Funções

Dado dois conjuntos A e B, não vazios, uma função é um relacionamento dos elementos de um dos conjuntos para o outro. Sendo:

$$A = \{1, 2, 3\};$$

$$B = \{1, 4, 9\};$$

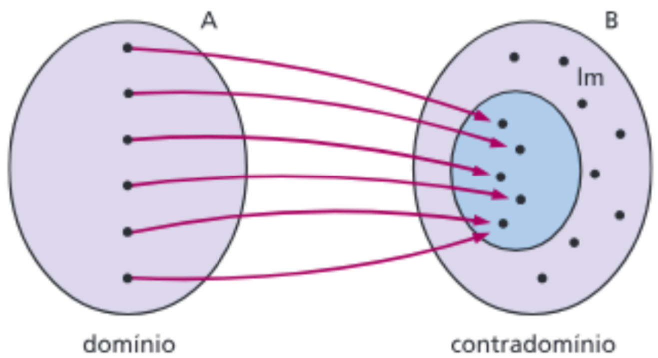
Com uma função $f(x) = x^2$ Conseguimos realizar um mapeamento do conjunto A para o B. Como prova vemos abaixo que todos os elementos de A aplicados na função resultam em um elemento do conjunto B.

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

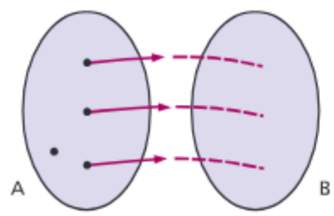
$$f(3) = 3^2 = 9$$

De maneira mais formal descrevemos que a $f : A \to B$, neste exemplo A recebe o nome de domínio da função, enquanto B é nomeado como o conjunto imagem da função.



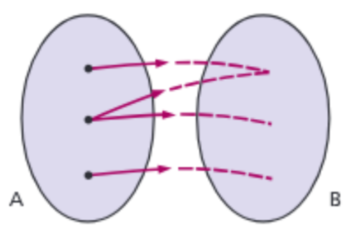
Uma relação f não é função se não satisfizer uma das condições acima, isto é:

1ª) Se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma.



f não é função

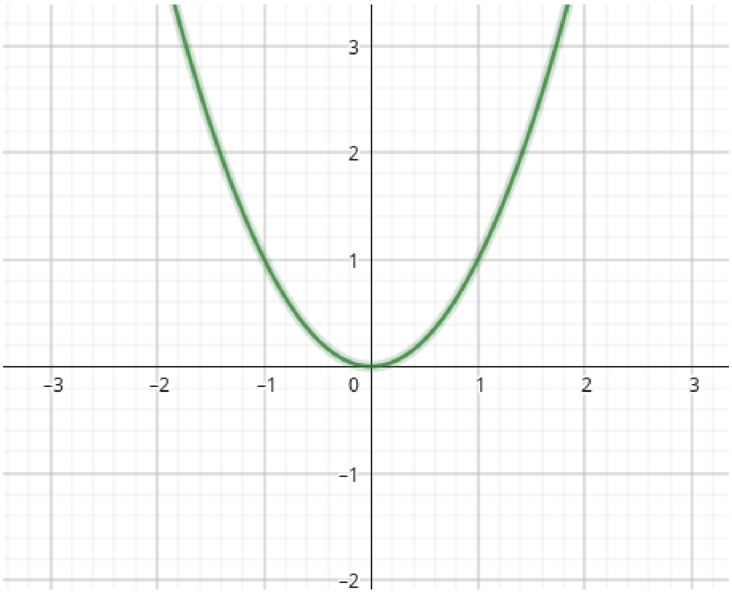
2ª) Se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.



f não é função

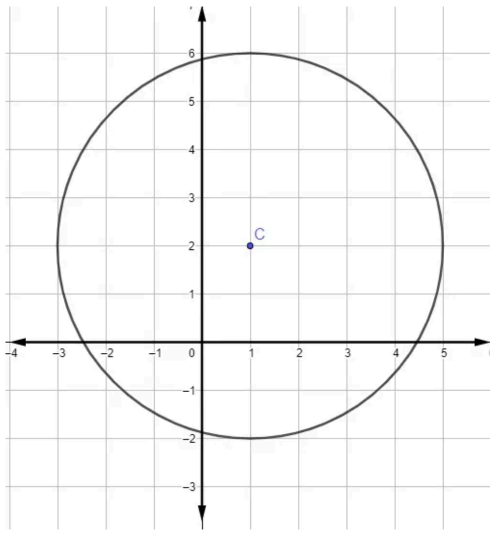
Interpretação de Gráficos

Os relacionamentos entre os conjuntos podem ser visualizados no plano cartesiano, sendo $f : X \to Y$. Abaixo temos o gráfico da $f(x) = x^2$



Durante a representação de uma função no plano cartesiano utilizamos $f(x) = y$, assim podendo ser representado pelos pares ordenados $(x, f(x))$.

