1.1 Ecuații cu variabile separabile

O ecuaţie de forma

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.1.1}$$

unde f şi g sunt funcţii continue date, iar $y = y(x) \in C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval, este funcţia necunoscută, se numeşte **ecuaţie cu variabile separabile**.

Pentru valori ale lui y pentru care $g(y) \neq 0$, ecuaţia se scrie sub forma $\dfrac{y'}{g(y)} = f(x)$ sau $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$. Prin integrarea ambilor membri ai ecuaţiei, se obţine

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C,\ C \in \mathbb{R},$$

care se numeşte **soluţia generală a ecuaţiei** (1.1.1). Din punct de vedere geometric, aceasta este o familie de curbe plane, care depind de constanta arbitrară C.

Dacă pentru o valoare y_0 avem $g(y_0) = 0$, atunci funcţia constantă $y(x) = y_0$ este, evident, soluţie a ecuaţiei (1.1.1) şi se numeşte **soluţie singulară**.

O ecuaţie scrisă sub forma

$$X_1(x)Y_1(y)\,\mathrm{d}x + X_2(x)Y_2(y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{1.1.2}$$

unde X_1, X_2, Y_1, Y_2 sunt funcţii continue date, este, de asemenea, o ecuaţie cu variabile separabile. Într-un domeniu în care $X_2(x) \neq 0$ şi $Y_1(y) \neq 0$, ecuaţia se scrie

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}\,\mathrm{d}y = 0$$

şi, integrând termen cu termen, se obţine soluţia generală

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}\,\mathrm{d}y = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Dreptele $x = x_0$ şi $y = y_0$, unde $X_2(x_0) = 0$ şi $Y_1(y_0) = 0$ sunt soluţii singulare ale ecuaţiei.

☞ **Exemplul 1.1.1** Să se integreze ecuaţia $(1-y)\,\mathrm{d}x + x^2y^2\,\mathrm{d}y = 0$.

Rezolvare: Pentru $x \neq 0$ şi $y \neq 1$, ecuaţia se scrie $\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{y^2}{1-y}\,\mathrm{d}y = 0$. Prin integrare se obţine $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{y^2}{1-y}\,\mathrm{d}y = C$, de unde rezultă soluţia generală

$$\frac{1}{x} + \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = C.$$

$x = 0$ şi $y = 1$ reprezintă soluţii singulare ale ecuaţiei. ☑

☞ **Exemplul 1.1.2** Să se determine soluţia problemei Cauchy $y' \cdot (x^2-1)\sin y = 2\cos y$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Rezolvare: Se scrie ecuaţia sub forma $y' \cdot \dfrac{\sin y}{\cos y} = \dfrac{2}{x^2-1}$ şi prin integrare se obţine $-\ln|\cos y| = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + \ln C$. De aici se găseşte soluţia generală

$$\frac{1}{\cos y} = C \cdot \frac{x-1}{x+1},\ C \in \mathbb{R}.$$

Constanta reală C se determină astfel încât $y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$. Înlocuind $x = \frac{1}{2}$ şi $y = \frac{\pi}{3}$ se găseşte $C = -6$, deci soluţia problemei Cauchy este $\cos y = -6 \cdot \dfrac{x+1}{x-1}$. ☑

☞ **Exemplul 1.1.3** Să se integreze ecuaţia diferenţială $yy' + x = 0$.

Rezolvare: Se scrie $yy' = -x$, se integrează şi se obţine soluţia generală $\dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{C}{2}$. Aceasta se poate scrie sub forma $x^2 + y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$, $C \geq 0$, şi reprezintă o familie de cercuri, cu centrele în origine şi de raze variabile. ☑

O ecuaţie diferenţială de forma $y' = f(ax + by + c)$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile făcând substituţia $u = ax + by + c$.

