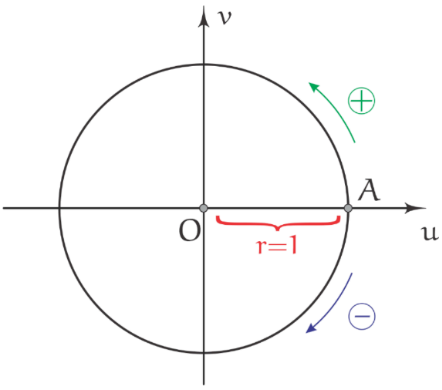
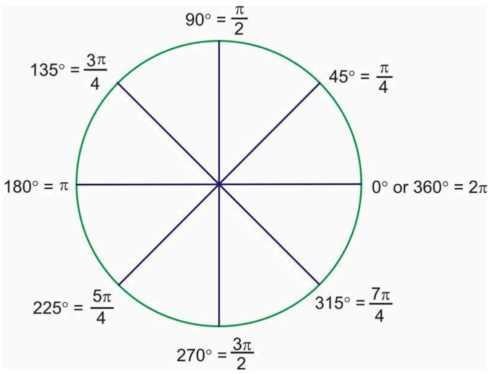
Trigonometria

Círculo Trigonométrico

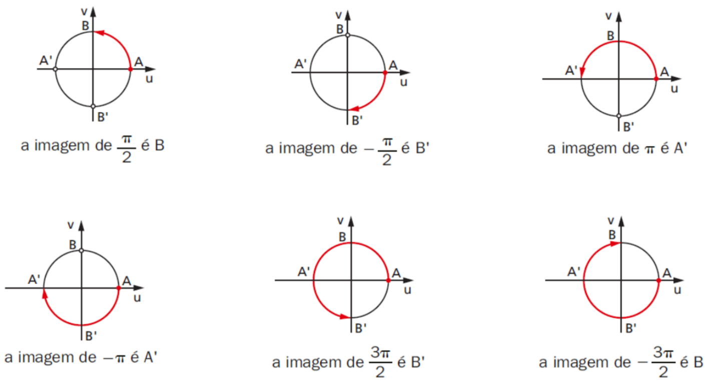
As relações entre os lados e ângulos do triângulo retângulo são obtidas através do círculo trigonométrico (ou ciclo unitário) que é uma circunferência de raio 1:



Existem duas formas de dividir esse círculo: graus e radianos. Os graus dividem a circunferência em 360 partes iguais, cada grau equivale a 1/360 do total da volta do círculo. Já os radianos usam a medida do raio do círculo para medir seu perímetro, disso ganhamos a relação que toda circunferência mede $2\pi \cdot$ raio, ou 2π radianos.



Quando queremos descobrir onde um ponto x em radianos fica no círculo trigonométrico, começamos no ângulo 0 e “andamos” ao longo da circunferência, no sentido anti-horário, o tamanho de x, se $x < 0$, andamos no sentido horário.



a imagem de $\frac{\pi}{2}$ é B

a imagem de $-\frac{\pi}{2}$ é B'

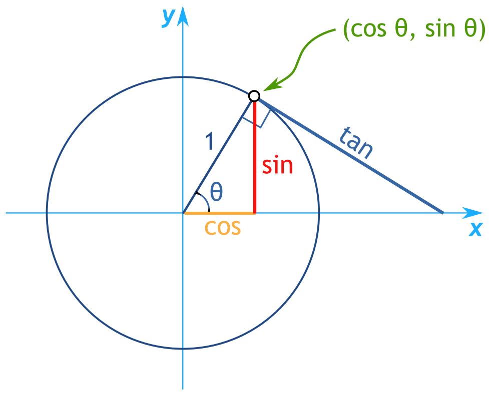
a imagem de π é A'

a imagem de $-\pi$ é A'

a imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é B'