Lembrando que nem todo gráfico representa uma função, por exemplo:

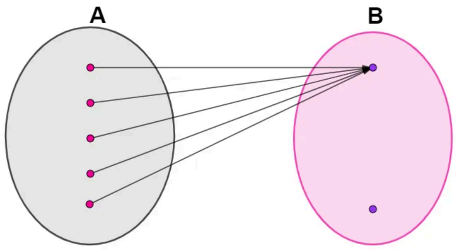


O gráfico acima não representa uma função, pois para um valor de x temos dois valores para y que correspondem ao mesmo coordenada x, importante ressaltar que dois valores x_1 e x_2 podem resultar em um mesmo y, como na $f(x) = x_2$, onde -2 e 2 resultam em 4.

Função Constante

Uma função recebe o nome de função constante quando associa a cada elemento x pertencente aos reais, o mesmo elemento c pertencente aos reais. f(x) = c

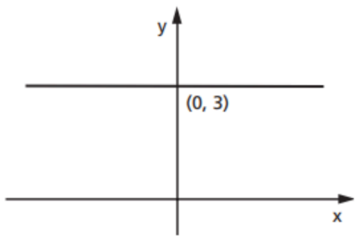
- O gráfico é uma reta paralela ao eixo a passando pelo ponto $(0, c)$
- A imagem é o conjunto $\mathrm{Im} = \{c\}$



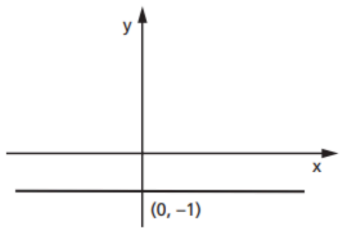
Todos os elementos do conjunto A (possíveis valores de x) estão mapeados para o mesmo elemento de B (resultado y). O resultado é sempre o mesmo independente do x, o que indica uma função constante.

Exemplos: Construir os gráficos das aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

1) $y = 3$



2) $y = -1$



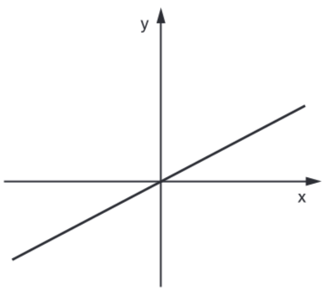
Função Linear

Definição

Uma função recebe o nome de função linear quando ela relaciona cada elemento $x \in \mathbb{R}$ para um $ax \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. A função linear possui a seguinte aparência:

$f(x) = ax$

Como $y = ax$ pode ser reescrita como $\frac{y}{a} = x$, de tal modo que impossibilita a ser 0. O gráfico da função linear consiste em uma reta que passa pela origem.



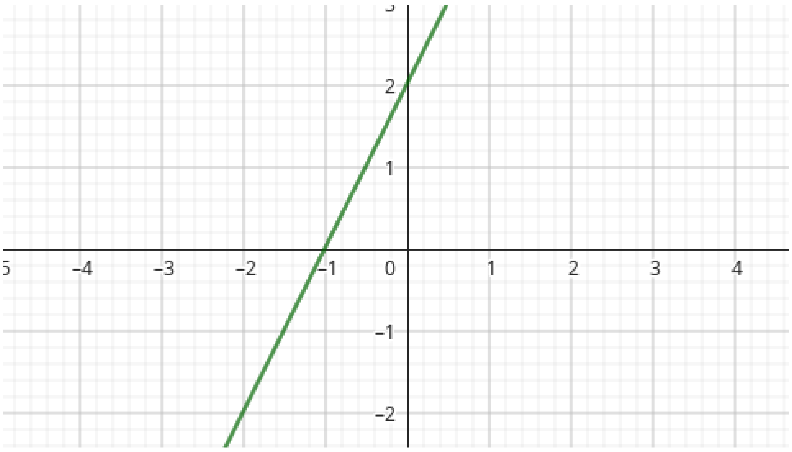
Um exemplo de função linear é $f(x) = 2x$

Observação: A função linear que a cada elemento x associa o próprio x é chamada de função identidade.

Função Afim

Chama-se função polinomial do 1º grau ou função afim, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e $a \neq 0$, portanto b pode ser 0, assim fazendo com que a função afim se transforme em uma função linear.

