1.3 Ecuații omogene (în sensul lui Euler) și reductibile la acestea

O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ con) se numeşte funcţie **omogenă de grad** n dacă $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, pentru orice $(x, y) \in D$ şi $t > 0$.
O ecuaţie diferenţială de forma $y' = f(x, y)$ se numeşte **omogenă (în sensul lui Euler)** dacă f este o funcţie omogenă de grad zero.

O astfel de ecuaţie poate fi scrisă întotdeauna sub forma $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$.
Pentru rezolvarea acestei ecuaţii se face substituţia $u = \frac{y}{x}$. De aici, $y = ux$, $y' = xu' + u$ şi ecuaţia omogenă se reduce la ecuaţia cu variabile separabile: $xu' = \varphi(u) - u$.

☞ **Exemplul 1.3.1** Să se integreze ecuaţia $y'(x^2 - y^2) = 4xy$.

Rezolvare: Avem $y' = \frac{4xy}{x^2 - y^2}$, de unde $y' = \frac{4\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Facem substituţia $u = \frac{y}{x}$ şi obţinem $\frac{u'(1 - u^2)}{u^3 + 3u} = \frac{1}{x}$, de unde, prin integrare directă rezultă

$$\ln \frac{u}{(u^2 + 3)^2} = \ln Cx^3, \text{ adică } \frac{u}{(u^2 + 3)^2} = Cx^3.$$

Revenind la funcţia necunoscută y, obţinem soluţia scrisă în formă implicită:
$y = C(y^2 + 3x^2)^2$. ☑

O ecuaţie diferenţială de forma $y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$, cu $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ se poate transforma într-o ecuaţie omogenă printr-o schimbare de variabilă. Se disting două cazuri:
a) Dacă $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, se fac schimbările de variabile $x = u + x_0$ şi $y = v + y_0$, unde (x_0, y_0) este soluţia (unică) a sistemului $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$. Se obţine astfel o ecuaţie cu funcţia necunoscută v şi variabila independentă u.
b) Dacă $\Delta = 0$, se face schimbarea de funcţie $z = a_1 x + b_1 y$, ecuaţia se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile, cu necunoscuta z.

☞ **Exemplul 1.3.2** Să se integreze ecuaţia $y' = \dfrac{x+y-1}{x-y-1}$.

➾ **Rezolvare:** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Sistemul $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ are soluţia $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, deci facem substituţiile $u = x-1$, $v = y$, după care obţinem noua ecuaţie diferenţială $v' = \dfrac{u+v}{u-v}$, omogenă.

Avem $v' = \dfrac{1+\frac{v}{u}}{1-\frac{v}{u}}$ şi facem o nouă substituţie $z = \dfrac{v}{u}$, cu $v' = z'u + z$, găsind $z'\dfrac{1-z}{1+z^2} = \dfrac{1}{u}$, care are soluţia $Cu^2(1+z^2) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{arctg}\, z}$. De aici, revenind la variabilele iniţiale, găsim $C(u^2+v^2) = \mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\,\frac{v}{u}}$ şi în final $C\left[(x-1)^2+y^2\right] = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x-1}}$. ☑

☞ **Exemplul 1.3.3** Să se integreze ecuaţia $y' \cdot \dfrac{3x-6y+2}{-x+2y+1} = 1$.

➾ **Rezolvare:** Avem $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, prin urmare facem substituţia $u = -x + 2y$, de unde $y' = \dfrac{u'+1}{2}$. Înlocuind în ecuaţia iniţială se găseşte $u' \cdot \dfrac{-3u+2}{5u} = 1$, care este o ecuaţie cu variabile separabile având soluţia generală $-3u + 2\ln|u| = 5x + C$, de unde soluţia ecuaţiei iniţiale: $\ln|-x+2y| = x+3y+C$, $C \in \mathbb{R}$. ☑

Exerciţii propuse

✎ **1.3.1** Să se determine soluţia generală pentru următoarele ecuaţii:

i). $y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{ctg}\,\dfrac{3y}{x}$

ii). $y' = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

iii). $y'(x^2+y^2) + 2xy = 0$

iv). $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$

v). $x^2y' = y^2 - 3xy + 4x^2$

vi). $\dfrac{x-y}{x^2+y^2}y' - \dfrac{y}{2x^2} = 0$

vii). $\dfrac{y-2x}{2y^2-3xy}y' = \dfrac{1}{x}$

viii). $xy' = y(\ln y - \ln x)$

ix). $xy' = y + \sqrt{y^2-x^2}$

x). $xyy' = x\sqrt{x^2+y^2} + y^2$

xi). $x\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y = y^2\,\mathrm{d}x$

xii). $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}$

✎ **1.3.2** Să se determine soluţia generală pentru următoarele ecuaţii:

i). $y' = \dfrac{2y-6}{3x-y}$

ii). $y' = -\dfrac{x+y-2}{x-y+4}$

iii). $y' = \dfrac{1-5x-5y}{x+y+1}$

iv). $\dfrac{y'}{2} = \left(\dfrac{y-1}{x+y-2}\right)^2$

v). $(x-3y+1)\,\mathrm{d}x-(2x-6y+3)\,\mathrm{d}y=0$

vi). $(x-2y+5)\,\mathrm{d}x+(2x-y+4)\,\mathrm{d}y=0$

☑ **Indicații și răspunsuri**

$\boxed{\textbf{1.3.1}}$ **i)** $\cos\dfrac{3y}{x} = \dfrac{C}{x^3}$; **ii)** $y=-x\ln\left|\ln\dfrac{C}{x}\right|$; **iii)** $y^3+3x^2y=C$; **iv)** $y^2=Cx-x^2$; **v)** $\mathrm{e}^{\frac{x}{2x-y}}=Cx$; **vi)** $y^2+2xy-x^2=Cxy^2$; **vii)** $\dfrac{y^2}{x(y-x)}=Cx$; **viii)** $\ln\dfrac{y}{x}=Cx+1$; **ix)** $C^2x^2-2Cy+1=0$; **x)** $e^{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}=Cx$; **xi)** Schimbând rolul variabilelor obţinem $x'y^2=x(y+\sqrt{x^2+y^2})$, apoi făcând substituţia $\dfrac{x}{y}=u$ se găseşte $y^2+y\sqrt{x^2+y^2}=Cx$; **xii)** $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=\ln Cx$.

$\boxed{\textbf{1.3.2}}$ **i)** $(y-x-2)^2=C(y-3)^3$; **ii)** $y^2-2xy-x^2+4x-8y=C$; **iii)** $5x+y+\dfrac{3}{2}\ln|2x+2y-1|=C$; **iv)** $\ln|y-1|+2\operatorname{arctg}\dfrac{y-1}{x-1}=C$; **v)** $x-2y+\ln|x-3y|=C$; **vi)** $x-y+3=C(x+y-1)^3$.