Note Title 17.11.2020

Funcții continue

1. Definiție. Proprietăți.

Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$, $a \in A$.

D1.1 Funcția f s.n. continuă în a dacă pt orice șir $(x_n)_{n\geq 1}$ din A cu $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Obs: 1) Dacă $a \in A'$, atunci f este continuă în a $\iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2) Dacă $a \notin A'$ (a este punct izolat), atunci f este continuă în a.

Def 1.2. O funcție s.n. continuă pe o mulțime dacă e este continuă în fiecare punct al acelei mulțimi.

Are loc următ. caracterizare a continuității:

T1.3 Sunt echivalente afirmațiile:

1) f este continuă în a;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A$ cu $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

(Prin $\| \|$ am notat ambele norme Euclidiene din $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{R}^p$)

Continuitatea se conservă prin operații aritmetice și prin compunere, după cum urmează:

T1.4 Fie $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcții continue. Atunci funcțiile: $f+g$, λf (cu $\lambda \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (pt. $g \neq 0$), $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sunt continue pe A.

Dem. $h = f + g: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$.

Fie $x_n \to a$, $x_n \in A \Rightarrow$

$h(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(a) + g(a) = h(a) \Rightarrow$

h e cont. în a.

$\max(f, g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$

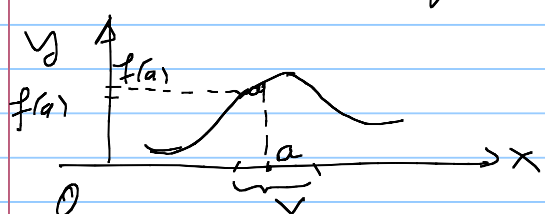
$\min(f, g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$ $\boxtimes$

T1.5 Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$.
Dacă f e continuă în $a \in A$ și g e continuă în $f(a) \in B \Rightarrow g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ e continuă în a.

Dem. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ șir din A, $x_n \to a$

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \xrightarrow[\text{continue}]{f,\, g} g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

Are loc următoarea proprietate de păstrare a semnului unei funcții continue.



$f(a) > 0 \Rightarrow f(x) > 0,\ x \in V \in \mathcal{V}(a)$.

T1.6. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție continuă în $a \in A$ cu $f(a) > 0$.
Atunci $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ a.î. $f(x) > 0,\ \forall x \in V \cap A$.

Relativ la cont. funcțiilor vectoriale avem următoarea caracterizare a acesteia:

T1.7 Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ și $a \in A$. Atunci:

f e cont în $a \Leftrightarrow f_1, f_2, \dots, f_p$ sunt continue în a.

Dem. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ șir din A, $x_n \to a$.

f cont în $a \Leftrightarrow f(x_n) \to f(a) \Leftrightarrow$
$f_1(x_n) \to f_1(a), \dots, f_p(x_n) \to f_p(a)$
$\Leftrightarrow f_1, f_2, \dots, f_p$ sunt continue în a.

Ex1: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (xy,\ x+y)$.
f este cont pe $\mathbb{R}^2$ pt că $f_1(x,y) = xy$ și $f_2(x,y) = x+y$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$.

Ex2. Studiați continuitatea funcției
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sol: f e cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Studiem cont în $(0,0)$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ ?$

$f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$. Are loc:

$$|f(x,y)| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}|y| \leq |y|.$$

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |y|, \ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Downarrow (x,y) \to (0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f \text{ cont în } (0,0) \Longrightarrow$$

$\Rightarrow f$ e continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Definim în continuare o noțiune nouă de continuitate cu caracter global.

D1.8 Funcția $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ s.n. uniform continuă pe A dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ a.î. $\forall x, y \in A$ cu $\|x-y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Obs 1) f uniform continuă $\Longrightarrow f$ continuă.
(este suficient să fixăm $y = a \in A$ în D1.8 $\Rightarrow f$ continuă în a).

2) Există funcții continue care nu sunt uniform continue.

Ex: Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ e continuă, dar nu e uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

Dem. Căutăm două șiruri $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ a.î.

$$x_n - y_n \to 0 \quad \text{și} \quad f(x_n) - f(y_n) \not\to 0.$$

Luăm: $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Avem: $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$ și

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0.$$

Presupun că f este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Atunci pentru $\varepsilon = 1$ există $\delta > 0$ a.î. pentru $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$.
Aleg $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\frac{1}{n} < \delta \Rightarrow |x_n - y_n| < \delta$ dar $|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 1$, contradicție.

