UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

Facultatea de Automatică și Calculatoare
Calculatoare și Tehnologia Informației [CA,TI-lic., ro.]
anul 1, seria A (2024/2025, semestrul 2)

ANALIZĂ MATEMATICĂ II
Calcul integral și ecuații diferențiale

conf. univ. dr. **MIRCEA RUS**

Despre curs:

- Prezența nu este obligatorie și nu contează la examen, însă este recomandată.
- Conținutul cursului constă din: materialele prezentate la curs, notele de curs și materialele pentru studiu individual încărcate în echipa de pe platforma Microsoft Teams.

Despre seminar:

- Prezența la seminar este obligatorie, conform regulamentului ECTS în vigoare (Art. 6.4 – 6.5); condiționează admiterea la forma finală de evaluare (examen).
- Studenții care au absentat la seminar mai mult de 4 ori nu se pot prezenta la examen și trebuie să recontracteze disciplina în anul universitar următor (mai multe detalii în Art. 6.5).
- Activitatea la seminar contează în nota finală în proporție de 20%.
- Se vor puncta: activitatea de la seminar, temele, testele de verificare pe parcurs.

Despre examen:

- Examen scris: pondere de 80% din nota finală.
- Mai multe detalii se vor da spre sfârșitul semestrului.

Alocarea timpului de studiu:

- 125 de ore: 28 de ore pentru curs, 28 ore pentru seminar, 69 de ore pentru studiu individual (conform *Planului de învățământ*).

Tematica:

- Ecuații diferențiale ordinare: modelare, metode de integrare, metode numerice.
- Calcul integral: integrale improprii, cu parametru, curbilinii, duble, triple, de suprafață.
- Tematica detaliată se poate consulta în *Fișa disciplinei*.

Bibliografie:

- Se va da pe parcursul semestrului.

Cursul 1: Ecuații diferențiale (1)

1 Introducere

Teoria ecuațiilor diferențiale este un instrument eficace de modelare matematică a fenomenelor dinamice din știință, tehnică, economie, etc. Dezvoltarea continuă a acestor domenii a făcut ca ecuațiile diferențiale să capete un rol privilegiat între celelate ramuri ale matematicii. De aceea, este imposibil de conceput azi o înțelegere corectă și amănunțită a fenomenelor dinamice fără o cunoaștere, cel puțin elementară, a ceea ce reprezintă azi teoria ecuațiilor diferențiale (a se vedea clasificarea subdomeniilor matematicii și locul/importanța ecuațiilor diferentiale în această clasificare: `https://mathscinet.ams.org/msnhtml/msc2020.pdf`).

- O ecuație diferențială este o ecuație în care necunoscutele sunt funcții și care conține derivate ale necunoscutelor.
- Ecuațiile diferențiale apar (și sunt fundamentale) în domenii diverse: fizică, inginerie, chimie, biologie, economie, ...

Categorii de fenomene și probleme care generează / se modelează / se rezolvă prin ecuații diferențiale:

- majoritatea legilor din fizică sunt, de fapt, ecuații diferențiale;
- studiul reacțiilor bio-chimice;
- studiul dinamicii populațiilor (în biologie);
- modelarea matematică a aspectelor dinamice în grafica și jocurile pe calculator, realitate virtuală, *computer vision*;
- algoritmi obținuți prin analogii cu sisteme fizice sau biologice;
- algoritmi în procesarea imaginilor digitale;
- econometrie și matematici financiare;
- ...

Clasificarea ecuațiilor diferențiale se face după diverse criterii:

- numărul de necunoscute (ecuații *vs* sisteme de ecuații);
- numărul variabilelor de care depind necunoscutele (ecuații ordinare *vs* ecuații cu derivate parțiale);
- ordinul derivatelor ce apar în ecuație (ecuații de ordinul 1, ecuații de ordinul 2, ...)
- metodele folosite pentru rezolvare;
- proprietățile soluțiilor;
- ...

