



UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

ELECTROTEHNICĂ

CURS 2

2025

Conf. dr. ing. Mihaela CREȚU

Departamentul de Electrotehnică și Măsurări, Facultatea de Inginerie Electrică

E-mail: Mihaela.Cretu@ethm.utcluj.ro

Membru al Centrului de Cercetare în Tranzitie Energetică <https://entrec.utcluj.ro>

Cuprins

4. Potențialul electric scalar (Potențialul electric în funcție de câmpul electric; Potențialul electric datorat sarcinilor punctiforme; Potențialul electric datorat distribuțiilor continue de sarcină; Suprafete și linii echipotențiale)

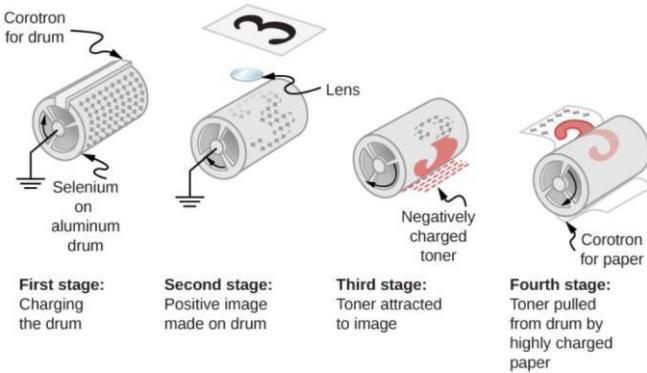
5. Fluxul electric

6. Legea lui Gauss

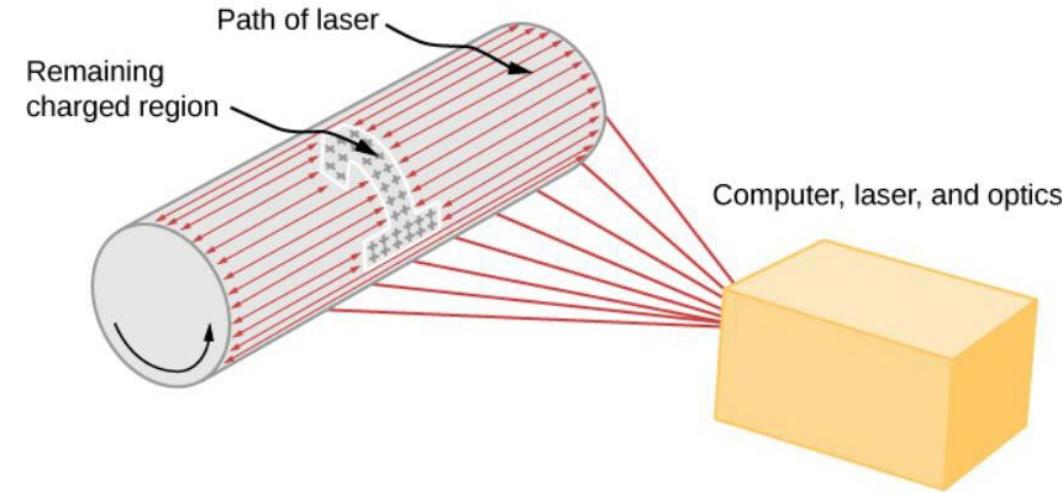
7. Aplicații

Electrostatica aplicării

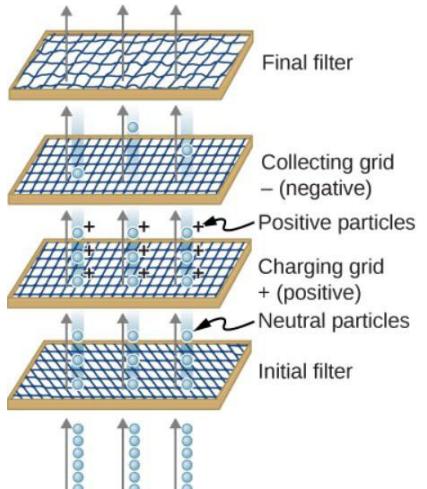
Xerografie



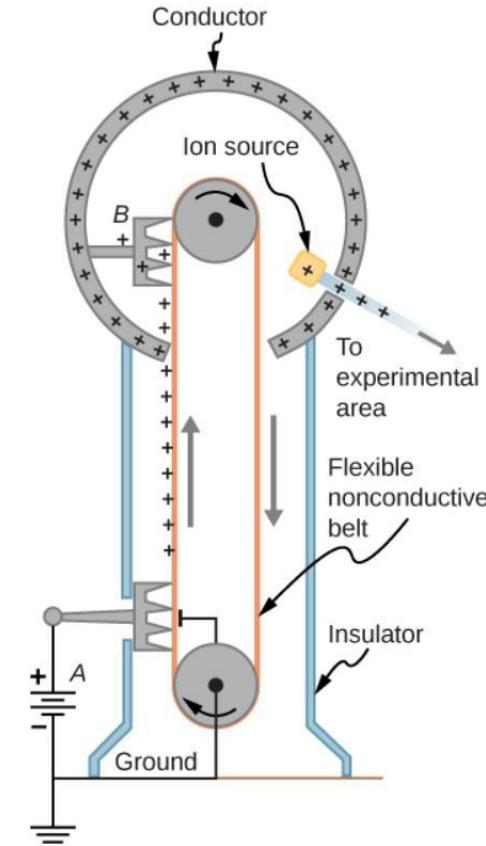
Lasere



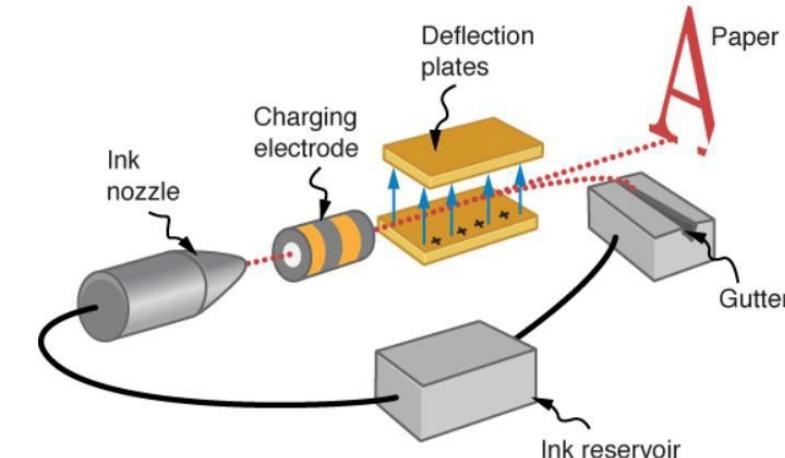
Filtre electrostatice de curățare a aerului



Generatorul Van de Graaff



Imprimante cu jet de cerneală

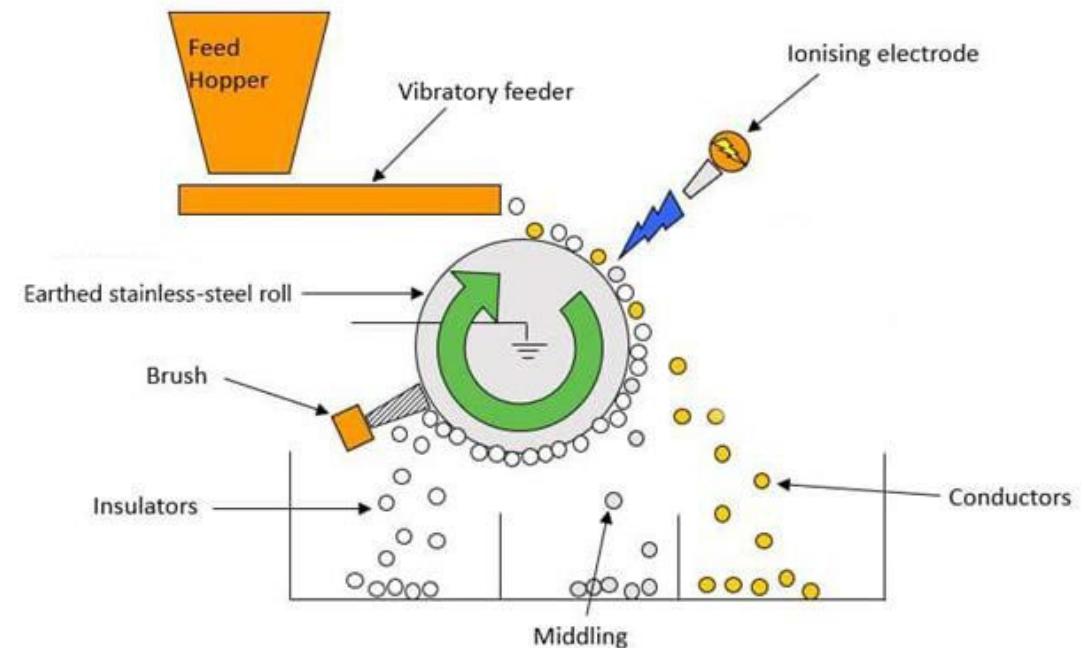


Electrostatica aplicării

Senzori electrostatici



Separatoare electrostatice

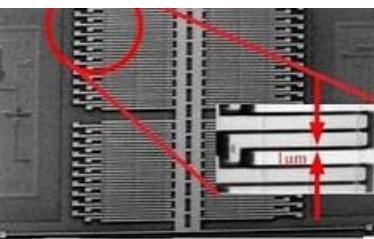


What is an Electrostatic Sensor? Electrostatic sensors are **measuring instruments** designed for checking the amount of static electricity. Static electricity is measured through electrostatic induction, where a charged object becomes attracted to a nearby conductor.

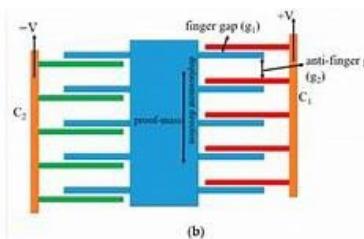
SMEM - sisteme microelectromecanice (comutatoare și accelerometre)



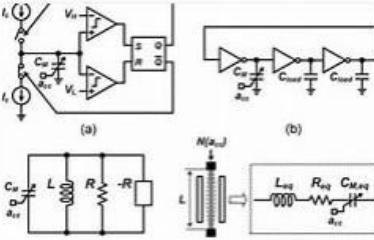
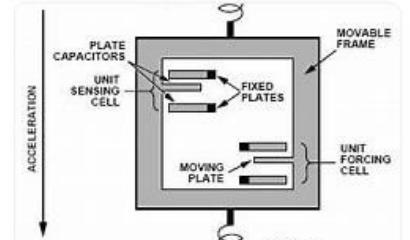
pnguru.com
Microcontroller Accelerometer
Electronic component...



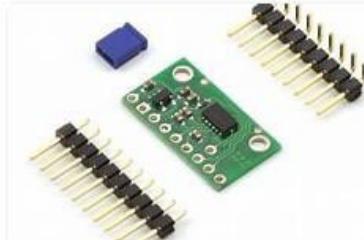
How an Accelerometer Works |
Homemade Circuit Projects



Accelerometer Wiring Diagram
- Wiring Diagrams



Accelerometer Wiring Diagram



MMA7261Q 3-Axis

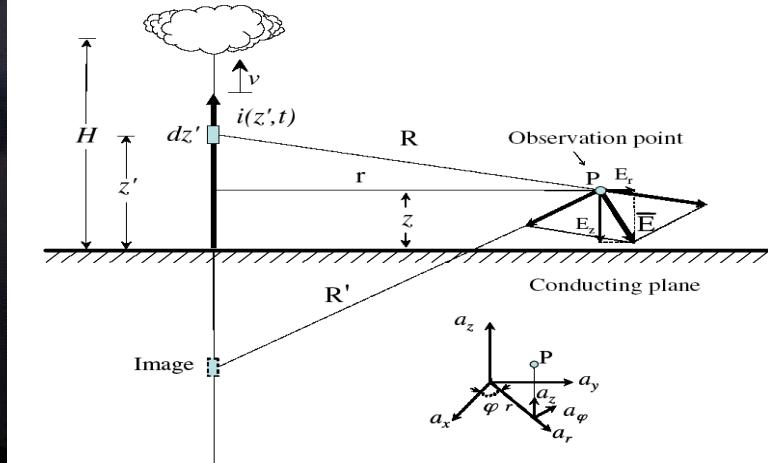


Electrostatica aplicării

Maşină de vopsit cu pulbere electrostatică 110V
Pulverizator de vopsea - Maşină de pulverizare

