LISTA DE EXERCÍCIOS – GRAVITAÇÃO UNIVERSAL E LEIS DE KEPLER

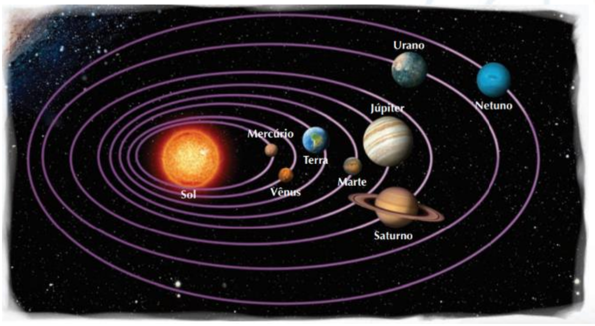
INTRODUÇÃO

Gravitação é o estudo das forças de atração entre massas (forças de campo gravitacional) e dos movimentos de corpos submetidos a essas forças.

Foram os antigos gregos os fundadores da ciência modernamente conhecida por Astronomia.

- Cláudio Ptolomeu, matemático, geógrafo e astrônomo, no século II d.C. propôs um modelo planetário em que a Terra era o centro do Sistema Solar (**GEOCENTRISMO**).
- No século XVI, o monge polonês Nicolau Copérnico (1473-1543), estudioso de Medicina, Matemática e Astronomia, apresentou uma concepção revolucionária para o Sistema Solar. Segundo ele, o Sol, e não a Terra, seria o centro em torno do qual deveriam gravitar em órbitas circulares a Terra e todos os planetas conhecidos (**HELIOCENTRISMO**).
- Galileu Galilei (1564-1642), físico e astrônomo italiano, foi um importante adepto do pensamento copernicano. Seus estudos o levaram a também concordar com a ideia de que o Sol, e não a Terra, deveria ser o centro do Sistema Solar.
- Foi o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) quem conseguiu descrever de modo preciso os movimentos planetários. Atualmente, o modelo aceito para o Sistema Solar é basicamente o de Copérnico, feitas as correções sugeridas por Kepler e por cientistas que o sucederam.

Sabe-se que oito planetas gravitam em torno do Sol, descrevendo órbitas elípticas. Na ordem crescente de distância ao Sol, são eles: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.



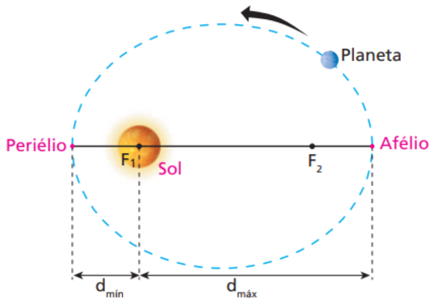
AS LEIS DE KEPLER

As leis de Kepler descrevem os movimentos dos planetas de nosso sistema solar, tomando o Sol como referencial.

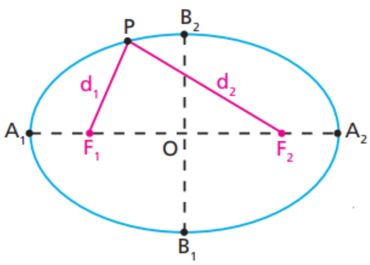
PRIMEIRA LEI DE KEPLER (LEI DAS ÓRBITAS)

A primeira Lei de Kepler diz o seguinte:

Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, o qual ocupa um dos focos da elipse descrita.



Elipse é o conjunto de pontos de um plano para os quais a soma das distâncias d_1 e d_2, respectivamente a dois pontos fixos, denominados focos, F_1 e F_2 pertencentes a esse plano, permanece constante.



O ponto da órbita mais próximo do Sol é denominado **periélio**, e o mais afastado, **afélio**.

Chamando de $d_{mín}$ e $d_{máx}$ as distâncias do periélio e do afélio ao centro do Sol, respectivamente, definimos raio médio da órbita (R) do planeta como a média aritmética entre $d_{mín}$ e $d_{máx}$.

$$\boldsymbol{R = \frac{d_{mín} + d_{máx}}{2}}$$

SEGUNDA LEI DE KEPLER (LEI DAS ÁREAS)

A segunda Lei de Kepler afirma que:

O segmento imaginário que une o centro do Sol e o centro do planeta (raio-vetor) varre áreas proporcionais aos intervalos de tempo dos percursos.

Sendo A a área e Δt o correspondente intervalo de tempo, podemos escrever que:

$$\boldsymbol{A = v_a \Delta t}$$

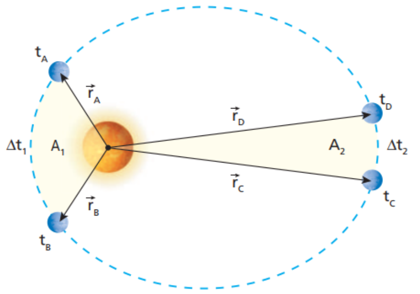
A constante de proporcionalidade v_a denomina-se **velocidade areolar** e caracteriza a rapidez com que o vetor-posição do planeta, que tem origem no centro do Sol e extremidade no centro do planeta, varre as respectivas áreas.

