# Proiectare logică

## Curs 4

## Minimizarea funcțiilor booleene

Cristian Vancea

https://users.utcluj.ro/~vcristian/PL.html

# Cuprins

- Minimizarea funcțiilor booleene
    - Metode grafice
    - Metode algebrice

# Minimizarea funcțiilor booleene

- Are ca scop obținerea de funcții echivalente simplificate => forma minimă.
- Se ajunge la expresii sub formă de sumă de produse sau produs de sume simplificate.
- Se urmărește reducerea numărului de variabile și a numărului de operații.

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Diagrama Karnaugh pentru funcții complet definite**

- Fiecare celulă cu valoarea 1 din Diagrama Karnaugh corespunde unui termen canonic disjunctiv (minterm).
- Fiecare celulă cu valoarea 0 din Diagrama Karnaugh corespunde unui termen canonic conjunctiv (maxterm).
- Datorită codificării în cod Gray, 2 celule vecine pe orizontală sau verticală corespund întotdeauna la 2 combinații valorice care diferă printr-o variabilă => corespund la 2 termeni canonici care diferă printr-o variabilă care apare negată într-un termen si nenegată în termenul vecin.

Ex: $n = 3$ $f = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1}) + (x_1 \cdot \overline{x_2})$

| $x_2$ \ $x_1 x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Mintermi: $\overset{P_3}{\overline{x_2} \cdot x_1 \cdot x_0}, \overset{P_7}{x_2 \cdot x_1 \cdot x_0}$

Maxtermi: $\underset{S_4}{\overline{x_2} + x_1 + x_0}, \underset{S_6}{\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0}$

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

### Diagrama Karnaugh pentru funcții complet definite

Ex: $n = 3$ $f = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1}) + (x_1 \cdot \overline{x_2})$

| $x_2 \backslash x_1 x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Mintermi: ..., $\overset{P_3}{\overline{x_2} \cdot x_1 \cdot x_0}$, $\overset{P_7}{x_2 \cdot x_1 \cdot x_0}$, ...

FCD va conține: ... $+ (\overline{x_2} \cdot x_1 \cdot x_0) + (x_2 \cdot x_1 \cdot x_0) + \cdots$

Se dau factor comun variabilele care nu se modifică =>

FCD va conține: ... $+ (x_1 \cdot x_0) \cdot (\overline{x_2} + x_2) + \cdots = \cdots + (x_1 \cdot x_0) \cdot 1 + \cdots = \cdots + (x_1 \cdot x_0) + \cdots$

principiul terțului exclus

element neutru

Maxtermi: ..., $\overset{S_4}{\overline{x_2} + x_1 + x_0}$, $\overset{S_6}{\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0}$, ...

FCC va conține: ... $\cdot (\overline{x_2} + x_1 + x_0) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0) \cdot \cdots$

Se dau factor comun variabilele care nu se modifică =>

FCC va conține: ... $\cdot ((\overline{x_2} + x_0) + (x_1 \cdot \overline{x_1})) \cdot \cdots = \cdots \cdot ((\overline{x_2} + x_0) + 0) \cdot \cdots = \cdots \cdot (\overline{x_2} + x_0) \cdot \cdots$

principiul contradicției

element neutru

Observație: Prin gruparea celulelor vecine de 1 sau 0 se obțin termeni simplificați în care se păstrează doar variabilele care nu se modifică $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_0})$ eliminându-se cele care se modifică $(\boldsymbol{x_2})$.

= || = $(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_0})$ = || = $(\boldsymbol{x_1})$

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Diagrama Karnaugh pentru funcții complet definite**

Ex: $n = 3 \;\; f = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1}) + (x_1 \cdot \overline{x_2})$

| $x_2 \backslash x_1 x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

$$\overset{P_5}{(x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0)} + \overset{P_1}{(\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0)} + \overset{P_7}{(x_2 \cdot x_1 \cdot x_0)} + \overset{P_3}{(\overline{x_2} \cdot x_1 \cdot x_0)}$$

$$(\overline{x_1} \cdot x_0) \quad + \quad (x_1 \cdot x_0)$$

$$x_0$$

Observație: S-a păstrat doar variabila $\boldsymbol{x_0}$ care nu se modifică în cei 4 termeni canonici grupați și s-au eliminat 2 variabile $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_1}$ care suferă modificări în cadrul grupului.

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

### Diagrama Karnaugh pentru funcții complet definite

$Obs_1$: Prin gruparea a **2** celule vecine se obține un termen din care se elimină **1** variabilă.