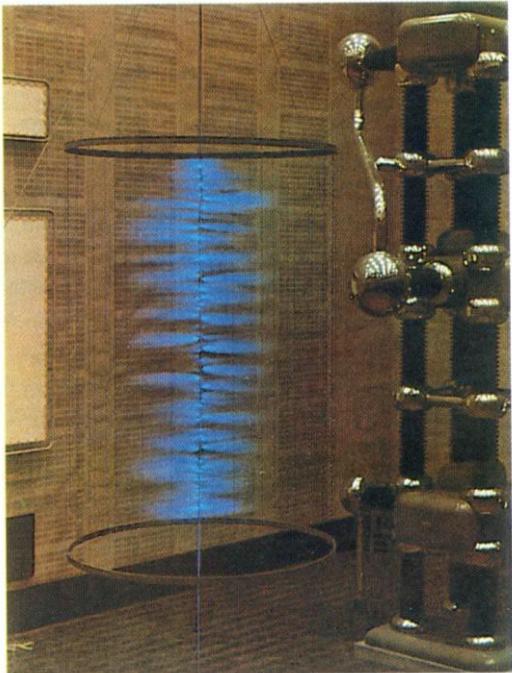


Vopsire în câmp electrostatic



Corona discharge from barbed wire

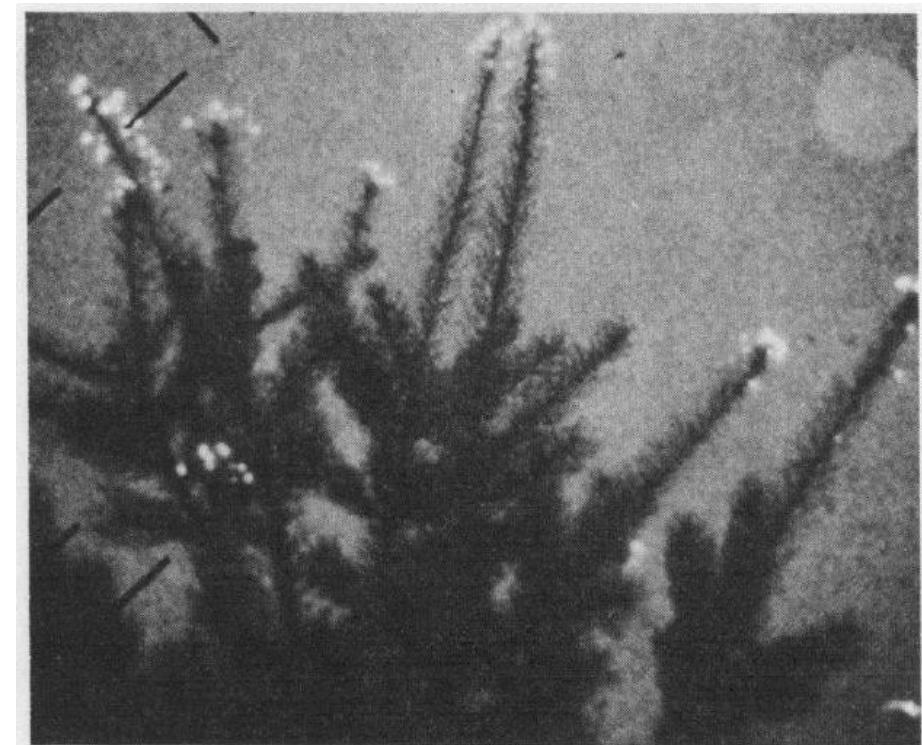
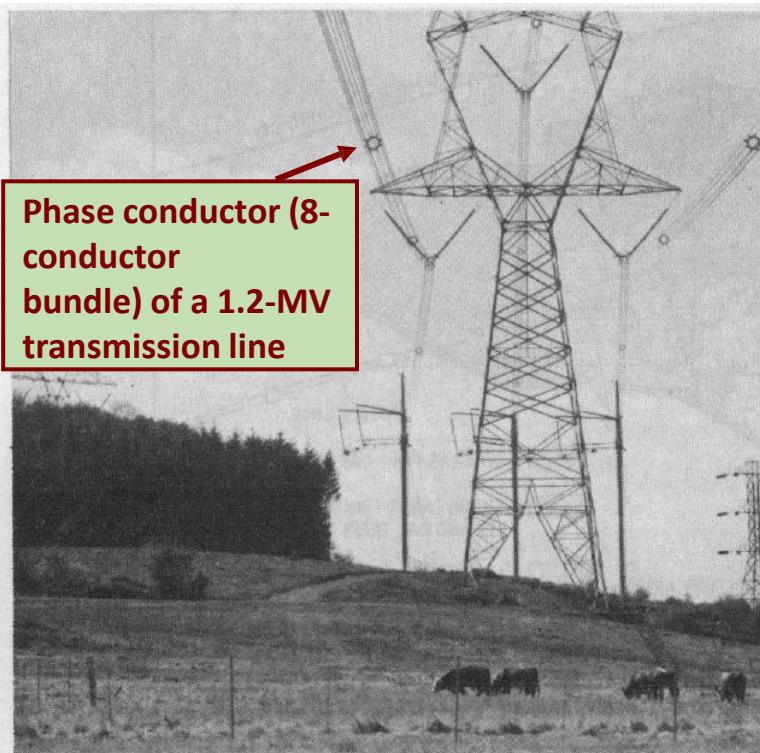
Barbed wire subjected to a **positive dc** voltage of **400-kV** magnitude in laboratory. Adapted from Gary (1994).



Cloud of charged
water droplets



Corona discharge from trees



(Left) **1200-kV ac** transmission line in Lyons, Oregon. Douglas fir trees at the edge of the line right-of-way are seen on the left side of the picture. Typical measured ground-level electric field maxima were **7 to 9 kV/m**. (Right) Corona on a Douglas fir tree located about 12 m from conductors of the line. Photograph was taken with a night viewing device. Needle tip burns were observed. Adapted from Rogers et al. (1979).

Overhead thundercloud

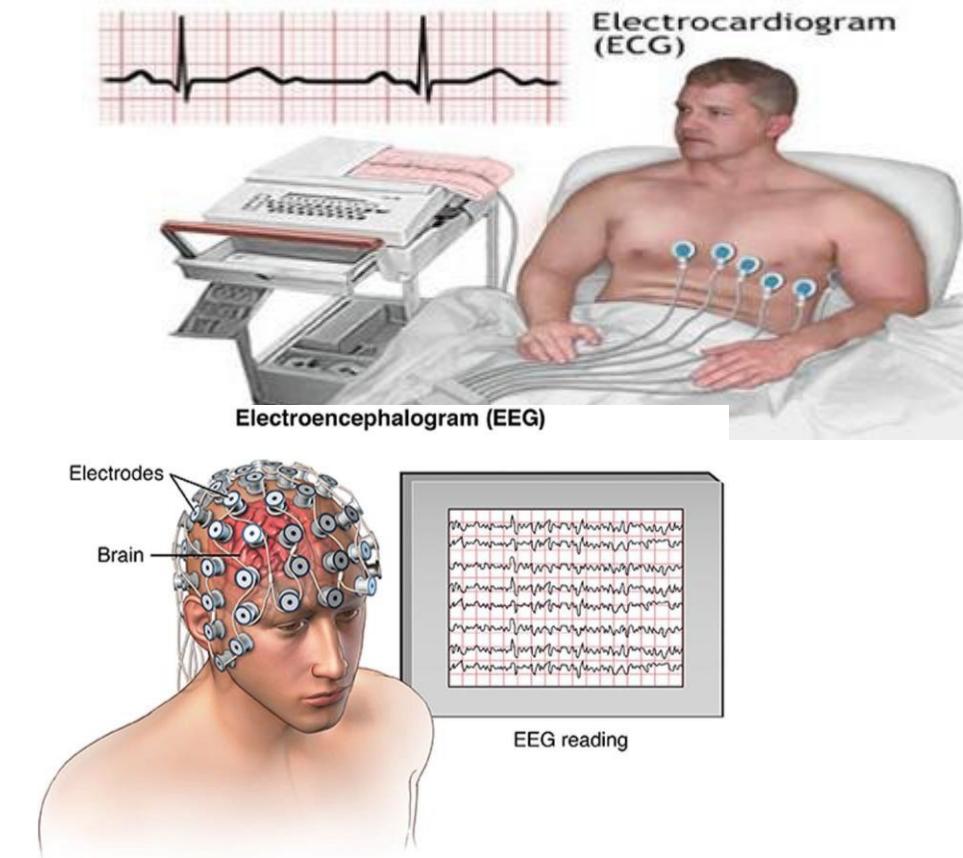




Electrostatica în medicină

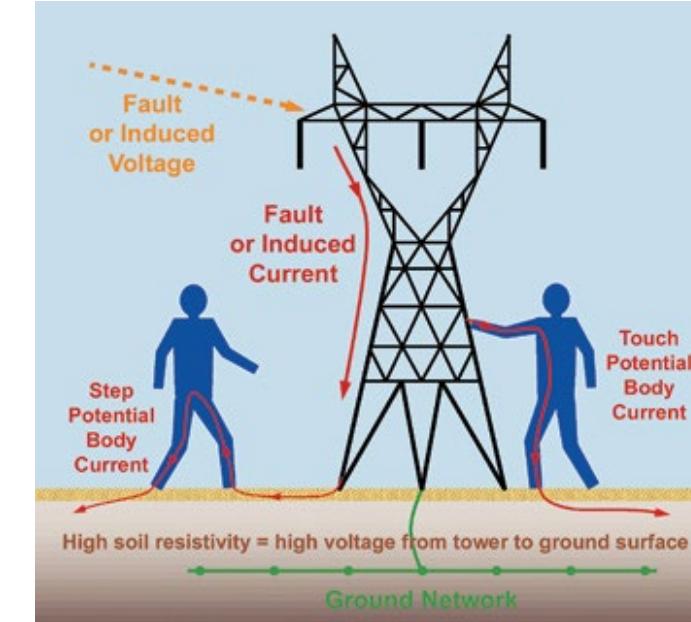
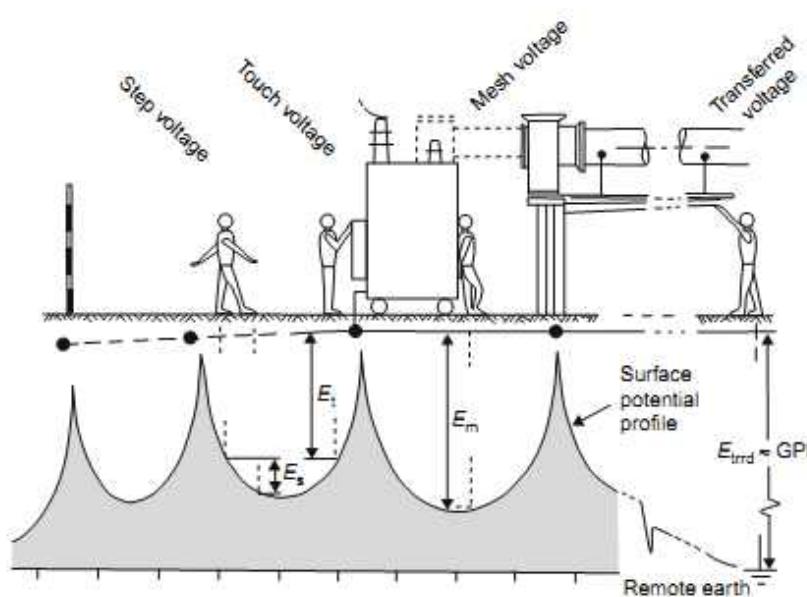
- Anozii, catozii și sursele de potențial electric sunt utilizate în aparatelor cu raze X, monitoarele de ritm cardiac, terapia electrostatică, modelarea proteinelor și într-o multitudine de dispozitive utilizate în spitale și clinici.

Dezinfectarea electrostatică a suprafețelor (în domeniul sanitar) este o metodă de aplicare a unui dezinfecțant înregistrat EPA pe o suprafață țintă folosind forța de atracție electrostatică.



1.4. Potențialul electric scalar

- Funcționarea unui circuit electric este de obicei descrisă în termeni de **curenți care circulă prin laturile sale** și de **potențialele nodurilor de circuit**.
- **Diferența de potențial ΔV** între două puncte dintr-un circuit reprezintă lucrul mecanic sau energia potențială necesară pentru a muta o sarcină unitară dintr-un punct în altul.
- Chiar dacă, atunci când analizăm un circuit, este posibil să nu luăm în considerare câmpurile **electricice** prezente în circuit, existența acestor câmpuri este, de fapt, cea care dă naștere la **diferențele de potențial la bornele elementelor circuitului**, cum ar fi rezistențele sau condensatorii.



Potențialul electric ca funcție de câmpul electric

- Diferența de potențial electric corespunzătoare deplasării unei sarcini punctiforme din punctul P_1 în punctul P_2 (Fig. 4-12) se obține prin integrare de-a lungul oricărui drum dintre ele:

$$dV = \frac{dW}{q} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \rightarrow \quad \int_{P_1}^{P_2} dV = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

- V_1 și V_2 sunt potențialele electrice în punctele P_1 și P_2

$$V_{21} = V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

- Rezultatul integralei de linie este **independent de calea specifică de integrare aleasă**, care leagă punctele P_1 și P_2 .
- Acest lucru rezultă imediat din **legea conservării energiei**.



$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{electrostatics})$$

Un **câmp** vectorial a cărui integrală de linie de-a lungul oricărei traекторii închise este nulă se numește **câmp conservativ sau câmp irațional**. Prin urmare, **câmpul electrostatic E este conservativ**.

- Diferența de potențial dintre două noduri dintr-un circuit electric are aceeași valoare indiferent de calea pe care o urmăm în circuit între noduri. Mai mult, legea lui Kirchhoff referitoare la tensiuni afirmă: cădere netă de tensiune de-a lungul unei bucle închise este zero. Dacă mergem de la P_1 la P_2 pe calea 1 și apoi ne întoarcem de la P_2 la P_1 pe calea 2, partea dreaptă a ecuației devine un contur închis, iar partea stângă se anulează.
- De fapt, integrala de linie a câmpului electrostatic E de-a lungul oricărui contur închis C este zero.

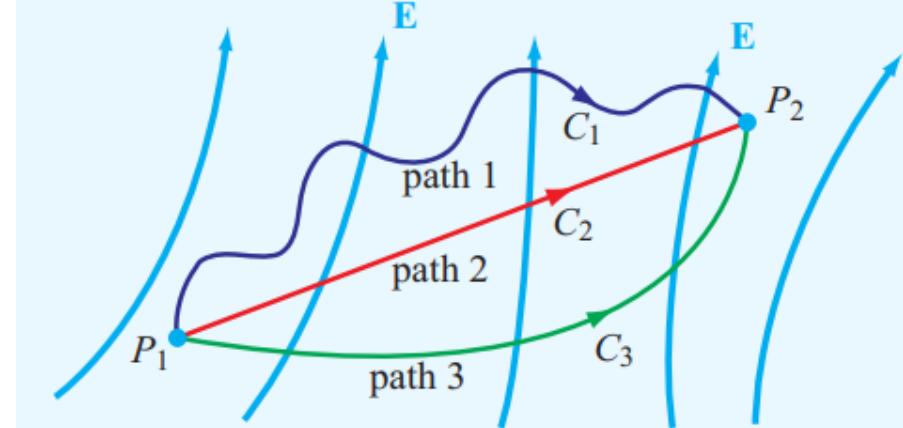


Figure 4-12 In electrostatics, the potential difference between P_2 and P_1 is the same irrespective of the path used for calculating the line integral of the electric field between them.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

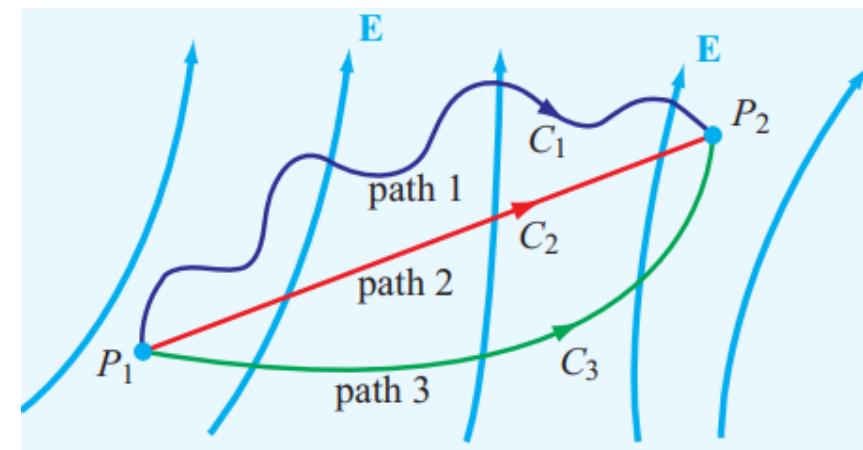
- Definim acum ce înțelegem prin **potențial electric V într-un punct din spațiu**.
- Pornim de lai **analogia cu circuitul electric**:
 - La fel cum unui nod dintr-un circuit nu i se poate atribui o tensiune absolută, un punct din spațiu nu poate avea un potențial electric absolut. Potențialul unui nod dintr-un circuit se măsoară în raport cu cea a unui **punct de referință** ales în mod convenabil, căruia i-am atribuit un **potențial zero și pe care îl numim masă**.
 - Același principiu se aplică **potențialului electric V** într-un punct din spațiu (de obicei, punctul de referință este ales la infinit).