A função afim, apresenta uma aparência semelhante a função linear, porém com algumas leves diferenças:



Coeficientes da função afim

O coeficiente a da função $y = ax + b$ é denominado coeficiente angular ou declividade da reta representada no plano cartesiano. O coeficiente b da função $y = ax + b$ é denominado coeficiente linear.

Zero da função afim

Como a função afim possui a seguinte aparência $y = ax + b$, quando igualamos $y = 0$ obtemos uma equação do primeiro grau com a seguinte aparência.

$$ax + b = 0$$

Função Quadrática

Definição

Uma função recebe o nome de função quadrática ou do 2º grau quando associa a cada elemento x pertencente aos reais o elemento $ax^2 + bx + c$ pertencente aos reais. a, b e c são números reais e $a \neq 0$. $f(x) = ax^2 + bx + c$

Exemplos de funções quadráticas:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ em que $a = 1, b = -3, c = 2$
2) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ em que $a = 2, b = 4, c = -3$
3) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ em que $a = -3, b = 5, c = -1$
4) $f(x) = x^2 - 4$ em que $a = 1, b = -3, c = 4$
5) $f(x) = -2x^2 + 5x$ em que $a = -2, b = 5, c = 0$
6) $f(x) = -3x^2$ em que $a = -3, b = 0, c = 0$

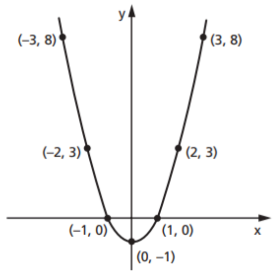
Gráfico

O gráfico da função quadrática é uma parábola:

Exemplos:

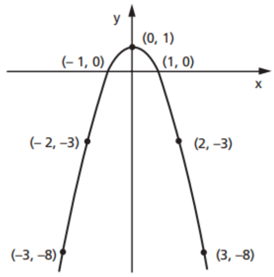
1º) Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$.

x	$y = x^2 - 1$
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8



2º) Construir o gráfico de $y = -x^2 + 1$.

x	$y = -x^2 + 1$
-3	-8
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3
3	-8



Exercícios:

1. Determine uma função quadrática tal que $f(-1) = -4$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$
2. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(1) = 4$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$, determine o produto abc.

Concavidade

A parábola que representa a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ pode ter a concavidade voltada para "cima" ou voltada para "baixo". O que irá determinar isso é o sinal de a.

- Se $a > 0$, concavidade para cima;
- Se $a < 0$, concavidade para baixo.

Forma Canônica

Anteriormente foi apresentado a construção do gráfico de uma função quadrática através de uma tabela de valores x e y, porém às vezes esse método pode ser impreciso.

Considere a função abaixo:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

x	$f(x)$
0	1
1	$\frac{7}{2}$
2	7
3	$\frac{19}{2}$

Ao tentar construir a tabela de valores, percebemos que, para certos valores de x, $f(x)$ pode resultar em números que não são inteiros, dificultando a obtenção de pontos precisos para traçar o gráfico manualmente.

Portanto, para estudarmos a função quadrática de forma mais detalhada, vamos primeiramente transformá-la em uma forma mais conveniente: a forma canônica.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\right) \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4}a^2\right)\right] \end{aligned}$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, também chamado discriminante do trinômio do segundo grau, temos a forma canônica:

Zeros
Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x tais que $f(x) = 0$. Para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau, nós a igualamos a zero e resolvemos para x:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ao encontrar uma forma de resolver essa equação para x, garantimos que podemos aplicar esse método a qualquer equação do segundo grau, independentemente dos valores específicos de a, b e c. Isso significa que temos um método sistemático para lidar com qualquer situação que envolva uma função quadrática.

Utilizando a forma canônica para resolver a equação:

$$ax^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = +-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b + -\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Número de raízes

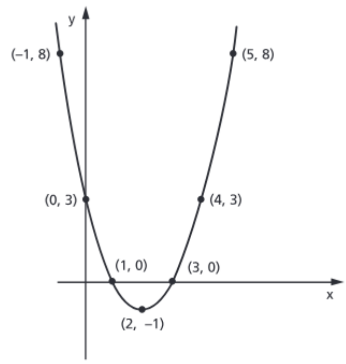
Observe que a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real. Assim, temos três casos a considerar:

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x = \left(-b + \sqrt{\Delta}\right) \\ \Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{ não existem raízes reais.} \end{cases}$$

Significado geométrico das raízes

Interpretando geometricamente, dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x.

Exemplo: Construindo o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ podemos notar que a parábola corta o eixo dos x nos pontos de abscissas 1 e 3, que são as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.



