Unde staționare într-o coardă vibrantă

Obiective

Scopul acestei lucrări de laborator este punerea în evidență a modurilor transversale de oscilație a unei coarde elastice. După efectuarea acestei lucrări de laborator ar trebui să puteți explica cum se formează undele staționare, să faceți diferența între noduri și ventre, să înțelegeți ce determină frecvența modurilor transversale și să înțelegeți cuantificarea energiei modurilor.

Teorie

O undă elastică este forma de propagare a unei perturbații într-un mediu elastic. Dacă particulele mediului oscilează perpendicular pe direcția de propagare a undei, atunci unda este transversală. Dacă particulele mediului oscilează paralel cu direcția de deplasare a undei, atunci aceasta este o undă longitudinală. Să presupunem că avem un fir infinit lung și că producem o perturbație continuă, transversală, armonică (de tip $A\cos\omega t$) la nivelul firului. În cazul acesta, în fir se va propaga o undă transversală caracterizată de amplitudine (A_0), lungimea de undă (λ), frecvență (ν) și viteza de deplasare (c) (Fig.1). Deoarece lungimea de undă este distanța parcursă de aceasta într-o perioadă, intre lungime de undă, perioadă (T) și frecvență există o relație foarte simplă:

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \qquad (1)$$

Pentru a determina ecuația care ne descrie unda să considerăm o porțiune elementară AB din fir (Fig. 2). Forța netă asupra segmentului AB este $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$, unde $\boldsymbol{F_1}$ și $\boldsymbol{F_2}$ sunt forțele de tensiune din fir datorate segmentelor adiacente lui AB. În modul acestea sunt egale $F_1 = F_2 = F$. Forța netă pe direcția *Ox* este $F_x^{net} = F\cos(\theta + d\theta) - F\cos\theta$. O să presupunem că amplitudinea

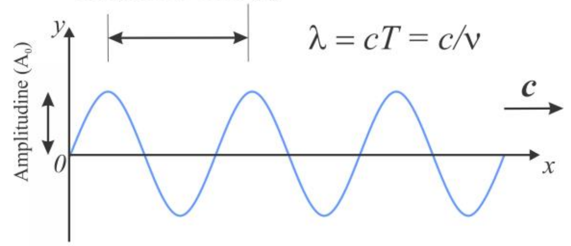

Fig. 1 O undă transversală care se propagă într-un fir infinit lung. Mărimile fizice caracteristice unei unde.

de oscilație transversală este mică, astfel încât θ și $d\theta$ sunt mici. Atunci, $\cos(\theta + d\theta) \approx \cos\theta \approx 1$, iar forța netă pe direcția *Ox* este zero. Pe direcția *Oy*, forța netă este $F_y^{net} = F\sin(\theta + d\theta) - F\sin\theta = F\cos\theta d\theta$. Deoarece $\theta = \theta(x,t)$ (adică este o funcție de *x* și *t*) derivata $d\theta$ este o derivată parțială și $d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}dx$. Mai mult, deoarece θ este mic, putem să-l înlocuim pe $\cos\theta$ cu 1, iar $\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$. Astfel:

$$F_y^{net} = F\frac{\partial\theta}{\partial x}dx = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \qquad (2)$$

Conform legii a 2-a a lui Newton $F_y^{net} = ma_y$, unde $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ este accelerația pe *Oy* a elementului AB, iar *m* este masa elementului și este egală cu μdx, unde μ este densitatea liniară

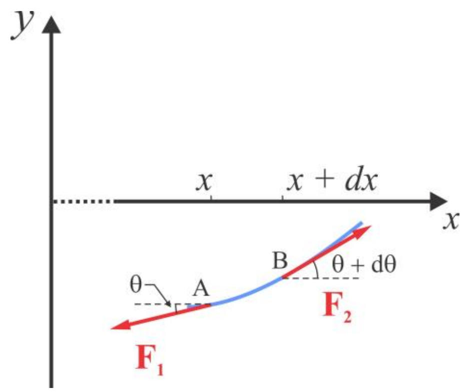

Fig. 2 Forțele de tensiune asupra unui element mic AB din fir.

