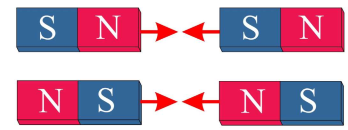
Cursul #11

11.1 Electricitate și magnetism

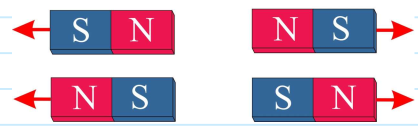
11.1.1 Magneți permanenți și câmpul magnetic

Este bine cunoscut faptul că există unele materiale pe care le denumim materiale magnetice, sau mai corect materiale feromagnetice, care au proprietăți specifice, diferite de alte materiale. Un material feromagnetic sau un magnet are *întotdeauna doi poli, polul sud (S) și polul nord (N)*. Experimental s-a observat că dacă apropiem doi poli opuși aceștia se atrag, iar dacă apropiem doi poli de același fel aceștia se resping. Există trei materiale metale de tranziție care sunt feromagnetice: Fe, Co și Ni. Cei mai mulți magneți industriali sunt de Fe, oxizi de Fe sau aliaje ale acestuia. Magneții pe care îi cunoașteți voi sunt oxizi de Fe (ferită sau magnetită).

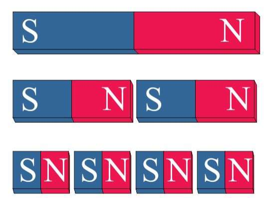
Polii opuși se atrag



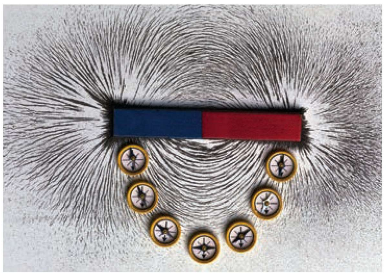
Polii similari se resping



O proprietate foarte interesantă a unui magnet este că el are întotdeauna doi poli. Adică, dacă luăm un magnet și îl rupem în două, nu o să obținem doi magneți, unul care să aibă numai un pol sud și unul care să aibă numai un pol nord, întotdeauna se vor forma spontan poli suplimentari, astfel încât fiecare bucată de magnet să aibă doi poli. Aceasta este adevărat în oricât de multe bucăți am rupe magnetul.

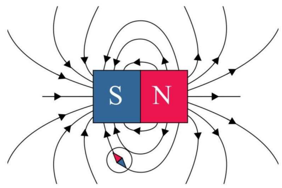


Pentru toată lumea care a văzut magneți este evident că în jurul acestora spațiul are proprietăți specifice. O să spunem că *în jurul magneților apare un câmp magnetic* care modifică proprietățile spațiului. Ca și în cazul câmpului electric, putem să folosim liniile de câmp pentru reprezentarea geometriei câmpului magnetic. Liniile de câmp magnetic se pot vizualiza foarte ușor folosind pilitura de Fe, sau cu ajutorul unei busole. În cazul unei busole, acul acesteia se va așeza întotdeauna paralel cu direcția locală a câmpului magnetic (tangent la liniile de câmp).

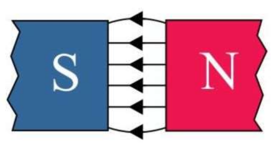


Sursa imaginii: newtonsdisciple.com/

Liniile de câmp magnetic întotdeauna ies din polul nord și intră în polul sud. Deoarece un magnet are întotdeauna doi poli, *liniile de câmp magnetic sunt întotdeauna închise*. Acest lucru nu este adevărat în cazul câmpului electric. O busolă se aliniază pe direcția liniei de câmp locale și ne indică polul sud. Probabil că știți deja, polul nord geografic al Pământului este pol sud magnetic.

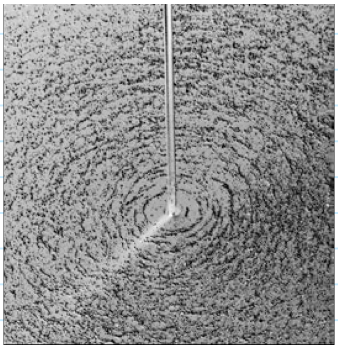


Cum putem atunci să creăm un *câmp magnetic uniform* și constant (adică să aibă aceeași intensitate și liniile de câmp să fie drepte)? Cu un singur magnet de formă paralelipipedică nu se poate. Însă, dacă apropiem doi poli opuși, în volumul de spațiu dintre aceștia câmpul o să fie aproximativ uniform și constant.



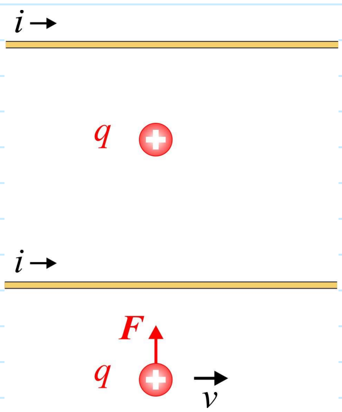
11.2.1 Legătura dintre curent electric și câmp magnetic

Se pune întrebarea *sarcinile electrice interacționează cu câmpul magnetic* sau *are legătură câmpul magnetic cu sarcinile electrice ?* În anul 1820, Hans Christian Ørsted, în timpul unui curs pe care îl susținea, a observat că acul unei busole este deviat dacă în apropierea acesteia se află un fir conductor parcurs de curent electric. Aceasta înseamnă că *un curent electric produce un câmp magnetic* care interacționează cu acul busolei. Pentru a vizualiza liniile de câmp magnetic produs de un fir conductor prin care trecem un curent electric putem să folosim pilitura de fier. În imaginea alăturată puteți observa cum se așază pilitura de fier pe o suprafață așezată orizontal în care intră perpendicular un fir conductor parcurs de curent. Observăm că în jurul firului conductor apare un câmp magnetic cu *linii circulare care se închid în ele însele și au centrul în centrul firului.*



