Serii de numere reale

October 20, 2023

1 Noţiuni teoretice

Definiţie 1 *Pentru un şir de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *expresia* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte serie numerică cu termenul general* a_n.

Şirul $(s_n)_{n\geq 1}$, definit prin $s_n = a_1 + a_1 + \cdots + a_n$, $n \geq 1$ se numeşte **şirul sumelor parţiale** ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $s \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci s se numeşte **suma seriei** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Dacă $s \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte **convergentă**. O serie care nu este convergentă se numeşte **divergentă**.

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Rezultă de aici următorul criteriu de divergenţă:

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

1.1 Serii remarcabile

1) **Seria geometrică** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$, $q \in \mathbb{R}$, este convergentă dacă şi numai dacă $q \in (-1, 1)$. Are loc relaţia

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, \text{ dacă } q \in (-1,1) \\ +\infty, \text{ dacă } q \in [1,\infty) \end{cases} .$$

Dacă $q \leq -1$, atunci seria geometrică este divergentă.

2) **Seria armonică generalizată** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

Pentru $\alpha > 1$ notăm $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Funcţia $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcţia Zeta a lui Riemann**. Au loc relaţiile

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ (Euler)}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se numeşte **serie armonică** şi avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

3) O altă serie remarcabilă este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

2 Exerciţii şi probleme

Ex. 1 *Să se determine sumele seriilor:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)...(n+p)}$, $p \in \mathbb{N}^*$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n+1)}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+2)!}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$;

h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2+n+4}$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{8n}{n^4-2n^2+5}$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}$;

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$;

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$;

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$;

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$;

r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)(n+4)}$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+4)(n+5)}$;

t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}$;

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{arctg} \frac{2^n}{1+2^{2n+1}}$;

v) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$

3 Indicaţii şi răspunsuri

Solutie Ex. 1 *a)* $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{1}{4}$; *c)* $\frac{1}{p \cdot p!}$; *d)* $\frac{1}{2}$; *e)* $\frac{1}{2}$; *f)* 1; *g)* 1; *h)* $\ln \frac{1}{2}$; *i)* *Folosim identitatea*

$$\text{arctg} x - \text{arctg} y = \text{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \quad \forall xy > -1.$$

Avem

$$\begin{aligned} a_n &= \text{arctg} \frac{1}{2n^2} = \text{arctg} \frac{2}{4n^2} = \text{arctg} \frac{2}{1+4n^2-1} = \text{arctg} \frac{2}{1+(2n+1)(2n-1)} \\ &= \text{arctg} \frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)} = \text{arctg}(2n+1) - \text{arctg}(2n-1). \end{aligned}$$

Suma seriei este $\frac{\pi}{4}$; *j)* $\text{arctg}\, 2$; *k)* $2 + \frac{\pi}{2}$; *l)* $\ln 2$; *m)* $3 - e$; *n)* $2 \ln 2$; 0) $\frac{7}{36}$ *p)* $6(3 - 4 \ln 2)$; *q)* $5e$; *r)* $\frac{5}{144}$; *s)* $\frac{43}{1800}$; *t)* $\frac{3\pi}{4}$; *u)* $\frac{\pi}{4}$; *v)* *Suma este* $\frac{3}{2} \ln 2$. *Se calculeaza* $s_{3n} = \gamma_{4n} - \frac{1}{2}\gamma_n - \frac{1}{2}\gamma_n + \ln \frac{4n}{\sqrt{2n^2}}$. $\lim\limits_{n \to \infty} s_{3n} = \frac{3}{2} \ln 2$.