Também podemos enunciar a Lei das áreas da seguinte maneira:

O vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

A figura a seguir, ilustra um planeta em quatro instantes consecutivos do seu movimento orbital em torno do Sol. Nela, estão representados os vetores-posição $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ e $\vec{r}_D$ associados aos instantes t_A, t_B, t_C e t_D respectivamente.

Representamos por A_1 e A_2 as áreas varridas pelo vetor-posição do planeta nos intervalos $\Delta t_1 = t_B - t_A$ e $\Delta t_2 = t_D - t_C$:



Conforme propõe a 2ª Lei de Kepler, temos:

$$Se\ \Delta t_1 = \Delta t_2, então\ A_1 = A_2$$

É importante ressaltar que os planetas não se movem ao redor do Sol com velocidade de módulo constante: são mais rápidos quando estão mais próximos do Sol (periélio) e mais lentos quando estão mais afastados (afélio). A Terra, por exemplo, tem as seguintes velocidades:

No periélio: 30,2 km/s
No afélio: 29,3 km/s

O movimento de qualquer planeta será **uniforme** no caso de órbitas circulares.

TERCEIRA LEI DE KEPLER (LEI DOS PERÍODOS)

Para sua terceira Lei, Kepler afirma que:

O quadrado do período (T^2) de translação de cada planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo do raio médio (R^3) da respectiva órbita.

Matematicamente:

$$\frac{R^3}{T^2} = K_p$$

A constante K_p denomina-se **constante de Kepler** e seu valor depende apenas da massa do Sol e das unidades de medida.

A tabela a seguir informa o raio médio e o período de revolução de cada planeta em torno do sol.

Planeta	Raio médio da órbita (UA)	Período de revolução (dias)	$\frac{R^3}{T^2}$ (UA³/dias²)
Mercúrio	0,389	87,77	$7{,}64 \cdot 10^{-6}$
Vênus	0,724	224,70	$7{,}52 \cdot 10^{-6}$
Terra	1,000	365,25	$7{,}50 \cdot 10^{-6}$
Marte	1,524	686,98	$7{,}50 \cdot 10^{-6}$
Júpiter	5,200	4332,62	$7{,}49 \cdot 10^{-6}$
Saturno	9,510	10759,20	$7{,}43 \cdot 10^{-6}$
Urano	19,261	30787,03	$7{,}54 \cdot 10^{-6}$
Netuno	30,201	60185,18	$7{,}60 \cdot 10^{-6}$

UA (unidade astronômica) = $1{,}49 \cdot 10^8\ km$

As três leis de Kepler apresentadas até aqui são universais, isto é, valem para o Sistema Solar a que pertencemos e para qualquer outro sistema do Universo em que exista uma grande massa central em torno da qual gravitem massas menores.

QUESTÕES

1. Adotando o Sol como referencial, aponte a alternativa que condiz com a 1ª Lei de Kepler da Gravitação (Lei das órbitas):

a) As órbitas planetárias são quaisquer curvas, desde que fechadas.

b) As órbitas planetárias são espiraladas.

c) As órbitas planetárias não podem ser circulares.

d) As órbitas planetárias são elípticas, com o Sol ocupando o centro da elipse.

e) As órbitas planetárias são elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.

2. A 2ª Lei de Kepler (Lei das áreas) permite concluir que:

a) as áreas varridas pelo vetor-posição de um planeta em relação ao centro do Sol são diretamente proporcionais aos quadrados dos respectivos intervalos de tempo gastos;

b) a intensidade da velocidade de um planeta ao longo de sua órbita em torno do Sol é máxima no periélio;

c) a intensidade da velocidade de um planeta ao longo de sua órbita em torno do Sol é máxima no afélio;

d) o intervalo de tempo gasto pelo planeta em sua translação do afélio para o periélio é maior que o intervalo de tempo gasto por ele na translação do periélio para o afélio;

e) o movimento de translação de um planeta em torno do Sol é uniforme, já que sua velocidade areolar é constante.

3. O astrônomo alemão Johannes Kepler apresentou três generalizações a respeito dos movimentos planetários em torno do Sol, conhecidas como Leis de Kepler.

Fundamentado nessas leis, analise as proposições a seguir:

(01) O quociente do cubo do raio médio da órbita pelo quadrado do período de revolução é constante para qualquer planeta do Sistema Solar.

(02) Quadruplicando-se o raio médio da órbita, o período de revolução de um planeta em torno do Sol fica octuplica.