Sursa imaginii: fundamentalphotographs.com/

Să luăm un fir conductor parcurs de curent electric și să punem în apropierea acestuia o sarcină electrică. În jurul firului o să avem un câmp magnetic. Observăm că *dacă sarcina este în repaus, aceasta nu interacționează cu câmpul magnetic produs de fir*. Vă reamintesc că un fir conductor parcurs de curent este neutru din punct de vedere electric. În schimb, dacă sarcina se deplasează cu viteza *v* indicată, asupra sarcinii o să apară o forță de atracție datorată câmpului magnetic (dacă sarcina se deplasează în sens invers o să fie respinsă de fir). Folosind aceste observații experimentale putem să concluzionăm următoarele:

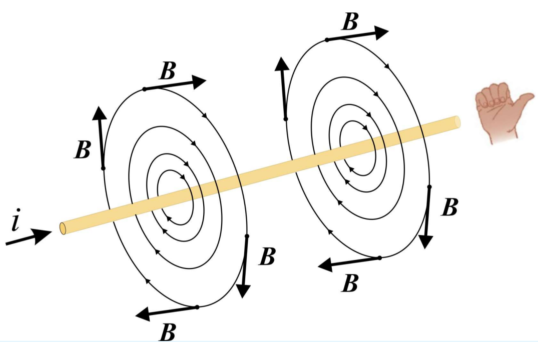


câmpul magnetic este produs de sarcini în mișcare și acționează asupra sarcinilor în mișcare.

11.2.2 Legea Biot-Savart

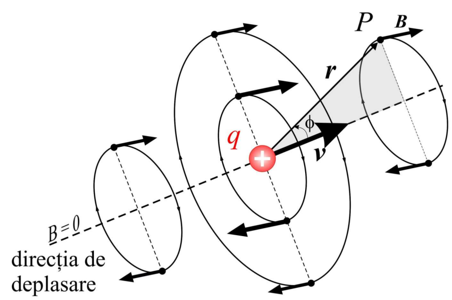
Din punct de vedere experimental s-a demonstrat că un curent electric produce un câmp magnetic. În schița alăturată puteți observa liniile de câmp magnetic produse de un curent electric care trece printr-un fir conductor. Densitatea linilor de câmp scade pe măsură ce ne îndepărtăm de fir, deoarece intensitatea câmpului magnetic scade pe măsură ce ne îndepărtăm de acesta. Intensitatea câmpului magnetic este descrisă de un vector ***B*** care este tangent la liniile de câmp. Din motive istorice vectorul *B nu se numește intensitatea câmpului magnetic*, el se numește *inducție magnetică*, noi o să-l numim simplu *câmp magnetic*. Unitatea de măsură a acestei mărimi este T (Tesla). Observați că liniile de câmp produse de curent nu ies dintr-un pol nord și intră într-un pol sud, acestea *se închid în ele însele*.

***Regula mâinii drepte*:** degetul opozabil al mâinii drepte se așază paralel cu curentul electric, iar celelate degete ținute sub forma unei gheare ne dau sensul liniilor de câmp.



Am văzut mai sus că un curent electric produce un câmp magnetic, aceasta ne arată că de fapt originea câmpului magnetic sunt sarcinile electrice în mișcare. Astfel, s-a arătat că pentru o sarcină (q) care se *mişcă cu viteza constantă* v, câmpul magnetic B produs într-un punct P, a cărui poziție este dată de vectorul de poziție r se poate scrie:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3},$$

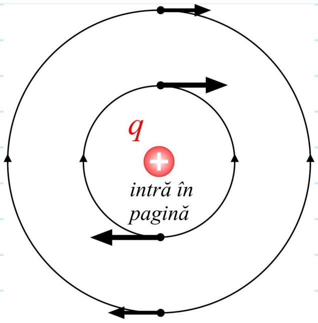


aici $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A$ este o constantă şi se numeşte *permeabilitatea magnetică a vidului*. Observați produsul vectorial dintre viteză şi vectorul de poziție. Această relație ne arată faptul că $\boldsymbol{B}$ este perpendicular pe planul format de $\boldsymbol{r}$ şi $\boldsymbol{v}$ (planul marcat cu gri în figură). Folosind această relație se poate calcula câmpul magnetic în orice punct din jurul unei sarcini care se deplasează cu viteză constantă.

Modulul acestei relații este dat de

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q|v\sin\phi}{r^2}.$$

Deoarece pe direcția de mişcare $\sin\phi = 0$ *, câmpul pe direcția de mişcare a sarcinii este zero.*

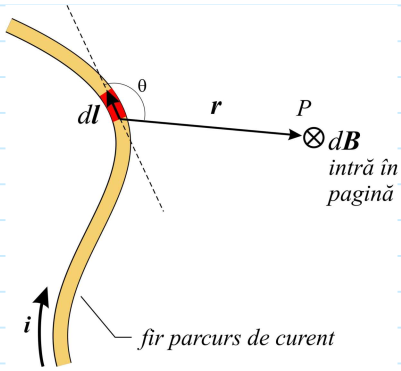


Este interesant de observat că în planul perpendicular pe direcția de mişcare $\phi = \pi/2$, iar $\sin\phi = 1$, astfel că B o să fie maxim în acest plan şi, pentru o viteză dată, o să depindă numai de distanța față de sarcină. În imaginea alăturată avem o vedere din spatele sarcini în care sunt reprezentate linile de câmp din planul perpendicular. De asemenea, în fața şi în spatele sarcinii, deoarece $\sin\phi < 1$ câmpul are o valoare mai mică la o aceeaşi distanță față de axa pe care se mişcă sarcina.

La https://drive.matlab.com/sharing/d9c6cce6-cf16-406d-9143-bdeeb11a7022 puteți să vedeți reprezentarea câmpului magnetic produs de o sarcină îm mişcare.