de masă a firului (dacă firul are secțiune constantă $\mu = m/L$). Astfel, $F_y^{net} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$, iar egalând cu relația (2) o să obținem:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (3)$$

unde am notat $c = \sqrt{F/\mu}$. Cu toate că a fost dedusă într-un caz particular, ecuația (3) este o ecuație generală, foarte importantă, care se numește ecuația de undă unidimensională. Ecuația (3) guvernează mișcare a unei palete largi de unde: unde în corzi elastice, unde sonore, unde electromagnetice etc. Ecuația (3) este o ecuație diferențială cu derivate parțiale în funcție de *x* și *t*. Pentru un fir, soluțiile aceste ecuații sunt unde care se deplasează cu viteza $c = \sqrt{F/\mu}$. Dacă perturbația care produce unde în fir de tip armonic ($A \cos \omega t$) atunci soluția ecuație (3), care este reprezentată în Fig.1 și care se numește *funcție de undă*, este:

$$y(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (4)$$

unde am notat $k = 2\pi/\lambda$ iar $\omega = 2\pi/T$. Sau dacă scriem sub forma unei exponențiale complexe:

$$\Psi(x,t) = A_0 e^{i(kx-\omega t)} \qquad (5)$$

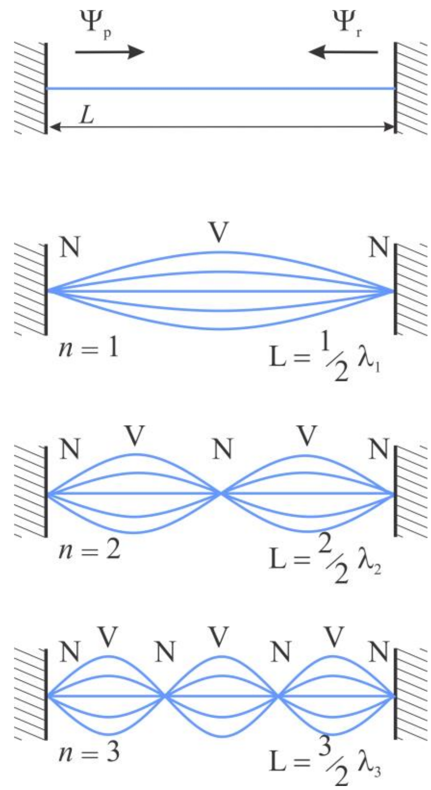

Fig. 3 O coardă fixată la ambele capete în care producem unde transversale. Primele trei moduri transversale ca rezultat al interferenței dintre unda progresivă și cea regresivă. Este indicată poziția nodurilor (N) și a ventrelor (V) și lungimea de undă a undelor staționare corespunzătoare celor trei moduri.

Putem să trecem ușor de la (4) la (5) ținând cont că $y(x,t) = Re(\Psi(x,t))$ și de relația lui Euler $e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$.

Să considerăm în continuare că avem o coardă elastică de lungime *L*, fixată la ambele capete. O să producem o perturbație la capătul din stânga al corzii și o să observăm modul de propagare al undelor în coardă. În fir se va propaga o undă de la stânga la dreapta, pe care o numim progresivă, dată de:

$$\Psi_p(x,t) = A_0 e^{i(kx-\omega t)} \qquad (5)$$

Unda o să ajungă la capătul din dreapta al firului și va fi reflectată înapoi. Ecuația acestei unde reflectate, pe care o numim regresivă, este:

$$\Psi_{\mathrm{r}}(x,t) = A_0 e^{i(kx+\omega t+\pi)} \qquad (5)$$

Observați semnul + din exponent. Aceasta ne indică faptul că unda se deplasează în sens negativ. De asemenea, observați termenul suplimentar π din exponent. Acesta este datorat faptului că la reflexie unda suferă un salt de fază de π radiani. Aceste două unde se vor suprapune iar rezultatul suprapunerii o să fie o undă dată de:

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \Psi_{\mathrm{p}}(x,t) + \Psi_{\mathrm{r}}(x,t) = \\ &= Ae^{ikx}\left(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}\right) = \\ &= -2iAe^{ikx}\sin\omega t\end{aligned} \qquad (6)$$

