

Probabilități discrete -probleme pentru seminar

1. *Problema zilei de nastere:* Câți oameni trebuie să fie într-o încăpere astfel încât să avem o probabilitate mai mare ca $\frac{1}{2}$ ca exista cel puțin două persoane care își sărbătoresc ziua de naștere în aceeași zi?
2. *Aceeași zi de naștere cu tine:* Să se calculeze probabilitatea ca într-un grup de n persoane să existe cineva care să aibă aceeași zi de naștere ca tine.
3. Introducem n bile identice în k cutii distincte. Care este probabilitatea să avem:
 - a) cel puțin o bilă în fiecare cutie?
 - b) exact j bile în prima cutie?
 - c) cel puțin j bile în prima cutie?
 - d) exact j cutii goale?*Obs 1:* Dacă cerem probabilitatea ca să avem exact j bile într-una din cutii, putem proceda ca în cazurile precedente?
4. Dacă bilele nu sunt identice, ci distincte (numerotate), să se calculeze probabilitățile din problema precedentă.
5. Avem 3 studenți, fiecare având probabilitatea $\frac{1}{4}$ să rezolve o problemă. Calculați probabilitățile ca:
 - a) Toți studenții rezolve problema
 - b) Exact unul rezolve problema
 - c) Niciunul nu rezolve problema
 - d) Cel puțin unul rezolve problema
 - e) Cel mult unul rezolve problema
6. Ce este mai probabil:
 - a) exact un șase în 6 aruncări sau exact doi de șase în 12 aruncări ale unui zar?
 - b) cel puțin un șase în 6 aruncări sau cel puțin doi de șase în 12 aruncări ale unui zar?
7. Alegem un număr între 0 și 999 apoi un computer alege un număr la întâmplare în acest interval. Care este probabilitatea ca cel puțin două cifre să coincidă? (17 and 57 au două cifre care coincid - a sutelor și a unităților, iar 123 și 231 nu au nicio cifră care coincide).
8. Într-un grup de 20 de vânători, 7 nimeresc tinta cu probabilitatea $\frac{1}{4}$, 8 cu probabilitatea $\frac{2}{3}$ și 5 cu probabilitatea $\frac{4}{5}$. Care este probabilitatea ca un vânător ales la întâmplare să lovească tinta? Dacă tinta este atinsă, care este probabilitatea ca vânătorul să aparțină primului grup?
9. Trebuie să întâlnești un prieten la aeroport. Din experiențele anterioare știi că avionul întârzie cu o probabilitate de 75% dacă plouă, dar în caz că nu plouă probabilitatea să întârzie este doar 20%. Prognoza meteo pentru ziua respectivă este 40% șanse de ploaie. Care este probabilitatea ca avionul să întârzie? Să se formuleze o întrebare la care să se răspundă folosind formula lui Bayes și apoi să se răspundă la întrebare.
10. Un student da un test grila în care fiecare întrebare are 4 răspunsuri posibile din care unul singur este corect. El știe răspunsul la 50% din întrebări, poate elimina două răspunsuri gresite la 30% din întrebări și nu are nicio idee la 20% din întrebări.
 - a) Care este probabilitatea ca studentul să răspundă corect la o întrebare aleasă la întâmplare din test?
 - b) Formulați întrebarea pentru a calcula probabilitatea cauzelor și dați răspunsul.
 - c) Dacă testul are 30 de întrebări, care este probabilitatea ca studentul să răspundă corect la cel puțin 10 întrebări?
11. De pe o reclamă care arată PHILADELPHIA cad două litere. Cineva pune înapoi cele două litere în spațiile rămase, la întâmplare. Care este probabilitatea ca reclama să spună tot PHILADELPHIA? Puneți întrebarea pentru a răspunde cu formula lui Bayes.
12. 5% din bărbați și 0.25% din femei sunt daltoniști. Care este probabilitatea ca un daltonist să fie bărbat?

