L#1. Metoda științifică: Pendulul Matematic

Pendulul matematic

În știință se folosesc teorii și modele pentru descrierea și explicarea fenomenelor studiate. Teoriile sunt mai degrabă explicații plauzibile pentru tiparele care apar în cadrul fenomenelor studiate. În general, acestea sunt susținute de dovezi științifice, iar concluziile lor sunt verificabile și verificate prin experiment. Teoriile includ de obicei modele, care sunt reprezentări simplificate ale fenomenelor și au menirea de a înlesni înțelegerea acestora și au în general o aplicabilitate limitată. După dezvoltarea unui model nou, acesta trebuie testat pentru a i se verifica validitatea. Niciun model, oricât de simplu sau sofisticat nu este valid decât în cazul în care predicțiile acesteia sunt în concordanță cu rezultatele experimentale. Procesul de observare a tiparelor unui fenomen, de dezvoltare a unui model teoretic și de testare a concluziilor acestuia prin verificare experimentală reprezintă ***metoda științifică.***

În continuare vom exemplifica metoda științifică în studiul oscilaților unui pendul simplu. Un pendul simplu este format dintr-o corp agățat de un fir subțire și care poate să oscileze liber într-un plan (Fig. L1.1). Teoria în cadrul căreia vom studia oscilațiile pendulului este teoria atracției gravitaționale a lui Newton, iar modelul este cel al pendulului matematic. O să vedem mai jos ce presupune acest model.

1. Prima etapă în aplicarea metodei științifice este să observăm tiparele fenomenului studiat. Este evident că dacă scoatem pendulul din poziția de echilibru și îl lăsăm liber, acesta începe să oscileze. O oscilație completă a pendulului este reprezentată de mișcarea acestuia dintr-un anumită poziție inițială, înainte și înapoi, până la revenirea acestuia în poziția inițială. Dacă ar fi să observați o serie de oscilații complete ale pendulului, care din următoarele afirmații ar fi mai precise?

   Timpul necesar pentru efectuarea unei oscilații complete:

   a) se modifică în mod aleatoriu de la o oscilație la alta.
   b) crește considerabil de la o oscilație la alta.
   c) scade considerabil de la o oscilație la alta.
   d) nu se modifică apreciabil de la o oscilație la alta.

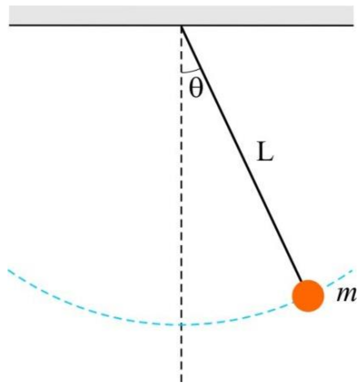

Fig. L1 Reprezentarea schematică a unui pendul simplu.

2. Timpul necesar pentru efectuarea unei oscilații complete se numește perioada (***T***) pendulului. Uitați-vă la Fig. L1, ce parametri fizici credeți că pot afecta mișcarea pendulului? Listați parametri fizici care credeți că pot afecta perioada de oscilație a pendulului și care pot fi modificați experimental:

3. Să considerăm lungimea pendulului (L), cum credeți că aceasta poate modifica perioada? Proporțional, invers proporțional sau într-un alt mod. Scrieți mai jos răspunsul vostru.

4. Să considerăm masa corpului (m), cum credeți că aceasta poate modifica perioada? Proporțional, invers proporțional sau într-un alt mod. Scrieți mai jos răspunsul vostru.

5. Să considerăm deviația unghiulară inițială (θ), cum credeți că aceasta poate modifica perioada? Proporțional, invers proporțional sau într-un alt mod. Scrieți mai jos răspunsul vostru.

În continuare vom trata oscilațiile pendulului în modelul pendulului matematic. În cadrul acestui model se impun niște aproximații rezonabile. O să presupunem că firul de care este atașat corpul are masă extrem de mică relativ la masa corpului, astfel încât să o putem ignora. Mai mult decât atât, presupunem că firul este inextensibil pentru a evita complicațiile introduse de o eventuală forță elastică datorată alungirii firului. În plus, vom considera că masa corpului este relativ mare și dimensiunile acestuia suficient de mici ca să poată fi tratat ca un punct material și ca să putem ignora efectul forței de frecare cu aerul. Cu aceste presupuneri, singurele forțe care acționează asupra corpului sunt tensiunea din fir și greutatea, așa cum este indicat în figura. L1.2.