Obs: Se arată că funcția f din Def 1.8 este uniform continuă pe $A \Longleftrightarrow f_1, \dots, f_p$ sunt uniform continue pe A.

O clasă de funcții uniform continue sunt funcțiile Lipschitz. Avem:

<u>T1.9</u> Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ o funcție Lipschitz ($\exists L > 0$ a.î. $\forall x, y \in A$: $\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|$). Atunci f este uniform continuă pe A.

<u>Dem</u>. Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Atunci pentru orice $x, y \in A$ cu $\|x - y\| < \delta$ avem

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

deci f este uniform continuă pe A.

<u>Exemplu</u>: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}}$ este uniform continuă.

<u>Dem</u>: $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$ este o funcție mărginită pe $(0, \infty)$ (Temă), deci f este funcție Lipschitz.

2. <u>Proprietățile funcțiilor continue pe mulțimi compacte și pe mulțimi conexe</u>

<u>T2.1</u> (Weierstrass). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime <u>compactă</u> și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție <u>continuă</u>. Atunci f este <u>mărginită</u> și își <u>atinge marginile</u> pe A.

<u>Dem</u>. 1) <u>Dem că f este mărginită</u>. Pres. că f este <u>nemărginită</u>. Atunci $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in A$ a.î. $|f(x_n)| \geq n$. $(*)$

Din A compactă $\Rightarrow$ există un subșir $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ a. lui $(x_n)_{n \geq 1}$ a.î.

$$x_{n_k} \to a, \quad a \in A.$$

Atunci avem: $|f(x_{n_k})| \geq n_k$, $\forall k \geq 1$ (cf. $(*)$) $\overset{k \to \infty}{\Longrightarrow}$

$\lim\limits_{k \to \infty} |f(x_{n_k})| \geq +\infty \xrightarrow[\text{cont}]{f} |f(a)| \geq +\infty$ contradicție!

Deci f este mărginită.

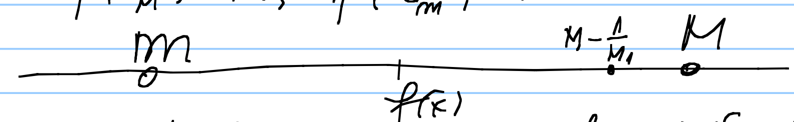
2) <u>Dem că f își atinge marginile pe A</u>

Fie $M = \sup f$, $m = \inf f$ pe A.

Evident $M, m \in \mathbb{R}$ pt că f este mărginită.

Trebuie dem. că $\exists\, x_M, x_m \in A$ a.î.

$$f(x_M) = M, \quad f(x_m) = m.$$



Presupun prin absurd că M nu se atinge: $f(x) < M, \forall x \in A$.

Atunci pot defini funcția $g : A \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \quad x \in A.$$

g este continuă pe A ca cat de f cont și al dem.

$\Rightarrow$ g este mărginită $\Rightarrow \exists\, M_1 > 0$ a.î.

$$g(x) \le M_1, \quad \forall x \in A. \iff$$

$$\frac{1}{M - f(x)} \le M_1, \quad \forall x \in A \iff$$

$$M - f(x) \ge \frac{1}{M_1}, \quad \forall x \in A$$

$$\boxed{f(x) \le M - \frac{1}{M_1}, \quad \forall x \in A}$$

$$\Downarrow$$

$M \ne \sup f$, <u>contradicție</u>.

Deci am dem că M este atins. Analog se arată că m se atinge.

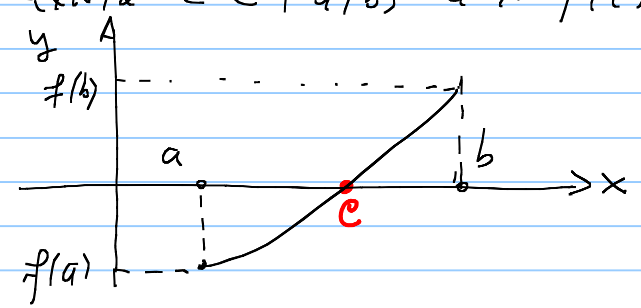
Se dem de asemenea următoarea teoremă.

<u>T2.2</u> (<u>Heine-Cantor</u>). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime compactă și $f : A \to \mathbb{R}^p$ o funcție continuă pe A. Atunci f este uniform continuă pe A.