$Obs_2$: Prin gruparea a **4** celule vecine se obține un termen din care se elimină **2** variabile.

$Obs_3$: Prin gruparea a **8** celule vecine se obține un termen din care se elimină **3** variabile.

$Obs_4$: Prin gruparea a $\boldsymbol{2^m}$ celule vecine se obține un termen din care se elimină $\boldsymbol{m}$ variabile.

Concluzie: Pentru forma minimă se vor face **un număr minim** de **grupări dreptunghiulare maximale** și cu **număr de celule putere a lui 2**. Termenul obținut corespunzător unei grupări cu mai multe celule se numește termen elementar. O celulă poate face parte din mai multe grupări dacă este necesar.

**Forma Disjunctivă Minimă (FDM)** – se fac grupări maximale care să conțină toate celulele de 1 cel puțin o dată și se efectuează disjuncție (SAU) peste termenii elementari obținuți (grupările vor conține numai celule de 1). FDM = formă elementară

**Forma Conjunctivă Minimă (FCM)** – se fac grupări maximale care să conțină toate celulele de 0 cel puțin o dată și efectuează conjuncție (ȘI) peste termenii elementari obținuți (grupările vor conține numai celule de 0). FCM = formă elementară

Observație: Pentru funcții complet definite FDM = FCM.

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Diagrama Karnaugh pentru funcții complet definite**

Ex$_1$: $n = 3$ $f = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1}) + (x_1 \cdot \overline{x_2})$

| $x_2$ \ $x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

FDM – $f = x_0 + (\overline{x_2} \cdot x_1)$

**FDM = FCM**

| $x_2$ \ $x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

FCM – $f = (x_1 + x_0) \cdot (\overline{x_2} + x_0)$

# Minimizarea funcțiilor booleene

# Metode grafice

**Diagrama Karnaugh pentru funcții complet definite**

Ex$_2$: $n = 4 \;\; f = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_6 + P_9 + P_{11} + P_{12} + P_{14} \overset{\text{not}}{\Leftrightarrow} \sum(0,1,2,3,6,9,11,12,14)$

| $x_3x_2 \backslash x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 0 |

FDM$_1$

$$f = (\overline{x_3} \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_2} \cdot x_0) + (x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_0}) + (x_2 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0})$$

**FDM$_1$ = FDM$_2$**

| $x_3x_2 \backslash x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 0 |

FDM$_2$

$$f = (\overline{x_3} \cdot \overline{x_2}) + (\overline{x_2} \cdot x_0) + (x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_0}) + (\overline{x_3} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0})$$

# Minimizarea funcțiilor booleene

# Metode grafice

**Diagrama Karnaugh pentru funcții complet definite**

Ex$_2$: $n = 4\ \ f = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_6 + P_9 + P_{11} + P_{12} + P_{14} =$

$$= S_4 \cdot S_5 \cdot S_7 \cdot S_8 \cdot S_{10} \cdot S_{13} \cdot S_{15} \overset{\text{not}}{\Leftrightarrow} \prod(4,5,7,8,10,13,15)$$

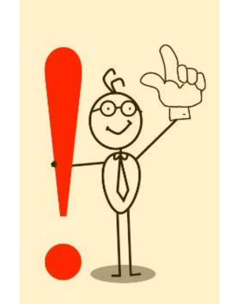
| $x_3x_2 \backslash x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 0 |

FCM

$$f = (\overline{x_2} + \overline{x_0}) \cdot (x_3 + \overline{x_2} + x_1) \cdot (\overline{x_3} + x_2 + x_0)$$

**FDM$_1$ = FDM$_2$ = FCM**

# Minimizarea funcțiilor booleene



## Diagrama Karnaugh

Ex:

| $x_3x_2x_1x_0$ | | $f$ |
|---|---|---|
| 0 0 0 0 | 0 | 0 |
| 0 0 0 1 | 1 | 1 |
| 0 0 1 0 | 2 | 1 |
| 0 0 1 1 | 3 | 1 |
| 0 1 0 0 | 4 | 0 |
| 0 1 0 1 | 5 | 1 |
| 0 1 1 0 | 6 | 0 |
| 0 1 1 1 | 7 | 1 |
| 1 0 0 0 | 8 | 0 |
| 1 0 0 1 | 9 | 1 |
| 1 0 1 0 | 10 | 1 |
| 1 0 1 1 | 11 | 0 |
| 1 1 0 0 | 12 | 0 |
| 1 1 0 1 | 13 | 1 |
| 1 1 1 0 | 14 | 1 |
| 1 1 1 1 | 15 | 1 |

| $x_3x_2$ \ $x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $^{0}$0 | $^{1}$1 | $^{3}$1 | $^{2}$1 |
| 01 | $^{4}$0 | $^{5}$1 | $^{7}$1 | $^{6}$0 |
| 11 | $^{12}$0 | $^{13}$1 | $^{15}$1 | $^{14}$1 |
| 10 | $^{8}$0 | $^{9}$1 | $^{11}$0 | $^{10}$1 |