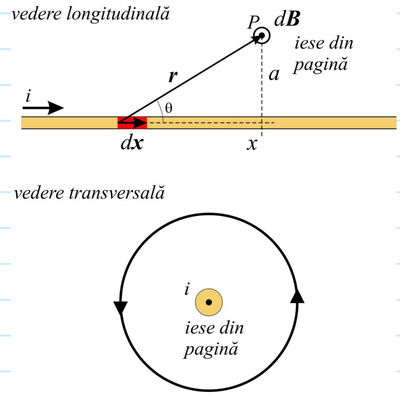
Deoarece curentul electric este o mişcare ordonată a sarcinilor electrice, putem calcula câmpul magnetic produs de un curent oarecare folosind *legea Biot-Savart*. Această lege se obține foarte simplu din relația de mai sus (valabilă pentru o sarcină) şi ne spune că un element $\boldsymbol{dl}$ dintr-un fir parcurs de curentul i produce un element de câmp infinitesimal $d\boldsymbol{B}$, în punctul P, la distanța $\boldsymbol{r}$ față de acesta, dat de relația

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{r}}{r^3}.$$



Observați că la numărător avem termenul $\boldsymbol{dl}\times\boldsymbol{r}$, adică produs vectorial dintre $\boldsymbol{dl}$ şi $\boldsymbol{r}$. Aceasta înseană că vectorul elementar $d\boldsymbol{B}$ *este perpendicular pe planul format de* $\boldsymbol{dl}$ şi $\boldsymbol{r}$. În cazul nostru, deoarece vectorii $\boldsymbol{dl}$ şi $\boldsymbol{r}$ sunt în planul paginii, vectorul $d\boldsymbol{B}$ este perpendicular şi intră în pagină.

Exemplul #1. O să aplicăm legea Biot-Savart și o să calculăm câmpul magnetic produs în punctul P de un fir conductor drept prin care trece curentul i. În acest caz legea Biot-Savart se scrie pentru elementul $d\boldsymbol{x}$ din fir ca



$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Am presupus că firul este pe direcția Ox, atunci

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i}dx,$$

unde $\boldsymbol{i}$ este versorul axei Ox (nu-l confundați cu curentul).

Atunci

$$d\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{r} = dx\cdot\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{r} \implies dx\cdot|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{r}| = dx\cdot r\cdot\sin\theta = dx\cdot a\,,$$

iar modulul lui $d\boldsymbol{B}$ este

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dx|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0 ia}{4\pi}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}},$$

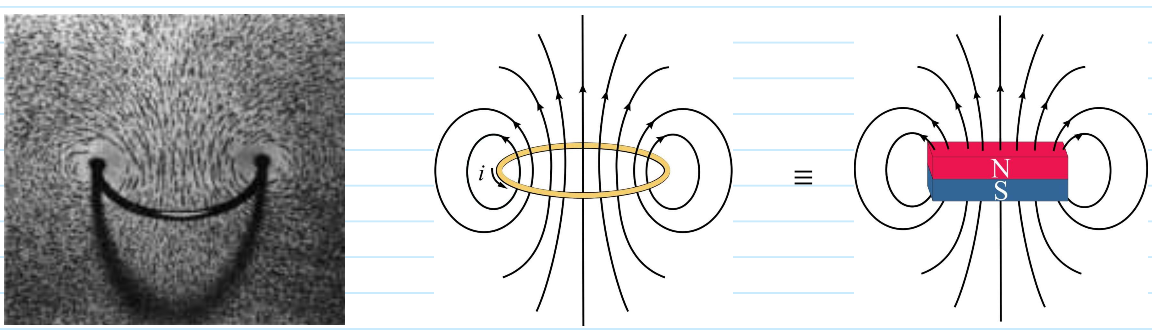
cu mențiunea că $d\boldsymbol{B}$ în punctul P iese din pagină (puteți să verificați folosind regula mâinii drepte).

Dacă firul este infinit lung, câmpul magnetic în punctul P se calculează simplu

$$B = \frac{\mu_0 ia}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a},$$

adică, pentru un fir infinit lung câmpul magnetic este proporțional cu curentul electric și invers proporțional cu distanța de la centrul firului.

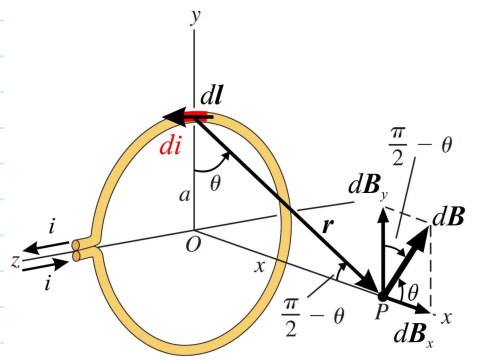
Exemplul #2. O să aplicăm legea Biot-Savart și o să calculăm câmpul magnetic produs de o buclă de curent. În imaginea de mai jos puteți să vedeți cum arată geometria linilor de câmp pentru o buclă parcursă de curent electric.



Bucla (spira) de curent este foarte importantă în magnetism, deoarece, după cum se poate observa, câmpul produs de o buclă de curent are geometrie similară cu cel produs de un magnet în formă de paralelipiped. Din acest punct de vedere, *spira parcursă de curent este echivalentă cu un magnet cu doi poli N și S.*

O să calculăm câmpul produs de buclă pe axa sa la distanța x față de centrul buclei. Observați în imaginea de mai sus că linia de câmp de pe axa buclei este dreaptă, ceea ce înseamnă că pe axă B are direcția acesteia.