2 Modelarea matematică prin ecuații diferențiale

Dobânda compusă cu acumulare instantanee/continuă

$S_0 =$ suma de bani inițială.

$S(t) =$ suma de bani acumulată în cont până la momentul t.

$r =$ rata dobânzii [dobânda produsă de 1 leu într-o unitate de timp] (ex: $5\%/\text{an}$).

Se cere $S(t)$.

....

Dobânda acumulată în intervalul de timp $[t, t+\Delta t]$ este $r \cdot \Delta t \cdot S(t)$

$$S(t+\Delta t) = S(t) + r \cdot \Delta t \cdot S(t) \Longleftrightarrow \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = r \cdot S(t) \Big| \lim_{\Delta t \to 0} \quad \text{dobânda se aplică instantaneu}$$

$$\boxed{S'(t) = r \cdot S(t)} \quad (t \geq 0), \qquad S(0) = S_0$$

Soluția problemei este: $S(t) = S_0 \cdot \mathrm{e}^{rt} \quad (t \geq 0)$.

Diferența față de suma obținută prin aplicarea dobânzii simple este:

$$S_0 \cdot \mathrm{e}^{rt} - (S_0 + r \cdot t \cdot S_0) = S_0(\mathrm{e}^{rt} - 1 - rt) = S_0 \left(\frac{(rt)^2}{2} + \frac{(rt)^3}{6} + \ldots + \frac{(rt)^n}{n!} + \ldots \right)$$

Pentru $r = 5\%/\text{an}$ și $t = 20$ ani, dobânda suplimentară este $(\mathrm{e}-2)S_0 \simeq 0,718 \cdot S_0$.

Mai multe informații: dobânda compusă si originile numărului e
https://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant)

Ecuația logistică (modelarea variației unei populații)

$N_0 =$ numărul inițial de indivizi dintr-o populație

$N(t) =$ numărul de indivizi din populația considerată, la momentul t.

Variația populației în intervalul de timp $[t, t+\Delta t]$ este $N(t+\Delta t) - N(t)$ care depinde proporțional de $N(t)$ și de Δt (cu cât N sau Δt este mai mare, cu atât numărul de indivizi noi este mai mare): $N(t+\Delta t) - N(t) = r \cdot N(t) \cdot \Delta t$

$r =$ rata de creștere a populației pe unitatea de timp ($r =$ natalitate $-$ mortalitate).

Împărțim cu Δt, apoi $\Delta t \to 0$ și rezultă ecuația: $\boxed{N'(t) = r \cdot N(t).}$

r nu este, în general, constant, depinde de N și de alți parametri ($r = r(N)$).

În modelul logistic, r depinde de *capacitatea de susținere a mediului* (K).

K reprezintă numărul maxim de indivizi ce pot fi susținuți de mediul în care sunt plasați (sau: mărimea populației pentru care rata de creștere r devine 0).

Cea mai simplă expresie pentru r este o funcție de gradul 1 în raport cu N:

$$r(N) = aN + b, \qquad r(0+) = r_0, \qquad r(K) = 0,$$

deci

$$r = r_0\left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad r_0 \text{ constant.}$$

Se obține ecuația (logistică) [Pierre Verhulst, 1847]:

$$N'(t) = r_0\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) \quad \text{pentru orice } t \geq 0$$

la care se adaugă condiția inițială $N(0) = N_0$. [rezolvarea în cursul următor].

Observație: Cu cât modelul este mai realist (și ține cont de mai mulți parametri), cu atât ecuațiile diferențiale sunt mai complicate și (mult) mai greu de studiat. Spre exemplu, în cazul răspândirii unui virus, modelul ce studiază numărul persoanelor infectate trebuie să țină cont că există indivizi ce *nu* contribuie la răspândirea virusului (decedați / imunizați / izolați / necontagioși).

