Fizică I

Mihai Gabor

2024

Cuprins

Listă de figuri

1 Cinematica în spațiul tridimensional (3D)

În capitolul precedent am tratat mișcarea unui corp pe o singură direcție 1D. În continuare o să generalizăm conceptele introduse în capitolul precedent și o să tratăm mișcarea unui corp în spațiul tridimensional 3D.

1.1 Vectorul de poziție și vectorul deplasare

Într-un sistem de referință dat poziția unui corp poate fi specificată folosind un *vector de poziție*, care se notează de obicei cu $\boldsymbol{r}$ și care este un vector ce unește originea sistemului de referință cu poziția corpului. Dacă folosim un sistem de coordonate cartezian, atunci conform figurii 1.1 vectorul de poziție este simplu

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1.1}$$

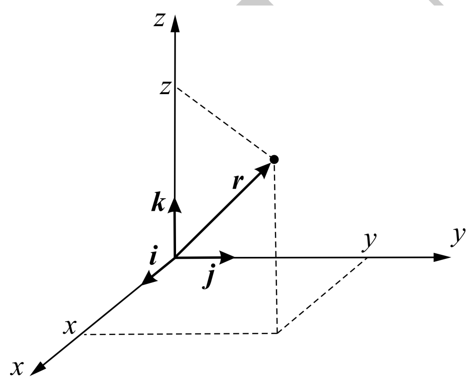


Figura 1.1: Poziția unui corp poate fi specificată folosind un vector de poziție $\boldsymbol{r}$ într-un sistem de coordonate cartezian.

Componentele vectorului sunt funcții de timp, adică:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Să presupunem că avem un corp care se deplasează pe o anumită traiectorie și dorim să determinăm viteza medie a acestuia la deplasarea între două puncte P și P', așa cum este ilustrat figura 1.2. Corpul se mișcă de-a lungul traiectoriei. La momentul t se află în punctul P a cărui poziție este dată de:

$$\boldsymbol{r}(t) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1.3}$$

După un interval de timp Δt corpul se găsește în punctul P' a cărui poziție este dată de:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t+\Delta t) &= (x+\Delta x)\boldsymbol{i} + (y+\Delta y)\boldsymbol{j} + (z+\Delta z)\boldsymbol{k} \\ &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} + \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k} \\ &= \boldsymbol{r}(t) + \Delta\boldsymbol{r}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

unde am notat cu

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}. \tag{1.5}$$

vectorul deplasare de la P la P', care este un vector ale cărui componente sunt deplasările (Δx, Δy, Δz) de-a lungul celor trei axe de coordonate carteziene.

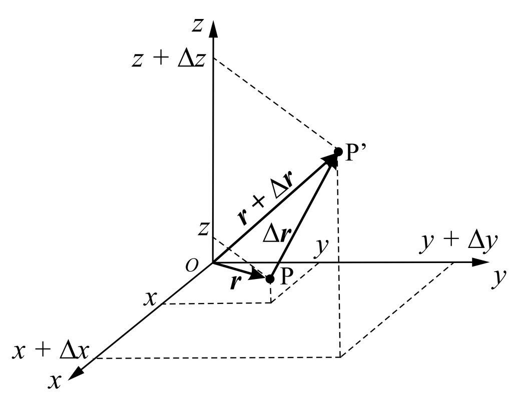


Figura 1.2: Un corp care se deplasează de la P la P'. Vectorul deplasare $\Delta\boldsymbol{r}$ unește poziția inițială a corpului cu cea finală.

În reprezentarea din figura 1.3 am omis axele de coordonate carteziene și am indicat numai originea sistemului de referință pentru a sublinia faptul că vectorul deplasare $\Delta\boldsymbol{r}$ există independent de sistemul de coordonate ales. Bineînțeles, așa cum am arătat mai sus, componentele acestuia depind de sistemul de coordonate folosit.

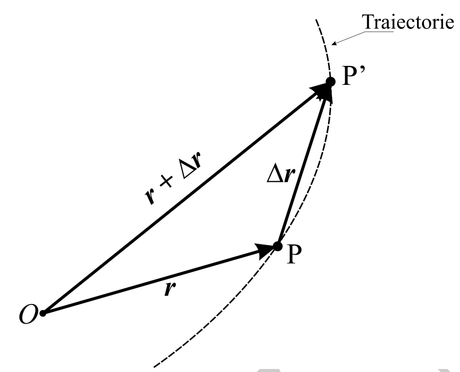


Figura 1.3: Vectorul deplasare $\Delta\boldsymbol{r}$ există independent de sistemul de coordonate ales

1.2 Viteza

Similar cu cazul 1D, *viteza medie* o să fie dată de

$$\boldsymbol{v}_{med} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \tag{1.6}$$

Pentru a determina viteza instantanee trebuie să micșorăm intervalul Δt din ce în ce mai mult, la limită acesta se va transforma în intervalul infinit mic dt, iar viteza la momentul t o să fie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} \right), \end{aligned} \tag{1.7}$$

de unde

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{1.8}$$

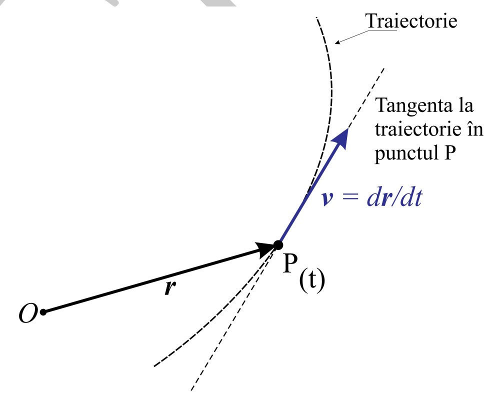


Figura 1.4: La limită, când Δt se transformă în dt, punctul P' se va suprapune cu P, iar vectorul $d\boldsymbol{r}$ o să devină tangent la traiectorie în punctul P. Deoarece vectorul viteză $\boldsymbol{v}$ este paralel cu vectorul $d\boldsymbol{r}$, viteza o să fie întotdeauna tangentă la traiectorie.

Vectorul $d\boldsymbol{r}$ este tangent la traiectorie și are componentele $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$. Deoarece vectorul viteză $\boldsymbol{v}$ este paralel cu vectorul $d\boldsymbol{r}$, viteza o să fie întotdeauna tangentă la traiectorie.

Este de menționat faptul că în acord cu relația 1.8, vectorul viteză reprezintă derivata vectorului deplasare în raport cu timpul.

O observație suplimentară este că relația

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{1.9}$$

este valabilă în orice sistem de coordonate alegem: cartezian, sferic, cilindric etc. Bineînțeles, componentele vectorului viteză o să depindă de sistemul de coordonate ales.

De multe ori este util să scriem viteza în funcție de componentele sale. În coordonate carteziene, vectorul viteză are trei componente:

$$\boldsymbol{v}(t) = v_x\ \boldsymbol{i} + v_y\ \boldsymbol{j} + v_z\ \boldsymbol{k} \tag{1.10}$$

Dacă folosim definiția vitezei dată de relația 1.8, prin identificare, putem să scriem componentele carteziene ale vectorului viteză:

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt}, \\
v_y &= \frac{dy}{dt}, \\
v_z &= \frac{dz}{dt}.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Altfel, componentele vectorului viteză sunt *prima derivată în raport cu timpul a componentelor vectorului de poziție*.

Folosind teorema lui Pitagora, modulul vectorului viteză este

$$
v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{1.12}
$$

Există posibilitatea ca modului vectorului viteză să fie constant, însă componentele lui să varieze. Acest tip de mișcare o să fie o mișcare accelerată în care accelerația modifică direcția vitezei. Un exemplu de astfel de mișcare este mișcarea circulară și uniformă, după cum o să vedem mai jos.

1.3 Accelerația

Similar cu cazul 1D, definim vectorul accelerație ca derivata vectorului viteză în raport cu timpul

$$
\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \tag{1.13}
$$

iar dacă ținem cont de definiția vitezei 1.8, atunci

$$
\boldsymbol{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \tag{1.14}
$$

adică accelerația este *prima derivată a vectorului viteză în raport cu timpul* sau a *doua derivată a vectorului de poziție în raport cu timpul*. Este de notat faptul că aceste relații sunt valabile în orice sistem de coordonate: cartezian, sferic, cilindric etc. În coordonate carteziene putem scrie

$$
\boldsymbol{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}\right) = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k}, \tag{1.15}
$$

ceea ce ne indică faptul că accelerația este un vector cu trei componente

$$
\boldsymbol{a}(t) = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{1.16}
$$

de unde prin identificare obținem:

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{dv_x}{dt}, \\
a_y &= \frac{dv_y}{dt}, \\
a_z &= \frac{dv_z}{dt}.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Dacă ținem cont de relația 1.11 care ne dă componentele vitezei, componentele accelerației se pot scrie:

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2},\\
a_y &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2},\\
a_z &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d^2z}{dt^2},
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Este de notat faptul că în coordonate carteziene modulul vectorului accelerație este

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.19}$$

Exemplul 1.1. Poziția unui corp este dată de vectorul $\boldsymbol{r} = 2t^2\boldsymbol{i} + 5t^3\boldsymbol{j}$ [m/s]. Determinați viteza și accelerația corpului.

Viteza este dată de

$$\boldsymbol{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t^2\boldsymbol{i} + 5t^3\boldsymbol{j}\right) = 4t\boldsymbol{i} + 15t^2\boldsymbol{j} \ \ [\text{m/s}],$$

iar accelerația

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(4t\boldsymbol{i} + 15t^2\boldsymbol{j}\right) = 4\boldsymbol{i} + 30tj \ [\text{m/s}^2].$$

1.4 Aplicație. Mișcarea circulară uniformă

Să presupunem că avem un corp care se mișcă după legea

$$\boldsymbol{r} = R\cos\omega t\ \boldsymbol{i} + R\sin\omega t\ \boldsymbol{j}, \tag{1.20}$$

unde R și ω sunt două constante.

În primul rând observăm că distanța de la corp la originea sistemului de coordonate este constantă

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{R^2\cos^2\omega t + R^2\sin^2\omega t} = R, \tag{1.21}$$

mai mult, observăm că vectorul $\boldsymbol{r}$ are două componente, deci îl putem scrie ca

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}, \tag{1.22}$$

unde:

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos\omega t,\\
y &= R\sin\omega t.
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

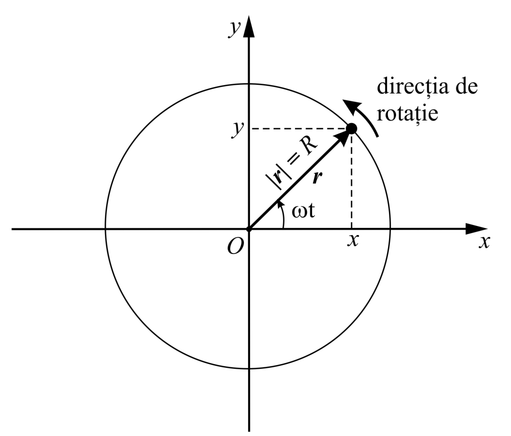


Figura 1.5: Un corp ce execută o mișcare circulară de rază R. Unghiul dintre axa Ox și vectorul $\boldsymbol{r}$ este ωt și se crește uniform în timp.

Observațiile de mai sus ne indică faptul că acest corp execută o mișcare circulară, de rază R, iar unghiul dintre axa Ox și vectorul $\boldsymbol{r}$ este ωt, așa cum este ilustrat în figura 1.5, Ce reprezintă ω? Deoarece ω este o constantă, unghiul ωt se modifică uniform în timp, ceea ce înseamnă că acest corp execută o mișcare circulară uniformă. O să denumim timpul necesar pentru a se efectua o rotație completă perioada de rotație și o să-l notăm cu T. Inversul perioadei, pe care îl numim frecvență și o să-l notăm cu ν, reprezintă numărul de rotații complete pe secundă. De exemplu, dacă perioada de rotație este $T = 0.5$ s atunci corpul execută o mișcare circulară cu frecvența $\nu = 1/T = 2\,\mathrm{s}^{-1}$, adică două rotații complete pe secundă. Pentru o rotație completă unghiul ωt o să fie egal cu $\omega T = 2\pi$, de unde

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{1.24}$$

Aceasta înseamnă că ω ne indică de câte ori pe secundă raza vectoare mătură un unghi complet 2π, cu alte cuvinte, câți radiani pe secundă se rotește corpul. De exemplu, dacă frecvența este de $2\,\mathrm{s}^{-1}$ atunci $\omega = 4\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ (cu rad am notat radian). Din acest motiv, ω se numește *frecvență unghiulară* sau *viteză unghiulară*.