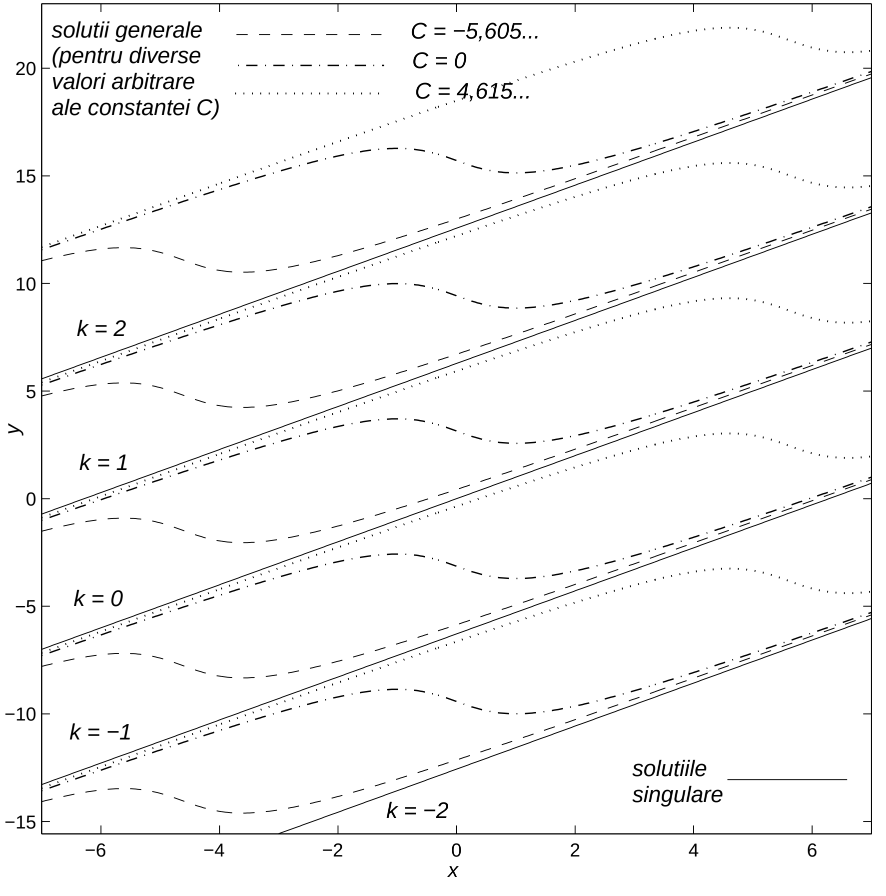
Exemplul 1.1.4 Să se integreze ecuaţia $y' = \cos(y - x)$.

Rezolvare: Facem substituţia $u = y - x$. Atunci $y' = u' + 1$ şi avem $u' + 1 = \cos u$ sau $\dfrac{u'}{\cos u - 1} = 1$, ceea ce dă prin integrare $\operatorname{ctg} \frac{u}{2} = x + C$. Se obţine soluţia generală

$$\operatorname{ctg} \frac{y - x}{2} = x + c.$$

Soluţiile singulare se obţin din $\cos u - 1 = 0$, adică $u = 2k\pi$, $y = 2k\pi + x$, $k \in \mathbb{Z}$.

Are loc următoarea reprezentare grafică a soluţiilor, pentru diverse valori ale lui k, respectiv C.



Exerciții propuse

✎ **1.1.1** Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale:

i). $\left(1+x^3\right)y'-y=0$

ii). $\sqrt{x^2+1}\cdot y'-y=0$

iii). $y'(y-3)-2xy^2=6xy$

iv). $\sqrt{\dfrac{x}{y}}\cdot y'=x^2+x+1$

v). $xy'-\ln^3 x=0$

vi). $y'\cos y\sin x=\sin y\cos x$

✎ **1.1.2** Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii diferenţiale:

i). $y^2\,\mathrm{d}y-(1+y)(\cos x\,\mathrm{d}x-\sin y\,\mathrm{d}y)=0$

ii). $x\mathrm{e}^{3x+y}\,\mathrm{d}x-\,\mathrm{d}y=0$

iii). $\left(xy^2+x-y^2-1\right)\,\mathrm{d}x-2x^2y\,\mathrm{d}y=0$

iv). $\left(y^2+1\right)\,\mathrm{d}x-\sqrt{x^2+1}\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\,\mathrm{d}y=0$

✎ **1.1.3** Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

i). $(2+\mathrm{e}^x)\cdot yy'=\mathrm{e}^x,\ y(0)=1$

ii). $y'\operatorname{tg}x-y\ln y=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

iii). $\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}x-\left(a^2+x^2\right)\,\mathrm{d}y=0,\ y(a)=0,\ a\neq 0$

iv). $(xy-x+y-1)\,\mathrm{d}y=\left(y^2-2y\right)\,\mathrm{d}x,\ y(0)=1$

v). $x^2y'-\cos 2y=1,\ y(1)=0$

vi). $\left(x^2+9\right)y'=(y-2)\left(x+\sqrt{x^2+9}\right),\ y(4)=47$

vii). $y'=2xy\ln x,\ y(\mathrm{e})=\mathrm{e}$

✎ **1.1.4** Găsiţi curba care trece prin punctul $(0,2)$ şi pentru care panta tangentei în orice punct este egală cu triplul ordonatei în acel punct.