(04) Quanto mais próximo do Sol (menor raio médio de órbita) gravitar um planeta, maior será seu período de revolução.

(08) No Sistema Solar, o período de revolução dos planetas em torno do Sol cresce de Mercúrio para Netuno.

(16) Quando a Terra está mais próxima do Sol (região do periélio), a estação predominante no planeta é o verão.

Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

4. Considere um planeta hipotético (H) gravitando em órbita circular em torno do Sol. Admita que o raio da órbita desse planeta seja o quádruplo do raio da órbita da Terra.

Nessas condições, qual o período de translação do citado planeta, expresso em anos terrestres?

5. Dois satélites de um planeta hipotético têm períodos de revolução iguais a 32 dias e 256 dias, respectivamente. Se o raio da órbita do primeiro satélite vale 5 unidades, qual o raio da órbita do segundo?

6. Um satélite artificial da Terra tem órbita circular de raio R e período T. Um segundo satélite, também em órbita circular, tem raio R/4. Qual é o período do segundo satélite?

7. Determine a velocidade areolar de um planeta que descreve em torno do Sol uma órbita praticamente circular de raio R. O período de translação do planeta é T.

8. Um planeta descreve um quarto de sua órbita em torno de seu Sol, num sistema planetário de outra galáxia, em 28 dias terrestres. Determine:

a) o período de translação desse planeta em torno de seu Sol.

b) a velocidade areolar desse planeta, supondo que o raio de sua órbita, considerada circular, vale 5.000 km.

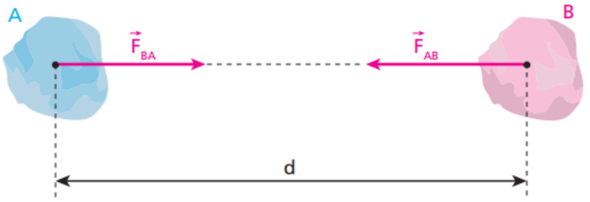
9. O período de translação de Urano em torno do Sol equivale a 84 anos terrestres, aproximadamente. Supondo o raio médio da órbita de Urano cerca de 4 vezes maior que o da órbita de Júpiter, determine, aproximadamente, o período de translação de Júpiter, expresso em anos terrestres.

10. De quantos anos terrestres seria o período de um planeta que, girando em torno do Sol, tivesse o raio médio de sua órbita 9 vezes maior do que o raio médio da órbita da Terra?

LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Analisando as leis de Kepler, Newton notou que as velocidades dos planetas variam ao longo da órbita em módulo e direção. Como a variação da velocidade é devida a forças, Newton concluiu que os planetas e o Sol interagem a **distância**, com forças chamadas gravitacionais. Uma tremenda capacidade de generalização e um conhecimento profundo de Matemática permitiram a Newton descobrir que as forças gravitacionais dependem diretamente das massas do Sol e do planeta e inversamente do quadrado da distância entre eles.
Esse resultado tem validade geral, podendo ser aplicado a quaisquer corpos materiais, constituindo a lei da Gravitação Universal:

Dois pontos materiais atraem-se com forças cujas intensidades são diretamente proporcionais às suas massas e inversamente proporcionais ao quadrado da distância que os separa.



Se M e m são as massas de dois pontos materiais e d é a distância que os separa, a intensidade da força gravitacional $\vec{F}$ é dada por:

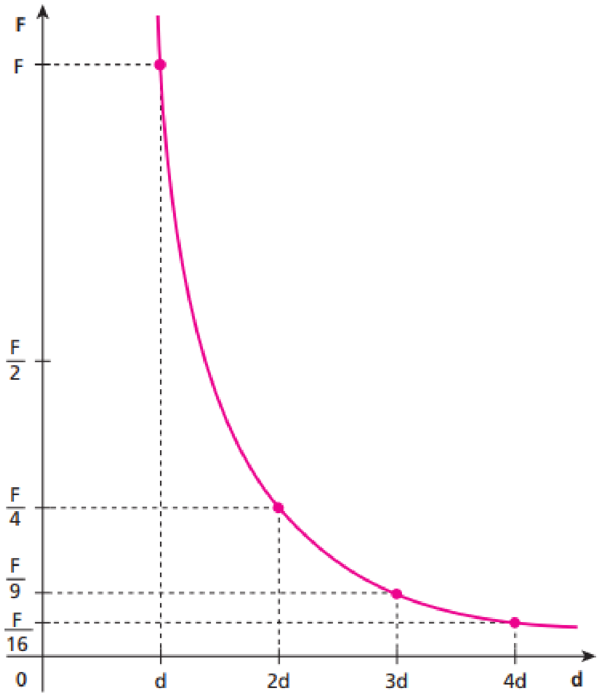
$$F = G\frac{(M \cdot m)}{d^2}$$

A constante **G** denomina-se Constante da Gravitação e seu valor numérico, num mesmo sistema de unidades, independe do meio em que os corpos se encontram.