O să calculăm câmpul magnetic în punctul P. Știm că $d\boldsymbol{B}$ este perpendicular pe $d\boldsymbol{l}$ și pe $\boldsymbol{r}$, deci o să aibă direcția indicată în figură. Din imagine mai observăm că $d\boldsymbol{B}$ are două componente de-a lungul axelor Ox și Oy, date de:



$$dB_x = dB\cos\theta = dB\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}},$$

$$dB_y = dB\sin\theta = dB\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}.$$

Pentru a calcula dB folosim legea Biot-Savart aplicată în cazul nostru. Prima dată calculăm

$|d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}| = dl \cdot r \cdot sin\, 90^o = dl \cdot r$.

Atunci modulul lui $d\boldsymbol{B}$ este dat de

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl \cdot r}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}$$

Astfel, după înlocuire:

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}},$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}.$$

Pentru a calcula câmpul magnetic va trebui să integrăm relațiile de mai sus:

$$B_x = \int dB_x\,,$$

$$B_y = \int dB_y\,.$$

Ultima integrală o să fie zero, puteți să observați că elementul dl din figură produce un dB_y vertical în sus, însă există un element dl simetric, aflat în partea de jos a buclei (diametral opus) care va produce un dB_y vertical în jos și care o să anuleze câmpul dB_y produs de elementul dl din desen. Pentru fiecare element dl o să existe unul simetric care va anula câmpul produs pe direcția perpendiculară pe axa Ox.

Integrala

$$B_x = \int \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{(x^2+a^2)}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

este foarte simplu de calculat deoarece niciun termen nu depinde de dl:

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{1}{(x^2+a^2)}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}\int dl\,.$$

Deoarece $\int dl = 2\pi a$ (lungimea buclei), atunci

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

În centrul buclei ($x = 0$) câmpul magnetic o să fie

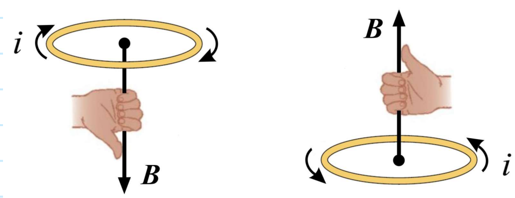
$$B = \frac{\mu_0 i}{2a}$$

Exemplul #3 Care este câmpul magnetic produs de o buclă de diametru 10 cm, cu 100 de spire, prin care trece un curent de 1 A?

Deoarece avem 100 de spire: $B = 100 \times \frac{\mu_0 i}{2a} = 100 \times \frac{4\pi\times10^{-7}\frac{Tm}{A}\times 1A}{0.1\,m} = 1.25\ \times 10^{-3}$ T

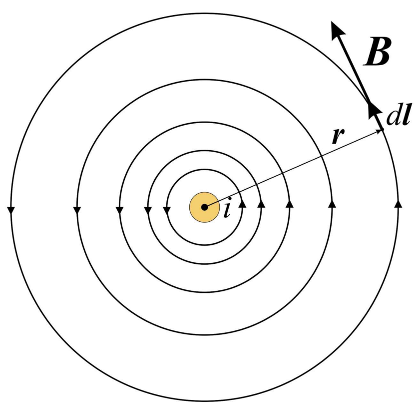
Să observăm mai cu atenție câmpul magnetic din centrul unei buclei parcurse de un curent electric. Am văzul mai sus că $\boldsymbol{B}$ este de-a lungul axei buclei, aceasta înseamnă că în centrul buclei câmpul magnetic este perpendicular pe planul buclei, iar sensul acestuia depinde de sensul curentului electric prin buclă și este dat de regula mâini drepte descrisă în imaginea alăturată.

Regula mâinii drepte. Câmpul este perpendicular pe buclă, degetul opozabil ne dă direcția lui **B**, dacă celelalte degete sunt pe direcția curentului.



11.3.1 Divergența și rotorul lui *B*

În figura alăturată se poate observa câmpul magnetic al unui fir conductor infinit parcurs de un curent i (care iese din pagină). Este clar că acest câmp are un rotor diferit de zero (are o circulație în sens trigonometric), ceea ce nu este cazul în electrostatică. O să calculăm rotorul acestui câmp. Conform cu C#10.1.1, rotorul este egal cu integrala de linie pe un contur închis. Ne alegem conturul un cerc de rază r, atunci



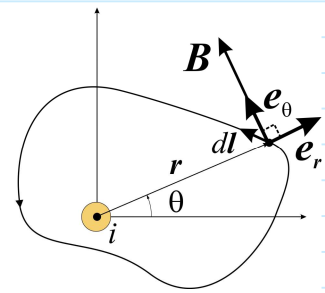
$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint B dl\cos 0 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\oint dl = \mu_0 i\,.$$

Observăm că rezultatul este independent de drumul ales, deoarece pe măsură ce circumferința crește cu r, câmpul scade cu r. De fapt, nu are nicio importanță că am ales conturul un cerc, puteam să alegem orice alt drum închis. Pentru a verifica, să calculăm integrala în coordonate polare. Conform C#2.2.2, în coordonate polare $d\boldsymbol{l} = dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta$, iar $\boldsymbol{B} = (\mu_0 i/2\pi r)\boldsymbol{e}_\theta$, iar integrala

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint \frac{1}{r} r d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 i\,,$$

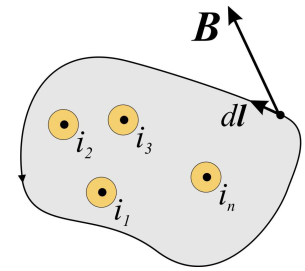
nu depinde de conturul de integrare ales.

Conform principiului superpoziției, dacă avem mai mulți curenți care trec prin suprafața delimitată de contur, fiecare curent o să producă câmpul lui pentru care relația de mai sus este valabilă, ceea ce ne conduce la



$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0(i_1 + i_2 + \cdots + i_n) = \mu_0 i_{\text{cont}},$$

unde i_{cont} este curentul total care trece prin contur. Putem să generalizăm relația de mai sus și să scriem curentul în funcție de densitatea de curent care trece prin suprafața delimitată de contur



$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{s}\,,$$

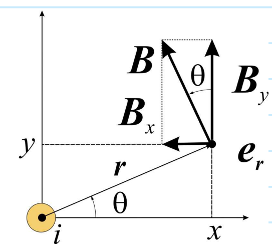
unde integrala se realizează pe toată suprafața conturului (suprafața marcată cu gri). Conform teoremei lui Stokes, C#10.2.1

$$\int (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 \int \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{s}\,,$$

de unde

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j},$$

care se mai numește și legea lui Ampere.