Corect

| $x_0x_1$ \ $x_2x_3$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $^{0}$0 | $^{8}$1 | $^{12}$1 | $^{4}$1 |
| 01 | $^{2}$0 | $^{10}$1 | $^{14}$1 | $^{6}$0 |
| 11 | $^{3}$0 | $^{11}$1 | $^{15}$1 | $^{7}$1 |
| 10 | $^{1}$0 | $^{9}$1 | $^{13}$0 | $^{5}$1 |

*Incorect*

=> FDM, FCM greșite

| $x_0x_1$ \ $x_2x_3$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $^{0}$0 | $^{8}$0 | $^{12}$0 | $^{4}$0 |
| 01 | $^{2}$1 | $^{10}$1 | $^{14}$1 | $^{6}$0 |
| 11 | $^{3}$1 | $^{11}$0 | $^{15}$1 | $^{7}$1 |
| 10 | $^{1}$1 | $^{9}$1 | $^{13}$1 | $^{5}$1 |

Corect

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Diagrama Karnaugh pentru funcții incomplet definite**

Valorile **X** pentru combinațiile în care care funcția nu este specificată pot să țină loc de 0 sau 1 după cum este mai convenabil => se pot include în grupări celule cu valoarea **X**, dar nu se pot face grupări care să conțină numai valori de **X**.

**Forma Disjunctivă Minimă (FDM)** – se fac grupări maximale care să conțină toate celulele de 1 cel puțin o dată și se efectuează disjuncție (SAU) peste termenii elementari obținuți; FDM = formă elementară

**Forma Conjunctivă Minimă (FCM)** – se fac grupări maximale care să conțină toate celulele de 0 cel puțin o dată și se efectuează conjuncție (ȘI) peste termenii elementari obținuți; FCM = formă elementară

Observație: Pentru funcții incomplet definite FDM și FCM obținute pot să nu fie echivalente.

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

### Diagrama Karnaugh pentru funcții incomplet definite

Ex: $f = \sum(1,2) + \sum_{\Phi}(3,5,7)$

$f$

| $x_2$ \ $x_1 x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | X | 1 |
| 1 | 0 | X | X | 0 |

FDM – $f = x_0 + (\overline{x_2} \cdot x_1)$

**FDM ≠ FCM**

$f$

| $x_2$ \ $x_1 x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | X | 1 |
| 1 | 0 | X | X | 0 |

FCM – $f = (x_1 + x_0) \cdot \overline{x_2}$

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Diagrama Karnaugh pentru funcții cu expresii înglobate**

Se poate face minimizare parțială fără a altera anumite subexpresii ale funcției; acestea vor fi considerate expresii înglobate și se vor regăsi în Diagrama Karnaugh.

$$\mathrm{Ex}_1\!: n = 5 \;\; f = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot \underbrace{(a+b)\cdot\overline{b}}_{E_1(a,\,b)}) + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \underbrace{\overline{(a+b)\cdot\overline{b}}}_{E_2(a,\,b)})$$

Dacă se face minimizare după $x_0, x_1, x_2$ se scrie Diagrama Karnaugh corespunzătoare:

| $x_2$ \ $x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $(a+b)\cdot\overline{b}$ | 1 | $\overline{(a+b)\cdot\overline{b}}$ |
| 1 | 0 | $(a+b)\cdot\overline{b}$ | 1 | 0 |

- Chiar dacă $\mathrm{E}_2 = \overline{\mathrm{E}_1}$ ele sunt considerate expresii diferite.
- Rescrierea lui $f(x_0, x_1, x_2, a, b) = f(x_0, x_1, x_2, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot \mathrm{E}_1) + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \mathrm{E}_2)$ reprezintă proprietatea de **superpoziție a funcțiilor booleene**.

