

Set 1

Probabilități discrete

1. Nouă persoane urcă într-un tramvai cu 3 vagoane. Fiecare persoană alege un vagon la întâmplare. Care sunt probabilitățile următoarelor evenimente:

A: "În primul vagon urcă exact trei persoane",

B: "În fiecare vagon sunt exact 3 persoane",

C: "Există 4 persoane într-un vagon, 3 în altul și 2 în celălalt"?

2. În studiul cauzelor penelor de curent, au fost adunate următoarele date: 10% sunt cauzate de o defecțiune a transformatorului, 75% sunt cauzate de defecțiune a liniei de transport, 5% implică ambele probleme. Pe baza acestor procente, găsiți probabilitatea ca o pană de curent dată să implice:

a) defecțiune a liniei, știind că există o defecțiune a transformatorului

b) defecțiune a transformatorului, știind că există defecțiune a liniei

c) defecțiune a transformatorului, dar nu și a liniei

d) defecțiune a transformatorului, știind că nu există defecțiuni ale liniei

e) defecțiune a transformatorului sau a liniei.

3. Pe măsură ce securitatea comunicației devine din ce în ce mai problematică, atunci când un mesaj este primit, acesta trebuie autentificat, folosind o cheie secretă de criptare. Totuși, uneori mesajul poate ajunge în mâini greșite, permițând astfel unor mesaje neautentice să pară autentice. Să presupunem că 80% din toate mesajele primite sunt autentice. În plus, să presupunem că doar 5% din toate mesajele neautentice sunt trimise folosind cheia corectă și că toate mesajele autentice sunt trimise folosind cheia corectă. Găsiți probabilitatea ca un mesaj să fie autentic, având în vedere că a fost folosită cheia corectă.

4. Un centru de copiere are trei imprimante A , B și C , care imprimă la viteze diferite. Programele sunt redirectionate către prima imprimantă disponibilă. Probabilitatea ca un program să fie redirectionat către imprimantele A , B și C este de 0.5, 0.3 și, respectiv, 0.2. Ocazional, imprimantele se blochează și opresc imprimarea. Probabilitatea ca imprimantele A , B și C să se blocheze este de 0.02, 0.06 și, respectiv, 0.1. Știind că imprimarea a fost oprită de o blocare a imprimantei care este probabilitatea ca imprimanta A să se fi blocat? Care este probabilitatea ca imprimanta B să se fi blocat? Care este probabilitatea ca imprimanta C să se fi blocat?

5. Trei vânători trag la o țintă. Probabilitatea ca fiecare să lovească ținta este de 0.4, 0.5 respectiv 0.7. Găsiți probabilitatea ca ținta să fie lovită exact o dată.

6. Fie A, B evenimente independente. Arătați că:

a) A și \overline{B} sunt independente

b) \overline{A} și \overline{B} sunt independente

c) dacă A_1, A_2, \dots, A_n sunt independente, atunci și $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$ sunt independente.

7. Dacă $P(B/\overline{A}) = P(B/A)$, atunci A și B sunt evenimente independente.

8. În jocul de bridge, fiecare jucător primește 13 cărți. Să presupunem că Nord și Sud au 9 cărți de inimă neagră care includ A și K , dar nu și Q . Ce eveniment este mai probabil: A : *Est are Q* sau B : *cele patru inimi negre rămase sunt împărțite 2-2*?

9. (Problema colectorului de cupoane) Fiecare cutie de cereale conține sau nu exact unul din cele r cupoane diferite ale unei campanii. Știind ca plasarea cupoanelor în cutii este independentă, determinați probabilitatea ca o persoană care cumpără n cutii de cereale ($r \leq n$) să obțină un set complet de cupoane.

10. n bile distincte sunt introduse aleatoriu în r cutii distincte ($r \leq n$). Determinați probabilitatea ca fiecare cutie să conțină cel puțin o bilă.

11. Într-un studiu al plantelor din apropierea apelor industriale, s-a constatat că 30% dintre aceste plante au arătat semne de poluare chimică, 25% din plante au arătat semne de poluare termică și 10% au arătat semne de poluare chimică și termică.

a) Care este probabilitatea ca un eșantion din aceste plante care prezintă semne de poluare termică să arate, de asemenea, semne de poluare chimică?

b) Care este probabilitatea ca un eșantion care prezintă semne de poluare chimică să nu prezinte și semne de poluare termică?

12. O urnă conține n bile, numerotate de la 1 la n . Se extrage pe rând câte o bilă fără revenire. Determinați probabilitatea ca numărul primelor k bile extrase să coincidă cu numărul de ordine al extragerii (bila numărul i să fie a i -a extrasă ($i = 1, 2, \dots, k$)).

Răspunsuri:

1. $P(A) = 7 \left(\frac{2}{3}\right)^8$, $P(B) = \frac{25}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^7$, $P(C) = \frac{280}{729}$. **2.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{15}$ c) $\frac{1}{20}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{4}{5}$ **3.**

0.987 **4.** $\frac{5}{24}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ **5.** 0.36 **8.** $P(A) = \frac{\binom{25}{12}}{\binom{26}{13}} = \frac{234}{575}$, $P(B) = \frac{\binom{22}{11}\binom{4}{2}}{\binom{26}{13}} = \frac{1}{2}$

9. Considerăm evenimentele A_i : “cuponul al i -lea lipsește din toate cele n pachete” și calculăm $1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_r)$ folosind principiul includerii și al excluderii. Probabilitatea cerută este

$$1 - \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j-1} \binom{r}{j} \left(1 - \frac{j}{r}\right)^n$$

11. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ **12.** $\frac{(n-k)!}{n!}$