$$V_{21} = V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

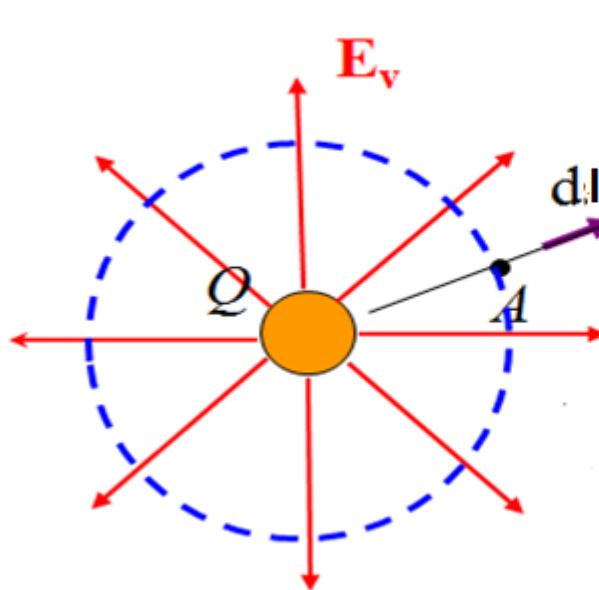


$V_1 = 0$ atunci
când
 P_1 este la
infinit

$$V = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{V}).$$



1.4.1 Potențialul electric al unei sarcini punctiforme



$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \bar{a}_r$$

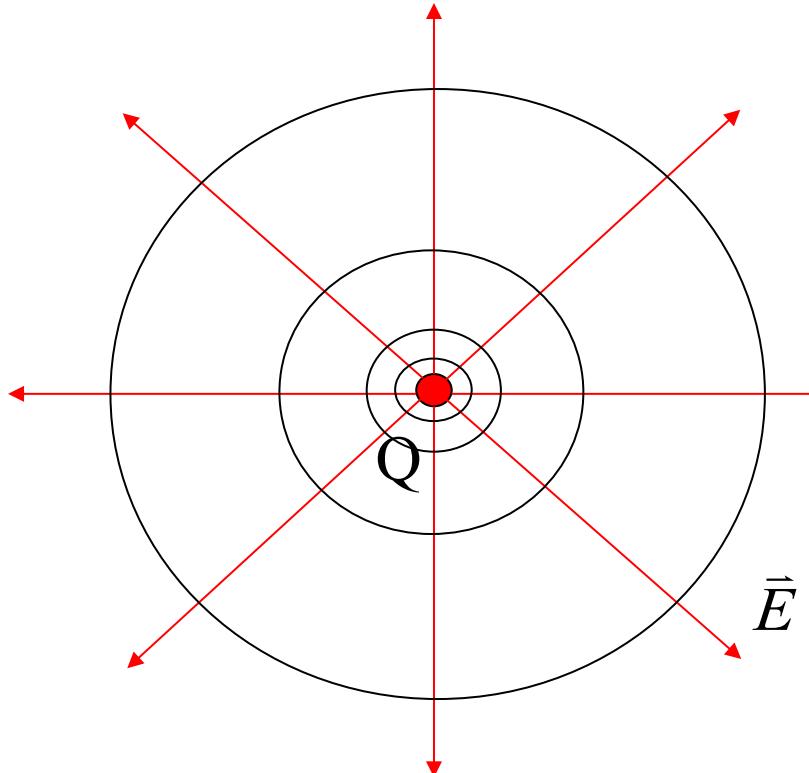
Se obisnuiește alegerea originii de potențial la $r_p = \infty$.

Pe drumul de la A (r_A) la P ($r_p = \infty$), \mathbf{E}_v e paralel cu dl ($dr = dl$)

$$V = \int_A^P \underbrace{\bar{E} \cdot d\bar{l}}_{E \cdot dl \cdot \cos 0} = \int_{r_A}^{r_P} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

V este constant pe suprafețe sferice centrate pe sarcina punctiformă.

Potențialul electric al unei sarcini punctiforme



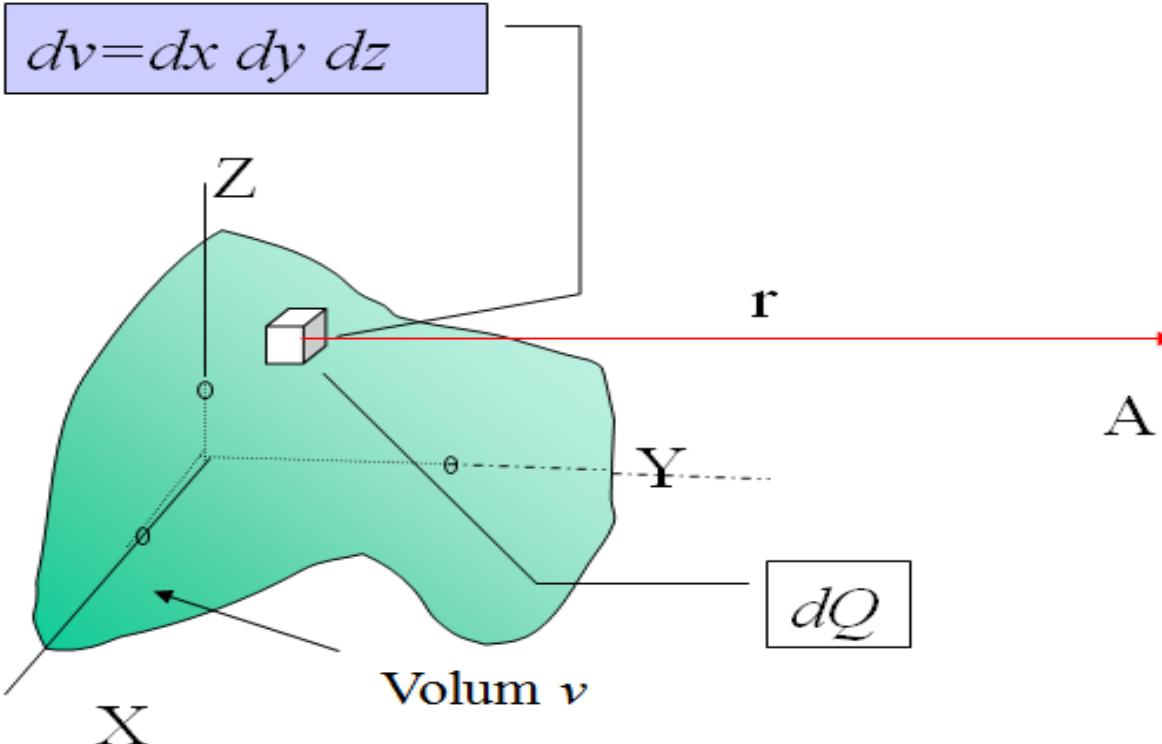
$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{a}_r$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Echipotențial, linii de câmp E

1.4.2 Potențialul electric produs de o distribuție continuă de sarcini

- În cazul unei distribuții continue de sarcini, începem prin divizarea sarcinii în porțiuni mici, iar apoi se adună contribuția fiecărei porțiuni la crearea potențialului electric:



$$dV_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r} \cdot dv$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{dQ}{r}$$

1.4.2 Potențialul electric produs de o distribuție continuă de sarcini

Sarcini distribuite
în volum

$$dQ = \rho_v \cdot dv$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v}{r} dv$$

$$\overline{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r} dv$$

Sarcini distribuite
pe o suprafață

$$dQ = \rho_s \cdot dS$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s}{r} dS$$

$$\overline{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r} dS$$

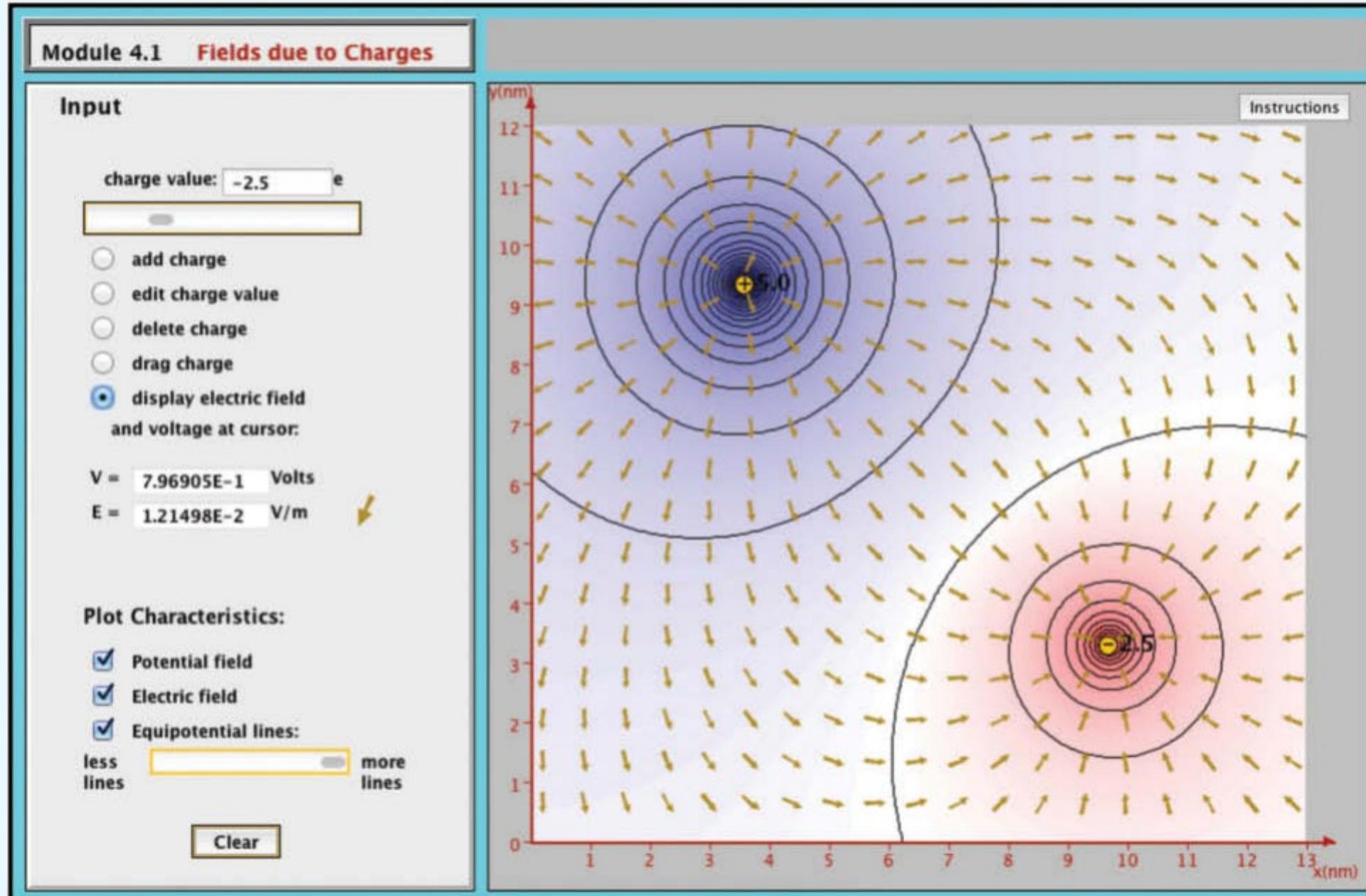
Sarcini distribuite
pe o curbă

$$dQ = \rho_l \cdot dl$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_l}{r} dl$$

$$\overline{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_l}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r} dl$$

Module 4.1 Fields due to Charges For any group of point charges, this module calculates and displays the electric field \mathbf{E} and potential V across a 2-D grid. The user can specify the locations, magnitudes and polarities of the charges.



1.4.3 Suprafete echipotentiale și linii echipotentiale

$$V_A - V_B = \int_A^B \overline{E}_v \cdot \overline{dl}$$

Puncte echipotențiale: puncte în care $V_A = V_B$

$$\int_A^B \overline{E}_v \cdot \overline{dl} = 0 \quad \rightarrow \quad \overline{E}_v \cdot \overline{dl} = 0$$

- Orice suprafață, plană sau curbă, unde potențialul este constant se numește *suprafață echipotențială*.
- Suprafața echipotențială poate sau nu să coincidă cu o suprafață fizică.

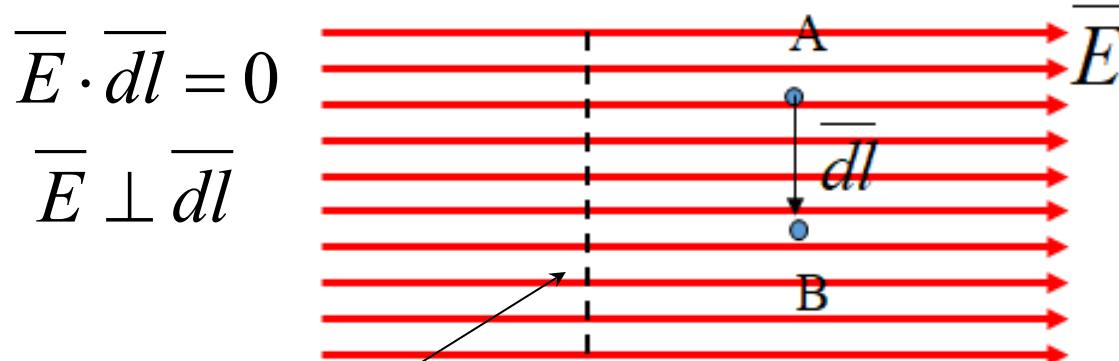
1.4.3 Suprafete echipotentiale și linii echipotentiale

$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \overline{E} \cdot \overline{dl}$$

Puncte echipotentiale:
punkte unde $V_A = V_B$.

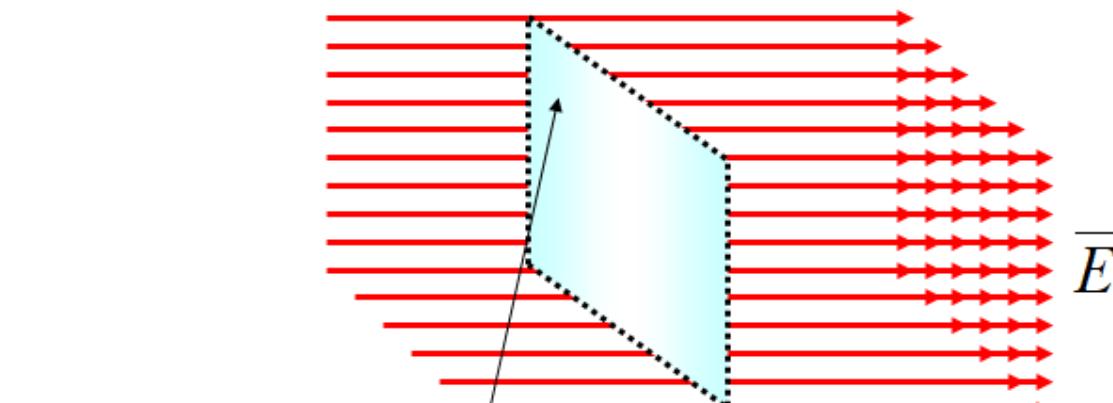
$$\int_A^B \overline{E} \cdot \overline{dl} = 0 \Rightarrow \overline{E} \cdot \overline{dl} = 0$$

- Orice suprafață, plană sau curbă, unde potențialul este constant se numește *suprafață echipotențială*.
- Suprafața echipotențială poate sau nu să coincidă cu o suprafață fizică.