6. Priviți figura L1.2. și observați care este componenta greutății care acționează pe direcția de mișcare. Țineți cont de faptul că nu există alte forțe pe direcția mișcării și folosind această componentă a greutății utilizați principiul fundamental al dinamicii pentru a găsi accelerația tangențială. Scrieți mai jos expresia accelerației și reanalizați răspunsurile date la întrebările 3,4 și 5.

7. Folosind figura L1.2 putem să scriem principiul fundamental al dinamicii pentru pendul. Înainte de aceasta, să observăm că pentru o lungime dată a pendulului (L), poziția corpului este dată de o singură variabilă și anume unghiul de deviație față de verticală (θ). Din acest motiv, cel mai simplu este să scriem principiul fundamental folosind coordonatele polare (L, θ), ceea ce ne va conduce la

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = g \sin\theta, \qquad \text{[L1.1]}$$

unde g este accelerația gravitațională. Aceasta este o ecuație diferențială neliniară care este relativ dificil de rezolvat, însă putem să facem o aproximație și să liniarizăm ecuația. Dacă unghiul de deviație inițial este relativ mic, sub 5°, în ecuația L1.1 o să aproximăm valoarea sinusul cu valoarea unghiului în radiani $\sin\theta \approx \theta$, iar ecuația devine:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\theta. \qquad \text{[L1.2]}$$

Aceasta este o ecuație diferențială liniară care acceptă o soluție simplă $\theta(t) = \Theta\cos\omega t$, unde Θ este deviația unghiulară inițială, iar $\omega = \sqrt{g/L}$. Ținând cont de periodicitatea funcției cosinus, $\omega T = 2\pi$, iar perioada pendulului o să fie dată de

	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$	[L1.3]

Observăm că în limita de aplicabilitate a acestui model, adică pentru unghiuri de deviație inițială mai mici de 5°, perioada pendulului depinde numai de lungimea acestuia. Această concluzie va trebui testată experimental pentru a verifica validitatea modelului.

8. Relația L1.3 s-a obținut în aproximația unghiurilor mici, care ne-a permis să liniarizăm ecuația diferențială L1.1. Se poate arăta [Karlheinz Ochs 2011 *Eur. J. Phys.* **32** 479] că pentru un unghi Θ de deviație inițială, perioada unui pendul matematic este dată de următoarea relație:

	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\Theta}{2} + \cdots\right)$	[L1.4]

Această ecuație ne indică faptul că perioada crește odată cu creșterea L lungimii și a deviației unghiulare inițiale Θ a pendulului. Este aceasta în concordanță cu predicțiile voastre de la punctele 3 și 5? O problemă care împiedică ca ecuația de mai sus să fie folosită pentru a testa precis rezultatele experimentale este că ea implică o serie infinită. De aceea, pentru a testa ecuația folosind rezultate experimentale trebuie sa folosim aproximații, așa cum am făcut la punctul 7. Testați acest lucru calculând primii trei termeni ai seriei pentru diferite deviației unghiulare inițiale Θ. Scrieți valoarea acestor termeni în tabelul de mai jos (pentru simplitate, considerați $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 1$).

Credeți

Θ	Termenul #1	Termenul #2	Termenul #3
$5°$			
$10°$			
$20°$			
$30°$			
$40°$			
$50°$			

Până la ce unchi credeți ce este rezonabil să aproximăm relația L1.4 cu relația $T = 2\pi\sqrt{L/g}$?