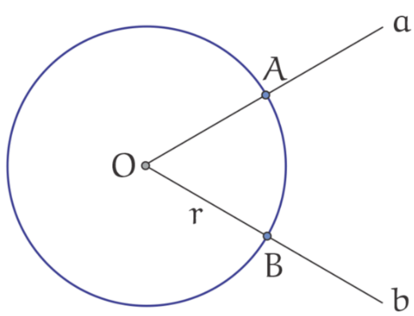
a imagem de $-\frac{3\pi}{2}$ é B

Dado um ângulo θ, $\cos(\theta)$ é a função que nos dá o deslocamento horizontal do centro da circunferência até o ponto da circunferência que intersecta com esse ângulo, $\operatorname{sen}(\theta)$ nos dá o deslocamento vertical e a $\operatorname{tg}(\theta)$ nos dá o comprimento da reta tangente ao ponto até o eixo x.

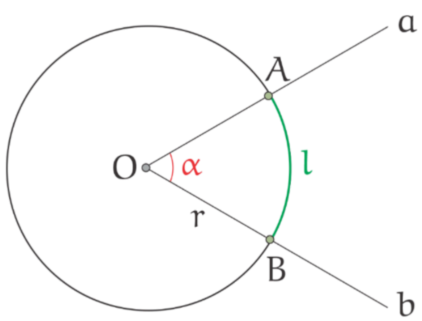


Arcos e Ângulos

Dada uma circunferência de centro O e raio r. Um ângulo $a\hat{O}b$ corresponde a um arco de circunferência AB, sendo A e B os pontos onde os lados do ângulo $a\hat{O}b$ intersectam a circunferência.



Quando queremos medir em radianos um ângulo $a\hat{O}b$, devemos calcular o quociente entre o comprimento l do arco AB pelo raio r da circunferência.



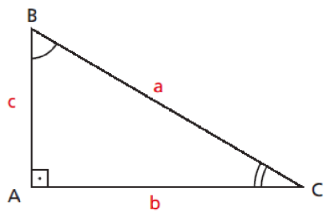
$$\boxed{\alpha = \frac{l}{r} \ \text{(em radianos)}}$$

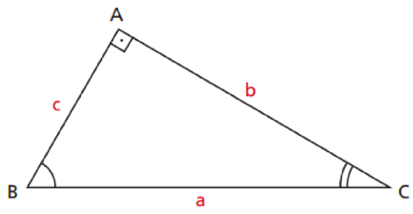
Por exemplo, se um ângulo central $a\hat{O}b$ determina numa circunferência de raio $r = 5$ cm e um arco AB de comprimento $l = 8$ cm

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{8}{5} = 1,6 \text{ rad}$$

Triângulo Retângulo

Um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto.





O maior lado do triângulo retângulo será sempre o que se encontra oposto ao ângulo reto, o chamamos de hipotenusa. Os outros dois lados são os catetos.

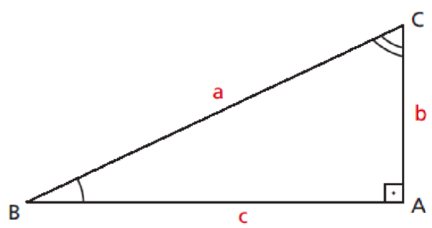
$$a = \text{hipotenusa}$$

$$b \quad \text{e} \quad c = \text{catetos}$$

Se conhecemos o tamanho dos catetos, podemos descobrir a hipotenusa através do teorema de pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Escolhendo um ângulo B (que não seja o ângulo reto), podemos memorizá-las pelo acrônimo SOHCAHTOA:



$$S = \frac{O}{H} \Rightarrow \text{sen}(\text{ângulo}) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen}(B) = \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{A}{H} \Rightarrow \cos(\text{ângulo}) = \frac{\text{cateto adjascente}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \cos(B) = \frac{c}{a}$$

$$T = \frac{O}{A} \Rightarrow \text{tg}(\text{ângulo}) = \frac{\text{cateto adjascente}}{\text{cateto oposto}} \Rightarrow \text{tg}(B) = \frac{b}{c}$$