Pentru a calcula divergența lui $\boldsymbol{B}$, scriem $\boldsymbol{B}$ în funcție de componentele sale în coordonate carteziene:

$$\begin{cases} B_x = -\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\sin\theta = -\dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\dfrac{y}{r^2} = -\dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\dfrac{y}{(x^2+y^2)} \\ B_y = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\cos\theta = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\dfrac{x}{(x^2+y^2)} \end{cases}.$$

Atunci divergența

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\mu_0 i y}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + \frac{\mu_0 i x}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

adică

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0.$$

Ecuațiile de mai sus au fost obținute într-un caz special, în care am presupus că avem conductori infiniți parcurși de curent și combinații ale acestora. Cu toate acestea, ecuațiile de mai sus pentru rotor și divergență sunt valabile și în cazul mai general în care câmpurile sunt produse de conductori de formă arbitrară.

Ecuațiile pentru rotor și divergență se pot obține în caz general prin aplicarea operatorilor asupra legii Biot-Savart. Determinați aceste ecuații în cazul general (**).

Rezumăm cele două rezultate și le comparăm cu cele obținute pentru câmpul electrostatic:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} \end{cases}$$

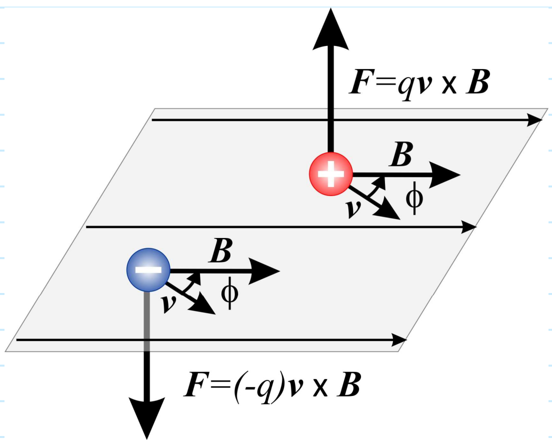
acestea reprezintă ecuațiile lui Maxwell pentru electrostatică și magnetostatică. Câmpul electric iese din sarcini pozitive și intră în sarcini negative, divergența lui fiind diferită de zero în jurul sarcinilor. Liniile de câmp magnetic se închid în ele însele, nu încep și nici nu se termină nicăieri, dacă ar fi așa, divergența câmpului magnetic ar trebui să fie diferită de zero. Aceasta înseamnă că nu există monopoli magnetici, așa cum sunt sarcinile în cazul câmpului electric. Câmpul magnetic este produs de sarcini în mișcare și, după cum o să vedem mai jos, acționează asupra sarcinilor în mișcare. Faptul că $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ ne-a permis să definim o funcție scalară V, astfel încât $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$ și pe care am interpretat-o ca energia potențială per unitatea de sarcină. Aceasta nu este cazul câmpului magnetic deoarece rotorul acestuia nu este zero.

11.4.1 Forța Lorentz

Câmpul magnetic este produs de sarcini în mișcare și am văzut că interacționează cu sarcini în mișcare. Într-adevăr, dacă avem o sarcină care se mișcă într-un câmp magnetic asupra ei o să acționeze o forță, care se numește forța Lorentz și este dată de

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B},$$

unde q este sarcina în mișcare, $\boldsymbol{v}$ este viteza acesteia iar $\boldsymbol{B}$ este câmpul magnetic. Observați produsul vectorial dintre viteză și câmpul magnetic.



Faptul că în expresia forței avem produs vectorial dintre câmp și viteză are două consecințe importante:

*1) Forța este perpendiculară pe **v** și pe **B**.*
2) Forța nu modifică mărimea vitezei, ci doar direcția acesteia, adică forța Lorentz nu efectuează lucru mecanic.

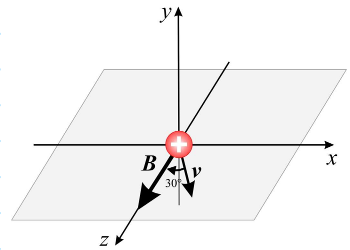
Dacă între $\boldsymbol{v}$ și $\boldsymbol{B}$ avem un unghi ϕ atunci modulul forței se poate scrie simplu

$$F = |q|vB\sin\phi\ .$$

Deoarece sensul forței depinde și de semnul sarcinii ($\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$), asupra sarcinilor de semn opus care se mișcă pe aceeași direcție în câmp magnetic acționează forțe de sens opus.

Exemplul #4 Un fascicul de protoni intră cu viteza de 3×10^5 m/s într-un câmp magnetic uniform de 2 T, ca în figură.
Care este direcția și mărimea forței Lorentz ?

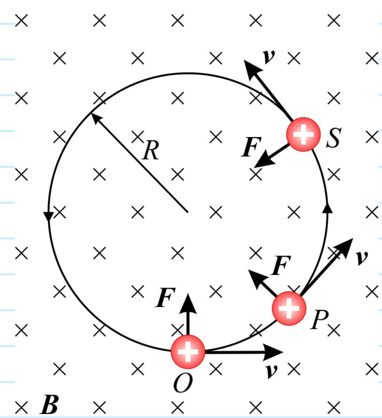
Modulul forței este



$$F = |q|vBsin\phi$$
$$= (1{,}6 \times 10^{-19} C)(3 \times 10^5\ m/s)\ (1{,}6 \times 10^{-19} C)(\ 2\ T)\ sin(30^o)$$
$$= 4{,}8 \times 10^{-14} N.$$

Forța este pe direcția *Oy* (perpendiculară pe *v* și *B*) în sens negativ.