Linii echipotențiale

Colecția tuturor punctelor având același potențial formează o linie în 2D.



Suprafață echipotențială

Colecția tuturor punctelor având același potențial, crează o suprafață în 3D.

Ecuatia diferențială a liniilor de câmp

Nu pentru examen

$$\overline{E} = E_1 \cdot \overline{a_1} + E_2 \cdot \overline{a_2} + E_3 \cdot \overline{a_3}$$

$$\overline{dl} = dl_1 \cdot \overline{a_1} + dl_2 \cdot \overline{a_2} + dl_3 \cdot \overline{a_3}$$

$$\overline{dl} \times \overline{E} = 0$$

$$\overline{dl} \times \overline{E} = \begin{vmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ dl_1 & dl_2 & dl_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{dl_1}{E_1} = \frac{dl_2}{E_2} = \frac{dl_3}{E_3}$$

$$dl_k = h_k \cdot du_k$$

$$\frac{h_1 \cdot du_1}{E_1} = \frac{h_2 \cdot du_2}{E_2} = \frac{h_3 \cdot du_3}{E_3}$$

S.C. Cartezian

$$h_1 = 1; h_2 = 1; h_3 = 1$$

$$u_1 = x; u_2 = y; u_3 = z$$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

S.C. Cilindric

$$h_1 = 1; h_2 = r; h_3 = 1$$

$$u_1 = r; u_2 = \varphi; u_3 = z$$

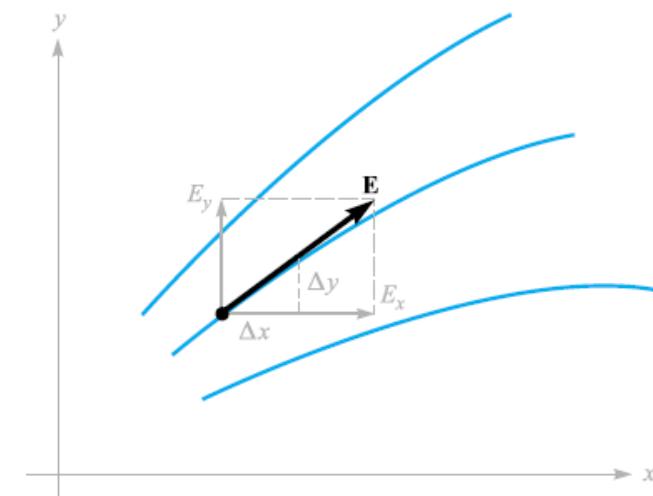
$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r \cdot d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$$

S.C. Sferic

$$h_1 = 1; h_2 = r; h_3 = r \cdot \sin(\theta)$$

$$u_1 = r; u_2 = \theta; u_3 = \varphi$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r \cdot d\theta}{E_\theta} = \frac{r \cdot \sin(\theta) \cdot d\varphi}{E_\varphi}$$



Ecuatia liniilor echipotentiale:

$$\overline{E_v} \cdot \overline{dl} = 0$$

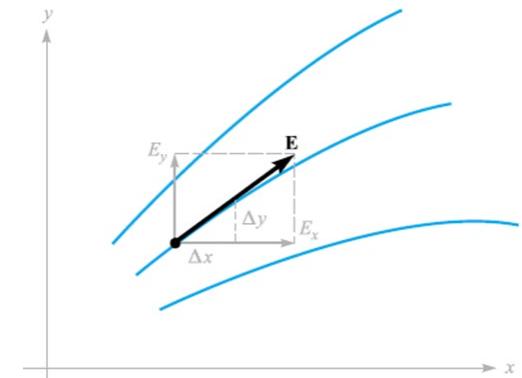
Ecuatia liniilor de câmp electric:

$$\overline{E_v} \times \overline{dl} = 0$$

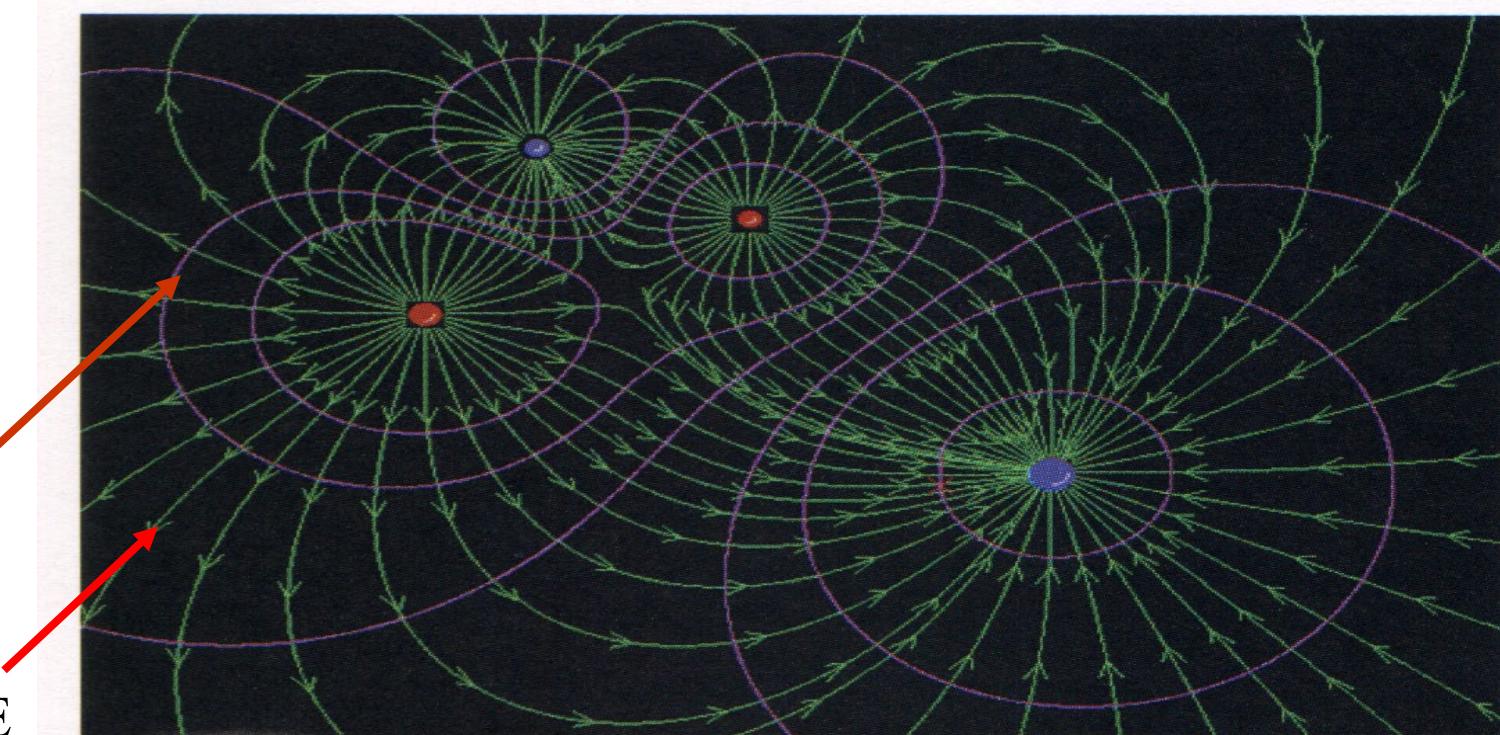
Liniile echipotentiale sunt ortogonale cu liniile de câmp electric!!!

Exemplu

Câmpul electric al diferitelor distribuții de sarcină

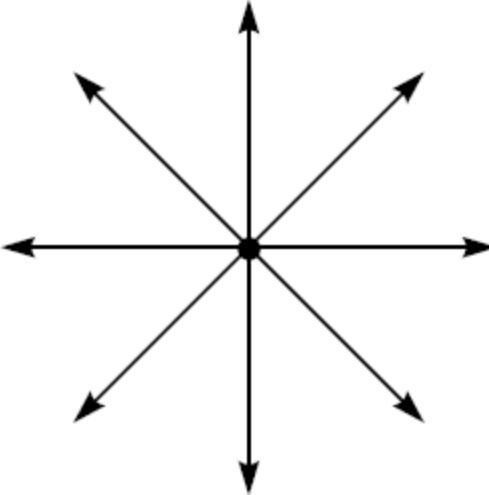


Echipotențial, câmp E



Observații

- Se consideră, câmpul creat de o sarcină lineică, $\overline{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \overline{a_r}$



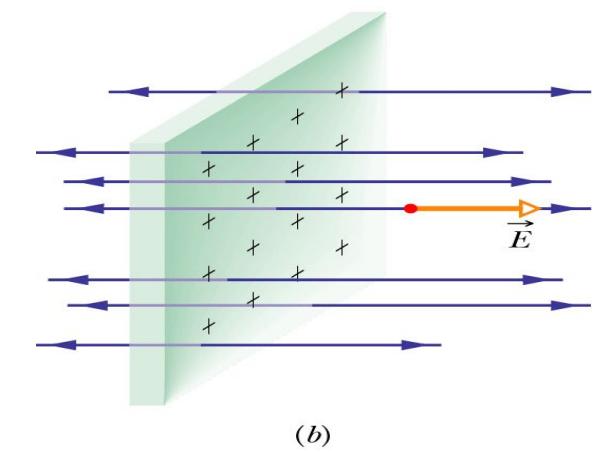
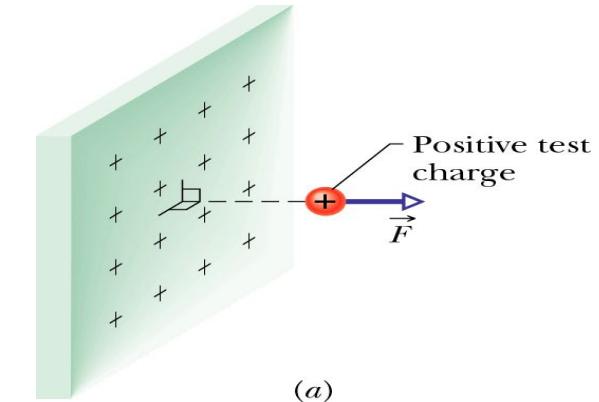
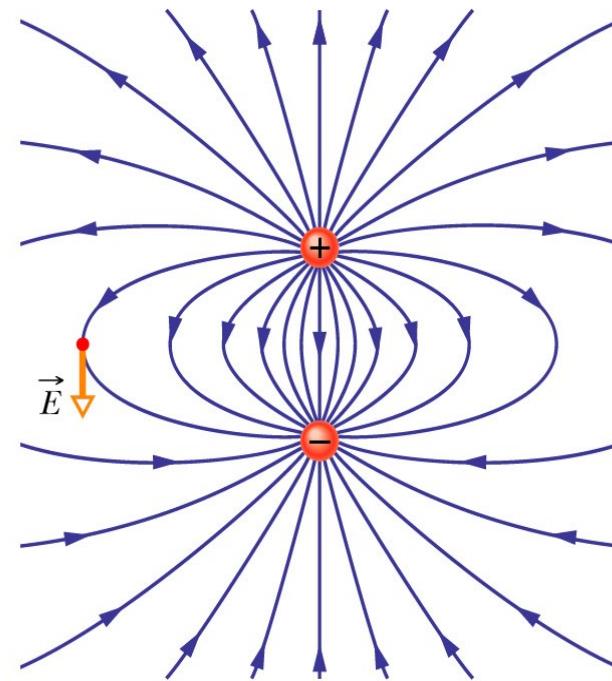
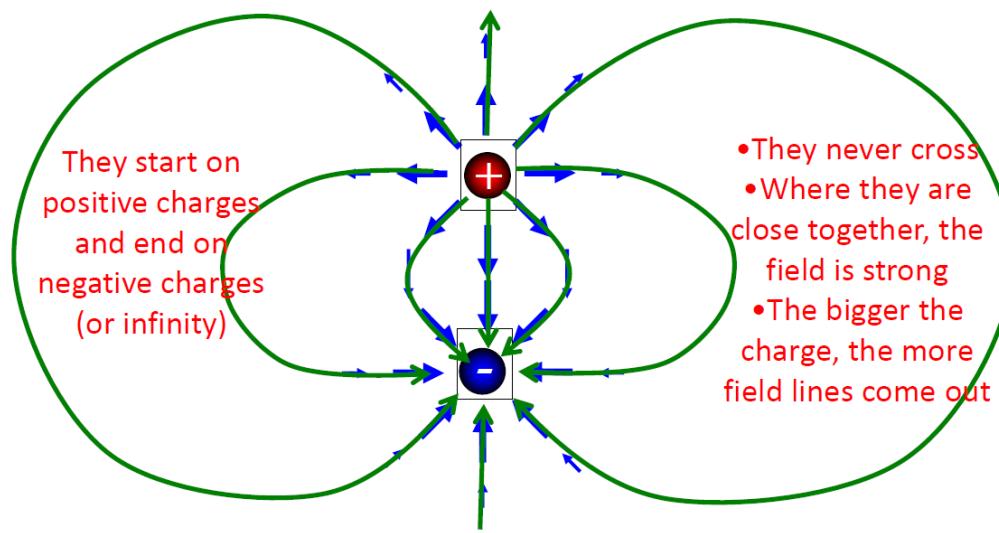
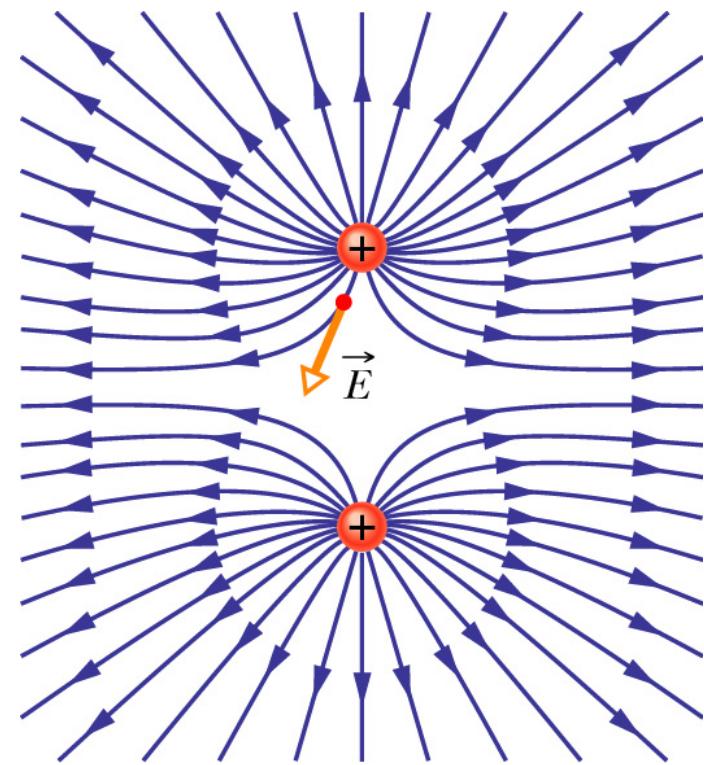
- Vom arăta direcția lui E trasând linii continue, care sunt pretutindeni tangente cu E , de la sarcină.
- O distribuție simetrică a liniilor (una la 45 grade) indică simetria, iar vârfurile săgeții indică direcția câmpului în fiecare punct de-a lungul liniei, iar distanța liniilor este invers proporțională cu intensitatea câmpului electric.