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Diagrama Karnaugh pentru funcții cu expresii înglobate**

| $x_2$ \ $x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | *0* 0 | *1* $(a+b)\cdot\bar{b}$ | *3* 1 | *2* $\overline{(a+b)\cdot\bar{b}}$ |
| 1 | *4* 0 | *5* $(a+b)\cdot\bar{b}$ | *7* 1 | *6* 0 |

- Forma Canonică Disjunctivă (FCD) cu expresii înglobate:

$$f_{\mathrm{FCD}} = ((a+b)\cdot\bar{b}\cdot P_1) + P_3 + (\overline{(a+b)\cdot\bar{b}}\cdot P_2) + ((a+b)\cdot\bar{b}\cdot P_5) + P_7$$

- Forma Canonică Conjunctivă (FCC) cu expresii înglobate:

$$f_{\mathrm{FCC}} = S_0\cdot((a+b)\cdot\bar{b} + S_1)\cdot(\overline{(a+b)\cdot\bar{b}} + S_2)\cdot S_4\cdot((a+b)\cdot\bar{b} + S_5)\cdot S_6$$

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Minimizare pentru funcții cu expresii înglobate la forma disjunctivă minimă**

Ex$_1$: $n = 5$ $f = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot (a+b) \cdot \overline{b}) + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{(a+b) \cdot \overline{b}})$

| $x_2$ \ $x_1 x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $(a+b)\cdot\overline{b}$ | 1 | $\overline{(a+b)\cdot\overline{b}}$ |
| 1 | 0 | $(a+b)\cdot\overline{b}$ | 1 | 0 |

**Pas$_1$**: Se înlocuiesc expresiile înglobate cu 0 în diagramă. Se fac grupări maximale de 1 și se rețin termenii rezultați:

| $x_2$ \ $x_1 x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$x_1 \cdot x_0$

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Minimizare pentru funcții cu expresii înglobate la forma disjunctivă minimă**

Ex$_1$: $n = 5$ $f = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot (a+b) \cdot \overline{b}) + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{(a+b) \cdot \overline{b}})$

| $x_2$ \ $x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $(a+b) \cdot \overline{b}$ | 1 | $\overline{(a+b) \cdot \overline{b}}$ |
| 1 | 0 | $(a+b) \cdot \overline{b}$ | 1 | 0 |

**Pas$_2$**: Se înlocuiește 1 cu X în diagramă. Se fac grupări maximale, care să conțină toate expresiile înglobate cel puțin o dată. O grupare nu are voie să conțină 2 expresii înglobate diferite, dar poate conține aceeași expresie de mai multe ori. Pentru fiecare grupare se efectuează conjuncție (ȘI) între expresia înglobată și termenul rezultat:

| $x_2$ \ $x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $(a+b) \cdot \overline{b}$ | X | $\overline{(a+b) \cdot \overline{b}}$ |
| 1 | 0 | $(a+b) \cdot \overline{b}$ | X | 0 |

$x_0 \cdot (a+b) \cdot \overline{b}$

$\overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{(a+b) \cdot \overline{b}}$

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Minimizare pentru funcții cu expresii înglobate la forma disjunctivă minimă**

Ex$_1$: $n = 5$ $f = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1} \cdot (a+b) \cdot \overline{b}) + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{(a+b) \cdot \overline{b}})$

| $x_2$ \ $x_1 x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $(a+b) \cdot \overline{b}$ | 1 | $\overline{(a+b) \cdot \overline{b}}$ |
| 1 | 0 | $(a+b) \cdot \overline{b}$ | 1 | 0 |

**Pas$_3$**: Se efectuează disjuncție (SAU) peste rezultatele obținute la pașii anteriori:

$$f = \underbrace{(x_1 \cdot x_0)}_{\text{Pas}_1} + \underbrace{(x_0 \cdot (a+b) \cdot \overline{b}) + (\overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{(a+b) \cdot \overline{b}})}_{\text{Pas}_2}$$

Forma Disjunctivă Minimă (FDM) cu expresii înglobate

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode grafice

**Minimizare pentru funcții cu expresii înglobate la forma disjunctivă minimă**

Ex$_2$:

| $x_2 \backslash x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | X | $a+\bar{b}$ | 1 | X |
| 1 | 0 | $b \cdot c$ | 1 | 0 |

**Pas$_1$:**

| $x_2 \backslash x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | X | 0 | 1 | X |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

**Pas$_2$:**

| $x_2 \backslash x_1x_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | X | $a+\bar{b}$ | X | X |
| 1 | 0 | $b \cdot c$ | X | 0 |