11.4.2 Mișcarea sarcinilor în câmp magnetic



Să presupunem că avem o sarcină *q*, de masă *m*, cu viteza ***v*** și care intră într-o zonă în care avem un câmp magnetic ***B*** perpendicular pe viteză. În cazul nostru particular câmpul magnetic intră în foaie.

Deoarece forța Lorentz este perpendiculară pe viteză, aceasta o să modifice numai direcția vitezei și o să determine sarcina să se miște pe o traiectorie circulară.

Să presupunem că inițial sarcina se află în O. Deoarece câmpul intră în pagină și viteza este de la stânga la dreapta, forța o să fie în sus. Forța va modifica direcția vitezei, iar sarcina se va mișca pe traiectoria indicată din O, în P, în S ....

Dacă sarcina ar fi fost negativă, forța în punctul O ar fi fost în jos și sarcina s-ar fi mișcat pe o traiectorie circulară în jos.

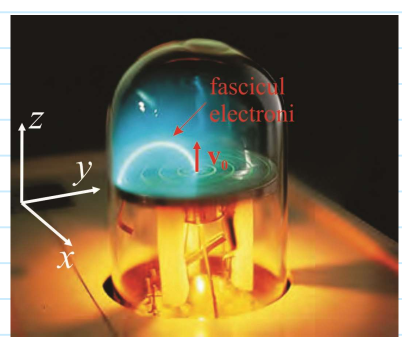
Putem să determinăm raza de curbură *R* a traiectoriei dacă ținem cont că forța Lorentz joacă rol de forță centripetă (care determină mișcarea de rotație, forța centripetă este întotdeauna mv^2/R), atunci

$$F = |q|vB = \frac{mv^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{mv}{|q|B}.$$

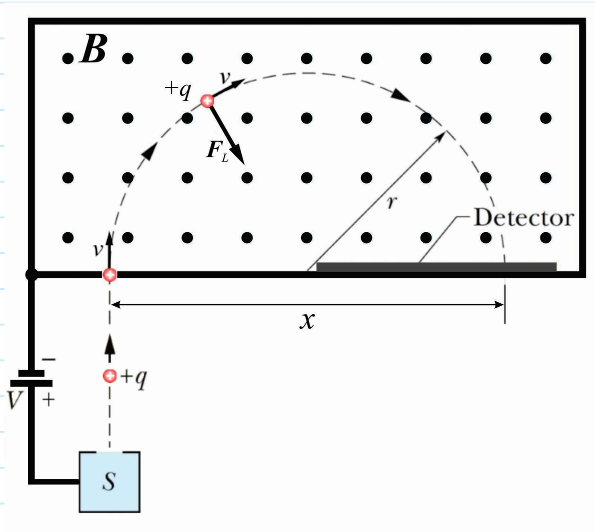
Putem să determinăm și frecvența de rotație

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{|q|B}{2\pi m}.$$

În figura alăturată puteți să vedeți un fascicul de electroni care este curbat în câmp magnetic. Fasciculul, intră cu viteza $\boldsymbol{v_0}$ într-o zonă cu câmp magnetic ***B***. Sub acțiunea lui ***B*** traiectoria fascicolului se curbează. Experimentul se desfășoară într-o incintă de sticlă în care există un gaz rarefiat. Datorită ciocnirilor electronilor cu moleculele de gaz acestea emit lumină, astfel încât traiectoria fascicolului devine vizibilă. Care este direcția câmpului (*+/-Ox, +/-Oy, +/-Oz*)?



Exemplul #5 Pentru a înțelege mai bine mișcarea sarcinilor în câmp magnetic o să discutăm un exemplu concret, cel al spectrometrului de masă. Acesta este un dispozitiv care este folosit pentru a determina masa unor ioni necunoscuți.



Dispozitivul este relativ simplu, constă dintr-o sursă de ioni (S) care emite ioni cu viteză relativ mică (putem să o considerăm zero). Ionii sunt apoi accelerați la diferența de potențial V și intră într-o zonă în care avem un câmp magnetic B uniform, perpendicular pe viteză (punctele negre reprezintă linii de câmp magnetic care ies din foaie). Forța Lorentz produsă de câmpul magnetic va determina ionul să se miște pe un semicerc. Experimental, se determină raza semicercului măsurând $x = 2r$. Dacă $B = 80$ mT, $V = 1$kV, $q = 1.6022 \times 10^{-19}$C și $x = 1.6254$ m, determinați masa ionului.

Raza de curbură este dată de

$r = \frac{mv}{|q|B}$, iar de aici masa este $m = \frac{r|q|B}{v} = \frac{x|q|B}{2v}$.

Pentru a determina m, trebuie să găsim viteza ionului. Acesta este accelerat din repaus la diferența de potențial V. O să scriem legea conservării energiei ca

$\Delta E_c + \Delta E_p = 0$, unde $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0$, iar $\Delta E_p = 0 - qV$, de aici

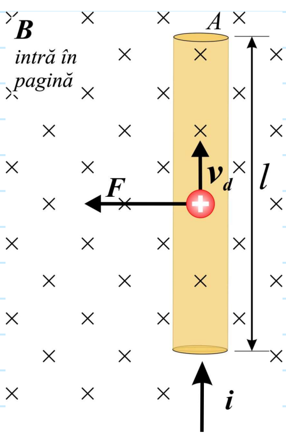
$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$, dacă înlocuim în relația care ne dă masa, obținem

$m = \frac{r|q|B}{v} = \frac{x|q|B}{2}\sqrt{\frac{m}{2qV}}$, putem rezolva și să găsim masa:

$$m = \frac{B^2|q|x^2}{8V} = \frac{(0{,}08T)^2(\ 1{,}6022\times 10^{-19}C)\ \ (1.6254m)^2}{8000V} = 3.3862 \times 10^{-25}kg = 203.93\ uam.$$

Aici 1 u.a.m. este o unitate atomică de masă $1.6605 \times 10^{-27}kg$.