Notă:

- Câmp apropiat:** foarte aproape de o sarcină, predominant câmpul datorat acelei sarcini. Prin urmare, liniile sunt radiale și sferice simetrice.
- Câmp îndepărtat:** departe de sistemul de sarcini, modelul ar trebui să arate ca cel al unei sarcini punctiforme de valoare $Q = \sum Q_i$... astfel, liniile ar trebui să fie radial spre interior sau spre exterior, cu excepția cazului în care $Q = 0$.
- Direcția vectorului câmpului electric E într-un punct este întotdeauna tangentă la liniile câmpului.

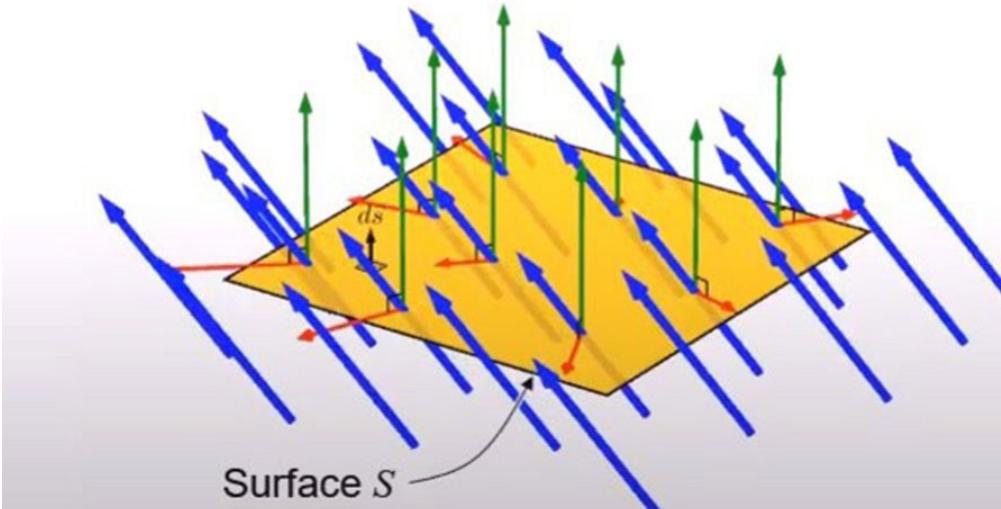
- **Liniile de câmp** electric reprezintă de fapt o reprezentare grafică (picturală) a câmpului electric. Acestea constau în linii direcționate care indică de fapt direcția câmpului electric în diferite puncte din spațiu.
 - Nu există nicio regulă cu privire la numărul de linii care trebuie afișate. Cu toate acestea, se obișnuiește să se deseneze un număr de linii proporțional cu sarcina. Astfel, dacă se trasează un număr N de linii de la sau către o sarcină Q , atunci corespunzător se vor trasa $2N$ linii pentru sarcina $2Q$.
 - Liniile de câmp sunt dense în apropierea sursei de câmp electric și devin mai rare pe măsură ce se îndepărtează de aceasta.
 - Liniile de câmp pornesc de la o sarcină pozitivă și se termină fie pe o sarcină negativă, fie se deplasează spre infinit.
 - Se presupune că liniile de câmp datorate unei sarcini negative încep la infinit și se termină la sarcina negativă.

Electrostatica



1.5. Fluxul electric ψ (Φ)

- Fluxul electric este cantitatea de câmp electric (E , D) care trece printr-o suprafață. Este definit în termeni de direcție, vector unitate, perpendicular pe suprafață.
- Fluxul electric reprezintă cantitatea totală de vector câmp electric ce traversează drept o suprafață:
- Doar componenta normală a câmpului este asimilată fluxului electric;
- Componenta tangențială nu este luată în considerare.



Fluxul electric

$$\Psi = \int_S \overline{D} \cdot \overline{dS}$$

Fluxul magnetic

$$\Phi = \int_S \overline{B} \cdot \overline{dS}$$

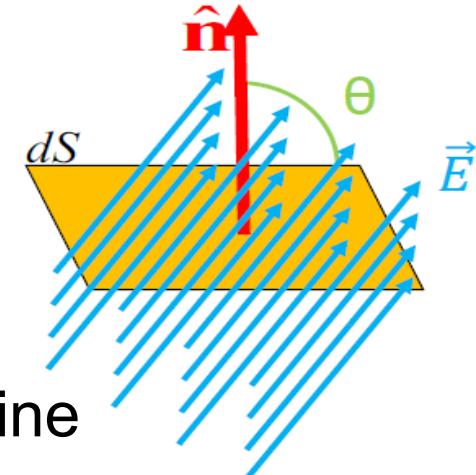
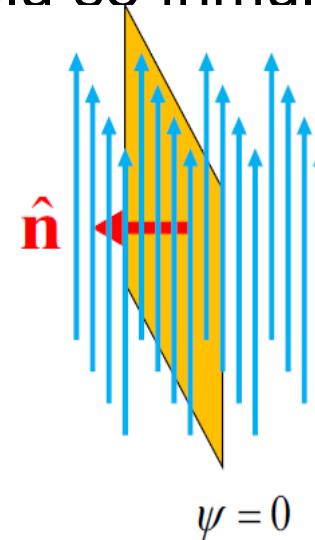
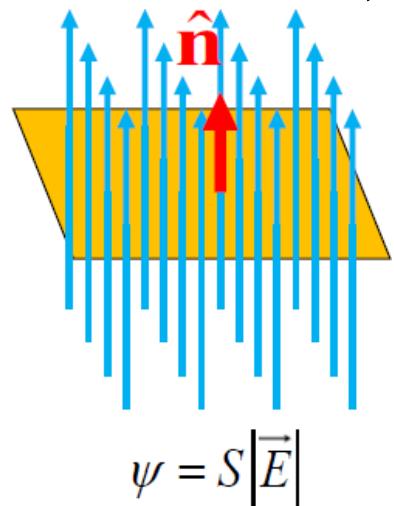
- Pentru o suprafață S arbitrară, fluxul se obține prin integrarea pe toate elementele de suprafață

$$\Psi = \int_S d\Psi = \int_S \vec{D} \cdot \hat{\vec{n}} \cdot dS$$

- Dacă câmpul electric este uniform, unghiul θ este constant și avem:

$$\Psi = D \cdot S \cdot \cos(\theta)$$

- Când suprafața este plană și câmpul este constant, pentru a se obține fluxul, pur și simplu se înmulțesc cele două mărimi.



Astfel, fluxul este egal cu produsul mărimii câmpului electric și proiecția vectorului ariei pe câmp.

Inducția electrică (D)

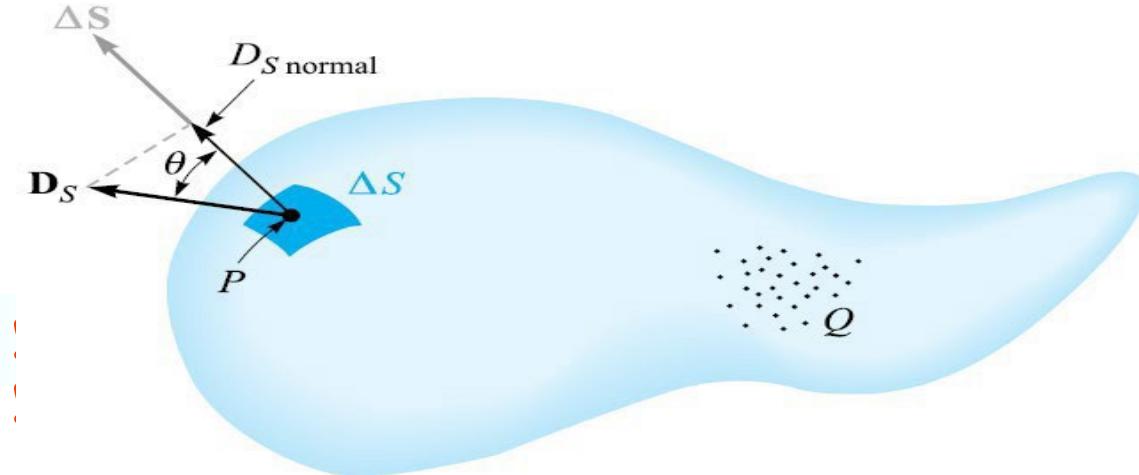
Inducția electrică sau Densitatea fluxului electric, măsurată în coulombi pe metru pătrat (uneori descrisă drept „linii pe metru pătrat”, pentru că fiecare linie de flux se datorează unui coulomb), se notează cu litera D, care a fost inițial aleasă din cauza denumirilor alternative ale inducției: densitatea fluxului de deplasare sau densitatea deplasării.

Direcția lui **D** într-un punct este direcția liniilor de flux din acel punct, iar amplitudinea este dată de numărul de linii de flux care traversează o suprafață normală la liniile împărțite la suprafața suprafetei.

1.6. Legea lui Gauss

Fluxul electric care trece prin orice suprafață închisă este egal cu sarcina totală închisă de acea suprafață, împărțită la permitivitatea vidului.

$$\Psi_E = \iint_S \overline{E} \cdot d\overline{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Rezultatul este independent de forma suprafetei !

Fluxul total ce traversează suprafața ΔS :

$$\Delta\Psi = D_{S,norm} \cdot \Delta S = D_S \cdot \cos(\theta) \cdot \Delta S = D_S \cdot \Delta S$$

Fluxul total care trece prin suprafața închisă se obține prin adăugarea contribuțiilor diferențiale care traversează fiecare element de suprafață ΔS ,

$$\Psi = \int d\Psi = \oint \overline{D} \cdot d\overline{S} \quad \Psi_E = \sum_i \Psi_{E,i}$$

- Avem atunci formularea matematică a **legii lui Gauss (forma integrală)**
- Sarcina Q poate fi formată din :

mai multe sarcini punctiforme

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i$$

distribuție liniară de sarcini

$$Q = \int_C \rho_l \cdot dl$$

$$\Psi = \oint_S \overline{D} \cdot \overline{dS} = Q$$

Q – sarcina localizată în interiorul suprafetei închise S

distribuție superficială de sarcini $Q = \int_S \rho_S \cdot dS$ **distribuție volumică de sarcini** $Q = \int_V \rho_v \cdot dv$ - această formă este utilizată în mod obișnuit și suntem de acord că ea reprezintă oricare sau toate celelalte forme.

- Legea lui Gauss poate fi scrisă, pentru o **distribuție volumică de sarcină**, sub forma:

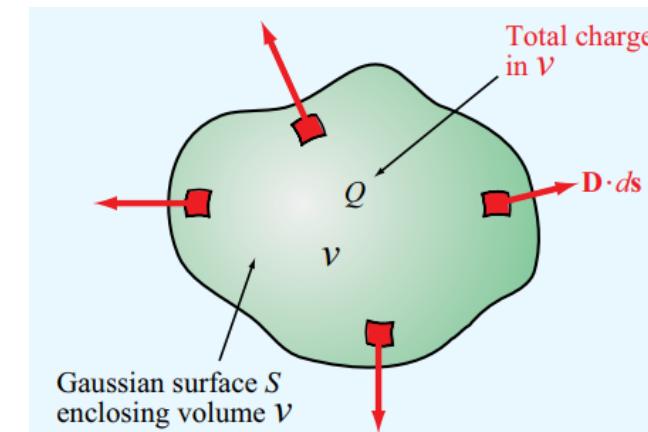
$$\oint_S \overline{D} \cdot \overline{dS} = \int_V \rho_v dv$$

Fluxul electric net prin orice suprafață închisă (S) este egal cu **sarcina totală (netă) închisă** de acea suprafață.
 - S este o suprafață închisă arbitrară; - V este volumul delimitat de S

$$\nabla \cdot \overline{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \overline{D} \cdot \overline{dS}}{\Delta v}$$

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho_v$$

Prin micșorarea volumului Δv la zero, definim divergența lui D într-un punct ca fiind fluxul extern net pe unitate de volum pe o suprafață incrementală închisă.



Legea lui Gauss (forma diferențială sau locală)
Prima ecuație a lui Maxwell

-relația dintre densitatea fluxului electric și densitatea de sarcină volumică

Observație: Legea lui Gauss permite **evaluarea facilă a câmpului electric** pentru distribuții **simetrice de sarcină**, cum ar fi o sarcină punctiformă, o sarcină liniară infinită, o sarcină de suprafață cilindrică infinită și o distribuție sferică de sarcină.

Legea lui Gauss – forma integrală

$$\overline{E}_v = \oint_S \overline{E}_v \cdot \overline{dS} = \frac{q_s}{\epsilon_0}$$

Legea fluxului electric – forma integrală

$$\oint_S \overline{D}_v \cdot \overline{dS} = q_s$$

Legea lui Gauss – forma locală

$$\nabla \cdot \overline{D} = \rho_v$$

Determinarea câmpului electric E folosind legea lui Gauss

➤ Calculul câmpului electric E

- Dacă se cunoaște distribuția de sarcină și
- Problema are simetria necesară pentru a permite evaluarea integralei.

➤ Determinarea distribuției de sarcină

- Sarcini plasate pe sfere conductoare,
- Sarcini distribuite într-un volum dat.

• Se găsește o suprafață Gaussiană al cărui vector normal la elementul de suprafață este paralel cu câmpul electric E;

$$\oint_S \overline{E} \cdot \overline{dS} = \oint_S E \cdot dS$$

• Pe suprafața Gaussiană, amplitudinea **câmpului electric E este constantă**;

$$\oint_S E \cdot dS = E \cdot \oint_S dS = E \cdot S$$

Determinarea câmpului electric E folosind legea lui Gauss

- Se folosește geometria pentru a evalua S.
- Prin intermediul legii lui Gauss se face legătura între E și sarcina localizată în interiorul suprafeței.

În cazul general

- Se utilizează **simetria** distribuției de sarcină pentru a determina șablonul liniilor de câmp.
- Se urmărește alegerea **suprafeței Gaussiaiene** astfel încât E să fie paralel cu S, sau suprafața să poată fi descompusă în componente paralele și perpendiculare, întrucât:

$$E_{\text{perp}} \, dS = 0$$

- Dacă E este paralel cu S, trebuie să ne asigurăm că E este constant pe toata suprafața.