(<u>Deci funcțiile continue pe un compact sunt uniform continue pe acel compact</u>)

Fie $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul I. Sunt cunoscute următoarele proprietăți:

- $f(I)$ este un interval (imaginea lui f este interval)
- Dacă $a, b \in I$ și $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ atunci există $c \in (a, b)$ a.î. $f(c) = 0$



Vom arăta în continuare că aceste proprietăți se extind la funcții de mai multe variabile.

T2.3 (Darboux). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mulțime conexă (prin arce) și $f: A \to \mathbb{R}^p$ o funcție continuă. Atunci $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ este o mulțime conexă (prin arce).

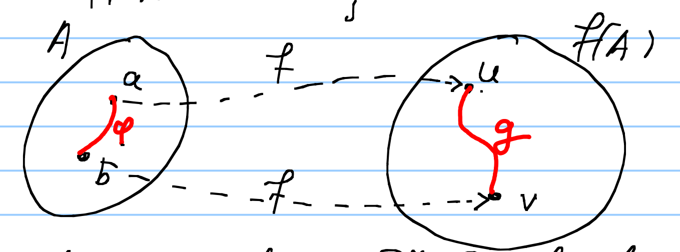
Dem. Fie $u, v \in f(A)$. Atunci $\exists a, b \in A$ a.î. $f(a) = u$, $f(b) = v$. Cum A este conexă există o funcție continuă $\varphi: [0,1] \to A$ a.î. $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

Fie $g: [0,1] \to f(A)$, $g(t) = f(\varphi(t))$

Atunci g este continuă și

$$g(0) = f(\varphi(0)) = f(a) = u$$
$$g(1) = f(\varphi(1)) = f(b) = v.$$

deci $f(A)$ este mulțime conexă.



Corolar 2.4. Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe mulțimea conexă A. Atunci $f(A)$ este un interval în $\mathbb{R}$.

Dem: $f(A)$ este conexă în $\mathbb{R}$, adică este interval.

Corolar 2.5. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime convexă (prin arce), $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $a, b \in A$ astfel ca $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Atunci există $c \in A$ astfel ca $f(c) = 0$.

Dem: $f(A) = I$ este interval și cum $f(a) \in I$, $f(b) \in I \implies 0 \in I$, deci $\exists\, c \in A$ astfel ca $f(c) = 0$.

Aplicație Să se determine imaginea funcției $f: (0,+\infty)\times(0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

$\forall x,y,z > 0$.

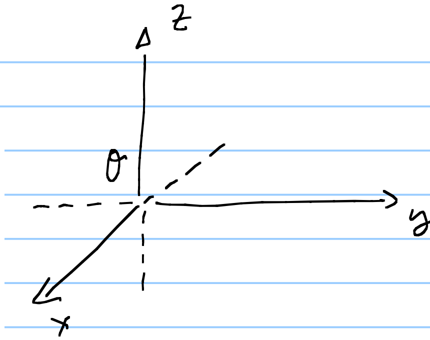
Soluție. Mulțimea $A = (0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ este convexă, funcția f este continuă pe A, deci $f(A)$ este interval. Avem de determinat $\inf(f)$ și $\sup(f)$.

Are loc relația

$$f(x,y,z) > \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1, \quad x,y,z > 0.$$

Pe de altă parte

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x+z}{x+y+z}$$
$$\frac{y}{y+z} < \frac{y+x}{x+y+z}, \quad x,y,z > 0,$$
$$\frac{z}{z+x} < \frac{z+y}{x+y+z}$$



De aici obținem

$$f(x,y,z) < \frac{x+z}{x+y+z} + \frac{y+x}{x+y+z} + \frac{z+y}{x+y+z} = 2.$$

Prin urmare

$$1 < f(x,y,x) < 2, \quad (x,y,z) \in A.$$

Demonstrăm că $\inf(f) = 1$ și $\sup(f) = 2$.

Avem:

$$f(x,x^2,x^3) = \frac{x}{x+x^2} + \frac{x^2}{x^2+x^3} + \frac{x^3}{x^3+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x} + \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Se obține

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x,x^2,x^3) = 2 \implies \sup f = 2, \\ &\lim_{x\to\infty} f(x,x^2,x^3) = 1 \implies \inf f = 1. \end{aligned}\right\} \implies f(A) = (1,2).$$