Set 2
Probabilităţi discrete

1. Dacă X, Y sunt variabile aleatoare independente, atunci

$$\mathrm{var}(X \cdot Y) = \mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y) + E(X)^2\mathrm{var}(Y) + E(Y)^2\mathrm{var}(X).$$

2 Pentru X, Y, Z variabile aleatoare, să se demonstreze următoarele egalităţi:

$$\mathrm{var}(aX + bY) = a^2\mathrm{var}(X) + b^2\mathrm{var}(Y) + 2ab\,\mathrm{cov}(X, Y),\ \forall\, a, b \in \mathbb{R},$$
$$\mathrm{cov}(X + Y, Z) = \mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z).$$

3. Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt variabile aleatoare independente cu $E(X_i) = \mu$ şi $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$, să se calculeze $E((X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2)$
4. Un computer generează aleator parole formate din litere si cifre, făcând deosebire între literele mari şi mici. Dacă o parolă are 8 caractere, care este probabilitatea ca ea să conţină 2 litere mici, 3 litere mari şi 3 cifre (nu neapărat in această ordine).
5. Se testează performanţele a patru modele noi de computere M_1, M_2, M_3, M_4. Probabilităţile ca un model să satisfacă cele mai noi cerinţe ale pieţei sunt: $p_1 = 0.8$ pentru model M_1, $p_1 = 0.7$ pentru modelul M_2, $p_3 = 0.9$ pentru modelul M_3 şi $p_4 = 0.6$ pentru modelul M_4. Să se determine probabilitatea p ca cel puţin trei modele să satisfacă cerinţele pieţei.
6. S-a constatat că probabilitatea de logare la un server este 0.7. Fie X numărul de încercări care trebuie efectuate pentru accesul la server. Să se calculeze:
a) Funcţia de probabilitate pentru X. Ce distribuţie are X?
b) Valoarea aşteptată a numărului de încercări necesare pentru a obţine accesul la server.
c) Probabilitatea de a obţine accesul la server în cel mult 4 încercări.
d) Probabilitatea de a obţine accesul la server în cel puţin 3 încercări.

7. Se dau două urne. Prima urnă conţine 6 bile albe şi 4 bile negre şi a doua urnă conţine 8 bile albe şi 6 bile negre. Se extrage o bilă din prima urnă şi se introduce în a doua urnă, apoi se extrag 4 bile din urna a doua, fără a se reintroduce în urnă. Fie X numărul de bile albe dintre cele 4 extrase din urna a doua. Care este valoarea aşteptată a variabilei aleatoare X?
8. Linia telefonică a unui birou de informaţii este ocupată 60% din apeluri. Care este numărul aşteptat de încercări pentru a obţine o informaţie?
9. Dintr-o urnă care conţine 8 bile albe şi 5 bile negre se extrage câte o bilă de 3 ori, reintroducând-o de fiecare dată în urnă. Dacă X este numărul de bile negre extrase, să se calculeze $E(X)$.
10. Un test grilă are 25 de întrebări, fiecare având 5 răspunsuri posibile, din care exact unul este corect. Presupunem că unul din studenţi răspunde la întâmplare la fiecare întrebare.
a) Să se scrie variabila aleatoare care reprezintă numărul de răspunsuri corecte.
b) Care este numărul aşteptat de răspunsuri corecte?
11. Numărul zilnic Y de clienţi ai unui magazin a fost înregistrat pentru o perioadă lungă de timp, găsindu-se o medie de 20 clienţi, cu o abatere standard de 1 client. Distribuţia

de probabilitate a lui Y nu se cunoaşte. Ce se poate spune despre probabilitatea ca mâine Y să fie între 16 şi 24 clienţi?

12. Fie X şi Y variabile aleatoare independente, fiecare având o distribuţie binomială de parametri n, p şi respectiv m, p, cu $p \in (0,1)$. Care este distribuţia de probabilitate a variabilei aleatoare $X+Y$?

13. Se distribuie aleator 8 scrisori adresate în 3 cutii poştale ale unui bloc de locuinţe. Fie X numărul de scrisori din prima cutie poştală. Să se determine funcţia de probabilitate a lui X şi să se arate că este corect definită.

14. Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente şi identic distribuite, cu

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \; i \in \mathbb{N}_n.$$

Să se precizeze distribuţia de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Ce tip de distribuţie are Y?

15. Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente şi identic distribute, având o distribuţie geometrică de parametru p,

$$X_i : \begin{pmatrix} k \\ p\, q^{k-1} \end{pmatrix}_{k=1,2,\ldots}.$$

Să se găsească distribuţia de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Ce tip de distribuţie are Y?

16. Presupunem că numărul de greşeli de tipar per pagină într-o carte cu 400 de pagini este independent de pagină şi are o distribuţie Poisson de parametru λ. Să se determine probabilitatea ca o pagină sa aibă cel puţin două greşeli de tipar.

17. Intr-un birou n scrisori diferite sunt plasate aleator în n plicuri adresate. Notăm cu Z_n variabila aleatoare care reprezintă numărul de plasamente corecte. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}_n$, fie X_k variabila aleatoare definită prin:

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{dacă scrisoarea } k \text{ este introdusă correct,} \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Să se calculeze: a) $E(X_k)$ şi $\mathrm{var}(X_k)$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}_n$.
b) $E(Z_n)$ şi $\mathrm{var}(Z_n)$

Răspunsuri:

4. Se foloseşte schema multinomială: $\frac{8!}{2!3!3!}\left(\frac{26}{62}\right)^2\left(\frac{10}{62}\right)^3\left(\frac{26}{62}\right)^3$ **5.** Se foloseşte schema urnelor lui Poisson. Probabilitatea cerută este $p = 0.7428$ **6.** a) Distribuţie geometrică; b) 10/7 c) 0.9919 d) 0.09 **11.** Se foloseşte inegalitatea lui Cebâşev: $P(16 < Y < 24) \geq \frac{15}{16}$. **12.** $X+Y$ are o distribuţie binomială de parametri $m+n, p$. **13.** $P(X=i) = \frac{2^{8-i}\binom{8}{i}}{3^8}$, $i = \overline{0,8}$. **14.** Binomială de parametri n, p. **15.** Distribuţie binomială negativă. **16.** V. a. reprezentând numărul de greşeli per pagină: $X : \begin{pmatrix} k \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{pmatrix}_{k=0,1,\ldots}$ Probabilitatea ca o pagină să conţină cel puţin 2 greşeli este $\sum_{k=2}^{\infty} P(X=k) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$. **17.** $P(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, $E(X_k) = \frac{1}{n}$, $\mathrm{var}(X_k) = \frac{n-1}{n^2}$. b)$Z_n = X_1 + \ldots + X_n$, dar v.a. din această sumă nu sunt independente! Avem nevoie de $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$, deci în final $\mathrm{var}(Z_n) = 1$.