Folosind relațiile 1.11 și 1.23 putem să determinăm componentele vitezei:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\cos\omega t\right) = -R\omega\sin\omega t, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\sin\omega t\right) = R\omega\cos\omega t. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Atunci vectorul viteză o să fie

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = -R\omega\sin\omega t\ \boldsymbol{i} + \ R\omega\cos\omega t\ \boldsymbol{j}. \tag{1.26}$$

Mărimea (modulul) vitezei este dată de

$$|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{R^2\omega^2\cos^2\omega t + R^2\omega^2\sin^2\omega t} = R\omega, \tag{1.27}$$

care se poate observa că are o valoare constantă.

Care este direcția vitezei? Deoarece traiectoria corpului este circulară, iar viteza este întotdeauna tangentă la traiectorie trebuie ca aceasta să fie perpendiculară pe vectorul de poziție. O să arătăm că cei doi vectori $\boldsymbol{r}$ și $\boldsymbol{v}$ sunt perpendiculari calculând produsul scalar dintre aceștia:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} &= \left(R\cos\omega t\ \boldsymbol{i} + R\sin\omega t\ \boldsymbol{j}\right)\cdot\left(-R\omega sin\omega t\ \boldsymbol{i} + \ R\omega cos\omega t\ \boldsymbol{j}\right) \\ &= -R^2\omega\sin\omega t\cos\omega t + R^2\omega\sin\omega t\cos\omega t = 0, \end{aligned} \tag{1.28}$$

unde am ținut cont de faptul că $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1$ iar $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = 0$. Deoarece produsul scalar dintre cei doi vectori este zero, înseamnă că aceștia sunt perpendiculari.

Accelerația în mișcarea circulară uniformă. Am arătat că în mișcarea circulară uniformă mărimea vitezei este constantă. Este atunci accelerația zero?

O să calculăm accelerația pornind de la componentele vitezei:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-R\omega\sin\omega t\right) = -R\omega^2\cos\omega t, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\omega\cos\omega t\right) = -R\omega^2\sin\omega t, \end{aligned} \tag{1.29}$$

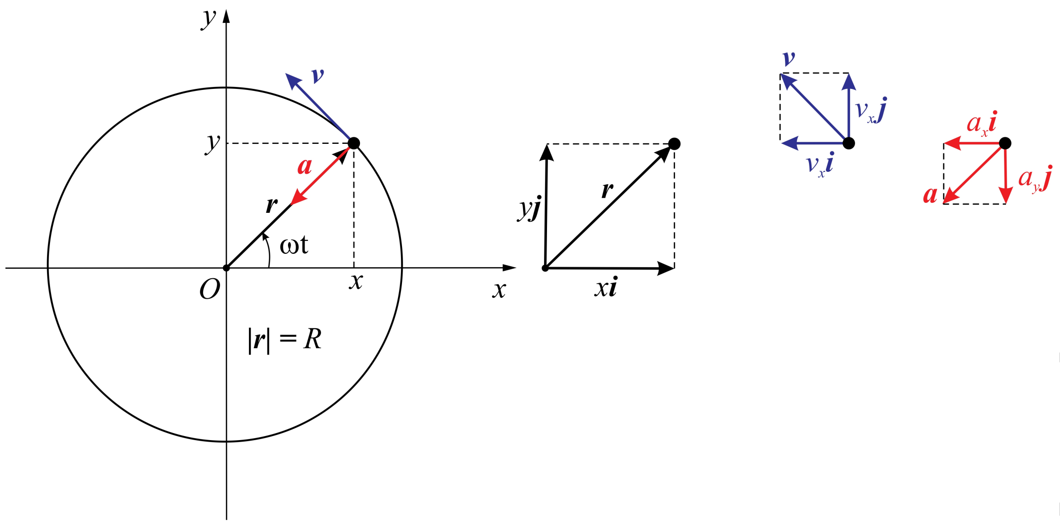


Figura 1.6: Vecorul de poziție, viteză și accelerație, precum și componentele acestora în mișcarea circulară uniformă.

ceea ce ne arată că vectorul accelerație o să fie

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} = -R\omega^2 cos\omega t \ \boldsymbol{i} \ - \ R\omega^2 sin\omega t \ \boldsymbol{j}. \tag{1.30}$$

Observăm că putem să scriem accelerația în funcție de vectorul de poziție

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}, \tag{1.31}$$

adică vectorul accelerație este egal cu vectorul de poziție $\boldsymbol{r}$ înmulțit cu un scalar negativ -ω^2. Aceasta înseamnă, că vectorul accelerație este antiparalel cu vectorul de poziție.

Putem să calculăm modulul accelerației simplu

$$|\boldsymbol{a}| = a = \left|-\omega^2 \boldsymbol{r}\right| = \omega^2 \left|\boldsymbol{r}\right| = \omega^2 R. \tag{1.32}$$

Folosind relația care ne dă modulul vitezei obținem

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}. \tag{1.33}$$

Observăm că accelerația are mărimea constantă și este diferită de zero, iar direcția ei este spre centrul de rotație. Acest tip de accelerație se numește accelerație centripetă (care este îndreptată spre centru). Deoarece nu are componente care să fie paralele cu viteza, accelerația centripetă nu poate modifica mărimea vitezei, în schimb ea modifică direcția vitezei (modifică vectorul viteză). Modificând direcția vitezei tot timpul spre centrul de rotație, accelerația centripetă ne asigură mișcarea circulară a corpului.

În figura 1.6 se pot observa cei trei vectori și componentele lor în momentul când corpul este în punctul indicat.

1.5 Aplicație. Mișcarea circulară neuniformă în coordonate polare

Mișcarea circulară neuniformă (cu viteză care variază în modul) se descrie cel mai ușor în coordonate polare (r, θ). Vectorial, poziția corpului poate fi scrisă ca produsul dintre raza R și un versor al direcției radiale $\boldsymbol{e}_r$ (vă reamintesc că versorul este un vector unitar, adică $|\boldsymbol{e}_r| = 1$).

$$\boldsymbol{r} = |r|\, \boldsymbol{e}_r = R\, \boldsymbol{e}_r. \tag{1.34}$$

Versorul are direcția radială, iar sensul dinspre centru și se rotește odată cu corpul. Deoarece se rotește el nu este constant ci depinde de timp. Astfel, dacă derivăm relația 1.34 în funcție de timp obținem

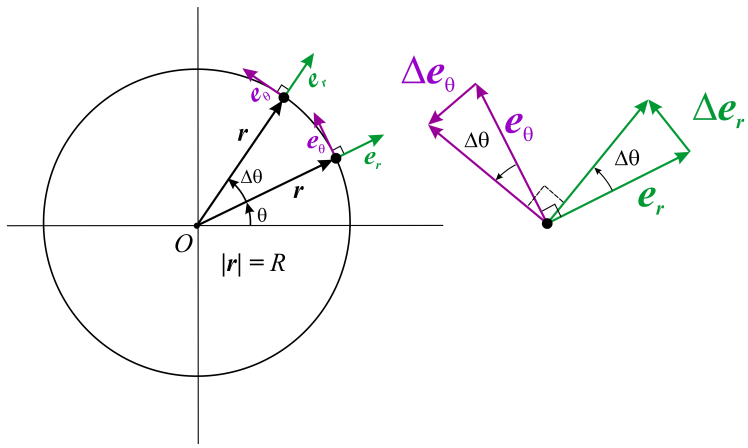


Figura 1.7: Un corp în mișcare circulară neuniformă. Sunt indicați versorii direcților radiale $\boldsymbol{e}_r$ și tangențiale $\boldsymbol{e}_\theta$, precum și variațiile acestora la o rotație cu unghiul $\Delta\theta$.

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = R\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} \tag{1.35}$$

Ca să calculăm $d\boldsymbol{e}_r/dt$ o să facem referire la figura 1.7. Să presupunem că particula se rotește cu unghiul $\Delta\theta$ mic, acestei rotații îi corespunde o variație a lui $\boldsymbol{e}_r$ egală cu $\Delta\boldsymbol{e}_r$. Deoarece unghiul $\Delta\theta$ este mic, modulul $|\Delta\boldsymbol{e}_r|$ este aproximativ egal cu lungimea arcului de cerc descris de raza $\boldsymbol{e}_r$ la rotația cu unghiul $\Delta\theta$ (triunghiul cu laturi verzi din figură). Aceasta înseamnă că

$$|\Delta\boldsymbol{e}_r| / |\boldsymbol{e}_r| \cong \Delta\theta, \tag{1.36}$$

unde am folosit faptul că un unghi în radiani este egal cu lungimea arcului de cerc împărțită la rază.

Deoarece $|\boldsymbol{e}_r| = 1$ relația de mai sus devine

$$|\Delta\boldsymbol{e}_r| \cong \Delta\theta. \tag{1.37}$$

Mai mult, datorită faptului că unghiul $\Delta\theta$ este mic, vectorul $\Delta\boldsymbol{e}_r$ este aproximativ perpendicular pe versorul $\boldsymbol{e}_r$ (triunghiul cu laturi verzi din figură). O să introducem un alt versor $\boldsymbol{e}_\theta$ care este perpendicular pe $\boldsymbol{e}_r$. Astfel putem scrie că

$$\Delta\boldsymbol{e}_r \cong \boldsymbol{e}_\theta \Delta\theta. \tag{1.38}$$

Dacă împărțim cu Δt

$$\frac{\Delta\boldsymbol{e}_r}{\Delta t} \cong \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\boldsymbol{e}_\theta, \tag{1.39}$$

iar dacă trecem la limita $\Delta t \to dt$, relația de mai sus se transformă în:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{1.40}$$

Folosind aceleași argumente putem să arătăm că

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_r. \tag{1.41}$$

Atunci, viteza în coordonate polare o să devină:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = R\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{1.42}$$

Relația 1.42 implică faptul că $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{e}_\theta$, adică că $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r}$ și că este tangentă la traiectorie, fapt la care ne așteptam deja.

În cazul în care mișcarea este uniformă, adică cu viteză unghiulară constantă, putem să scriem că unghiul $\Delta\theta = \omega\Delta t$, unde ω este viteza unghiulară cu care se rotește corpul. În general, dacă mișcarea este neuniformă, relația este valabilă numai în limita $\Delta t \to dt$, adică

$$d\theta = \omega dt, \tag{1.43}$$

de unde $\omega = d\theta/dt$, iar viteza se poate scrie

$$\boldsymbol{v} = R\omega\ \boldsymbol{e}_\theta. \tag{1.44}$$

Observație. *În general ω nu este constantă, ea este constantă numai pentru mișcare uniformă.*

Accelerația o putem calcula astfel:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = R\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta\right) = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{e}_\theta + R\frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{e}_\theta - R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\boldsymbol{e}_r. \tag{1.45}$$

În dezvoltarea de mai sus am folosit regula de derivare a unui produs $\frac{d}{dt}(fg) = f\frac{dg}{dt} + g\frac{df}{dt}$.

Dacă folosim relația $\omega = d\theta/dt$, o să obținem pentru accelerație

$$\boldsymbol{a} = R\frac{d\omega}{dt}\boldsymbol{e}_\theta - R\omega^2\boldsymbol{e}_r. \tag{1.46}$$

Observăm că accelerația are două componente, una radială a_r și una tangențială a_t, astfel că

$$\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_t\boldsymbol{e}_\theta, \tag{1.47}$$

unde mărimea componentelor este dată de:

$$\begin{aligned} a_t &= R\frac{d\omega}{dt}, \\ a_r &= R\omega^2. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Componenta pe direcția radială este perpendiculară pe viteză și nu este altceva decât accelerația centripetă, ea este responsabilă de variația direcției vectorului viteză și asigură mișcarea circulară. Componenta pe direcția tangențială este paralelă cu viteza și produce variația modulului vitezei.

Dacă avem mișcarea de rotație uniformă, atunci $\omega = ct.$, iar ecuațiile care ne dau viteza și accelerația devin:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= R\omega\ \boldsymbol{e}_\theta\ , \\ \boldsymbol{a} &= -R\omega^2\boldsymbol{e}_r, \end{aligned} \tag{1.49}$$

relații care sunt echivalente cu cele obținute în coordonate carteziene, dar mult mai simple.