O valor de G é dado por:

$$G = 6,67 \,.\, 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$

A variação de F em função de d pode ser observada neste diagrama:



Se em vez de pontos materiais tivermos esferas homogêneas (Planetas), a distância r a ser considerada é entre seus centros.

ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE

A força de atração gravitacional $\vec{F}$, de qualquer objeto, situado na superfície da Terra é dado pelo próprio peso $\vec{P}$ do objeto, ou seja:

$$\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g}$$

Onde $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade nos pontos da superfície terrestre, e dado por:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

A uma altitude h a aceleração da gravidade é menor que na superfície:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

↳ **Velocidade de escape (v_0)**

Velocidade de escape é a menor velocidade com que se deve lançar um corpo (satélite artificial) da superfície terrestre para que este se livre da atração da Terra, isto é, chegue ao infinito com velocidade nula.

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

↳ **Determinação da velocidade orbital (v)**

A força gravitacional que o satélite recebe do planeta é a resultante centrípeta no seu movimento circular e uniforme. Dessa forma, temos que:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Onde r é a distância entre o satélite e o planeta e v independe da massa do satélite, sendo inversamente proporcional à raiz quadrada de r.

↳ **Determinação do período de revolução (T)**

Como o satélite realiza movimento circular e uniforme, temos que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

↳ **Determinação da velocidade areolar (v_a)**

Quando o satélite realiza uma volta completa em sua órbita, seu vetor-posição em relação ao centro do planeta varre uma área $A = \pi r^2$ durante um intervalo de tempo $\Delta t = T$.

Dessa forma, temos que:

$$\boldsymbol{v_a = \frac{1}{2}\sqrt{G\,M\,r}}$$

QUESTÕES

11. Duas partículas de massas respectivamente iguais a M e m estão no vácuo, separadas por uma distância d. A respeito das forças de interação gravitacional entre as partículas, podemos afirmar que:
a) têm intensidade inversamente proporcional a d.
b) têm intensidade diretamente proporcional ao produto M x m.
c) não constituem entre si um par ação-reação.
d) podem ser atrativas ou repulsivas.
e) teriam intensidade maior se o meio fosse o ar.

12. Sabemos que a Constante da Gravitação vale, aproximadamente, $6{,}7\,.\,10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$. Nessas condições, qual é a ordem de grandeza, em newtons, da força de atração gravitacional entre dois navios de 200 toneladas de massa cada um, separados por uma distância de 1,0 km?
a) 10^{-11} b) 10^{-6} c) 10^{-1} d) 10^{5} e) 10^{10}

13. Considere um corpo de 100 kg no interior de um satélite artificial em torno da Terra. O satélite encontra-se, em relação à superfície da Terra, à altitude igual ao próprio raio da Terra. Suponha a Terra estacionária no espaço.
Determine:
a) a aceleração da gravidade no interior do satélite em relação à aceleração da gravidade na superfície da Terra (adote g = 10 m/s²);

b) o peso do corpo de massa 100 kg na superfície da Terra e na altura em que se encontra o satélite.

14. O planeta Marte possui massa de $6{,}46\,.\,10^{23}\ kg$ e raio $3{,}37\,.\,10^{6}\ m$. Sendo $G = 6{,}67\,.\,10^{-11}$ N.m²/kg² a constante de gravitação universal, determine:
a) a velocidade de escape nesse planeta;

b) a velocidade orbital e o período de um satélite artificial que orbite a baixa altitude nesse planeta (raio da órbita = raio de Marte).

15. Um planeta hipotético tem massa um décimo da terrestre e raio um quarto do da Terra. Se a aceleração da gravidade nas proximidades da superfície terrestre vale 10 m/s², a aceleração da gravidade nas proximidades da superfície do planeta hipotético é de:
a) 20 m/s² b) 16 m/s² c) 10 m/s²
d) 6,0 m/s² e) 4,0 m/s²

GABARITO

1. E. **2.** B. **3.** 01 + 02 + 08 = 11. **4.** $T_H = 8T_T$. **5.** $R_2 = 20\ unidades$. **6.** $T_2 = T/8$. **7.** $K = \pi R^2/T$. **8.** a) T = 112 dias terrestres; b) $K \cong 7\,.\,10^5 km^2/dia\ terrestre$. **9.** $T_j \cong 10{,}5\ anos\ terrestres$. **10.** $T_P = 27\ anos\ terrestres$. **11.** B. **12.** B. **13.** a) $g_h = 2{,}5\ m/s^2$; b) Ph = 250 N; na superfície P = 1.000 N. **14.** a) $v_0 \cong 5{,}05\ km/s$; b) $v \cong 3{,}57\ km/s$; $T \cong 5{,}93\,.\,10^3\ s$. **15.** B.