Máximo e Mínimo

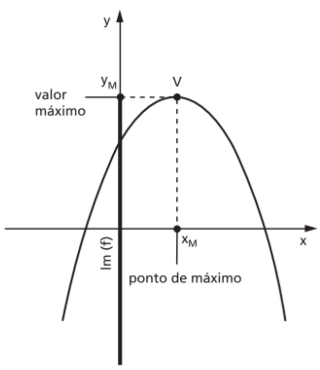
Dizemos que o número y_m, que pertence à imagem da função $f(x)$, é o valor máximo se ele for o maior valor que a função atinge.

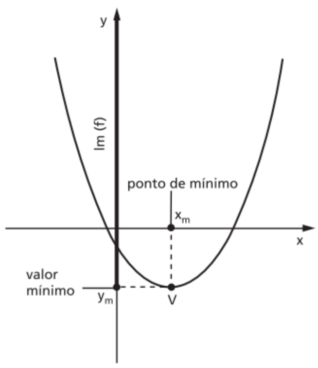
- Ou seja, $y_m \geq y$ para todos os outros valores que pertencem à imagem da função.

O ponto x_m, que está no domínio da função, é chamado ponto de máximo, e é onde a função atinge o seu valor máximo, ou seja, $y_m = f(x_m)$. De forma similar, dizemos que y_m é o valor mínimo da função se ele for o menor valor que a função atinge.

- Ou seja, $y_m \leq$ para todos os outros valores de y da imagem da função.

O ponto x_m, que está no domínio da função, é chamado ponto de mínimo, e é onde a função atinge o seu valor mínimo, ou seja, $y_m = f(x_m)$.





Vértice da parábola

A parábola tem um ponto especial, chamado de vértice, que é onde a curva atinge seu valor mais alto ou mais baixo.

O vértice é um ponto representado pelas coordenadas (x_m, y_m), onde:

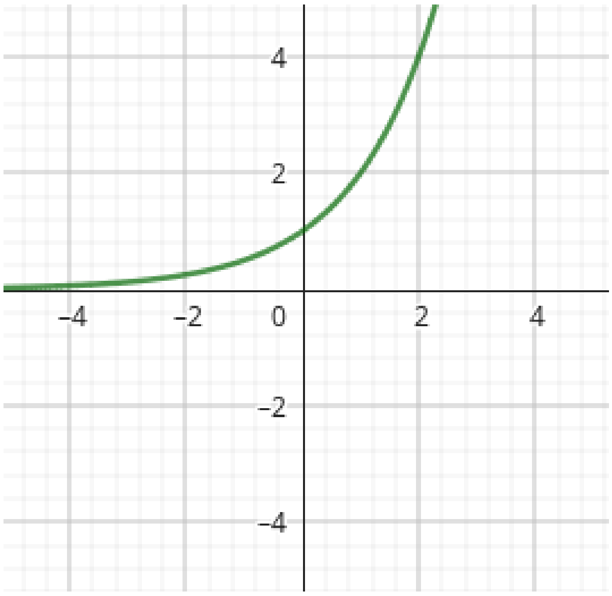
- x_m é o ponto de máximo ou ponto de mínimo,
- y_m o valor máximo ou o valor mínimo.

Se $a < 0$, a função quadrática admite o **valor máximo** $y_M = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\frac{b}{2a}$ para $x_M = -\frac{b}{2a}$.

Se $a > 0$, a função quadrática admite o **valor mínimo** $y_m = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Função Exponencial

A função exponencial tem relação com o crescimento exponencial, assim trabalhando com um valor que é multiplicado por um constante diversas vezes. A aparência da função exponencial é $f(x) = a^x$, onde a é a constante que será potenciada por x. O gráfico da função exponencial tem a seguinte aparência:



Lembrando que se $a = 1$, o gráfico fica igual a $f(x) = 1$.

Observação: a função exponencial não possui raíz a não ser que $a = 0$, neste caso específico todo o conjunto $\mathbb{R}$ é raíz.

Função Logarítmica

Definição

Dado um número real a $(0 < a \neq 1)$, chamamos função logarítmica de base a a função f de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a(x)$. Ou seja, a função logarítmica possui domínio nos reais positivos, contradomínio nos reais e associa a cada valor de x no domínio um número na forma $\log_a(x)$, sendo a base a maior que zero e diferente de 1.

Exemplos de funções logarítmicas:

- $f(x) = \log_2 x$
- $f(x) = \log x \ (\log_{10} x)$
- $f(x) = \ln x \ (\log_e x)$

Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_a x$, podemos dizer:

1. Está todo à direita do eixo $y (x > 0)$;
2. Quando $0 < a < 1$ temos que $y = \log_a x$, é decrescente;
3. Quando $a > 1$ temos que $y = \log_a x$, é crescente;
4. A imagem de f é o conjunto dos números reais, ou seja $Im(f) = \mathbb{R}$.