Exemplul 1.2. O mașină de curse se mișcă pe un circuit de formă circulară de rază $R = 300$m, cu viteza care crește în timp după legea $v = c\sqrt{t}$, unde $c = 14$ ms$^{-3/2}$. (a) Determinați componentele accelerației mașinii. (b) Accelerația radială maximă este de $3.2g$, peste această accelerație mașina derapează (alunecă pe asfalt spre exteriorul circuitului), care este atunci viteza maximă cu care se poate deplasa mașina.

(a) Modulul lui vitezei este $v = R\omega$, de aici putem să obținem viteza unghiulară $\omega = \frac{v}{R} = \frac{c}{R}\sqrt{t}$. O să folosim această relație pentru a determina componentele accelerației:

$$a_t = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{R}\sqrt{t}\right) = \frac{c}{2}t^{-1/2} = 7t^{-1/2} \ [\mathrm{m/s^2}],$$
$$a_r = R\omega^2 = R\left(\frac{c}{R}\sqrt{t}\right)^2 = \frac{c^2}{R}t = 0.653\ t \ [\mathrm{m/s^2}],$$

(b) Accelerația radială maximă de $3.2g$ este egală cu $a_{r,max} = 3.2 \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} = 31.39\ \mathrm{m/s^2}$ și se atinge după t_{max} secunde.

Momentul t_{max} se poate determina folosind relația

$$a_{r.max} = 0.653\ t_{max} \implies t_{max} = 48.07\ s$$

Viteza mașinii în acest moment este de $v_{max} = c\sqrt{t_{max}} = 14\sqrt{48.07} = 97.06\,\mathrm{m/s} = 349\,\mathrm{km/h}$

1.6 Aplicație. Mișcarea unui proiectil în câmp gravitațional

O să discutăm în continuare despre mișcarea unui corp care este aruncat în câmp gravitațional de la o anumită înălțime, cu o viteză orizontală (figura 1.8). Ne propunem să găsim legea vitezei și legea de mișcare, ecuația traiectoriei și apoi să determinăm timpul de zbor și bătaia (distanța pe orizontală străbătută de corp). Pentru simplitate o să ignorăm frecarea cu aerul. În capitolele următoare o să considerăm cazuri mai complexe în care nu o să mai ignorăm acest aspect.

Știm că un corp care se mișcă liber în apropierea suprafeței pământului are întotdeauna accelerația egală cu accelerația gravitațională (g) și că aceasta este orientată vertical în jos.

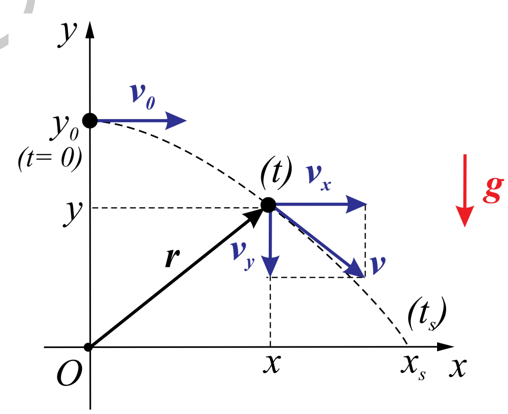


Figura 1.8: Un corp aruncat în câmp gravitațional de la înălțimea y_0, cu viteza orizontală v_0.

Mișcarea se realizează într-un plan, deci mărimile cinematice au două componente pe Ox și pe Oy. Ca regulă generală, în astfel de aplicații o să plecăm de la accelerație. Componentele accelerației sunt:

$$\begin{aligned} a_x &= 0, \\ a_y &= -g. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Observați că pe direcția Ox accelerația este zero. Nu există niciun agent extern care să producă accelerație pe această direcție.

Deoarece pe ambele direcții accelerația este constantă legea vitezei se scrie în formă generală:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + a_x t, \\ v_y &= v_{y0} + a_y t. \end{aligned} \tag{1.51}$$

aici v_{x0} este viteza inițială pe direcția Ox, adică v_0, iar v_{y0} este viteza inițială pe direcția Oy. Observăm că aceasta din urmă este zero deoarece corpul este aruncat cu viteză orizontală (nu există componentă a vitezei inițiale pe direcția verticală).

Particularizăm legea vitezei și obținem:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0, \\ v_y &= -gt. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Această lege ne indică faptul că deplasarea se realizează cu viteză constantă pe Ox, iar pe Oy cu viteză care crește liniar în jos odată cu trecerea timpului.

Legea de mișcare se scrie în formă generală:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \\ y &= y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2, \end{aligned} \tag{1.53}$$

particularizăm pentru cazul nostru și obținem:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t, \\ y &= y_0 - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Observăm că legea de mișcare este liniară pe Ox și parabolică pe Oy.

În figura 1.9 sunt reprezentate legile vitezei 1.52 și legile de mișcare 1.54 pentru condițiile inițiale $y_0 = 80\,\mathrm{m}$ și $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ și considerând $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Se poate observa ușor că viteza pe direcția Ox rămâne constantă pe parcursul mișcării, iar pe Oy crește liniar cu timpul în sens negativ. De asemenea, poziția pe orizontală crește liniar cu timpul, iar pe verticală scade parabolic. O să folosim acest exemplu numeric pentru a determina pe lângă legile vitezei și de mișcare și anumite mărimi caracteristice, cum este timpul de zbor, bătaia sau ecuația traiectoriei.

Observație.*Mișcările pe cele două axe sunt absolut independente una de cealaltă. Ele nu se influențează reciproc.*

Pentru a determina *timpul de zbor* observăm că la momentul t_s corpul se află pe sol, adică $y(t_s) = 0$, de unde

$$y_0 - \frac{1}{2} g t_s^2 = 0 \Longrightarrow t_s = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}. \tag{1.55}$$

Observăm că avem două soluții una pozitivă $t_s = 4\,\mathrm{s}$ și una negativă. Soluția negativă nu are sens fizic deoarece mișcarea a început la momentul $t = 0\,\mathrm{s}$.

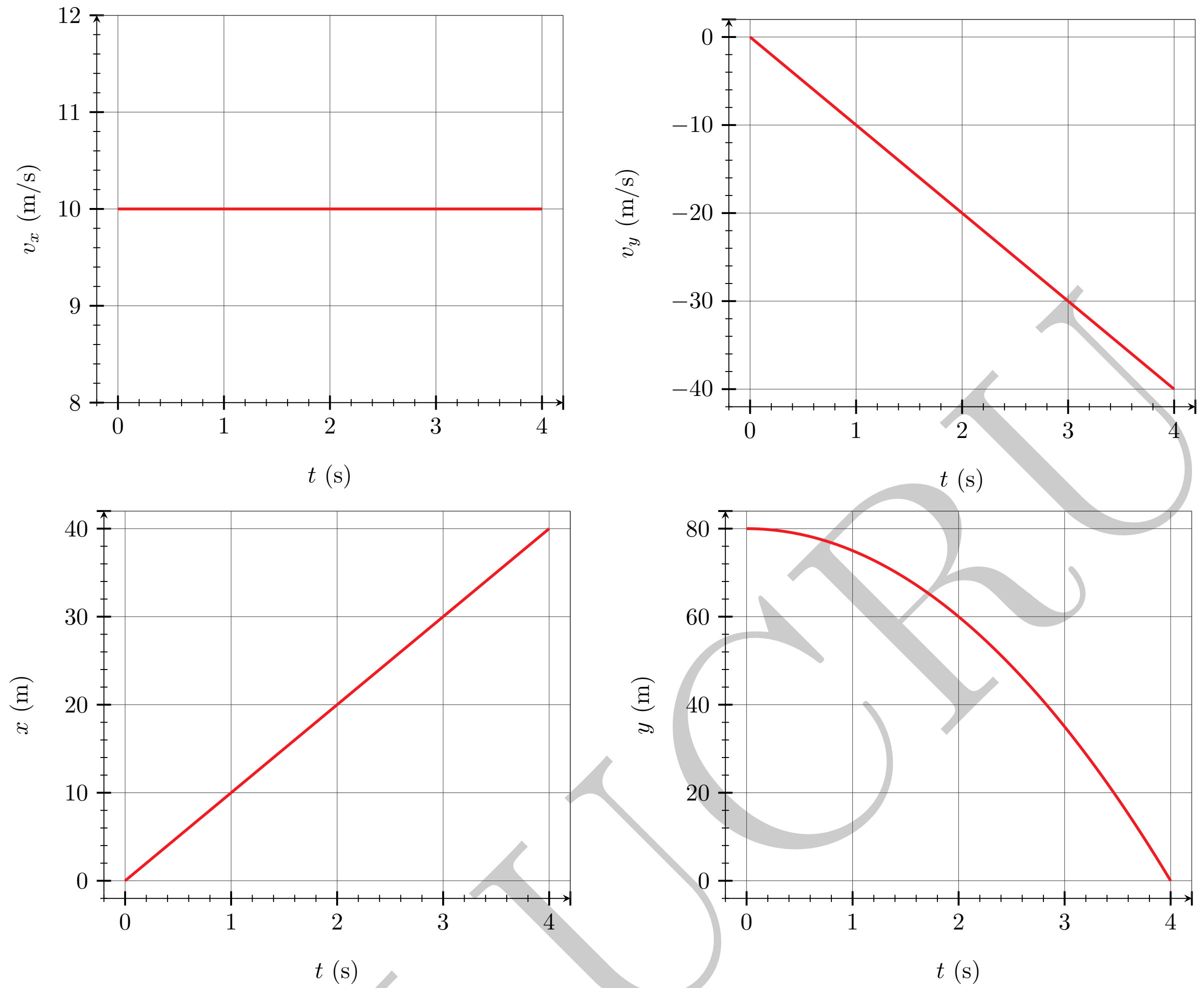


Figura 1.9: Reprezentare grafică a legilor vitezei 1.52 și legilor de mișcare 1.54 pentru condițiile inițiale $y_0 = 80\,\mathrm{m}$ și $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ și considerând $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Bătaia, adică distanța pe orizontală străbătută de corp până să atingă solul este

$$x_s = x\,(t_s) = v_0 t_s = 40\,\mathrm{s}. \tag{1.56}$$

În general, *ecuația traiectoriei* se determină eliminând timpul din legea de mișcare. Astfel, scriem legea de mișcare scrisă pe cele două axe:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t, \\ y &= y_0 - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Din prima ecuație scoatem timpul $t = x/v_0$ și înlocuim în a doua ecuație ca să obținem

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + y_0, \tag{1.58}$$

care reprezintă ecuația unei parabole.

Exerciții și probleme

1.1. Estimați cât este accelerația Lunii în mișcarea acesteia în jurul Pământului. (*Pentru rezolvarea acestei probleme căutați care este distanța medie dintre Pământ și Lună și perioada medie de rotație a Lunii în jurul Pământului.*) Cât este raportul dintr accelerația Lunii și accelerația gravitațională la nivelul suprafeței Pământului? Cât este raportul dintre raza Pământului și distanța medie dintre Pamând și Lună ? Oare ce ați putea intui din aceste rezultate?

1.2. Estimați de câte ori ar trebui să crească viteza de rotație a Pământului pentru ca un corp aflat la ecuator să aibă o accelerație centripetă egală cu accelerația gravitațională g,

1.3. Un corp se află în repaus în vârful unei emisfere de rază R. Care este viteza minimă orizontală pe care trebuie să o imprimăm corpului pentru ca acesta să părăsească emisfera? (*)

1.4. Găsiți viteza și accelerația punctului material a cărui poziție este descrisă de următorii vectori de poziție (t = timp în secunde):

(a) $\boldsymbol{r}(t) = 16t\boldsymbol{i} + 25t^2\boldsymbol{j} + 33\boldsymbol{k}$ [m].

(b) $\boldsymbol{r}(t) = 10\sin(15t)\boldsymbol{i} + 35t\boldsymbol{j} + e^{3t}\boldsymbol{k}$ [m].

1.5. O mașină de curse se mișcă pe o traiectorie circulară de rază b. Viteza mașinii depinde de timp după legea $v = ct$, unde c este o constantă pozitivă. Arătați că unghiul dintre accelerație și viteză este de 45° la momentul $\tau = \sqrt{b/c}$. (*Indicație: În acel moment componentele normale și tangențiale ale accelerației au aceeași mărime*).