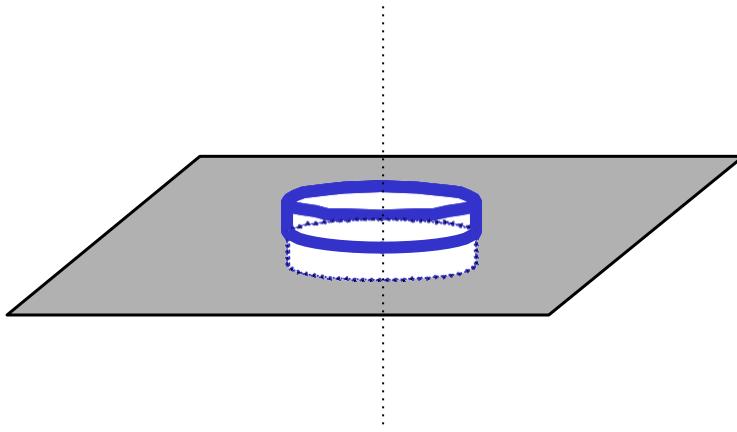
Determinarea câmpului electric E folosind legea lui Gauss

Algoritmul de calcul:

- **Analiza problemei și a simetriei**
- Abordarea soluției
- Calcule
- Concluzii

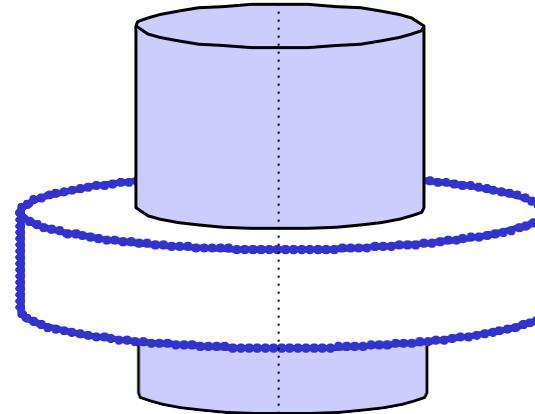
Simetrii de bază pentru legea lui Gauss

plan infinit extins



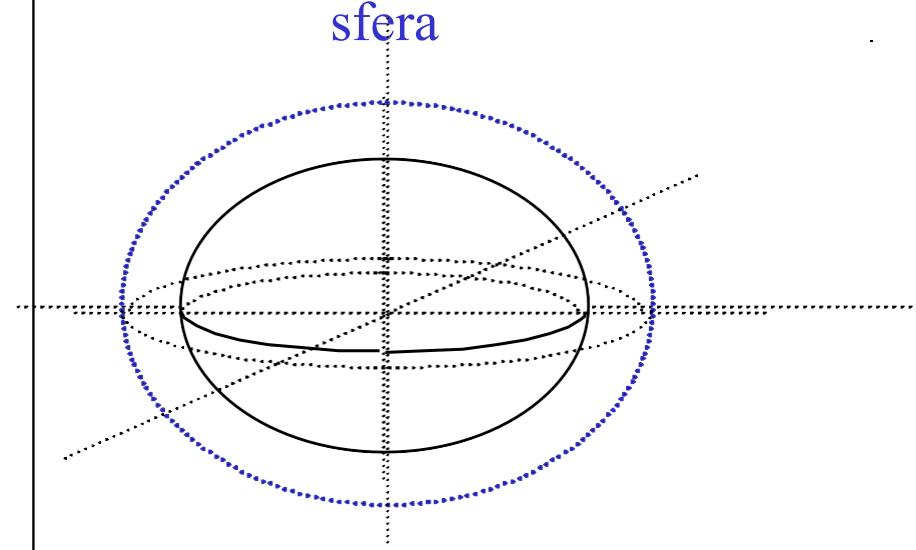
“Cutie de pastile” Gauss
Înălțimea $\rightarrow 0$

cilindru infinit lung



Cilindrul Gauss
rază r, lungime L

sferă



Sfera Gauss,
rază r ($r < R$ sau $r > R$).

- Se consideră o sarcină punctiformă Q , aflată în originea unui sistem de coordonate sferic (centrul unei sfere).
- a. Să se determine \mathbf{D} , într-un punct P situat la distanță r de sarcină.
- b. Să se determine potențialul electric V pentru această sarcină punctiformă.

- Suprafața Gaussiană este evident o suprafață sferică, cu centrul în Q și de rază r variabilă.
- Vectorul \mathbf{D} este în orice punct normal la suprafața Gaussiană; amplitudinea lui D are aceeași valoare în fiecare punct de pe suprafața sferei.

$$\oint_{S_{sph}} \overline{D} \cdot \overline{dS} = Q_{enclosed_{sph}} ; \quad Q = Q_{enclosed_{sph}}$$

$$Q = \oint_{S_{sph}} \overline{D} \cdot \overline{dS} = \oint_{S_{sph}} D \cdot dS \cdot \cos(0^\circ) = D \cdot \oint_{S_{sph}} dS = D \cdot 4\pi r^2 \longrightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

- Deoarece r poate lua orice valoare, iar direcția vectorului \mathbf{D} este radială, îndreptată spre exterior (conform figurii), avem:

$$\overline{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \overline{a_r}; \quad \overline{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \overline{a_r}$$

- Exemplul prezintă o metodă simplă alternativă pe care o putem aplica și altor probleme, la care legea lui Coulomb este aproape incapabilă să ofere un răspuns..

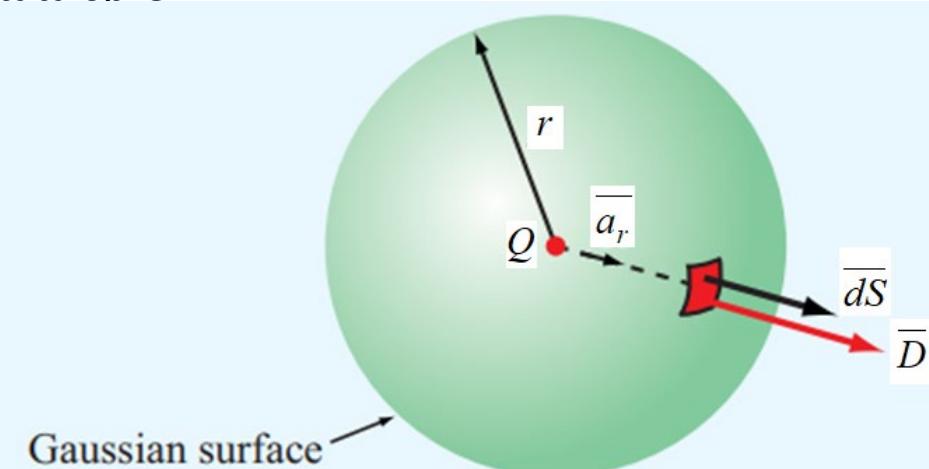
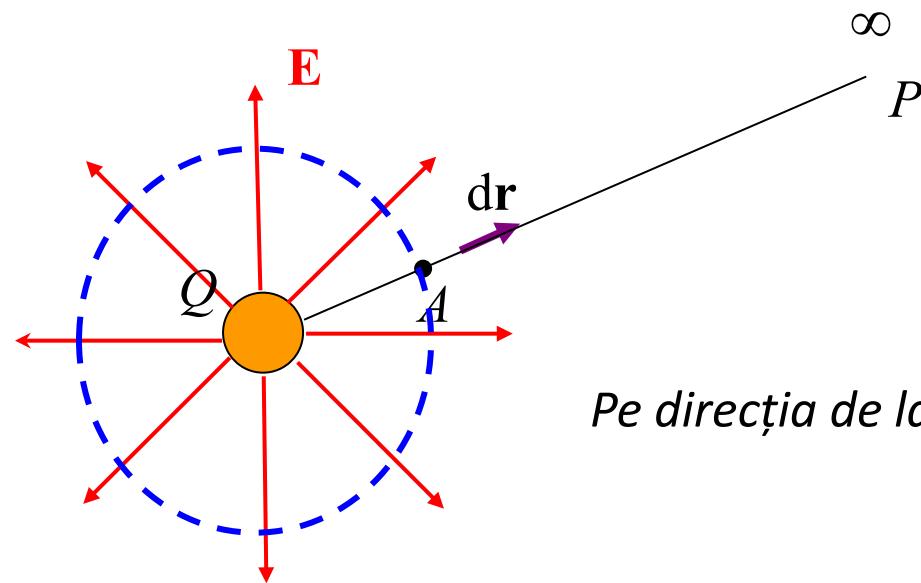


Figure 4-9 Electric field \mathbf{D} due to point charge q .

b. Să se determine potențialul electric pentru această sarcină punctiformă



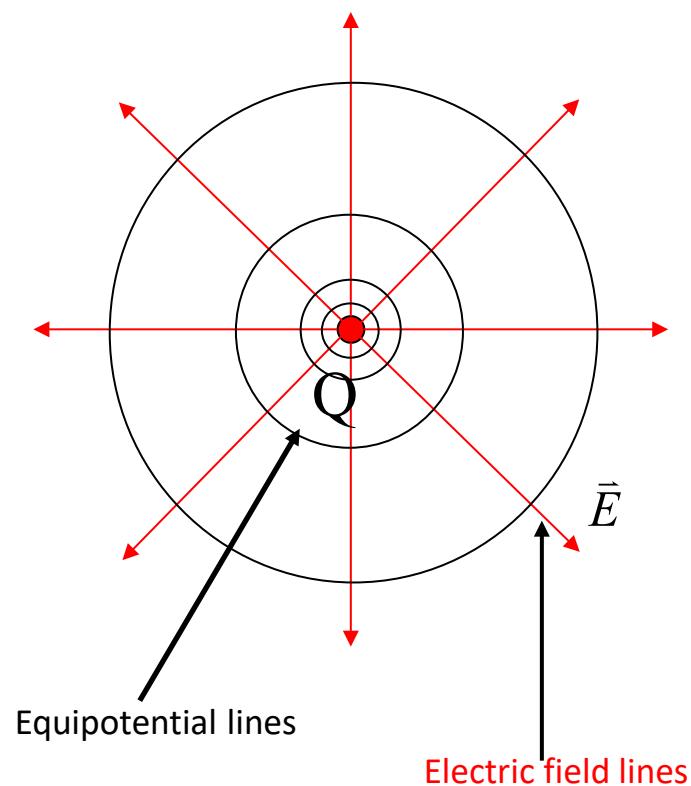
$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \bar{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r}$$

Pentru corpurile finite, punctul în care potențialul este zero se alege la infinit, la $r_P = \infty$.

Pe direcția de la A (r_A) la P ($r_P = \infty$), E este paralel cu dr

$$V_A = - \int_P^A E \cdot dr = \int_A^P E \cdot dr = \int_{r_A}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \dots = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

Potențialul V este constant pe suprafețele sferice, concentrice cu centrul în Q (suprafețe echipotențiale).



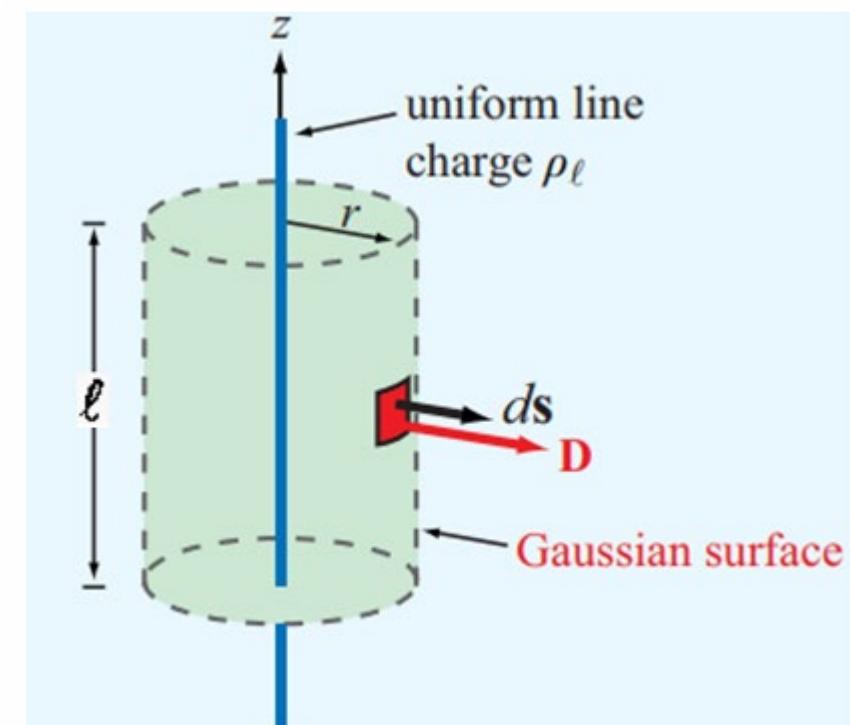
2. Să se determine câmpul electric și potențialul la o distanță r , datorită unui fir infinit lung, încărcat uniform cu densitatea de sarcină liniară ρ_l , care se află de-a lungul axei z în aer.

Mai întâi trebuie să cunoaștem simetria câmpului; putem considera aceste cunoștințe complete atunci când se cunosc răspunsurile la aceste două întrebări:

- Cu ce coordonate variază câmpul?
- Ce componente ale vectorilor \mathbf{D} sau \mathbf{E} sunt prezente?
- Deoarece densitatea de sarcină de-a lungul liniei este uniformă, infinită ca întindere și este distribuită de-a lungul axei z, din considerente de simetrie rezultă că \mathbf{D} este în direcție radială și nu poate depinde de φ sau z (coordonate cilindricice):

$$\overline{\mathbf{E}} = E_r \cdot \overline{a_r} \quad E_r = f(r) \quad \overline{\mathbf{D}} = D_r \cdot \overline{a_r} \quad D_r = f(r)$$

- Alegerea unei supafețe închise (suprafața gaussiană) este acum simplă, deoarece o suprafață cilindrică este singura suprafață la care \mathbf{D} este normal peste tot și poate fi închisă de supafețe plane normale pe axa z. Un cilindru circular drept închis cu raza r care se extinde de la $z = 0$ la $z = l$ este prezentat în figură.
- ❖ În utilizarea legii lui Gauss, nu este vorba de a folosi simetria pentru a simplifica soluția... aplicarea legii lui Gauss depinde de simetrie, iar dacă nu putem demonstra că există simetrie, atunci nu putem folosi legea lui Gauss pentru a obține o soluție. Cele două întrebări precedente devin acum „trebuie”.