Deoarece $y(x,t) = Re(\Psi(x,t))$ obținem:

$$\mathrm{y}(x,t) = 2\mathrm{A}_0 \sin kx \, \sin\omega t \qquad (7)$$

Undele descrise de ecuația de mai sus se numesc *unde staționare*. Putem observa o diferență esențială între ecuația (7) și ecuația (4) care descrie o undă care se propagă intru-un fir infinit lung. În cazul ecuației (4) cele două variabile *x* și *t* de care depinde funcția de undă intră în argumentul funcție periodice cosinus. În cazul ecuației (7) cele două variabile *x* și *t* de care depinde funcția de undă intră fiecare argumentul unei funcții periodice sinus. Aceasta înseamnă că în cazul undelor descrise de ecuația (7) periodicitățile în timp și în spațiu ale undei sunt separate. Cu alte cuvinte, fiecare particulă a mediului execută o mișcare oscilatorie armonică $(\sin\omega t)$ dar cu amplitudine periodică în spațiu dată de:

$$A(x) = 2\mathrm{A}_0 \sin kx \qquad (8)$$

În Fig. 3 se pot observa câteva exemple de astfel de unde. Mai mult, se poate observa că există puncte pentru care amplitudinea de oscilație este zero. Aceste puncte se numesc noduri iar poziția (x_N) lor se poate determina ținând cont că $\sin kx_N = 0$, de unde:

$$x_N = \frac{p\pi}{k} = p\frac{\lambda}{2}, \text{unde } p = 0, 1, 2, .. \qquad (8)$$

Punctele pentru care avem un maxim de oscilație se numesc ventre, iar poziția lor se determină ținând cont că $\sin kx_V = \pm 1$, de unde:

$$x_V = \frac{(2p+1)}{2}\frac{\pi}{k} = (2p+1)\frac{\lambda}{4}, \quad \text{unde } p = 0, 1, 2, .. \qquad (8)$$

În cazul sistemului nostru, adică o coardă elastică fixată la ambele capete, *se pot obține unde staționare descrise de ecuația (7) pentru orice frecvențe sau lungimi de undă?* Răspunsul este nu. Observăm că în cazul nostru capetele firului sunt fixe, ceea ce înseamnă că la capetele firului trebuie să avem întotdeauna noduri. Această constrângere geometrică ne cuantifică lungimile de undă sau frecvențele pentru care putem să avem unde staționare. Din figura 3 putem observa că primul mod de oscilație al firului, pentru care unda staționară are lungimea de undă cea mai mare, se obține când lungimea de undă este de două ori lungimea firului $\lambda_1 = 2L$. Al doilea mod de oscilație se obține când $\lambda_2 = L$, șamd. În general, lungimea de undă a modurilor de oscilație este dată de:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \text{unde } n = 1, 2, 3 \ldots \quad , \qquad (9)$$

iar frecvența:

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L}, \text{ unde } n = 1, 2, 3 \ldots \quad , \qquad (10)$$

aici indicele *n* se referă la modul *n* de oscilație. Modul pentru care *n* = 1 se numește fundamental iar modurile pentru cere *n* > 1 se numesc armonici superioare. Relațiile (9) și (10) ne cuantifică lungimile de undă și frecvențele pentru care putem să avem unde staționare în fir. Cuantificare acestor mărimi fizice înseamnă că nu putem să avem unde staționare pentru orice valori ale acestora ci numai pentru anumite valori discrete.

Undele staționare *nu transportă energie* deoarece sunt formate prin suprapunerea a două unde care se propagă și transportă energie în sensuri opuse, iar transportul net de energie este nul. Însă *undele staționare înmagazinează energie*. Pentru a calcula energia înmagazinată într-o undă staționară să presupunem că în fir avem o undă

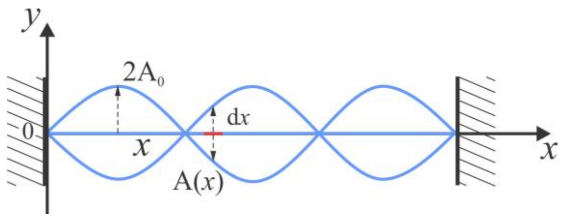

Fig. 4 Un element *dx* din fir care se află la distanța *x* față de origine, are masa $dm = \mu dx$ și oscilează vertical cu amplitudinea $A(x) = 2A_0 \sin kx$ și frecvența unghiulară $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$.