1.6. O bilă de mici dimensiuni este legată cu un elastic lung și învârtită astfel încât aceasta se mișcă pe o traiectorie eliptică dată de ecuația

$$\boldsymbol{r}\,(t) = \boldsymbol{i}b\cos\omega t + \boldsymbol{j}2b\sin\omega t,$$

unde b și ω sunt constante. Determinați viteza mingii în funcție de timp. Determinați momentele de timp la care mingea este la distanța minimă, respectiv maximă față de origine. Care este viteza mingii la aceste momente de timp. [R: $v = 2b\omega$ și $v = b\omega$].

1.7. Un țânțar enervant se mișcă pe o traiectorie elicoidală dată de

$$\boldsymbol{r}\,(t) = \boldsymbol{i}b\sin\omega t + \boldsymbol{j}b\cos\omega t + \boldsymbol{k}ct^2,$$

unde b, c și ω sunt constante. Arătați că mărimea accelerației țânțarului este constantă.

1.8. O albină zboară pe o traiectorie sub formă de spirală, dată în coordonate polare de

$$\boldsymbol{r}(t) = be^{kt}\boldsymbol{e}_r + ct\boldsymbol{e}_\theta,$$

unde b, c și k sunt constante pozitive. Arătați că unghiul dintre vectorul viteză și vectorul accelerație rămâne constant. (*Indicație: Calculați* $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}/va$).

1.9. O particulă se mișcă pe o traiectorie dată de vectorul de poziție

$$\boldsymbol{r}(t) = (1 - e^{-kt})\boldsymbol{i} + e^{kt}\boldsymbol{j},$$

unde k este o constantă pozitivă. Găsiți viteza și accelerația particulei. Care este traiectoria acesteia?

1.10. În cazul mișcării circulare neuniforme, pentru determinarea ecuațiilor care ne dau viteza și accelerația am plecat de la ecuația

$$\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|\, \boldsymbol{e}_r = R\boldsymbol{e}_r,$$

în care am considerat modulul vectorului $|\boldsymbol{r}| = R$ ca fiind constant. În general R nu trebuie să fie constant, el poate varia în timp, ca de exemplu în cazul mișcări unui corp pe o traiectorie în formă de spirală. Determinați ecuațiile ce ne dau viteza și accelerația considerând mișcare circulară neuniformă și R variabil în timp. (*)

1.11. Arătați că pentru o particulă care se mișcă pe o traiectorie oarecare componenta tangențială a accelerației este

$$a_t = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v},$$

iar componenta normală este atunci

$$a_n = \left(a^2 - a_t^2\right)^{1/2} = \left[a^2 - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})^2}{v^2}\right]^{1/2}.$$

Folosiți aceste rezultate ca să găsiți componenta normală și tangențială a accelerației țintarului de la problema precedentă. (*)

1.12. În cazul exemplului din figura 1.9, determinați unghiul pe care îl face viteza cu direcția orizontală, chiar înainte de momentul în care corpul ajunge pe sol.

1.13. Un avion lasă să cadă un pachet pentru niște exploratori. Dacă avionul are o viteză orizontală de 40 m/s și se află la o înălțime de 100 m deasupra Pământului, să se determine (pentru simplitate ignorați frecarea cu aerul): (a) timpul de zbor al pachetului; (b) distanța la care cade pe Pământ, relativ la punctul din care a fost aruncat; (c) viteza acestuia înainte să atingă solul; (d) ecuația traiectoriei pachetului. [R: 4.52 s; 181 m; $v_x = 40$ m/s, $v_y = 44.3$ m/s].

1.14. Un jucător de fotbal lovește mingea sub un unghi de 35° față de orizontală, cu viteza inițială de 20 m/s. Să se determine (pentru simplitate ignorați frecarea cu aerul): (a) momentul de timp la care mingea ajunge în punctul cel mai înalt; (b) care este înălțimea maximă la care ajunge mingea; (c) care este deplasarea pe orizontală a mingii (bătaia) și care este timpul de zbor al mingii; (d) Care este viteza mingii chiar înainte să atingă solul.

1.15. Viteza la ieșirea din țeava unei arme este de 3×10^3 cm/s. Un om trage un foc în fiecare secundă vertical în sus (pentru simplitate ignorați frecarea cu aerul). (a) Câte gloanțe sunt în aer simultan? (b) La ce înălțime față de sol se gloanțele în cădere se întâlnesc cu cele în urcare?

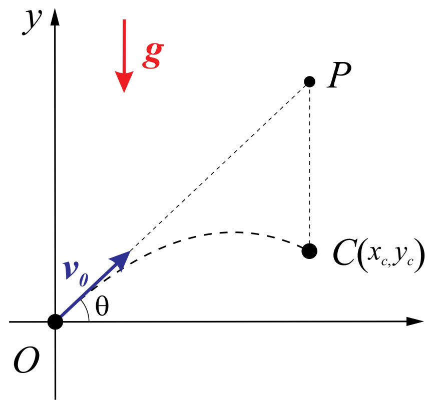
1.16. Arătați că înălțimea maximă atinsă de un proiectil lansat sub un unghi θ cu viteza v_0 este

$$y_{nax} = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g}.$$

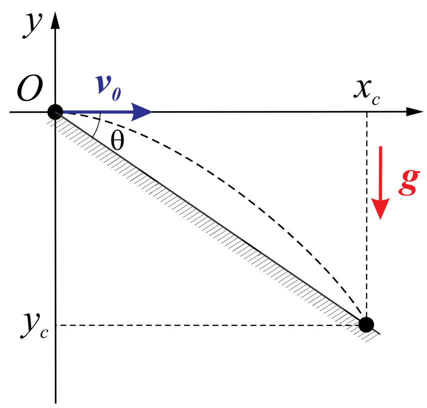
1.17. Arătați că bătaia maximă atinsă de un proiectil lansat sub un unghi θ_0 cu viteza v_0 se obține pentru $\theta = 45°$.

1.18. O demonstrație familiară în cursurile de fizică pentru anul întâi este ilustrată în figura de mai jos. Un proiectil este lansat dintr-o armă aflată în punctul O spre un obiect țintă situat în

P. Obiectul țintă este eliberat în același moment în care proiectilul este tras. Proiectilul lovește obiectul în cădere în punctul C, așa cum este arătat. Demonstrați că această ciocnire în aer va avea loc indiferent de viteza inițială a proiectilului.



1.19. Determinați timpul de zbor, componenta verticală a vitezei, precum și coordonatele punctului în care corpul ating rampa, dacă viteza inițială este de 25 m/s, iar unghiul $\theta = 35^\circ$ (pentru simplitate ignorați frecarea cu aerul). [R: 3.57 s; v_y = -35 m/s; (89.3 m, -62.5 m)].



1.20. Arătați că un proiectil lansat dintr-un turn de la înălțimea h cu viteza v_0 are o bătaie maximă dacă este lansat sub unghiul față de orizontală

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right).$$

2 Dinamica

2.1 Legile mișcării ale lui Newton (principiile dinamicii)

L1: Principiul inerției. Un corp rămâne în repaus sau în mișcare rectilinie (în linie dreaptă) și uniformă (cu viteză constantă) atâta timp cât asupra lui nu acționează nicio forță. Prima parte a legii, adică un corp rămâne în repaus dacă asupra lui nu acționează nici un agent extern (forță), nu este surprinzătoare pentru nimeni. Experiența ne arată că de la sine corpurile nu se pun în mișcare, pentru a pune un corp în mișcare trebuie să avem un agent extern care să acționeze asupra acestuia. A doua parte a legii, adică un corp se mișcă în linie dreaptă și cu viteză constantă dacă asupra lui nu acționează niciun agent extern (forță), este contrară experienței noastre de zi cu zi. Dacă punem un corp în mișcare și îl lăsăm liber el nu se va mișca la infinit, la un moment dat se va opri. Cu toții știm acum că motivul pentru care corpurile se opresc într-un final este că întotdeauna avem forțe de frecare sau un agent extern care să ducă la oprirea corpului. Marea revelație a lui Galileo Galilei a fost să constate că în absența frecărilor un corp în mișcare nu se va opri niciodată. Această constatarea a fost făcută în urma unor experimente cu plane înclinate.

Galileo a observat că, dacă avem un plan înclinat simetric și foarte bine lustruit și lăsăm să alunece un corp de la o anumită înălțime, acesta va urca pe partea simetrică a planului până la aceeași înălțime, ca în figura 2.1. Ce se va întâmpla dacă partea din dreapta a planului înclinat este orizontală? În cazul acesta, pentru a urca până la aceeași înălțime corpul trebuie să se deplaseze la infinit. Aceasta înseamnă că dacă putem să anulăm efectul agenților externi, atunci mișcarea va continua până la infinit.

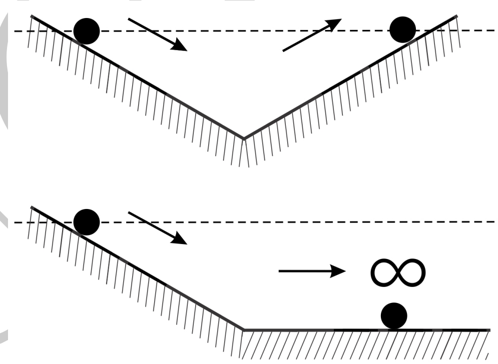


Figura 2.1: Pe un plan înclinat simetric un corp va urca până la aceeași înălțime. Dacă partea din dreapta a planului înclinat este orizontală, pentru a urca până la aceeași înălțime corpul trebuie să se deplaseze până la infinit.

În zilele noastre avem observații experimentale clare care indică faptul că acest principiu este valid. În figura 2.2 puteți să observați traiectoriile unor sonde spațiale lansate în anii 1970 de către NASA și care au părăsit deja sistemul solar. Sondele au fost lansate folosind rachete și apoi au fost lăsate libere și nu au motoare. În apropierea planetelor traiectoriile sondelor nu sunt rectilinii deoarece sunt influențate de câmpul gravitațional al acestora și al soarelui. Pe măsura ce s-au îndepărtat de centru sistemului nostru solar traiectoriile au devenit linii drepte și continuă să se deplaseze.

Întrebarea 4-1. Se vor deplasa aceste sonde până la sfârșitul sau la capătul universului? Cu alte cuvinte se vor deplasa la infinit? Atenție, probabilitatea să se ciocnească cu un asteroid, o stea sau o planetă este atât de mică încât se poate considera zero.

Principiul inerției, ca de altfel toate legile lui Newton, nu este valabil în orice condiții. Să luăm un exemplu concret, să presupunem că vă aflați într-un avion pe pista de decolare (sau într-un tren chiar înainte să plece din gară, însă pentru tren este mai puțin evident) și lăsați o sticlă de apă

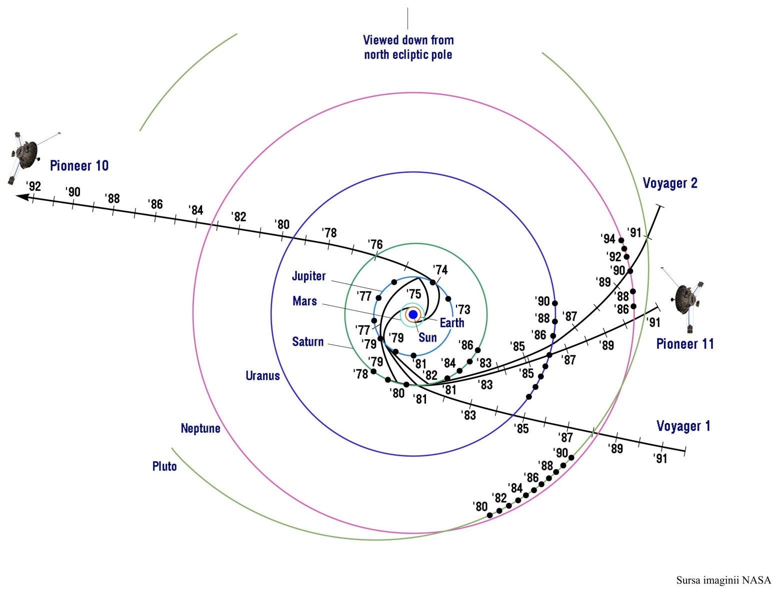


Figura 2.2: Traiectoriile unor sonde spațiale lansate în anii 1970 de către NASA. În apropierea planetelor traiectoriile sondelor nu sunt rectilinii deoarece sunt influențate de câmpul gravitațional al acestora și al soarelui. Pe măsura ce s-au îndepărtat de centru sistemului nostru solar traiectoriile au devenit linii drepte. Sondele continuă să se deplaseze.

pe jos. În momentul când avionul începe să se deplaseze pe pistă pentru a decola o să observați că sticla de apă se va rostogoli spre partea din spate a avionului. Ea se va deplasa de la sine, nu există niciun un agent extern care să împingă sticla spre partea din spate a avionului. Când avionul zboară cu viteză constantă puteți să puneți o sticlă de apă pe jos și ea o să rămână pe loc, ea nu se va mișca de la sine. Acestea sunt două cazuri în care avionul este fie un sistem de referință neinerțial (adică în care legile lui Newton nu sunt valabile), fie în cazul în care avionul este un sistem de referință inerțial (adică în care legile lui Newton sunt valabile). Care este diferența dintre aceste două cazuri? În primul caz avionul se mișcă cu accelerație, iar în al doilea avionul se mișcă cu viteză constantă.