- Pentru a determina D (sau E) într-un punct P, alegem o suprafață Gaussiană cilindrică Scil de lungime arbitrară l. D (respectiv E) este constantă ca mărime și peste tot perpendiculară pe suprafața laterală cilindrică și paralelă cu fețele de capăt.
- Se aplică legea lui Gauss sub formă integrală

$$\oint_{S_{cyl}} \overline{D} \cdot d\overline{S} = Q_{enclosed cyl}; \quad Q = Q_{enclosed cyl}$$

\downarrow

$$\overline{D} = \epsilon_0 \cdot \overline{E}$$

$$\oint_{S_{cyl}} \overline{E} \cdot d\overline{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

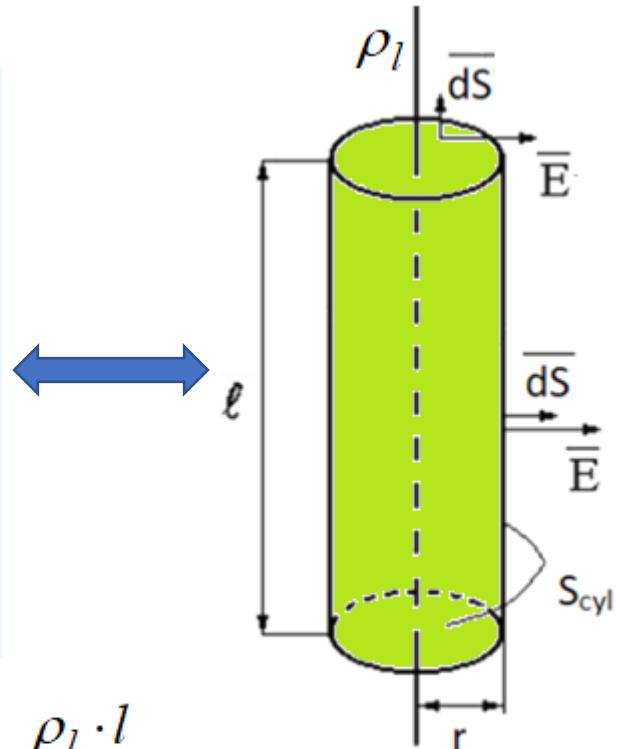
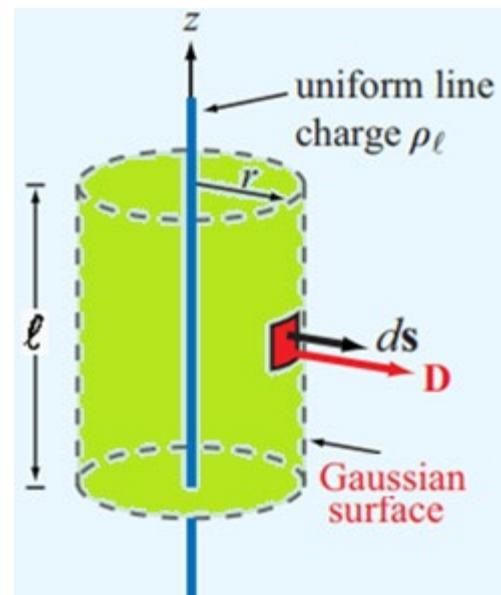
\downarrow

$$Q = \rho_l \cdot l$$

$$\int_{S_{sides}} \overline{E} \cdot d\overline{S} + \int_{S_{bases}} \overline{E} \cdot d\overline{S} = \frac{\rho_l \cdot l}{\epsilon_0}$$

\longrightarrow

$$\int_{S_{sides}} E \cdot dS \cdot \cos(0^\circ) + \int_{S_{base}} E \cdot dS \cdot \cos(90^\circ) = \frac{\rho_l \cdot l}{\epsilon_0}$$



$$E \cdot \int_{S_{sides}} dS = \frac{\rho_l \cdot l}{\epsilon_0}$$

\longrightarrow

$$E \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = \frac{\rho_l \cdot l}{\epsilon_0}$$

$$E = E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$

\longrightarrow

$$\overline{D} = \epsilon_0 \cdot \overline{E}$$

\longrightarrow

$$D = D_r = \frac{\rho_l}{2\pi r}$$

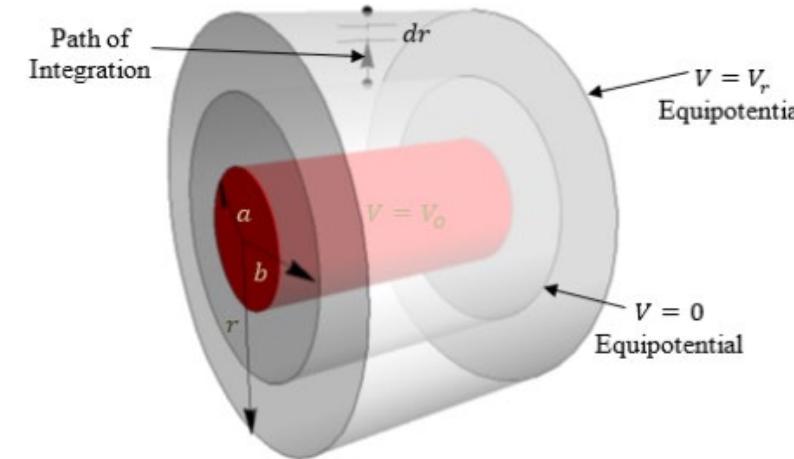
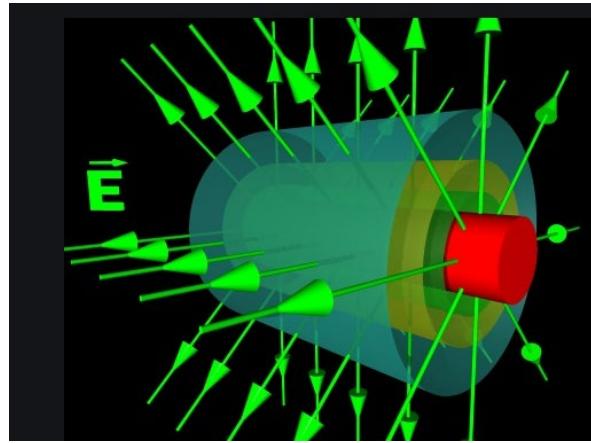
Exemplu numeric:

$$\rho_l = 30 \frac{\text{nC}}{\text{m}}; \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\text{F}}{\text{m}}; \quad a = 1 \text{m}; \quad E = 540 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

- Considerând potențialul de referință într-un punct situata la distanța r_0 de fir, potențialul la distanța r se determină astfel:

$$V = - \int_{r_0}^r E \cdot dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_r^{r_0} \frac{1}{r} \cdot dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

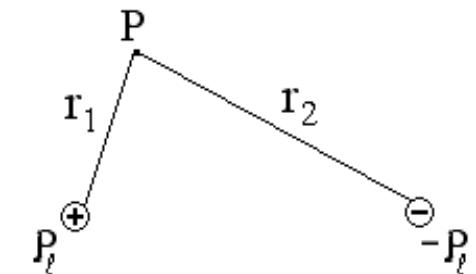
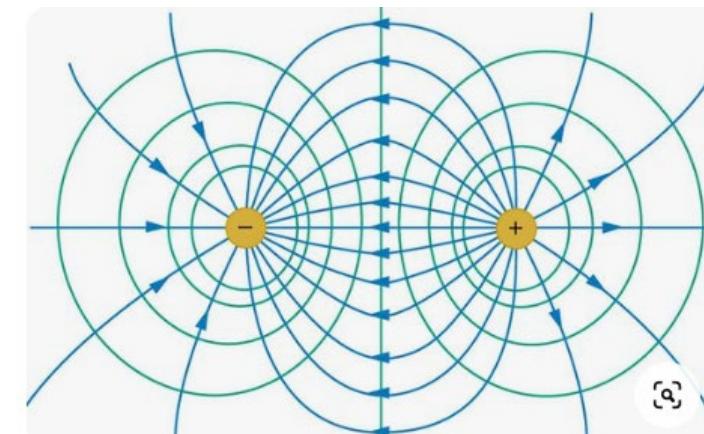
- Liniile de câmp au direcție radială, iar suprafetele echipotențiale sunt cilindri coaxiali cu firul



Observație: Problema poate fi aplicată în cazul determinării expresiei potențialului electrostatic într-un punct P aflat în vecinătatea unei linii de transport, reprezentată ca doi conductori filiformi încărcați cu densități de sarcină liniare pl și –pl, aflată într-un mediu izotrop cu permittivitatea ε_0.

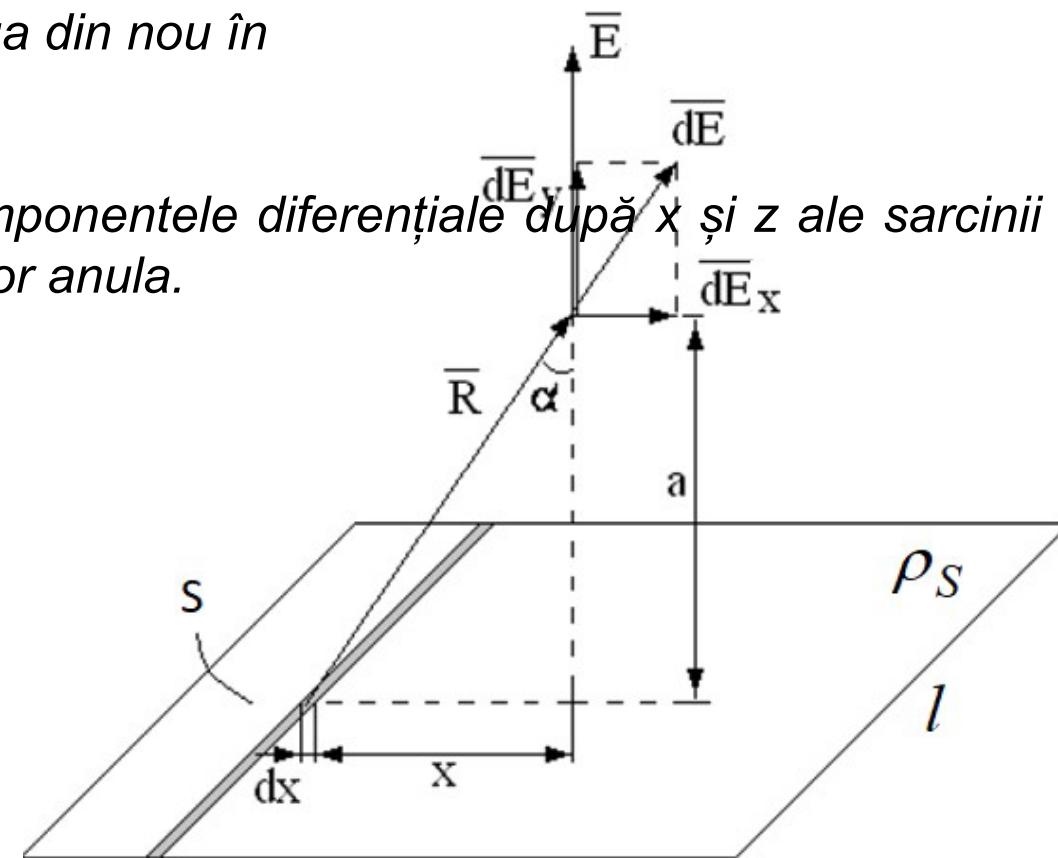
Folosind expresia potențialului creat în punctul P de un conductor, stabilită în cazul problemei, se vor compune algebric cele două potențiale pe care le obținem

$$V_P = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$



3. Câmpul electric datorat unei distribuții superficiale de sarcină

- O altă distribuție a sarcinii electrice o reprezintă distribuția pe o suprafață cu o densitate uniformă de sarcină, ρ_s [C/m²]. O astfel de distribuție a sarcinii poate fi adesea folosită pentru a aproxima distribuția de sarcină în cazul **conductoarelor unei linii de transmisie platbandă sau a unui condensator cu plăci paralele**.
- Sarcina statică se află pe suprafetele conductoarelor și nu în interiorul acestora; din acest motiv, ρ_s este cunoscută în mod obișnuit ca **densitate de sarcină de suprafață**.
- Să considerăm o distribuție de sarcină în planul xz și vom lua din nou în considerare simetria
- Vom arăta că, câmpul nu poate varia după x sau z, iar componentele diferențiale după x și z ale sarcinii situate simetric față de punctul în care evaluăm câmpul se vor anula.
- Câmpul electric va avea componentă doar după y, E_y . Există mai multe metode de a evalua intensitatea câmpului electric.



Metoda 1

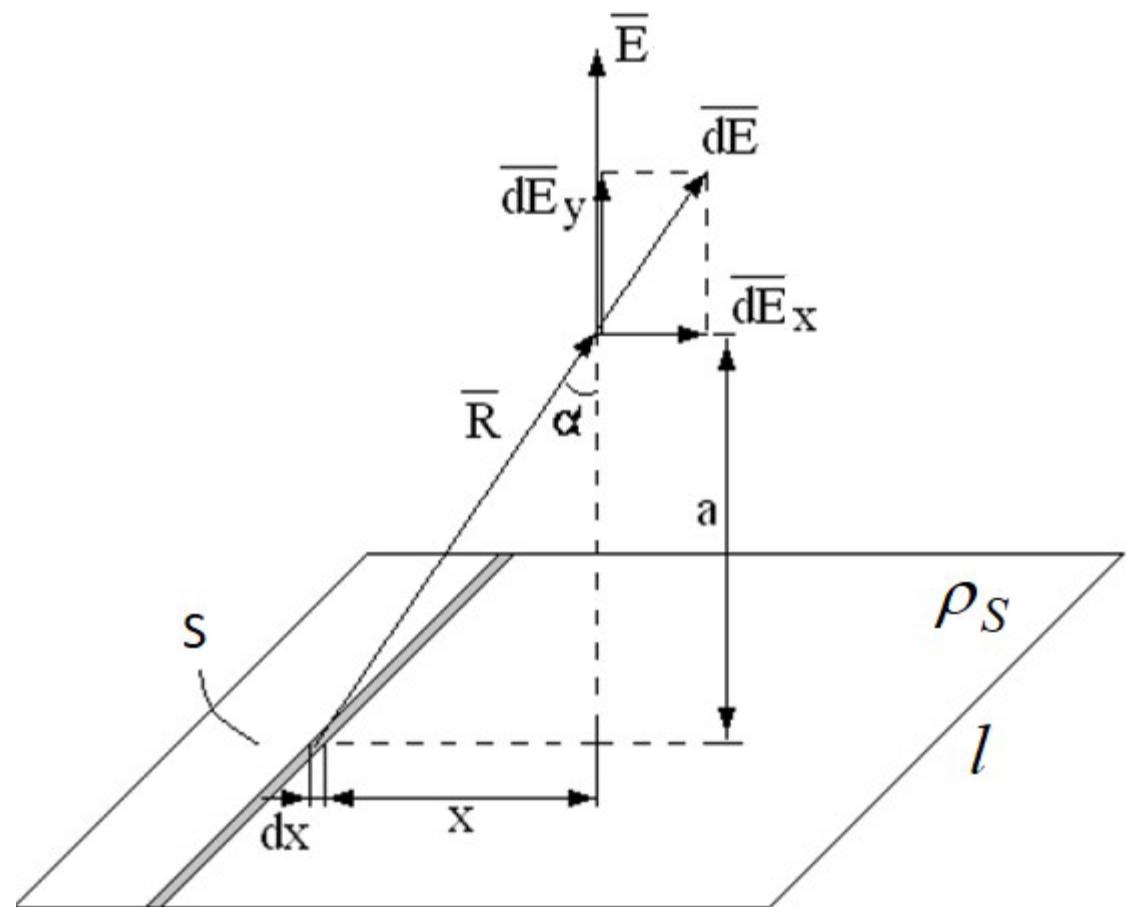
$$dE_y = dE \cdot \cos \alpha = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \cos \alpha = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{a}{R}$$

$$R = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$dQ = \rho_l \cdot l$

$$dQ = \rho_s \cdot dS = \rho_s \cdot l \cdot dx \quad \Rightarrow \rho_l = \rho_s \cdot dx$$

$$dE_y = \frac{\rho_s \cdot a \cdot dx}{2\pi\epsilon_0 \cdot (x^2 + a^2)}$$



$$E = E_y = \int_{-\infty}^{\infty} dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_s \cdot a \cdot dx}{2\pi\epsilon_0 \cdot (x^2 + a^2)} = \frac{\rho_s \cdot a}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{\rho_s \cdot a}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \cdot a \tan\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

