que o número elevado é inteiro e positivo como. Para potência de expoente natural possuímos dois casos especiais:

- Quando a base é elevada a 1, o resultado é a própria base:

Exemplo: $5^1 = 5$

- Quando a base é elevada a 0, o resultado será 1 (somente se a base for diferente de zero):

Exemplo: $5^0 = 1$

2. Potência de expoente inteiro negativo

Quando temos um expoente negativo, dizemos que é o inverso da base elevada ao expoente positivo. Faremos apenas divisão e não multiplicação, ou seja, dividimos 1 pela base elevada ao expoente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos:

1) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

2) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

3) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{-\frac{1}{32}} = -32$

Raízes

A raiz enésima de um número nos ajuda a descobrir qual número é multiplicado por ele mesmo várias vezes (de acordo com o índice n) para chegar no valor original. Quando falamos de raiz enésima, estamos lidando com a ideia de desfazer uma potência.

Notação:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0 \quad \text{e} \quad b^n = a$$

Chamamos a de radicando, sendo a o número que queremos descobrir a raíz e n o índice.

Observações:

1) A raíz de um número a com índice n, quando elevado pela potência n, resulta no próprio a, desde que $a \geq 0$.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

2) A raíz enésima não dá dois resultados (negativo e positivo), apenas o resultado positivo:

$$\sqrt{36} = 6 \quad (\text{e não} \pm 6)$$

3) Quando tiramos a raíz quadrada de um número ao quadrado, o resultado sempre será positivo, independentemente de o número original ser positivo ou negativo.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

4) Situações distintas conforme o índice da raíz:

Quando o índice da raíz é par:
- Se $a < 0$, não existe raíz de a.
- Se $a = 0$, então a raíz será zero.

Quando o índice da raíz é ímpar:
- A raíz existe para qualquer número real, incluindo negativos:
  - $\sqrt[3]{-8} = -2$
  - $\sqrt[5]{1} = 1$

Propriedades da Radiciação

Sendo a e b não negativos, m inteiro e n e p naturais não nulos, valem as seguintes propriedades:

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
2. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a^m}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$
4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
5. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

Potência de expoente racional

Dados um número real a, um número inteiro m e um número natural n $(n \geq 1)$, chama-se de potência de base a e expoente $\frac{m}{n}$ a raíz enésima aritmética de a^m.

O índice da raíz será o n e o m será a potência de a:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
- $64^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^{-1}}$
- $0^{\frac{11}{5}} = 0$
- $100^{-2} = \sqrt{100^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$

Todas as propriedades da potenciação valem também para casos onde o expoente é um número $\frac{m}{n}$.

Simplificação de Raízes

A simplificação de raízes consiste em expressar uma raiz quadrada de forma mais simples, retirando fatores quadrados perfeitos de dentro do radical.

Ela funciona da seguinte maneira: o valor dentro da raiz é fatorado e verifica-se a possibilidade dele ser reescrito como quadrado perfeito.

Exemplo:

Simplificando $\sqrt{48}$:
- Passo 1: fatorar 48

$$48 = 16 \cdot 3 \quad \text{(repare que 16 é um quadrado perfeito)}.$$

- Passo 2:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Racionalização de denominadores

Quando temos uma fração com raiz no denominador, podemos simplificar os cálculos eliminando essa raiz. Esse processo é chamado de **racionalização**.

Regra geral:

Sempre que tivermos uma fração com raiz no denominador, podemos racionalizá-la multiplicando o numerador e o denominador por um valor que elimine a raiz do denominador.

Exemplo:

a) Se calcularmos diretamente $\frac{3}{\sqrt{5}}$, seria complicado utilizar o resultado em cálculos futuros. Para simplificar isso, vamos multiplicar tanto o numerador quanto o denominador pelo valor que anula a raíz, que nesse caso é ela mesma:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

b) Neste caso não podemos simplesmente multiplicar pelo denominador pois isso não irá nos ajudar a remover a raiz do denominador.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$$