Sistemele de referință în care legile lui Newton sunt valabile se numesc sisteme inerțiale, ele sunt fie în repaus fie în mișcare cu viteză constantă.

O altă formulare a principiului inerției este că repausul și mișcarea cu viteză constantă și în linie dreaptă sunt echivalente, în sensul că nu trebuie să avem un agent extern care să mențină corpul în repaus sau în mișcare cu viteză constantă și în linie dreaptă. Toate observațiile noastre indică faptul că aceasta este o proprietate intrinsecă a universului în care trăim.

L2: Principiul fundamental. Dacă un corp are accelerație atunci trebuie să avem o forță care acționează asupra lui și relația dintre forță și accelerație este

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{2.1}$$

Știm că masa se măsoară în kg iar accelerația în $\mathrm{m/s^2}$, deci forța se măsoară în $\mathrm{kg\,m/s^2}$ care se notează cu N și se numește newton. Acest principiu ne spune că pentru a accelera un corp trebuie să avem un agent extern cu care corpul să interacționeze.

În ecuația 2.1 avem trei termeni:

- Forța este o măsură a interacțiunii dintre corpuri (de exemplu un corp este împins sau tras cu o forță) sau a interacțiunii dintre corpuri și câmpuri (de exemplu greutatea unui corp este o forță datorată interacțiunii dintre corp și câmpul gravitațional produs de Pământ).
- Masa este o proprietate intrinsecă corpului asupra căruia acționează forța.
- Accelerația este o mărime cinematică pe care am definit-o în capitolele anterioare.

În continuare o să vedem cum putem să folosim această lege pentru a defini masa și a măsura forța.

Cum putem să măsurăm accelerația?

Din definiția accelerației știm că aceasta reprezintă variația vitezei în raport cu timpul. Deci, trebuie să măsurăm viteza la două momente de timp și apoi să împărțim variația vitezei la intervalul de timp. Dar ca să măsurăm viteza trebuie să măsurăm poziția corpului la două momente de timp și apoi trebuie să împărțim variația poziției la intervalul de timp. Aceasta înseamnă că trebuie să efectuăm trei măsurători de poziție. Cu notațiile din figura 2.3:

$$v_1 = \frac{x_1 - x}{t_1 - t},\ v_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1},\ \Longrightarrow\ a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t}. \tag{2.2}$$

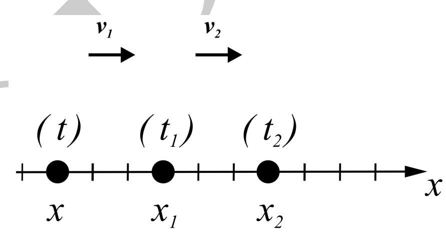


Figura 2.3: Pentru a determina accelerația unui corp trebuie să efectuăm trei măsurători de poziție la trei momente diferite.

Bineînțeles că aceste valori pentru viteză și accelerație sunt valori medii. Ca să obținem valoarea instantanee a accelerației la momentul t trebuie ca intervalele de timp $t_1 - t \to 0$ și $t_2 - t_1 \to 0$. În practică acesta se realizează prin măsurători succesive la intervale de timp cât mai scurte posibil.

Cum putem să măsurăm masa?

Pentru a putea să măsurăm masa în primul rând trebuie să avem acces la etalonul de masă. Să presupunem că avem etalonul de 1 kg și masa necunoscută m. Am putea să folosim o balanță și să comparăm masa m cu etalonul. Dar această metodă funcționează numai în câmpul gravitațional terestru, deoarece cu ajutorul balanței am compara forțele de greutate. Ne trebuie o metodă mai generală, independentă de greutate. Să presupunem că suntem în imponderabilitate pe stația spațială internațională. Am putea să folosim două resorturi identice de care să agățăm corpul și etalonul și să le alungim cu aceeași valoare. Deoarece sunt identice resorturile o să producă aceeași forță asupra corpurilor. O să lăsăm corpurile libere și o să măsurăm accelerațiile $a_{1\mathrm{kg}}$ și a_m cu care se vor mișca. Folosind $F = ma$ putem scrie

$$a_{1\mathrm{kg}} = \frac{F}{1\ \mathrm{kg}} \tag{2.3}$$

și

$$a_m = \frac{F}{m}, \tag{2.4}$$

de unde

$$m = \frac{a_{1\text{kg}}}{a_m}\,(1\ \text{kg})\,. \qquad (2.5)$$

Ceea ce înseamnă că masa corpului este numeric egală cu raportul dintre accelerația etalonului de 1 kg și accelerația corpului, dacă sunt supuse la aceeași forță. Altfel spus, masa este o măsură a cât de mult se opune corpul la acțiunea forței, cât de mult se opune să fie accelerat. În acest sens, zicem că masa este o măsură a inerției.

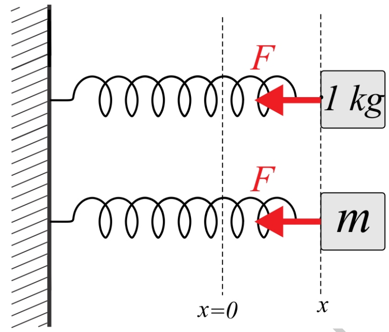


Figura 2.4: Două resorturi identice care produc aceeași forță asupra etalonului de 1 kg și asupra unui corp de masă necunoscută m.

Cum putem să măsurăm forța?

Cum putem să măsurăm forța produsă de un resort în momentul alungirii acestuia? Cel mai simplu este să luăm etalonul de 1 kg să-l agățăm de resort, să alungim (sau să comprimăm) resortul cu x și apoi să dăm drumul corpului să se miște și imediat să măsurăm accelerația. În acest fel, folosind $F = a(1\ \text{kg})$ vedem că forța este numeric egală cu accelerația etalonului de 1 kg.

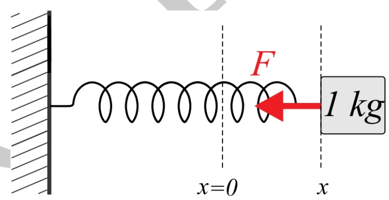


Figura 2.5: Forța produsă de un resort în momentul alungirii acestuia determinată prin măsurarea accelerației produse asupra etalonului de 1 kg.

Într-un astfel de experiment, pentru alungiri sau comprimări nu prea mari, o să observăm o dependență liniară între forță și alungire

$$F = -kx, \qquad (2.6)$$

ecuație care se mai numește și legea lui Hooke. Aici, k este o mărime care se numește constanta resortului și este caracteristică pentru un anumit resort, x reprezintă modificarea lungimii resortului prin alungire sau comprimare, iar semnul $'-'$ ne arată că forța are sens invers deformării resortului. Dependența liniară dintre forța elastică și alungire este reprezentată în imaginea 2.6. În relația de mai sus $x = 0$ corespunde resortului nedeformat, $x < 0$ înseamnă că resortul este comprimat, iar $x > 0$ înseamnă că resortul este alungit.

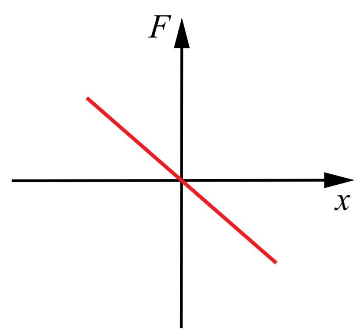


Figura 2.6: Dependența liniară dintre forța elastică și deformarea unui resort.

Observăm că avem două relații pentru forța produsă de un resort $F = ma$ și $F = -kx$, de ce avem două relații și care este însemnătatea lor? În primul rând $F = -kx$ este o relație valabilă numai pentru un resort care nu este deformat prea mult. *Relația $F = ma$ este general valabilă și nu depinde de natura forței.* Această relație ne face legătura între cauză și efect, cauza este forța și efectul ei este să producă accelerație.

Folosind $F = ma$ putem să calculăm accelerația unui corp atașat de un resort deformat cu x:

$$\begin{cases} F = -kx \\ F = ma, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{k}{m}x. \tag{2.7}$$

Un alt exemplu ar fi cazul corpurilor aflate în apropierea suprafeței pământului. În acest caz putem să scriem forța de greutate $F_g = -mg$, semnul $'-'$ ne arată că forța este orientată vertical în jos. Folosind $F = ma$ putem să calculăm accelerația unui corp asupra căruia acționează forța de greutate:

$$\begin{cases} F = -mg \\ F = ma, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = -g. \tag{2.8}$$

Este foarte important să observați că *accelerația produsă de forța de greutate nu depinde de masa corpului*, ea este constantă pentru toate corpurile, indiferent de masa lor.

L3: Principiul acțiunii și reacțiunii. Două corpuri care interacționează exercită unul asupra celuilalt forțe egale și de sens opus. Toate forțele se supun acestui principiu, de exemplu, pământul ne atrage cu o forță care este egală cu greutatea noastră, însă și noi îl atragem cu o forță de mărime egală. Bineînțeles, datorită faptului că Pământul are o masă extrem de mare relativ la masa noastră, accelerația Pământului produsă de forța de atracție dintre noi și Pământ este practic zero. Însă, de exemplu, acesta nu este cazul forței de atracție dintre Pământ și Lună. Forța cu care Pământul atrage Luna o ține pe aceasta în mișcare pe orbită în jurul Pământului, iar forța cu care Luna atrage Pământul produce un efect foarte vizibil asupra Pământului, și anume mareele.

Matematic această lege se scrie

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}, \tag{2.9}$$

unde prin $\boldsymbol{F}_{12}$ înțelegem forța cu care corpul 1 acționează asupra corpului 2, iar prin $\boldsymbol{F}_{21}$ înțelegem forța cu care corpul 2 acționează asupra corpului 1.

Conservarea mișcării (impulsului)

Să presupunem că avem un sistem izolat format din două corpuri de mase m_1 și m_2 care interacționează. Corpul 1 acționează asupra corpului 2 cu forța $\boldsymbol{F}_{12}$, iar corpul 2 acționează asupra corpului 1 cu forța $\boldsymbol{F}_{21}$. Sub acțiunea acestor forțe, la un moment dat, corpul 1 are viteza $\boldsymbol{v}_1$, iar corpul 2 are viteza $\boldsymbol{v}_2$. Folosind principiul fundamental 2.1 și definiția accelerației $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$, putem scrie:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{21} = m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} \\ \boldsymbol{F}_{12} = m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt}, \end{cases} \tag{2.10}$$

Conform principiului acțiunii și reacțiunii $\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0$, de unde

$$m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = 0. \tag{2.11}$$

Dacă masele sunt constante atunci pot să intre în derivate

$$\frac{d}{dt}(m_1 \boldsymbol{v}_1) + \frac{d}{dt}(m_2 \boldsymbol{v}_2) = 0, \tag{2.12}$$

grupând termenii o să obținem

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2\right) = 0, \tag{2.13}$$

ceea ce este adevărat dacă suma din paranteză este constantă în timp, adică

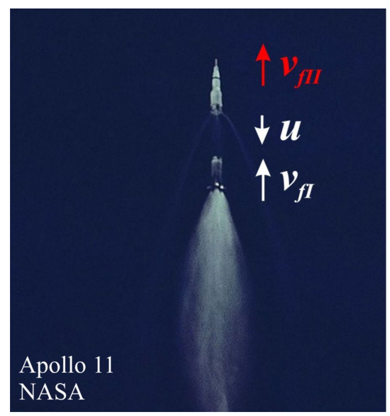
$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = ct. \tag{2.14}$$

Cantitatea mv se notează de obicei cu p și se numește *impuls* sau *cantitate de mișcare*. Cu această notație putem scrie

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = ct. \tag{2.15}$$

Cu alte cuvinte, pentru un sistem izolat format din două corpuri care interacționează *cantitatea totală de mișcare se conservă (sau impulsul total se conservă).* Acest rezultat este un caz particular al unui principiu mai general care spune că impulsul total al oricărui sistem izolat (asupra căruia nu acționează forțe externe) se conservă (rămâne constant).