11.4.3 Forța magnetică asupra unui conductor parcurs de curent electric



Deoarece curentul electric este o mișcare de purtători de sarcină, dacă plasăm într-un câmp magnetic un fir parcurs de curent asupra fiecărei sarcini în mișcare o să acționeze forța Lorentz care se va transmite firului ca o forță netă. Haideți să calculăm această forță pentru un fir de lungime l parcurs de curentul i, plasat în câmpul magnetic $\boldsymbol{B}$ perpendicular pe fir.

Viteza fiind perpendiculară pe câmp, modulul forței asupra fiecărui purtător se scrie

$F_L = qv_dB.$

Dacă avem N purtători de sarcină, forța totală o să fie:

$F = NF_L$

Numărul de purtători este egal cu densitatea de purtători (n) înmulțită volumul firului

$N = nV = nlA$, atunci

$F = NF_L = nlAqv_d B = (nqv_d)(A)(lB) = j(A)(lB) = ilB.$

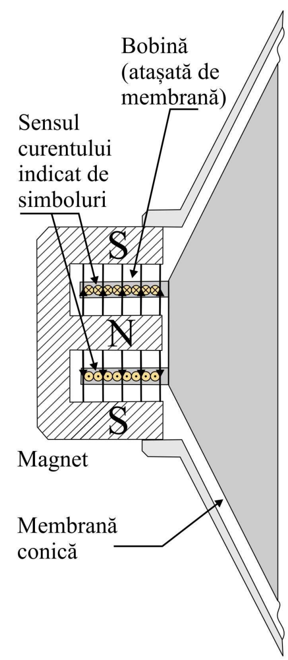
Am folosit faptul că densitatea de curent este $j = nqv_d$, iar curentul $i = jA$.

Folosind aceste relații, forța totală este

$F = ilB$

Dacă $\boldsymbol{B}$ nu este perpendicular pe $\boldsymbol{v}$, trebuie să scriem forța Lorentz vectorial, iar într-un final o să ajungem la $\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$, unde $\boldsymbol{l}$ este un vector care are mărimea egală cu lungimea firului și are direcția în sensul curentului. *Forța este întotdeauna perpendiculară pe direcția firului și a linilor de e câmp*. Această forță are forte multe aplicații practice. Deoarece produce un cuplu de rotație, motoarele electrice funcționează folosind această forță. O aplicație care este relativ ușor de înțeles este difuzorul audio.

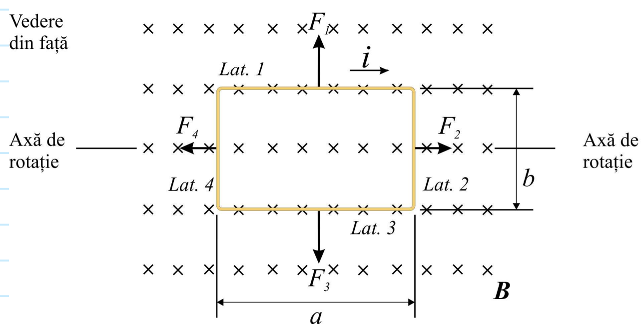
În imaginea alăturată puteți vedea principiul de construcție al unui difuzor. Acesta este format dintr-o membrană în formă de pâlnie care este liberă să vibreze. Această membrană este atașată de o bobină prin care poate trece un curent electric. Bobina este așezată între polii unui magnet care produce un câmp magnetic, așa cum este indicat în figură. Forța electromagnetică este perpendiculară pe câmp și pe curent, deci o să aibă o direcție orizontală. În funcție de sensul curentului, forța o să fie de la stânga la dreapta sau de la dreapta la stânga. Astfel, în funcție de sensul curentului membrana se va deplasa în față sau în spate. Dacă prin bobină o să avem un curent alternativ, membrana o să vibreze cu frecvența acestuia. Dacă frecvența curentului este în gama (20 Hz - 20kHz) atunci vibrațiile membranei vor produce sunete.

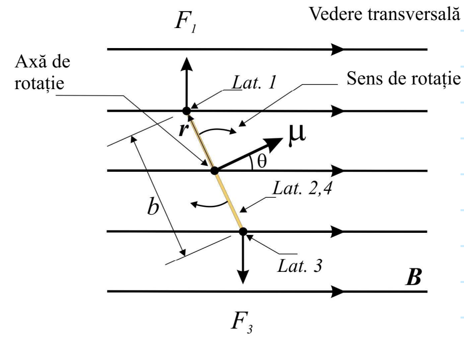


În cazul nostru particular din imagine, ținând cont de sensul câmpului și al curentului, în ce direcție o să fie forța ?

11.5.1 Momentul magnetic dipolar

Să considerăm o *buclă rectangulară de curent*, de laturi *a* și *b*, plasată în câmp magnetic. Câmpul magnetic face un unghi θ cu normala la buclă, așa cum este indicat în figura de mai jos. Să considerăm vederea din față. Prin buclă trece un curent electric *i* iar bucla este plasată în câmp magnetic. Aceasta înseamnă că pe fiecare latură a buclei o să acționeze o forță electromagnetică $\boldsymbol{F}=i\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$, care este perpendiculară atât pe $\boldsymbol{B}$, cât și pe fiecare dintre laturi, așa cum este indicat în figura de mai jos.