staționară ca în Fig. 4. Să considerăm un element d*x* din fir care se află la distanța *x* față de origine. Acesta are masa $dm = \mu dx$ și oscilează vertical cu amplitudinea $A(x) = 2A_0 \sin kx$ și frecvența unghiulară $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$ (în cazul din Fig. 4, *n* = 3). Deoarece elementul *dx* efectuează o oscilație armonică energia totală a acestuia este: $dE = \frac{1}{2} dm\omega_n^2 A(x)^2 = 2\mu\omega_n^2 A_0^2 \sin^2(kx)\ dx$. Energia totală a corzii care oscilează în modul *n* se obține integrând relația de mai sus pe toată lungimea acesteia:

$$E_n = \int dE = = 2\mu\omega_n^2 A_0^2 \int_0^L \sin^2(kx)\ dx \tag{11}$$

Relația de mai sus se poate integra relativ simplu și se obține:

$$E_n = \mu A_0^2 L\omega_n^2 = \frac{\mu A_0^2 \pi^2 c^2}{L} n^2, \quad \text{unde } n = 1,2,3 \ldots \tag{12}$$

Ecuația de mai sus ne indică faptul că și energia modurilor, la fel ca și lungimea de undă și frecvența, este cuantificată. De asemenea, se poate observa că modul fundamental are energia cea mai mică și că energia armonicelor superioare crește cu pătratul indicelui *n*. Este de subliniat faptul că mărimile caracteristice undei sunt cuantificate exclusiv datorită constrângerilor geometrice impuse sistemului (în cazul nostru capetele firului sunt fixate).

Înainte de a realiza experimentul *răspundeți la următoarele întrebări:*

1) Ce reprezintă o undă elastică ?

2) Care este diferența dintre o undă progresivă și o undă staționară ?

3) Ce înseamnă că o undă staționară are frecvența, amplitudinea și energia cuantificată ?

4) De ce spunem că undele staționare nu transportă dar înmagazinează energie ?

5) Calculați densitatea liniară de masă pentru un fir de Cu de diametru 0.6 mm, dacă densitatea volumică a Cu este de 8920 kg/m^3.

6) Să presupunem că avem un fir căruia îi transmitem o energie de 0.18 J și prin care se propagă unde transversale cu viteza de 50 m/s și amplitudinea de 3 cm. Lungimea firului este de 1 m, iar densitatea liniară de masă este cea calculată la punctul 5. Ce mod de vibrație se va excita în fir ?

Procedura experimentală

Diapozitivul experimental folosit (Fig. 5) este format dintr-un suport pe care este întins un fir de Cu ce constituie coarda vibrantă. Un capăt al firului este fixat iar celălalt este trecut peste un scripete. De acest capăt se pot agăța diferite mase în vederea tensionării firului.

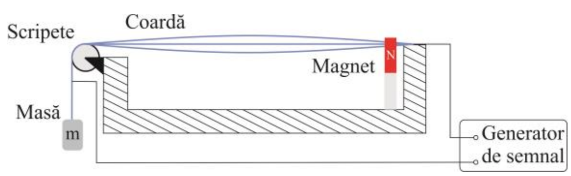

Fig. 5 Reprezentare schematică a dispozitivului experimental

Prin fir trece un curent electric alternativ de audiofrecvență produs de un generator de semnal ce permite reglarea frecvenței și a nivelului curentului. În apropierea unui capăt al firului este plasat un magnet permanent astfel încât firul să treacă printre polii acestuia. Datorită interacțiunii dintre curentul electric care trece prin fir și câmpul magnetic produs de magnet, asupra porțiunii de fir aflată în câmp o să apară o forță pe direcția verticală dată de: $F = Bil = Bli_0 \cos 2\pi\nu t$, unde B este inducția câmpului magnetic, *l* este lungimea porțiuni de fir aflată în câmp magnetic, i_0 este curentului iar ν este frecvența acestuia. Această forță o să producă o perturbație armonică ce are frecvența egală cu cea a curentului electric care trece prin fir și care va produce unde elastice în fir.