Exemplul 2.1. O rachetă, în două stagii, de masă M , se deplasează vertical în sus cu viteza de $v_i = 20$ km/s relativ la suprafața Pământului. Aceasta eliberează stagiul I, care are masa $0.2M$, cu viteza relativă $u = 5$ m/s. Care este viteza stagiului II imediat după eliberarea stagiului I ?



O să presupunem că racheta este suficient de departe de Pământ ca să putem ignora forța de greutate. Aceasta înseamnă că cele două stagii ale rachetei formează un sistem izolat.

Legea conservării impulsului se scrie

$$\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_f,$$

unde $\boldsymbol{P}_i$ este impulsul total înainte de desprinderea stagiului I, iar $\boldsymbol{P}_f$ este impulsul total după desprinderea stagiului. Deoarece avem mișcare pe o singură direcție, putem renunța la notația vectorială. Atunci

$$P_i = Mv_i,$$

iar

$$P_f = 0.8Mv_{fII} + 0.2Mv_{fI},$$

de unde

$$v_i = 0.8v_{fII} + 0.2v_{fI}.$$

Viteza relativă cu care este eliberat stagiul I este diferența de viteze dintre cele două stagii, adică

$$u = v_{fII} - v_{fI} \implies v_{fI} = v_{fII} - u,$$

dacă înlocuim în relația de mai sus o să obținem

$$v_{fII} = v_i + 0.2u = 21 \text{ km/s}$$

2.2 Cum aplicăm L2? O problemă tipică de mecanică

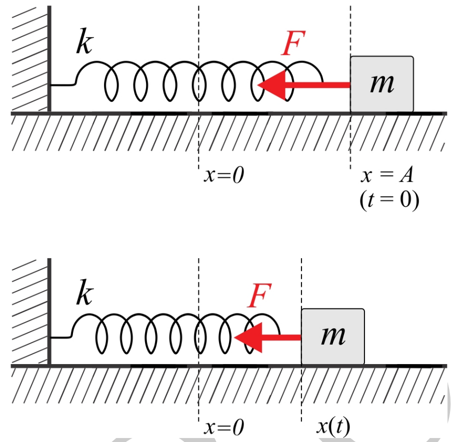


Figura 2.7: Un corp atașat de un resort deformat inițial cu A asupra căruia acționează forța elastică.

Scopul științelor în general și a fizicii în particular este să prezică evoluția unui sistem pornind de la o stare prezentă cunoscută și cunoscând interacțiunile din sistem. În particular, scopul mecanicii este să prezică mișcarea unui sistem fizic cunoscând starea prezentă și forțele din sistem. Să considerăm o problemă tipică de mecanică. Să presupunem că avem un resort de constantă k de care este atașat un corp de masă m și care se află pe o masă orizontală fără frecare. Resortul este alungit inițial cu A și apoi este lăsat liber, așa cum este ilustrat în figura 2.7. Ceea ce dorim este să determinăm cum va evolua sistemul, cu alte cuvinte cum se va mișca corpul în timp. Sistemul nostru este format din resort și corp. Deoarece nu există frecare între corp și masă, forța de greutate nu afectează mișcarea sistemului.

Am spus că trebuie să cunoaștem starea prezentă a sistemului pentru a prezice evoluția lui. Informația legată de starea prezentă sau de starea inițială a sistemului, este că resortul este alungit inițial cu A. Cunoașterea evoluției sistemului implică să cunoaștem unde este corpul la orice moment de timp t.

Evoluția sistemului este întotdeauna dată de L2:

$$F = ma. \tag{2.16}$$

Pentru a aplica această lege trebuie să cunoaștem forțele din sistem. Forța care guvernează mișcarea este forța elastică, dată de legea lui Hooke

$$F = -kx. \tag{2.17}$$

Egalăm aceste două relații

$$ma = -kx, \tag{2.18}$$

de unde

$$a + \frac{k}{m}x = 0. \tag{2.19}$$

Folosind definiția accelerației ($a = d^2x/dt^2$) obținem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{2.20}$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul II. *Rezolvarea ei implică a găsi o funcție $x = x(t)$ care satisface ecuația.* Adică, o funcție pe care dacă o derivăm de două ori și o adunăm cu ea însăși înmulțită cu k/m obținem zero. Ceea ce înseamnă că prin rezolvarea ecuației diferențiale o să găsim funcția care ne va da legea de mișcare a corpului, adică $x(t)$ la orice moment de timp t.

În general, ecuațiile diferențiale sunt ecuații care implică derivatele unei funcții (ne dau informații despre relațiile dintre derivatele funcției și funcție) și care au ca soluție funcția însăși (soluția unei ecuații diferențiale nu este un număr, ci este o funcție). Cele mai multe ecuații diferențiale nu au soluții analitice (adică nu putem să scriem soluția simbolic), ci numai numerice (soluția este o funcție care este dată printr-un tabel de numere $[t, x(t)]$ sau în general $[x, f(x)]$). Există însă cazuri când soluția poate fi obținută și analitic, cum este exemplul de mai sus.

Putem să găsim soluția ecuației diferențiale 2.20 relativ simplu. O să facem o notație tipică $\omega_0^2 = \sqrt{k/m}$, atunci ecuația se scrie

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \tag{2.21}$$

Putem să ghicim soluția (rezolvarea ecuațiilor diferențiale implică de obicei un proces similar cu cel de ghicire a soluției), dacă observăm că a doua derivată a funcției trebuie să fie egală cu funcția cu semn opus înmulțită cu $-\omega_0^2$.

O soluție ar putea fi o funcție de tipul

$$x\left(t\right) = \cos t. \tag{2.22}$$

A doua derivată a funcției de mai sus este

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\cos t\right) = -\cos t. \tag{2.23}$$

Dacă înlocuim în ecuația diferențială obținem

$$-\cos t + \omega_0^2 \cos t = 0, \tag{2.24}$$

ceea ce nu este adevărat decât dacă $\omega_0^2 = 1$. Pentru a fi adevărat în general trebuie ca în loc de primul termen, $-\cos t$, să avem $-\omega_0^2 \cos t$.

Putem să observăm că dacă alegem soluția de tipul

$$x\left(t\right) = cos\omega_0 t, \tag{2.25}$$

atunci

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\cos\omega_0 t\right) = -\omega_0^2 \cos\omega_0 t, \tag{2.26}$$

iar ecuația diferențială este satisfăcută:

$$-\omega_0^2 \cos\omega_0 t + \omega_0^2 \cos\omega_0 t = 0. \tag{2.27}$$

Cu toate că soluția $x\left(t\right) = \cos\omega_0 t$ satisface ecuația diferențială ea nu este soluția problemei noastre, deoarece nu satisface condițile inițiale. Știm că la momentul inițial corpul este în A, deci $x\left(0\right) = A$. Pentru a satisface și condiția inițială soluția noastră trebuie să fie

$$x\left(t\right) = A\cos\omega_0 t, \tag{2.28}$$

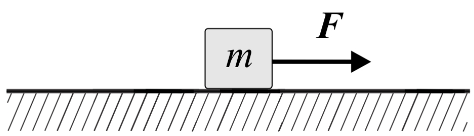
ceea ce ne spune că acest corp va executa o mișcare oscilatorie cu amplitudinea A și cu frecvența unghiulară $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. O să revenim la mișcare oscilatorie în cursurile următoare. Ceea ce am vrut să arătăm aici a fost cum folosind principiul fundamental, $F = ma$, putem să scriem ecuația diferențială care ne guvernează mișcarea și cum putem obține soluția acestei ecuații care să satisfacă condițiile inițiale.

2.3 Aplicații

Rezolvarea problemelor de mecanică necesită determinarea forțelor care acționează asupra sistemului. Forțele sunt de două feluri, fie sunt forțe de contact (care apar la contactul dintre două corpuri), fie datorate unor câmpuri (ex. forța gravitațională). În continuare o să dăm câteva exemple de probleme tipice.

Forțe pe o singură direcție (1D).

Exemplul 2.2. Un corp de masă $m = 5$ kg se află pe o suprafață orizontală fără frecare. Asupra lui acționează o forță orizontală $F = 10$ N. Cu ce accelerație se va mișca acest corp?

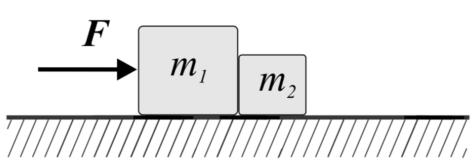


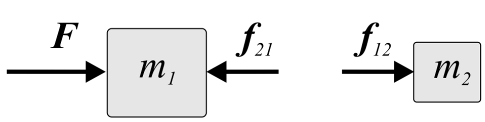
În exemplele următoare o să vedem că dacă nu avem frecare între corp și suprafața orizontală, atunci putem să ignorăm greutatea deoarece nu ne influențează mișcarea (nu produce accelerație). Singura forță care produce accelerație este $F = 10$ N.

Conform principiului fundamental

$$F = ma \implies a = \frac{F}{m} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Exemplul 2.3. Să presupunem că avem două corpuri de mase $m_1 = 3$ kg și $m_2 = 2$ kg care se află pe o suprafață orizontală fără frecare, ca în figură. Asupra corpului 1 acționează o forță orizontală $F = 10$ N. Cu ce accelerație se vor mișca cele două corpuri și ce forță acționează asupra fiecărui corp?





În imagine am reprezentat situația reală, iar dedesubt acesteia am reprezentat diagrama forțelor. Ca și în exemplul anterior am ignorat greutatea. Pentru a aplica corect principiul fundamental trebuie să reprezentăm toate forțele. Asupra corpului 1 acționează forța $\boldsymbol{F}$

(corpul este împins cu forța $\boldsymbol{F}$ de la stânga la dreapta) și forța $\boldsymbol{f}_{21}$ (forța cu care corpul 2 împinge corpul 1 de la dreapta la stânga). Asupra corpului 2 acționează numai forța $\boldsymbol{f}_{12}$ (forța cu care corpul 1 împinge corpul 2 de la stânga dreapta).

Conform principiului acțiunii și reacțiunii (L3) modulul celor două forțe este egal

$$|\boldsymbol{f}_{21}| = |\boldsymbol{f}_{12}| = f.$$

Aplicăm principul fundamental (L2) pentru fiecare corp:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{f}_{21} = m_1\boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{f}_{12} = m_2\boldsymbol{a}, \end{cases}$$

unde am ținut cont că cele două corpuri se mișcă împreună cu aceeași accelerație. Dacă scriem scalar trebuie să ținem cont de semnul forțelor conform convenției obișnuite: $\boldsymbol{f}_{21}$ este în sens negativ, adică $\boldsymbol{f}_{21} = -f\boldsymbol{i}$, iar $\boldsymbol{f}_{12}$ este în sens pozitiv, adică $\boldsymbol{f}_{12} = f\boldsymbol{i}$, unde $\boldsymbol{i}$ este versorul axei orizontale Ox. Atunci:

$$\begin{cases} F - f = m_1 a, \\ f = m_2 a, \end{cases}$$

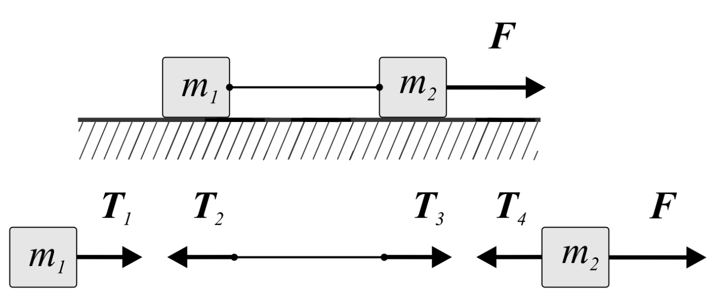
După ce rezolvăm obținem

$$f = 4\,\mathrm{N}, \text{ iar } a = 2\,\mathrm{m/s^2}.$$

Asupra corpului 1 acționează o forță netă de $10\,\mathrm{N} - 4\,\mathrm{N} = 6\,\mathrm{N}$ iar asupra corpului 2 acționează o forță netă de $4\,\mathrm{N}$.

Întrebarea. Cât ar trebui să fie masa corpului m_2 pentru ca forța netă asupra corpului de masă m_1 să fie zero?