Deoarece curentul este același prin fiecare latură și deoarece B este constant, aceasta înseamnă că cele patru forțe o să fie egale în modul și se vor anula două câte două:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_3 = 0 \\ \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_4 = 0 \end{cases},$$

astfel, *aceste forțe nu pot să deplaseze bucla*, accelerația netă produsă de aceste forțe o să fie nulă. Cu toate acestea, observăm din vederea transversală că atâta timp cât unghiul θ dintre normala la cadru și câmpul magnetic este diferit de zero, forțele $\boldsymbol{F}_1$ și $\boldsymbol{F}_3$ o să producă un *moment de rotație* care va roti bucla până când unghiul θ va fi zero, adică până când bucla de curent va fi perpendiculară pe câmpul magnetic. *Aici cuvântul "moment" nu are sens de timp, el vine din lb. latină și înseamnă mișcare. Moment de rotație ≡ mișcare de rotație.*

În continuare o să calculăm momentul de rotație. Momentul forței care produce mișcarea de rotație este

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{r},$$

unde ***r*** este *brațul forței* (vectorul care unește centrul de rotație cu punctul de aplicație al forței, pentru forța $\boldsymbol{F}_1$ brațul forței este indicat în figură). Modulele momentelor produse de cele două forțe vor fi:

$$\begin{cases} M_1 = F_1 * (b/2) \sin\theta \\ M_3 = F_3 * (b/2) \sin\theta \end{cases}.$$

De vreme ce lungimea laturii 1 este egală cu lungimea laturii 3 și egală cu *a*, cele două forțe vor fi date de $F_1 = F_3 = iaB$, iar momentul total va fi:

$$M = M_1 + M_3 = i(ab)B \sin\theta\,.$$

Observăm că (ab) este aria buclei. O să definim *momentul magnetic dipolar* sau simplu *momentul magnetic* (μ) ca fiind produsul dintre aria buclei și curentul prin buclă $\mu = i(ab)$. Cu această definiție, momentul de rotație al buclei se va scrie ca

$$M = \mu B \sin\theta\,.$$

În general, momentul de rotație este un vector pe care îl scriem

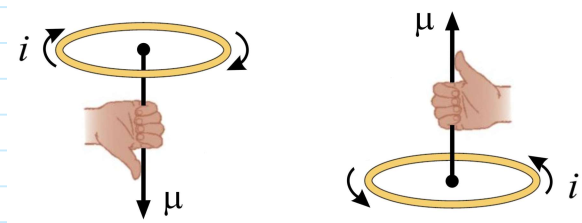
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}.$$

Observați că și *momentul magnetic dipolar* μ *este un vector*. Modulul acestuia este dat de

$\mu = i.\,Aria,$

direcția este perpendiculară pe buclă, iar sensul este identic cu cel al câmpului magnetic produs de buclă și se poate afla cu regula mâinii drepte.

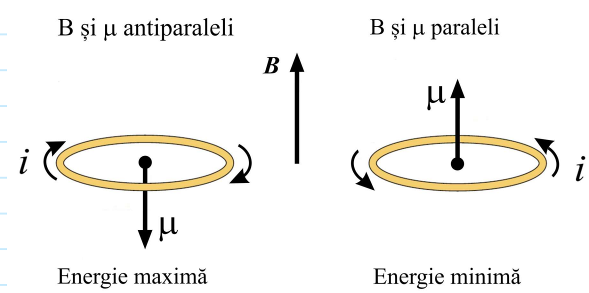
Regula mâinii drepte. Momentul magnetic dipolar (μ) este perpendicular pe buclă, degetul opozabil ne dă direcția lui μ, dacă celelalte degete sunt pe direcția curentului.



O să definim *energia dipolară magnetică* ca fiind produsul scalar dintre $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{B}$:

$U(\theta) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = -\,\mu B \cos\theta$, unde θ este unghiul dintre $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{B}$.

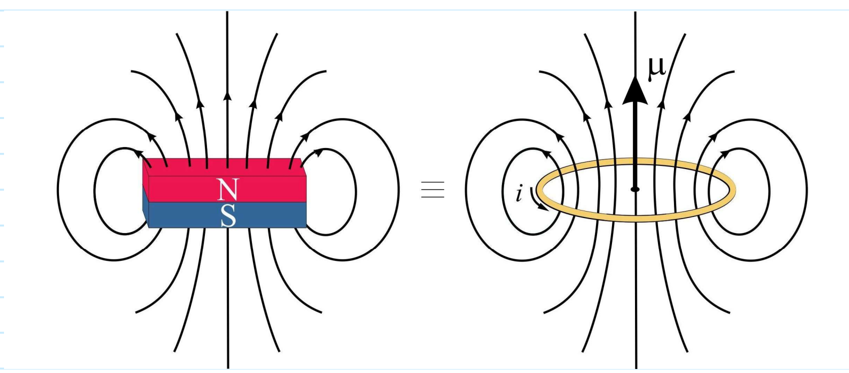
Observăm că există o configurație de energie maximă, când $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{B}$ sunt antiparaleli, iar $U = \mu B$ și o configurație de energie minimă când $\boldsymbol{\mu}$ și $\boldsymbol{B}$ sunt paraleli, iar $U = -\mu B$.



Lucrul mecanic necesar pentru a roti un moment magnetic cu un unghi $\Delta\alpha = \alpha_f - \alpha_i$ într-un câmp magnetic este:

$L = U(\alpha_i) - U(\alpha_f)$

Vă aduc aminte că din punct de vedere al câmpului magnetic un magnet este echivalent cu o buclă de curent, astfel un magnet posedă un moment magnetic dipolar. De fapt, un magnet este echivalent cu un moment magnetic dipolar, sau, invers, un moment magnetic dipolar este echivalent cu un magnet. Momentul magnetic dipolar al unui magnet este orientat de la polul sud la polul nord. Mai jos puteți observa echivalența dintre un magnet și o buclă de curent care posedă un moment magnetic.



Deoarece energia este minimă dacă momentul magnetic este paralel cu câmpul magnetic, întotdeauna, lăsat liber, *un moment magnetic se va roti în câmp magnetic până când va deveni paralel cu liniile de câmp*. Astfel, o buclă de curent se va roti până când o să devină perpendiculară la liniile de câmp.