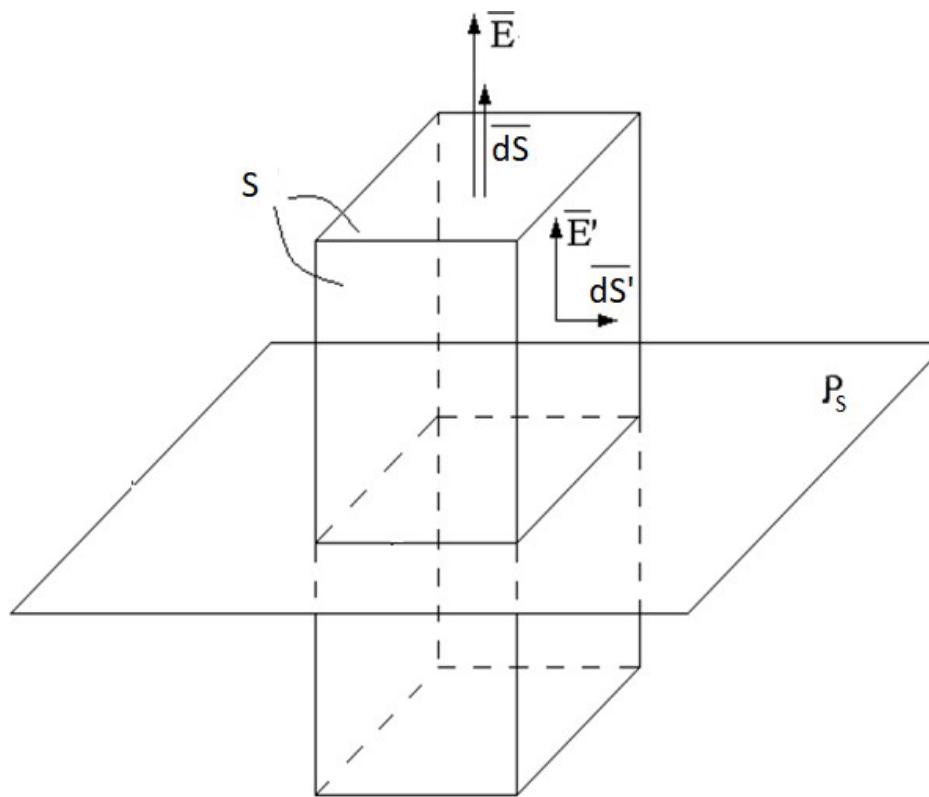
Metoda 2

▪ Pentru a determina D într-un punct P , se va alege o casetă dreptunghiulară de aria S , atât sus cât și jos

▪ D este normal pe ariile bazelor și nul pe aria laterală

▪ Liniile de câmp electric sunt drepte perpendiculare pe plan,

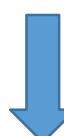
iar suprafețele echipotențiale sunt plane paralele cu planul dat



$$\int_S \overline{E} \cdot \overline{dS} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \int_{S_{top}} \overline{E} \cdot \overline{dS} + \int_{S_{sides}} \overline{E} \cdot \overline{dS} + \int_{S_{bottom}} \overline{E} \cdot \overline{dS} = \frac{\rho_s \cdot S_0}{\epsilon_0}$$



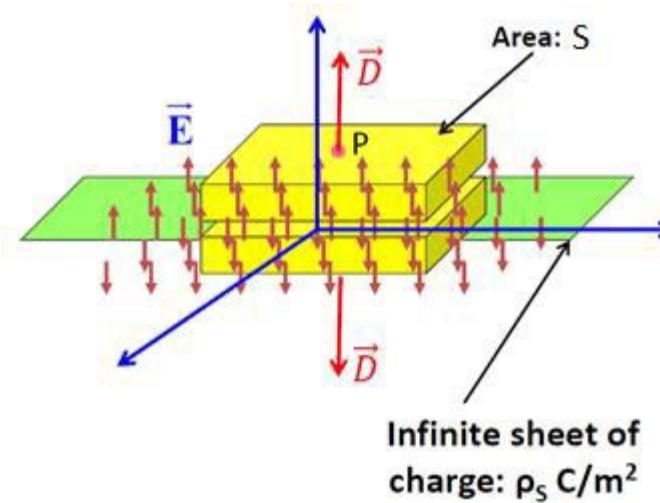
$$\int_{S_{top}} \overline{E} \cdot \overline{dS} + \int_{S_{bottom}} \overline{E} \cdot \overline{dS} = \frac{\rho_s S_0}{\epsilon_0}$$



$$2E \cdot S_0 = \frac{\rho_s \cdot S_0}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

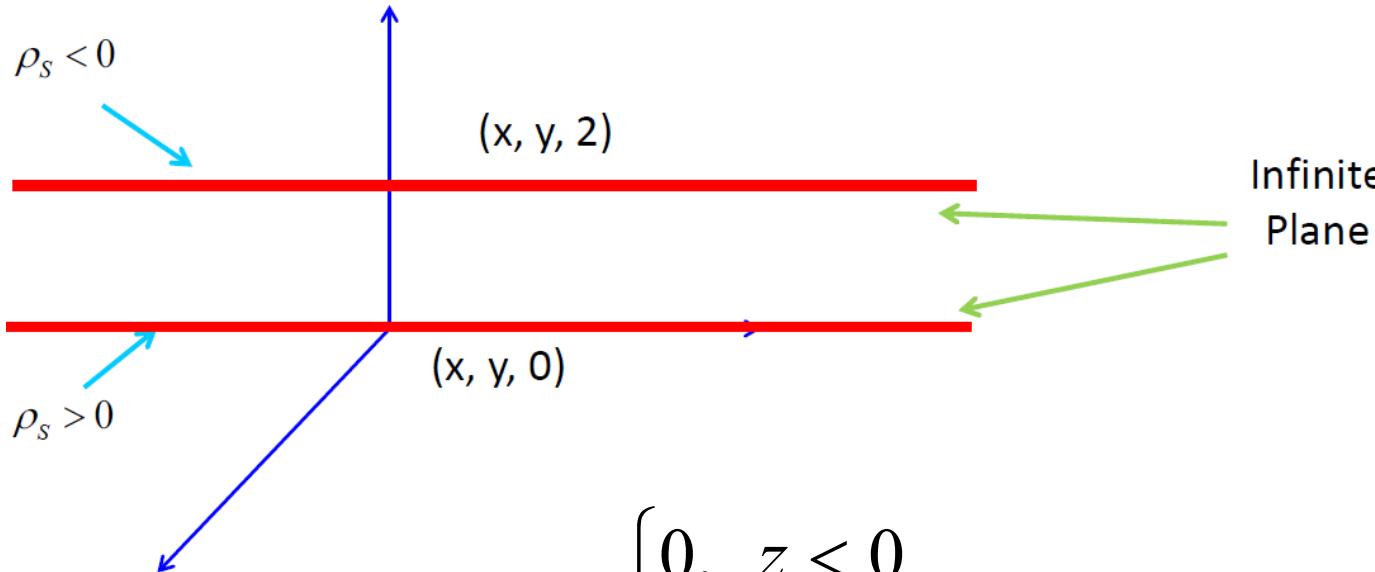
$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

$$\overline{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_z$$



$$\rho_A = 15 \frac{nC}{m^2}; \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{F}{m}; E_v = 848 \frac{V}{m}$$

Un plan infinit cu o densitate de sarcină de suprafață uniformă ρ_s este situat la $z=0$ (planul $x-y$), iar un alt plan infinit cu $-\rho_s$ este situat la $z=2m$, ambele în spațiu liber. Determinați câmpul electric E peste tot.



$$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \cdot \bar{a}_z, & 0 < z < 2 \\ 0, & z > 2 \end{cases}$$

Pentru planul la $z = 0$

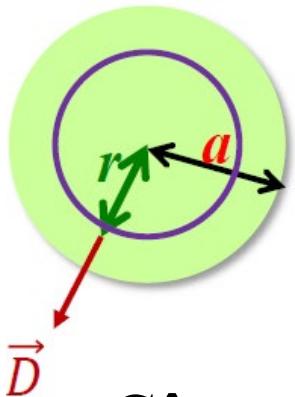
$$\bar{E}_1 = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \cdot \bar{a}_z, & z > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \cdot \bar{a}_z, & z < 0 \end{cases}$$

Pentru planul la $z = 2m$

$$\bar{E}_2 = \begin{cases} -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \cdot \bar{a}_z, & z > 2 \\ \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \cdot \bar{a}_z, & z < 2 \end{cases}$$

Acesta este o aplicatie practica importanta, deoarece reprezinta câmpul dintre plăcile paralele ale unui condensator, avand ca dielectric aerul, cu condiția ca dimensiunile liniare ale plăcilor să fie mult mai mari decât distanța dintre ele și, de asemenea, cu condiția să considerăm un punct aflat la o distanță considerabilă de margini. Câmpul din exteriorul condensatorului, deși nu este zero, aşa cum am găsit în cazul ideal precedent, este de obicei neglijabil.

4. Se consideră o sferă de rază a , încărcată cu densitatea volumică de sarcină $\rho_v = \text{const.}$. Să se determine intensitatea câmpului electric \mathbf{E} , inducția electrică \mathbf{D} și potențialul electric V , în interiorul și în exteriorul sferei.



- Pentru a determina \mathbf{E} și \mathbf{D} peste tot (interior, exterior), se construiesc suprafețe gaussiene pentru cazurile $r_i \leq a$ și $r_e \geq a$ separat.
- În mod clar, toate direcțiile sunt create egale în această problemă. Câmpul electric va fi îndreptat spre exterior, liniile de câmp ies din sferă, și depinde doar de distanță.

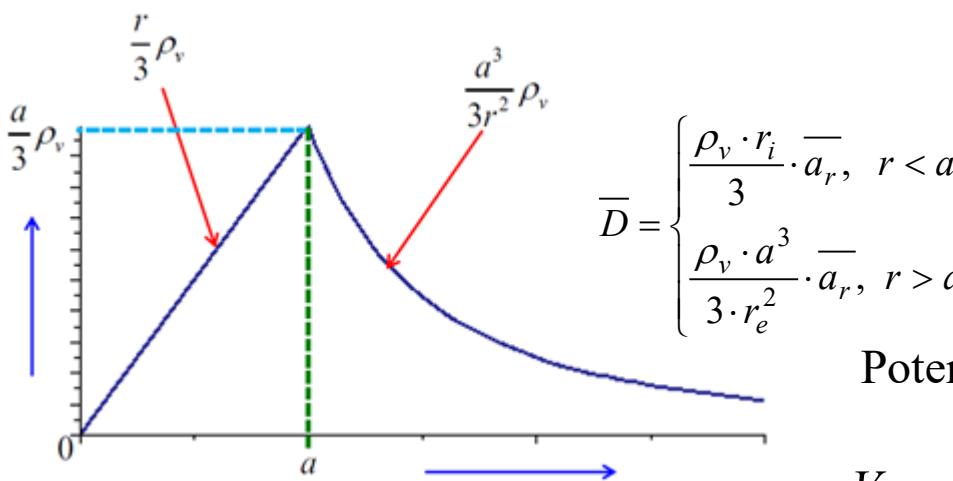
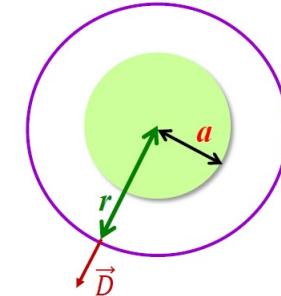
Câmpul interior. Pentru $r_i < a$, se consideră o suprafață Gaussiană interioară, o sferă S_i , de rază

Când se calculează fluxul pentru o suprafață Gaussiană, se iau în considerare doar sarcinile electrice din interiorul suprafeței. Aici, sarcina cuprinsă în interiorul suprafeței este:

$$\begin{aligned} \oint_{S_i} \overline{E}_i \cdot d\overline{S} &= \frac{Q_{S_i}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \oint_{S_i} E_i \cdot dS \cdot \cos(0^\circ) = \frac{\rho_v \cdot v_i}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E_i \cdot \oint_{S_i} dS = \frac{\rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_i^3}{\epsilon_0} \\ &\downarrow \\ E_i \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_i^2 &= \frac{\rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_i^3}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E_i = \frac{\rho_v \cdot r_i}{3\epsilon_0} \quad D_i = \frac{\rho_v \cdot r_i}{3} \\ \overline{E}_i &= \frac{\rho_v \cdot r_i}{3\epsilon_0} \cdot \overline{a_r}; \quad \overline{D}_i = \frac{\rho_v \cdot r_i}{3} \cdot \overline{a_r} \end{aligned}$$

Câmpul exterior. Pentru $r_e > a$, se va considera o suprafață Gaussiană, o sferă S_e , de rază r_e . Sarcina cuprinsă în interiorul acestei suprafete este chiar întreaga sarcină cuprinsă în interiorul sferei date în problemă, de rază a .

$$\oint_{S_e} \overline{E}_e \cdot d\overline{S} = \frac{Q_{S_e}}{\epsilon_0} \longrightarrow \oint_{S_e} E_e \cdot dS \cdot \cos(0^\circ) = \frac{\rho_v \cdot v_{sph}}{\epsilon_0} \longrightarrow E_e \cdot \oint_{S_e} dS = \frac{\rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot a^3}{\epsilon_0}$$



$$\overline{D} = \begin{cases} \frac{\rho_v \cdot r_i}{3} \cdot \overline{a}_r, & r < a \\ \frac{\rho_v \cdot a^3}{3 \cdot r_e^2} \cdot \overline{a}_r, & r > a \end{cases}$$

$$E_e \cdot 4\pi \cdot r_e^2 = \frac{\rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot a^3}{\epsilon_0} \longrightarrow E_e = \frac{\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0 \cdot r_e^2} \quad D_e = \frac{\rho_v \cdot a^2}{2 \cdot r_e}$$

$$\overline{E}_e = \frac{\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0 \cdot r_e^2} \cdot \overline{a}_r; \quad \overline{D}_e = \frac{\rho_v \cdot a^3}{3 \cdot r_e^2} \cdot \overline{a}_r$$

Potentiajul electric într-un punct exteior sferei:

$$V_P = \int_r^{\infty} E_e \cdot dr = \int_r^{\infty} \frac{\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = \frac{\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0} \cdot \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0 \cdot r}$$

Potentiajul electric într-un punct din interiorul sferei:

$$V_M = \int_r^a E_i \cdot dr + \int_a^{\infty} E_e \cdot dr = \int_r^a \frac{\rho_v \cdot r}{3\epsilon_0} \cdot dr + \int_a^{\infty} \frac{\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} \cdot \int_r^a r \cdot dr + \frac{\rho_v \cdot a^3}{3\epsilon_0} \cdot \int_a^{\infty} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{\rho_v}{6\epsilon_0} \cdot (3a^2 - r^2)$$

ENGINEERING FACT

**LONG TIME AGO, PEOPLE WHO
SACRIFICED THEIR SLEEP, FAMILY,
FOOD, LAUGHTER AND OTHER JOYS
OF LIFE WERE CALLED**

SAINTS

NOW, THEY ARE CALLED

ENGINEERS