- 13.** Doi vanatori tragsimultan la o tinta, care este lovita de un singur glonte. Daca primul vanator loveste tinta cu probabilitatea 0.3 si al doilea cu probabilitatea 0.6, care este probabilitatea ca al doilea vanator sa fi nimerit tinta?
- 14.** La un examen oral sunt m subiecte, n dintre acestea fiind preferate de un student. Care este probabilitatea ca studentul sa ia un subiect favorit daca:
- a) studentul intra primul in sala?
 - b) studentul intra al doilea?
 - c) studentul intra al k lea?
- 15.** Intr-o cutie avem n bile albe si m bile negre. Se extrag toate bilele pe rand, fara a se reintroduce in urna. Care este probabilitatea sa obtinem prima bila alba la extragerea cu numarul k ?
- 16.** Intr-o cutie avem n bile, numerotate de la 1 la n . Se extrag toate bilele pe rand, fara a se reintroduce in urna. Care este probabilitatea evenimentelor:
- a) Pentru primele k bile extrase, numarul bilei coincide cu numarul extragerii?
 - b) Numarul bilei coincide cu numarul extragerii pentru toate bilele?
 - c) Numarul bilei este diferit de numarul extragerii pentru toate bilele?
 - d) Numarul bilei coincide cu numarul extragerii pentru exact o bila?
- 17.** Un test Covid are sensibilitatea de 99% si specificitatea 98%. Rata de incidenta in populatie la un moment dat este 1‰.
- Observatie:* *Sensibilitatea* este probabilitatea ca rezultatul testului sa fie pozitiv daca persoana este intr-adevar infectata. *Specificitatea* este probabilitatea ca testul sa aiba un rezultat negativ daca persoana nu este infectata. Anumite teste PCR au sensibilitati si specificitati mai mici decat cele date in aceste problema.
- Equivalent, in cazul nostru testul da 1% rezultate fals pozitive si 2% rezultate fals negative si presupunem ca celelalte cazuri sunt corect identificate. O rata de incidenta de 1‰ inseamna probabilitatea ca o persoana luata la intamplare are o probabilitate de 1‰ sa fie infectata.
- a) Care este probabilitatea ca o persoana cu test pozitiv sa fie intr-adevar infectata?
 - b) Daca rata de incidenta este de 50% sau daca decidem sa nu testam populatia la intamplare si sa testam doar contactele directe (caz in care probabilitatea de a fi infectat este de 50%), care este probabilitatea ca o persoana cu test pozitiv sa fie intr-adevar infectata?
 - c) Este justificata matematic testarea aleatoare a populatiei?
- 18.** In fabricarea unui anumit articol s-a gasit ca defectele de tipul 1 apar cu o probabilitate de 0.1 si defectele de tipul 2 apar cu o probabilitate de 0.05. Care este probabilitatea ca:
- a) un articol nu are ambele tipuri de defecte? does not have both kind of defect?
 - b) un articol este defect?
 - c) un articol are un singur tip de defect, stiind ca este defect?
- 19.** Intr-un sac sunt 3 monede, una din ele avand doua steme, celelalte doua fiind normale. Se alege o moneda la intamplare si se arunca de 4 ori. Daca apare stema la fiecare aruncare, care este probabilitatea ca moneda sa fi fost cea cu doua steme?
- 20.** Se dau doua urne: prima contine 3 bile albe si 4 bile negre si a doua contine 8 bile albe si 5 bile negre. Se extrage o bila din prima urna si se introduce in urna a doua, apoi se extrage o bila din urna a doua. Care este probabilitatea ca bila extrasa din urna a doua sa fie alba?
- 21.** Un cuplu decide ca va incerca sa aiba copii pana cand va avea copii de ambele sexe. Ignorand cazul in care apar gemeni si presupunand ca la fiecare nastere probabilitatile de a obtine un baiat si o fata sunt egale, care este numarul asteptat de copii pe care ii va avea cuplul?
- 22.** n persoane isi arunca palariile intr-o cutie si apoi fiecare ia o palarie la intamplare. Care este numarul asteptat de persoane care isi iau inapoi propria palarie?
- 23.** Un om nu plateste niciodata parcare de 2€ la parcometru. El presupune ca exista o probabilitate $p = 0.1$ de a fi prins. Prima data cand este prins nu plateste nimic, urmatoarele doua amenzi sunt cate 20€ fiecare si urmatoarele amenzi sunt 40€ fiecare. In aceste ipoteze, care este costul asteptat al 100 de parcuri fara sa plateasca si cum se compara acesta cu costul a 100 bilete de parcare (=200 €) ?

24. Presupunem ca numarul mediu de lei care pot fi observati intr-o zi de safari este 5. Care este probabilitatea ca turistii sa vada:

a) exact 3 lei b) mai putin de 4 lei c) cel putin 4 lei

in urmatoarea zi de safari, on the next one-day safari, stiind ca numarul de lei care pot fi vazuti intr-o zi de safari are o distributie Poisson.

!! Sa s enunte legea numerelor mari din problemele 21-24.

25. Fie X, Y doua variabile aleatoare avand o distributie Poisson cu parametri λ_1, λ_2 .

a) Sa se gaseasca distributia lui $X + Y$;

b) Sa se calculeze $P(X = k/X + Y = n)$, pentru $k = 0, 1, \dots, n$. Ce distributie are variabila aleatoare $X/X + Y = n$?

Alte probleme pot fi gasite la adresa <https://users.utcluj.ro/drosca/seminar.html>