Repare que, por consequência dessas relações, se temos o seno de um ângulo também temos o cosseno do outro ângulo não reto, o mesmo se segue para a tangente.

$$1.\ \ \text{sen}(B) = \cos(C)$$

$$2.\ \ \text{sen}(C) = \cos(B)$$

$$3.\ \ \text{tg}(B) = \frac{1}{\text{tg}(C)} \quad \text{e} \quad \text{tg}(C) = \frac{1}{\text{tg}(B)}$$

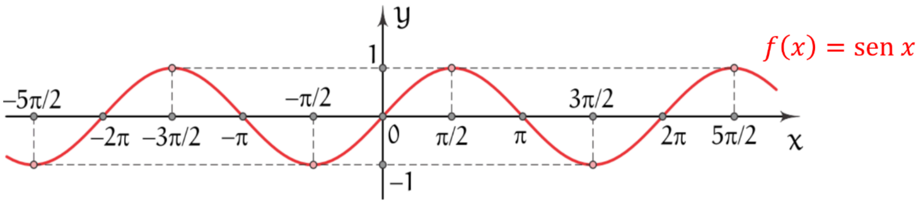
Também obtemos disso a relação entre tangente, seno e cosseno:

$$\frac{\text{sen}(B)}{\cos(B)} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \text{tg}(B)$$

Funções Trigonométricas

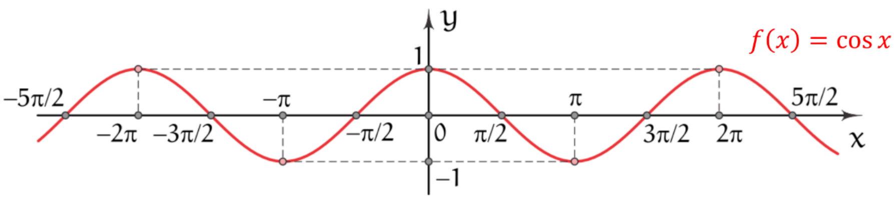
As funções trigonométricas são periódicas já que, como vimos, ao chegar no ângulo 2π na circunferência nós voltamos ao começo do círculo e portanto começamos outra volta. Uma função é periódica quando existe um número positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$.

Seno



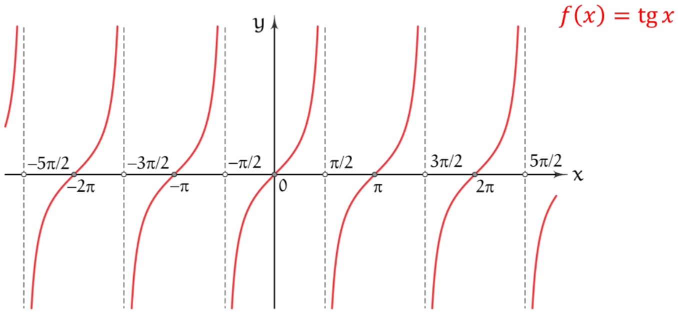
Propriedades:
1) $D_f = \mathbb{R}$
2) $Im(f) = [-1, 1]$
3) É periódica de período 2π, ou seja, $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)$
4) É impar, ou seja, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$

Cosseno



Propriedades:
1) $D_f = \mathbb{R}$
2) $Im(f) = [-1, 1]$
3) É periódica de período 2π, ou seja, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
4) É par, ou seja, $\cos(-x) = \cos(x)$

Tangente



Propriedades:
1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
2) $Im(f) = \mathbb{R}$
3) É periódica de período π, ou seja, $\text{tg}(x + \pi) = \text{tg}(x)$
4) É impar, ou seja, $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$

Identidades Trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(x) = 1 \text{ (Relação Fundamental)}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cossec}^2$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$$

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(x)$$