Astfel, $N(t+\Delta t) - N(t) = r \cdot N(t) \cdot \Delta t - H \cdot \Delta t$, $\Delta t \to 0$, care conduce la ecuația $N'(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) - H$, unde H este numărul de persoane pe unitatea de timp care *nu* mai contribuie la răspândirea virusului. H poate fi în primă aproximare presupus constant (în cazul când nu există decese și are loc un proces de imunizare / vaccinare cu o rată constantă în timp); în modelele realiste, H depinde de N și de alți factori și parametri (unii necunoscuți sau greu de evaluat numeric).

Informații și exemple suplimentare:

`https://www.math24.net/population-growth/`

Logistic equation and COVID-19 (articol științific):
`https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110241`

Dezintegrare radioactivă

$N_0 =$ numărul inițial de nuclee radioactive.

$N(t) =$ numărul de nuclee radioactive (nedezintegrate) care se așteaptă, în medie, să rămână la momentul t.

$\lambda =$ probabilitatea ca un nucleu atomic să se dezintegreze radioactiv într-un interval de timp unitar (constantă în timp, nu depinde de t, specifică tipului de nucleu atomic).

Se cere $N(t)$.

....

Numărul mediu de nuclee care se dezintegrează în intervalul de timp $[t, t+\Delta t]$ este:

$$N(t) - N(t+\Delta t) = \lambda \cdot N(t) \cdot \Delta t$$

Soluția problemei este: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0)$ [rezolvarea în cursul următor]

Informații și exemple suplimentare:

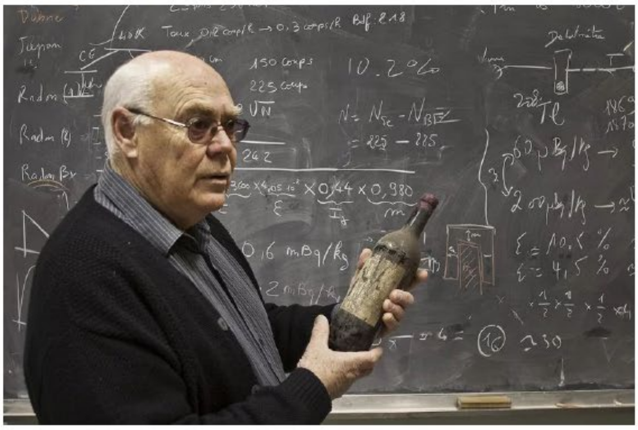
https://en.wikipedia.org/wiki/Radioactive_decay

https://www.math24.net/radioactive-decay/

Ca fapt divers:

How Atomic Particles Helped Solve A Wine Fraud Mystery

https://www.npr.org/sections/thesalt/2014/06/03/318241738/how-atomic-particles-became-the-smoking-gun-in-wine-fraud-mystery



Ecuația mișcării unui punct material sub acțiunea unei forțe

Mișcarea unui punct material de masă m (constantă sau variabilă) sub acțiunea unei forțe / câmp de forțe $\vec{F}$ (conform legii a doua a dinamicii): $m\vec{r}\,'' = \vec{F}$, unde $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ reprezintă necunoscuta / necunoscutele ecuației (coordonatele spațiale ale obiectului), t este variabila (timpul), iar
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t, x', y', z', m, \text{alți parametri})$.

La ecuație, se adaugă condițiile inițiale (poziția $\vec{r}(0)$ și viteza $\vec{r}\,'(0)$).

Ecuația căldurii (difuziei)

Ecuația descrie variația temperaturii în cazul propagării căldurii într-un mediu izotropic și omogen într-un spațiu tridimensional:

$$u'_t - k\left(u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2}\right) = 0$$

unde $u = u(t, x, y, z)$ necunoscuta (temperatura), $t =$ timpul *când* se măsoară temperatura, $x, y, z =$ coordonatele spațiale *unde* se măsoară temperatura,
$k =$ constantă ce depinde de anumiți parametri fizici.