Realizarea experimentului presupune următoarele etape:

1) Se tensionează firul prin atașarea unei mase *m* la capătul acestuia. Valoarea masei se trece în tabelul de date #1.
2) Se pornește generatorul de frecvențe și se modifică frecvența până la obținerea modului fundamental de oscilație a firului. Se înregistrează frecvența modului fundamental (ν_1^{exp}) în tabelul de date #1.
3) Cu ajutorul unei rigle se determină amplitudinea modului (A_1) și lungimea de undă (λ_1^{exp}) și se trec în tabelul de date #1. Atenție! Conform relației (8) și Fig. 4, amplitudinea A_0 este jumătate din valoarea măsurată.
4) Se crește frecvența și se identifică următoarele 4 armonici superioare, frecvența (ν_n^{exp}), amplitudinea (A_n) și lungimea de undă (λ_n^{exp}) se trec în tabelul de date #1. Atenție! Prin reglarea intensității curentului produs de generator încercați să obțineți amplitudini cât mai apropiate de amplitudinea A_1, astfel încât relația (12) să fie validă.
5) Se repetă pașii 1)-4) pentru o a doua masă de valoare mai mare. Datele experimentale se trec în tabelul de date #2.

Prelucrarea datelor experimentale presupune următoarele etape:

1) Se calculează tensiune din fir folosind relația $F = mg$, unde $g = 9.81\ m/s^2$.
2) Se calculează viteza undelor folosind relația $c = \sqrt{F/\mu}$
3) Se calculează frecvențele primelor 5 moduri folosind relația (10): $\nu_n^{calc} = n\frac{c}{2L}$.
4) Se calculează lungimile de undă ale primelor 5 moduri folosind relația (1): $\lambda_n^{calc} = \frac{c}{\nu_n^{calc}}$.
5) Se calculează energia fiecărui mod folosind relația (12): $E_n = \frac{\mu A_0^2 \pi^2 c^2}{L} n^2$.
6) Calculați diferența de energie dintre modurile consecutive $E_{n+1} - E_n$.
7) Toate mărimile calculate se trec în tabelul de date #1 sau #2.

Nume __________ Secţia/Grupa __________ Data __________

Unde staționare într-o coardă vibrantă

Raport de Laborator

TABELUL DE DATE #1

Scop: Determinarea frecvenței, lungimii de undă și energiei primelor 5 moduri de oscilație.

n	μ (g/m)	m (kg)	F (N)	c (m/s)	ν_n^{exp} (Hz)	ν_n^{calc} (Hz)	λ_n^{exp} (Hz)	λ_n^{calc} (Hz)	A_n (cm)	E_n (J)	$E_{n+1} - E_n$ (J)
1											
2											
3											
4											
5											

TABELUL DE DATE #2

Scop: Determinarea frecvenței, lungimii de undă și energiei primelor 5 moduri de oscilație.

n	μ (g/m)	m (kg)	F (N)	c (m/s)	ν_n^{exp} (Hz)	ν_n^{calc} (Hz)	λ_n^{exp} (Hz)	λ_n^{calc} (Hz)	A_n (cm)	E_n (J)	$E_{n+1} - E_n$ (J)
1											
2											
3											
4											
5											

Nume____Secţia/Grupa__________________Data__________

Întrebări:

1) În cazul unei chitare, de ce se folosesc corzi mai groase pentru note mai joase ? De ce prin întinderea corzii înălțimea notelor crește ? De ce prin apăsarea corzii pe grif se produc sunete mai înalte ?

2) Dacă avem o coardă ideală care oscilează în modul #3 și îi transferăm o cantitate de energie din exterior (E) egală cu $E = E_5 - E_3$ ce se va întâmpla cu coarda?

Nume____________________________________Secţia/Grupa___________________Data___________

3) Dacă avem o coardă ideală care oscilează în modul #3 și îi transferăm o cantitate de energie din exterior (E) care este mai mică decât energia necesară să treacă în modul #4, adică $E < E_4 - E_3$ ce se va întâmpla cu coarda? O să treacă în modul #4 ? Dacă nu, ce se va întâmpla cu energia E ?