Răspundeți la următoarele întrebări:

1. Ce reprezintă metoda științifică?

2. Ce reprezintă un model fizic?

3. Care sunt parametrii fizici implicați în studiul pendulului?

4. Ce reprezintă perioada pendulului?

5. Cum variază perioada pendulului cu lungimea firului, masa corpului și cu deviația unghiulară inițială?

6. Cum veți verifica experimental răspunsurile la întrebarea de mai sus?

7. Ce înseamnă *aproximația unghiurilor mici*?

8. Cum se poate reprezenta grafic sub formă liniară o ecuație parabolică de tipul $y=ax^2$.

Metoda științifică: Pendulul Matematic

Obiective

Pentru ilustrarea metodei științifice, în cadrul acestei lucrări, vom testa experimental validitatea modelului pendulului matematic. Pe parcursul acestui proces veți observa ce parametri influențează perioada unui pendul și cum se pot folosi relațiile fizice și datele experimentale pentru a obține diferite mărimi fizice.

După efectuarea acestui experiment trebuie să fiți capabili să:

1. Aplicați metoda științifică pentru a testa validitatea predicțiilor unui model fizic.
2. Să înțelegeți cum să modificați parametri fizici pentru a investiga predicții teoretice.
3. Să înțelegeți cum să aplicați aproximații pentru a facilita investigațiile și analizele experimentale.

Teorie

Un pendul matematic, sau pendul simplu, este format dintr-o masă agățată de un fir subțire și care oscilează liber într-un singur plan (Fig. L1.2). În modelul teoretic al pendulului matematic, sau ideal, se consideră că toată masa este concentrată în centrul de masă a corpului care oscilează, acesta fiind considerat un punct material. Firul este considerat a avea masă neglijabilă, că este inextensibil, iar frecarea cu aerul se neglijează. Parametri fizici care descriu un pendul sunt (1) lungimea L a pendulului, (2) m masa corpului ce oscilează, (3) deviația unghiulară θ a pendulului și (4) perioada T a pendulului, care reprezintă timpul necesar pentru ca pendulul să realizeze o oscilație completă.

Pentru descrierea teoretică a mișcării de oscilație a unui pendul este util să realizăm o diagramă a forțelor (Fig. L1.2). O astfel de analiză ne permite să identificăm forțele relevante mișcării de oscilație. În cazul pendulului simplu forța care asigură oscilația este componenta tangențială a greutății ($mgsin\theta$). Astfel, accelerația corpului de-a lungul traiectorie sale depinde de deviația θ precum și de accelerația gravitațională.

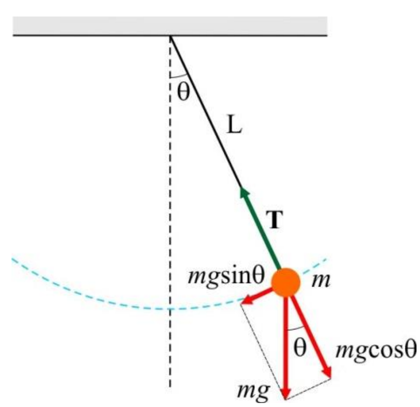

Fig. L1.2 Diagrama forțelor în cazul unui pendul simplu.

Aplicarea principiului fundamental al dinamicii, ne va conduce la o ecuație diferențială neliniară. Aceasta se poate rezolva, iar pentru perioada pendulului se va obține sub forma unei serii infinite care depinde de deviației unghiulare inițiale Θ a pendulului:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Theta}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\Theta}{2} + \cdots\right). \qquad [L1.5]$$

unde *g* reprezintă accelerația gravitațională. La calcularea lui *T*, pentru o deviație unghiulară dată *θ*, acuratețea crește odată cu creșterea numărului de termeni din serie care sunt evaluați.

Pentru unghiuri mici (Θ ≤ 5°), termenii din serie care conțin Θ sunt mici relativ la unitate și pot fi, într-o *primă aproximație* ignorați, astfel perioada de oscilație se poate scrie:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,. \qquad [L1.6]$$

Se poate observa, că perioada este independentă de masa corpului, de asemenea, în prima aproximație, este independentă și de deviația unghiulară inițială Θ.

Procedura experimentală

1. Realizați dispozitivul experimental sub îndrumarea cadrului didactic. Lungimea pendulului se măsoară cu ruleta, perioada cu cronometrul, iar unghiul de deviație inițial cu raportorul.

2. *Investigați experimental aproximația unghiurilor mici* [Ec. L1.6] precum și predicția teoretică [Ec. L1.5] a creșterii perioadei cu unghiul de deviație pentru unghiuri mari.