✎ **1.1.5** Găsiţi o curbă pentru care panta tangentei într-un punct este egală cu de două ori panta dreptei care uneşte acel punct cu originea şi care trece prin punctul $(1,2)$.

✎ **1.1.6** Se cunoaşte că viteza de răcire a unui corp în aer este proporţională cu diferenţa dintre temperatura T a corpului şi temperatura T_0 a aerului. Dacă temperatura aerului este de 10° C şi un corp se răceşte de la 90° la 50° în 20 de minute, la ce temperatură va ajunge în următoarele 20 de minute?

✎ **1.1.7** Făcând schimbări de variabile corespunzătoare, să se determine soluţiile următoarelor ecuaţii:

i). $y' = \cos(2x+y)$

ii). $y' = (y-x)^4$

iii). $(4x+y+1)^2\, y' - 1 = 0$

iv). $y' + 2 = \dfrac{2x+y}{2x+y+\sqrt{2x+y}}$

v). $y' - 2 = \mathrm{e}^{3x-2y}$

Indicații și răspunsuri

$\boxed{\textbf{1.1.1}}$ **i)** $y = C(x+1)^{1/3}\left(x^2-x+1\right)^{-1/6}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}$, $C \in \mathbb{R}$; **ii)** $y = C(x+\sqrt{x^2+1})$; **iii)** $\frac{(y+3)^2}{y} = C\mathrm{e}^{x^2}$; **iv)** $\sqrt{y} = \frac{1}{5}\sqrt{x^5} + \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \sqrt{x} + C$; **v)** $y = \frac{\ln^4 x}{4} + C$; **vi)** $\sin y = C\sin x$;

$\boxed{\textbf{1.1.2}}$ **i)** $\frac{y^2}{2} - y + \ln(y+1) - \cos y = \sin x + C$; **ii)** $\mathrm{e}^{-y} - \frac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}(1-3x) + C = 0$; **iii)** $y^2 = Cx\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1$; **iv)** $\sqrt{y^2+1}(y+\sqrt{y^2+1}) = C(x+\sqrt{x^2+1})$.

$\boxed{\textbf{1.1.3}}$ **i)** $y^2 = 1 + 2\ln\frac{2+\mathrm{e}^x}{3}$; **ii)** $y = 2^{\sin x}$; **iii)** $\arcsin\frac{y}{a} = \frac{1}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{\pi}{4}\right)$; **iv)** $y(y-2) = -(x+1)^2$; **v)** $\operatorname{tg} y = 2 - \frac{2}{x}$; **vi)** $y = 2 + \sqrt{x^2+9}(x+\sqrt{x^2+9})$; **vii)** $\ln|y| = x^2\ln|x| - \frac{x^2+\mathrm{e}^2}{2} + 1$.

$\boxed{\textbf{1.1.4}}$ Avem problema Cauchy $y' = 3y$, $y(0) = 2$ cu soluţia $y(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.

$\boxed{\textbf{1.1.5}}$ $y' = 2\cdot\frac{y}{x}$, $y(1) = 2$, de unde $y(x) = 2x^2$.

$\boxed{\textbf{1.1.6}}$ Notând $T(t)$ temperatura corpului la momentul t avem $T'(t) = k(T(t) - T_0)$, cu k constanta de proportionalitate. Soluţia generală este $T(t) = C\mathrm{e}^{kt} + T_0$. Din condiţiile $T(0) = 90^\circ$, $T(20) = 50^\circ$ se găsesc $C = 80^\circ$, $\mathrm{e}^{20k} = \frac{1}{2}$ şi deci $T(40) = 30^\circ$.

$\boxed{\textbf{1.1.7}}$ **i)** $z = 2x+y$, $y = 2\operatorname{arctg}\left[\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + C\right)\right] - 2x$; **ii)** $z = y-x$, $\ln\left|\frac{y-x-1}{y-x+1}\right| - 2\operatorname{arctg}(y-x) = 4x + C$; **iii)** $2y - \operatorname{arctg}(8x+2y+2) = C$; **iv)** $x + y + 2\sqrt{2x+y} = C$; **v)** $4x - 2y - \ln\left(2\mathrm{e}^{3x-2y} - 1\right) = C$.