Exemplul 2.4. Să presupunem că avem două corpuri de mase $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ și $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ legate printr-un fir de masă neglijabilă și care se află pe o suprafață orizontală fără frecare, ca în figură. Asupra corpului 2 acționează o forță orizontală $F = 10\,\mathrm{N}$. Cu ce accelerație se vor mișca cele două corpuri, ce forță acționează asupra fiecărui corp și care este tensiunea din fir?



O să completăm diagrama forțelor plecând de la stânga la dreapta. Corpul 1 este tras de fir spre dreapta cu o forță pe care o să o notăm cu $\boldsymbol{T}_1$ și care se numește tensiunea din fir. Modulul acestei forțe îl notăm cu T. Conform L3 (principiul acțiunii și reacțiunii) și corpul 1 trage de capătul din stânga al firului cu o forță $\boldsymbol{T}_2$ egală în modul cu T, dar de sens opus lui $\boldsymbol{T}_1$.

Ce forță acționează asupra capătului din dreapta al firului? Adică, cu ce forță trage corpul 2 de fir ?

În mod cert trebuie să aibă o asemenea valoare, astfel încât forța netă asupra firului, $\boldsymbol{F}_{netfir}$, să fie zero. Dacă forța netă asupra firului nu ar fi zero, atunci, datorită faptului că masa firului este neglijabilă (la limită egală cu zero) acesta s-ar mișca cu accelerație infinită, deoarece, conform cu L2, $a = F_{netfir}/0 \to \infty$. Forța netă asupra firului se poate scrie

$$\boldsymbol{F}_{netfir} = \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{T}_3,$$

atunci modulul o să fie

$$F_{netfir} = T_3 - T_2 = T_3 - T = 0,$$

care ne arată că modulul lui $\boldsymbol{T}_3$ trebuie să fie egal cu T.

Plecând de la acest rezultat putem să facem o observație generală, *într-un fir de masă neglijabilă și inextensibil, tensiunea are peste tot aceeași valoare.*

Asupra corpului 2 acționează 2 forțe. O forță de la dreapta la stânga $\boldsymbol{T}_4$ (forța cu care firul trage de corpul 2) și care este egală în modul cu T, dar de sens opus lui $\boldsymbol{T}_3$, și forța externă $\boldsymbol{F}$ de la stânga la dreapta.

Scriem L2 sub formă scalară pentru fiecare corp:

$$\begin{cases} T = m_1 a, \\ F - T = m_2 a, \end{cases}$$

unde am ținut cont că cele două corpuri se mișcă împreună cu aceeași accelerație.Rezolvând obținem

$$a = 2\,\mathrm{m/s^2} \text{ și } T = 6\,\mathrm{N}.$$

Forța netă asupra corpului 1 este 6N, asupra firului este de 0 N, iar asupra corpului 2 este de 10 N - 6 N = 4 N.

Întrebare. Care este accelerația dacă avem un fir de masă ne-neglijabilă și egală cu 0.5 kg.

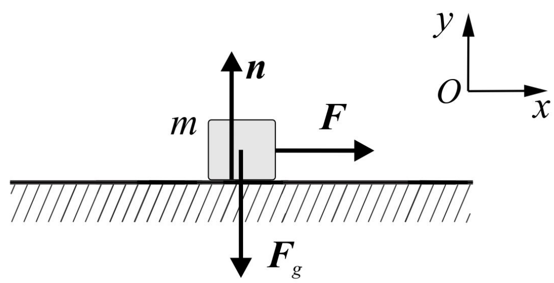
Forțe pe două direcții (2D).

Exemplul 2.5. Un corp de masă $m = 5$ kg se află pe o suprafață orizontală. Asupra lui acționează o forță orizontală $F = 10$ N de la stânga la dreapta. (a) Ignorând frecarea dintre corp și planul orizontal, cu ce accelerație se va mișca acest corp? (b) Dacă avem un coeficient de frecare $\mu = 0.07$ între corp și plan, cu ce accelerație se va mișca acesta?

(a) Asupra corpului o să acționeze forțe pe două direcții Ox și Oy. Din acest motiv va trebui să scriem principiul fundamental pe două direcții:

$$\begin{cases} F_x = m a_x, \\ F_y = m a_y, \end{cases}$$

unde indicele x sau y se referă la componentele pe direcția Ox și, respectiv, Oy.



Pe direcția Ox avem doar forța F, deci putem scrie

$$F = ma_x \Longrightarrow a_x = \frac{F}{m} = 2\,\mathrm{m/s^2}$$

Pe direcția Oy avem două forțe. În primul rând avem forța de greutate ($\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$) care acționează vertical în jos. Deoarece corpul împinge suprafața de sus în jos, și suprafața o să împingă corpul de jos în sus cu o forță pe care o denumim reacțiune normală ($\boldsymbol{n}$). Normal înseamnă aici perpendicular pe suprafață. Putem scrie L2 pe direcția Oy

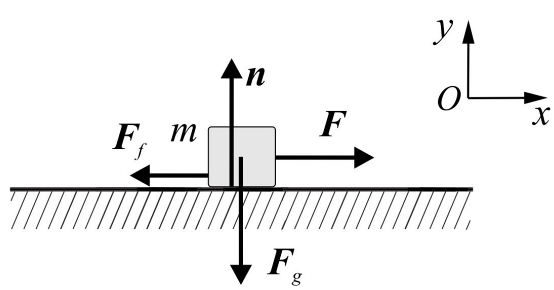
$$n - F_g = ma_y = 0.$$

Știm că relația de mai sus este egală cu zero deoarece corpul nu se mișcă pe direcția verticală, acesta nu are nici viteză, nici accelerație pe această direcție. În acest caz particular

$$n = F_g = mg.$$

Observăm că accelerația este dată exclusiv de forța F, deci presupunerea noastră de la Exemplul 4.2 a fost corectă.

(b) Să presupunem acum că avem frecare între corp și suprafață. În acest caz o să avem o forță suplimentară de frecare care este orientată în sens opus direcției de mișcare. Există o relație empirică între forța de frecare dinamică dintre corp și suprafață $F_f = \mu n$, unde μ este un coeficient determinat experimental și care depinde de natura și rugozitatea suprafețelor în contact. Această relație are o validitate limitată numai la cazul dinamic, adică dacă cele două suprafețe în contact se mișcă una relativ la cealaltă.



Scriem L2 pe cele două direcții:

$$\begin{cases} F - F_f = ma_x, \\ n - F_g = ma_y, \end{cases}$$

de unde obținem:

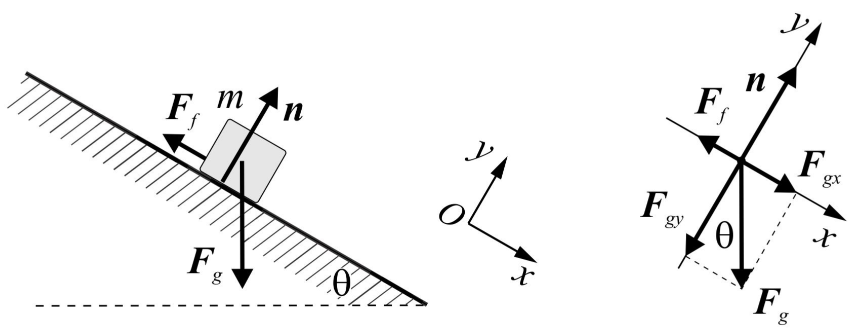
$$\begin{cases} F - \mu n = ma_x, \\ n = F_g = mg. \end{cases}$$

Astfel putem să calculăm accelerația

$$a_x = \frac{F}{m} - \mu g = 1.3\,\mathrm{m/s^2}.$$

Observăm că în acest caz greutatea ne influențează accelerația pe Ox prin intermediul forței de frecare.

Exemplul 2.6. Un corp de masă $m = 5$ kg este lăsat să alunece liber pe un plan înclinat de $\theta = 45°$. Dacă între corp și plan avem un coeficient de frecare de $\mu = 0.03$, cu ce accelerație se va mișca acesta?



Asupra corpului o să acționeze trei forțe. În primul rând avem forța de greutate ($\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$) care acționează vertical în jos, reacțiunea normală ($\boldsymbol{n}$) care este perpendiculară pe planul înclinat și forța de frecare ($\boldsymbol{F}_f$) care este orientată de-a lungul planului în sens opus direcției de mișcare a corpului. Datorită simetriei o să ne alegem un sistem de coordonate xOy, astfel încât axa Ox să fie paralelă cu planul

O să scriem L2 pe cele două direcții Ox șiOy. Observăm că forța de greutate are componente pe ambele direcții, astfel:

$$\begin{cases} F_{gx} - F_f = ma_x, \\ n - F_{gy} \ = ma_y = 0, \end{cases}$$

unde $a_y = 0$ deoarece corpul nu se mișcă pe direcția Oy, el se mișcă de-a lungul planului înclinat, paralel cu Ox.

Conform reprezentării din figura de mai sus, cele două componente ale greutății sunt:

$$\begin{cases} F_{gx} = F_g \sin\theta = mg \ \sin\theta, \\ F_{gy} \ = F_g \cos\theta = mg \cos\theta, \end{cases}$$

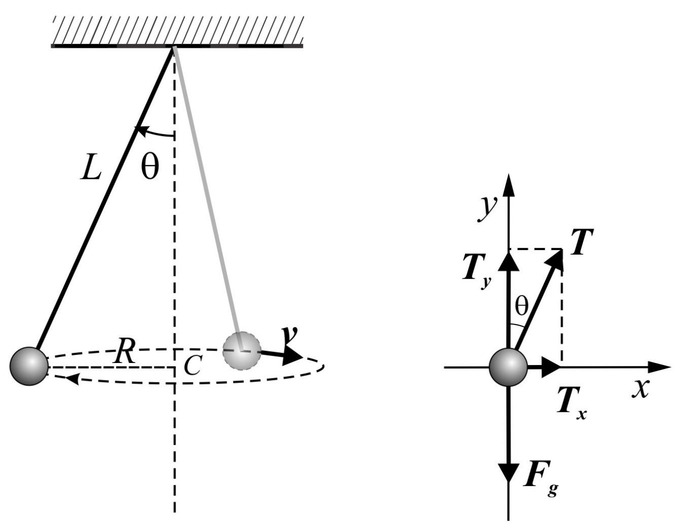
prin înlocuire

$$\begin{cases} mg \ \sin\theta - \mu n = ma_x, \\ n = mg \cos\theta, \end{cases}$$

de unde putem determina accelerația

$$a_x = g \sin\theta - \mu g \cos\theta = 6.85 \text{ m/s}^2$$

Exemplul 2.7. Un corp este agățat de tavan cu ajutorul unui fir de lungime $L = 1$m/s. Corpul este pus în mișcare de rotație în plan orizontal cu viteză lineară constantă de $v = 1$ m/s. (a) Este această mișcare accelerată? (b) Dacă da, pe ce direcție este accelerația și care este forța care produce accelerația? (c) Cât este raza traiectoriei R?



(a) Chiar dacă viteza liniară este constantă, corpul se mișcă accelerat deoarece se mișcă pe o traiectorie circulară.

(b) Deoarece mișcarea este circulară în plan orizontal, corpul are o accelerație centripetă orientată tot timpul înspre centru de rotație C.

Asupra corpului acționează două forțe, tensiunea T din fir cu care firul trage de corp și forța de greutate $\boldsymbol{F}_g$.

Să presupunem că la un anumit moment corpul este în extremitatea din stânga a traiectoriei.

Ne alegem sistemul de coordonate xOy indicat în figură și scriem L2 pe cele două direcții:

$$\begin{cases} T_x = ma_x, \\ T_y - F_g = ma_y = 0, \end{cases}$$

unde $a_y = 0$ deoarece corpul nu se mișcă pe Oy, el se mișcă doar în plan orizontal. a_x este accelerația care produce mișcarea de rotație (centripetă). Forța care produce accelerația centripetă este componenta pe Ox a tensiunii din fir (Tx).