   Pentru aceasta determinați perioada pendulului pentru mai multe unghiuri enumerate în tabelul 1, păstrând lungimea și masa constante.

   În această etapă este important să folosiți un pendul cât mai scurt posibil, astfel încât acesta să nu ciocnească marginile dispozitivului experimental la unghiuri de deviație mari.

   Pentru determinarea perioadei este mai util să măsurați timpul necesar pentru efectuarea mai multor oscilații decât pentru efectuarea unei singure oscilații. Motivul principal este de a reduce erorile în măsurarea perioadei. Să presupunem că măsurați timpul necesar pentru efectuarea a 10 oscilații, iar timpul de reacție al experimentatorului este de 0.2 s. În acest caz, timpul măsurat o să fie $t_{măs} = 10T \pm 0.2\,s$, atunci perioada va fi $T = t_{măs}/10 \pm 0.02$.

   Calculați perioada teoretică folosind relația L1.6 și calculați eroarea relativă dintre perioada măsurată și cea prezisă de ecuația L1.6.

   Investigați experimental dacă perioada pendulului este independentă de masa *corpului care oscilează*. Folosind patru mase diferite, determinați perioada păstrând lungimea și deviația unghiulară constante. În această etapă este important să folosiți un pendul cât mai lung posibil, pentru a reduce erorile în determinarea perioadei. Folosiți un unghi de deviație inițială suficient de mic, astfel încât ecuația L1.6 să fie validă. Calculați perioada teoretică folosind relația L1.6 și calculați eroarea relativă dintre perioada măsurată și cea prezisă de ecuația L1.6. Treceți datele în tabelul 2.

3. *Investigați relația dintre lungimea pendulului și perioada acestuia* folosind patru lungimi diferite. Păstrați masa și deviația unghiulară constante. Folosiți un unghi de deviație inițială suficient de mic, astfel încât ecuația L1.6 să fie validă. Calculați perioada teoretică folosind relația L1.6 și calculați eroarea relativă dintre perioada măsurată și cea prezisă de ecuația L1.6. Înregistrați datele în tabelul 3.

4. Scopul procedurilor experimentale de până acum a fost să verificați validitatea modelului pendulului matematic. De asemenea, ați verificat limitele de aplicabilitate ale aproximației unghiurilor mici, deci ale ecuației L1.6. Presupunând că ați găsit acesta aproximație acceptabilă, în continuare vom vedea cum să determinăm alte mărimi fizice pornind de la date experimentale și considerând ecuația L1.6 validă. Astfel, vom determina accelerația gravitațională, mărime ce intervine în ecuația L1.6. Ecuația L1.6 poate fi transformată astfel:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

sau

$$L = \frac{g}{4\pi^2} T^2.$$

Așadar, din relația de mai sus se poate observa că reprezentând grafic $L = \mathrm{f}(T^2)$ datele se vor așeza pe o linie a cărei pantă va fi $g/4\pi^2$.

5. Reprezentați grafic $L = \mathrm{f}(T^2)$ folosind datele din tabelul 3. Calculați valoarea accelerației gravitaționale. Calculați valoarea erorii relative.

Nume____Secţia/Grupa____________________Data____________

Metoda științifică: Pendulul Matematic

Raport de Laborator

TABELUL DE DATE 1

Scop: Investigarea aproximației unghiurilor mici.

Masa, *m*_________________, lungimea pendulului, ______________________

Unghi deviație inițială (Θ) (°)	T (s)			Eroare relativă (%)
	Exp.	Eroare	Teoretic	
5				
10				
20				
30				
40				
50				

Concluzii:

TABELUL DE DATE 2

Scop: Investigarea dependenței perioadei de masa corpului.

Unghi deviație inițială (Θ), _________________, lungimea pendulului, ______________________

m (g)	T (s)			Eroare relativă (%)
	Exp.	Eroare	Teoretic	

Concluzii:

TABELUL DE DATE 3

Scop: Investigarea dependenței perioadei de lungimea pendulului.

Unghi deviație inițială (Θ),_______________, masa, ___________________

L (m)	T (s)		Eroare relativă (%)	T^2 (s^2)
	Exp.	Teoretic		

Concluzii:

Valoarea lui *g* extrasă din panta graficului______________