(c) Conform imaginii, cele două componente ale tensiunii sunt:

$$\begin{cases} T_x = T\sin\theta, \\ T_y \;\; = T\cos\theta, \end{cases}$$

prin înlocuire în L2:

$$\begin{cases} T\sin\theta = ma_x, \\ T\cos\theta = mg, \end{cases} \implies \tan\theta = a_x/g$$

dar a_x este accelerație centripetă care este egală întotdeauna cu viteza lineară la pătrat împărțită la raza traiectoriei ($a_x = v^2/R$), iar $\tan\theta = R/\sqrt{L^2 - R^2}$, astfel:

$$\frac{R^2}{\sqrt{L^2 - R^2}} = \frac{v^2}{g}$$

după câteva manipulări algebrice ajungem la următoarea ecuație

$$\frac{g^2}{v^4}R^4 + R^2 - L^2 = 0.$$

Prin rezolvare în Matlab am găsit soluțiile $R = \pm\sigma_1$ și $\pm\sigma_2$ unde:

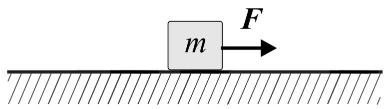
$$\sigma_1 = \sqrt{-\frac{v^2\left(\sqrt{4L^2g^2 + v^4} + v^2\right)}{2g^2}} \;\text{ și }\; \sigma_2 = \sqrt{\frac{v^2\left(\sqrt{4L^2g^2 + v^4} - v^2\right)}{2g^2}}.$$

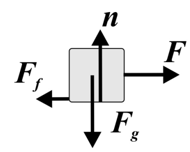
Numeric, singura soluție fizică (două sunt complexe, iar una negativă) este 0.308 m.

Codul Matlab care rezolvă simbolic ecuația din exemplu de mai sus este:

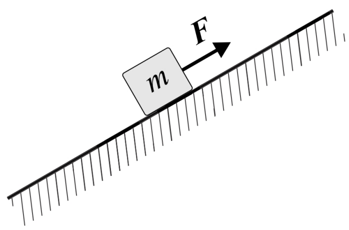
```
syms R v g L
p = g^2/v^4*R^4 + R^2 -L^2;
solve(p,R)
```

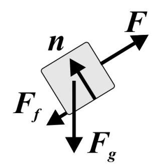
Exemple de situații reale și diagrama forțelor



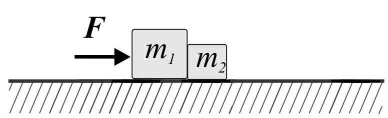


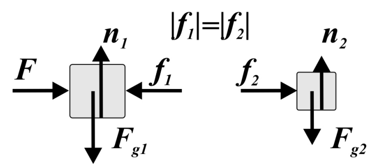
Un corp tras cu o forță pe
un plan orizontal.



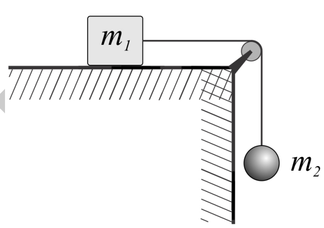


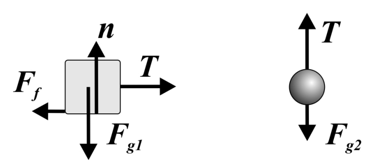
Un corp tras cu o forță pe
un plan înclinat.





Două corpuri în contact împinse
pe o suprafță lucioasă.



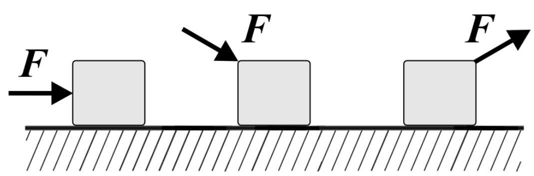


Două corpuri conectate printr-o
coardă prin intermediul unui scripete ideal.

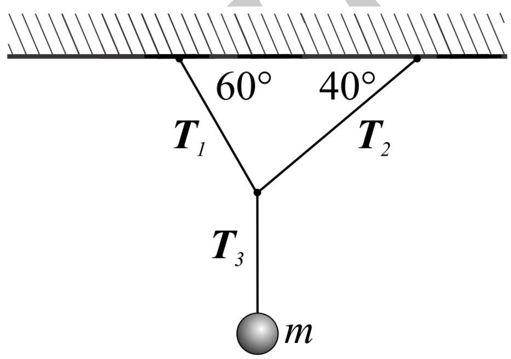
Exerciții și probleme

2.1. Calculați forța necesara pentru a accelera un automobil de masa 1000 kg, din repaus, pana la o viteza de 72 km/h, în 10 secunde. Ce forță este necesară pentru a opri automobilul pe o distanta de 50 m?

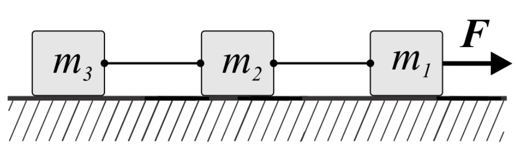
2.2. Pentru a deplasa o cutie de masa 50 kg, o persoană acționează în 3 moduri diferite: împinge cutia cu o forță orizontală, împinge cutia de sus în jos cu o forță ce face un unghi de 30°cu orizontala și trage cutia de jos în sus cu o forță ce face un unghi de 30°cu orizontala. Cunoscând coeficientul de frecare dintre cutie și sol μ =0.2 și faptul că persoana exercită o forță de 300 N calculați accelerația cutiei în cele 3 cazuri.



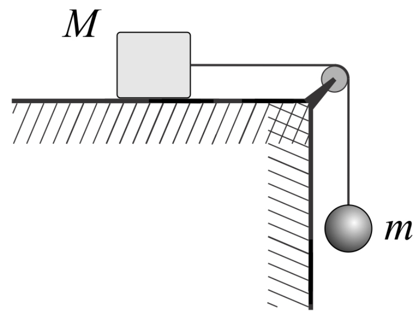
2.3. Un corp de masa 10 kg este agățat cu ajutorul a trei fire, așa cum este indicat în figura de mai jos. Presupunând că sistemul se află în echilibru găsiți tensiunile în cele trei fire.



2.4. Trei corpuri de mase m_1,m_2, m_3 se afla pe un plan orizontal și sunt interconectate prin fire inextensibile. Asupra corpului m_1 acționează o forță orizontala F. Neglijând frecările găsiți accelerația sistemului și tensiunile din fire.



2.5. Un corp de masă M = 4 kg este așezat pe un plan orizontal. De corp este legat un fir, trecut peste un scripete și având la capăt un corp de masa m = 3 kg. Coeficientul de frecare dintre corpul M și planul orizontal este μ =0.25. Să se afle accelerația sistemului, tensiunea din fir și forța de apăsare asupra scripetelui.

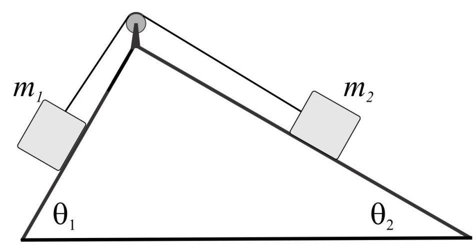


2.6. Un corp de masă m se află pe un plan înclinat de unghi α. Coeficientul de frecare dintre plan și corp este μ. Determinați valoarea minima α_0 a unghiului α pentru care corpul aluneca pe plan. Pentru un unghi $\alpha > \alpha_0$ determinați accelerația corpului.

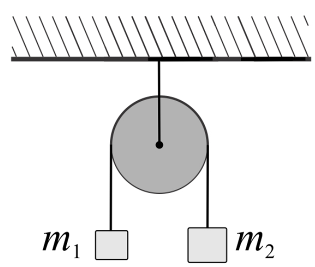
2.7. Două corpuri de mase m_1 și m_2 sunt conectate printr-un fir inextensibil de masă neglijabilă care este trecut peste un scripete de masă neglijabilă, ca în figura de mai jos. Coeficientul de frecare dintre corpul 1 și plan este μ_1, iar dintre corpul 2 și plan este μ_2. Care este relația dintre m_1, m_2, θ_1, θ_2, μ_1 și μ_2, astfel încât:

(a) m_1 să înceapă să alunece în josul planului;

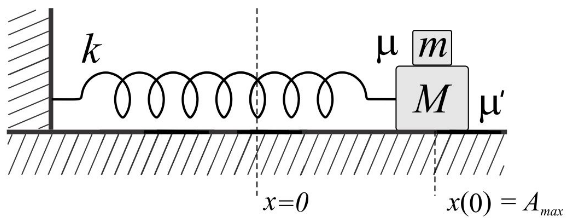
(b) m_2 să înceapă să alunece în josul planului.



2.8. Două corpuri de mase $m_1 = 3$ kg și $m_2 = 5$ kg sunt conectate printr-un fir inextensibil de masă neglijabilă care este trecut peste un scripete de masă neglijabilă. Acesta din urmă este conectat prin intermediul unui al doilea fir de tavan. Determinați tensiunile din cele două fire, accelerația corpurilor și distanța parcursă de corpuri în prima secundă de mișcare dacă acestea sunt inițial în repaus.

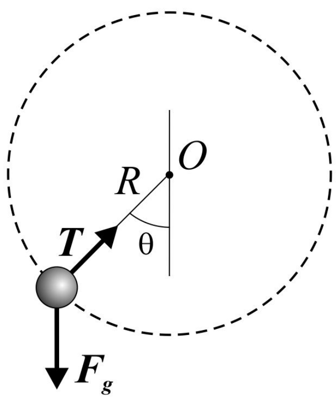


2.9. Un bloc de masă m este așezat deasupra unei mase M care stă pe o suprafață fără frecare. Masa M este conectată la un resort de constantă k atașat de perete. (a) Cât de departe poate fi trasă masa M astfel încât la eliberare, masa superioară m să nu alunece ? Coeficientul de frecare dintre cele două mase este μ. (b) Repetați punctul (a), dacă între suprafață și corpul M avem un coeficient de frecare μ'. [R: (a) $A_{max} = \frac{\mu g(m+M)}{k}$; (b)$A_{max} = \frac{(\mu+\mu')g(m+M)}{k}$]. (*)



2.10. Un corp este agățat cu un fir de tavanul unui autobuz în repaus. Ce unghi face firul cu verticala atunci când autobuzul accelerează cu accelerația a? [R: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$].

2.11. O sferă mică de masă m este atașată la capătul unui fir de lungimea R și se învârte într-un cerc vertical în jurul unui punct fix O, așa cum este ilustrat în figură. Determinați tensiunea din fir în orice moment în funcție de unghiul θ dacă viteza sferei este constantă și egală cu v. [R: $T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right)$].



2.12. Determinați legea vitezei și legea de mișcare pentru un corp de masă m, care inițial se află în repaus și care este supus unei forțe dată de: (a) $F_x = F_0 + ct$; (b) $F_x = F_0 \sin(ct)$; (c) $F_x = F_0 e^{ct}$. F_0 și c sunt constante pozitive. [R: (a) $v = \frac{F}{m}t + \frac{c}{2m}t^2; x = \frac{F}{m}t^2 + \frac{c}{6m}t^3$].

2.13. O barcă de masă $m = 350$ kg se deplasează pe suprafața apei cu viteza $v_0 = 72$ km/h. Motorul bărci se oprește brusc. Barca încetinește datorită unei forțe de rezistență la înaintare prin apă de forma $F(v) = -Ae^{bv}$, unde $b = 0.01$ s/m, iar $A = 35$ N. Determinați viteza bărcii în funcție de timp, timpul până la oprire și distanța parcursă până la oprire. Reprezentați grafic viteza și poziția bărcii în funcție de timp. [R: $v = v_0 - \frac{1}{b}ln\left(1 + \frac{A}{m}e^{bv_0}bt\right)$; $T = \frac{m}{bA}\left(1 - e^{-bv_0}\right)$; $d = \frac{m}{b^2A}\left[1 - (1 + bv_0)\, e^{-bv_0}\right]$].

2.14. Un bloc de lemn este lansat în sus de-a lungul unui plan înclinat cu viteza inițială $v_0 = 5$ m/s. Dacă înclinația planului este de 30°, iar coeficientul de frecare $\mu = 0.1$, găsiți timpul total pentru blocul să revină în punctul de lansare. [R: 1.9 s].

2.15. *Este pământul un sistem de referință inerțial?* Calculați accelerația centripetă: (a) a unui punct de pe suprafața ecuatorului Pământului (raza Pământului este $R = 6.4 \times 10^3$ km); (b) a Pământului în orbita sa în jurul Soarelui (raza orbitei Pământului este $R = 150 \times 10^6$ km); (c) a Soarelui în rotația sa în jurul centrului galaxiei (raza orbitei Soarelui în jurul centrului galaxiei este $R = 2.8 \times 10^4$ AL. Un AL este distanța parcursă de lumină într-un an. Viteza orbitală a soarelui este de 220 km/s). Dați răspunsurile relativ la accelerația gravitațională a pământului (în a/g). [R: 3.4×10^{-3}; 6×10^{-4}; 1.5×10^{-12}].