**Pas$_3$:** $f = (x_1 \cdot x_0) +$
$+\left(\overline{x_2} \cdot (a+\bar{b})\right) +$
$+(x_2 \cdot x_0 \cdot b \cdot c)$

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode algebrice

**Metoda Quine-Mc Cluskey**

- Se utilizează pentru funcții cu număr mare de variabile.
- Este ușor de implementat în software.
- Se bazează pe aceleași proprietăți algebrice ca și minimizarea cu diagrama Karnaugh: factor comun, principiul terțului exclus, element neutru:

$$(\bar{x} \cdot e) + (x \cdot e) = e \cdot (\bar{x} + x) = e \cdot 1 = e$$

# Minimizarea funcțiilor booleene

## Metode algebrice

**Metoda Quine-Mc Cluskey (pentru Forma Disjunctivă Minimă - FDM)**

- Se creează un tabel în care rândurile corespund termenilor canonici (TC) – mintermi – și coloanele corespund variabilelor.
- Pentru fiecare termen canonic se trece pe linie 1 în dreptul unei variabile dacă aceasta apare nenegată sau 0 dacă apare negată => codul binar.
- În cadrul tabelului se grupează termenii în ordine crescătoare după numărul de valori de 1 deținute pe rândul asociat.

Ex$_1$: $n = 4 \;\; f = \sum(0,1,2,3,6,9,11,12,14)$

| TC | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *-> 0 x 1* |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | *-> 1 x 1* |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | *-> 2 x 1* |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | *-> 3 x 1* |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | |

## Metoda Quine-Mc Cluskey (FDM)

- Se asociază termenii dintr-o grupă cu cei de la grupa următoare numai dacă diferă printr-o singură variabilă.
- Termenii obținuți prin grupare se trec într-un nou tabel o singură dată; se marchează cu **'-'** în dreptul variabilei care s-a modificat. Aceștia se grupează în ordine crescătoare după numărul de valori de 1.
- Procesul de grupare se repetă până când nu se mai pot face grupări.
- Termenii obținuți la final și cei care nu s-au putut grupa pe parcurs se rețin și se numesc **implicanți primi (IP)**.

Ex$_1$: $n = 4 \;\; f = \sum(0,1,2,3,6,9,11,12,14)$

| TC | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *0 x 1* |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | *1 x 1* |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | *2 x 1* |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | *3 x 1* |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | |

| | TC | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0 | 0 | 0 | - | *0 x 1* |
| | 0,2 | 0 | 0 | - | 0 | |
| | 1,3 | 0 | 0 | - | 1 | *1 x 1* |
| | 1,9 | - | 0 | 0 | 1 | |
| | 2,3 | 0 | 0 | 1 | - | |
| IP | 2,6 | 0 | - | 1 | 0 | |
| | 3,11 | - | 0 | 1 | 1 | *2 x 1* |
| IP | 6,14 | - | 1 | 1 | 0 | |
| | 9,11 | 1 | 0 | - | 1 | |
| IP | 12,14 | 1 | 1 | - | 0 | |

| | TC | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| IP | 0,1,2,3 | 0 | 0 | - | - | *0 x 1* |
| IP | 1,3,9,11 | - | 0 | - | 1 | *1 x 1* |

$$\text{IP}\begin{cases}(2,6) = \overline{x_3}\cdot x_1\cdot\overline{x_0}\\ (6,14) = x_2\cdot x_1\cdot\overline{x_0}\\ (12,14) = x_3\cdot x_2\cdot\overline{x_0}\\ (0,1,2,3) = \overline{x_3}\cdot\overline{x_2}\\ (1,3,9,11) = \overline{x_2}\cdot x_0\end{cases}$$

## Metoda Quine-Mc Cluskey (FDM)

- Se realizează un tabel de acoperire în care coloanele sunt asociate termenilor canonici și rândurile sunt asociate implicanților primi.
- Pentru fiecare implicant prim se marchează cu “x” în tabel termenii canonici acoperiți de acesta.
- Dacă un termen canonic este acoperit de un singur implicant prim acesta se numește **implicant prim esențial (IPE)** și va face parte din selecția finală.

Ex$_1$: $n = 4 \;\; f = \sum(0,1,2,3,6,9,11,12,14)$

- Dacă este necesar la selecția finală se mai adaugă un set minimal din implicanții primi neesențiali astfel încât să se acopere toți termenii canonici. Se vor alege cu prioritate implicații primi cu un număr cât mai mare de termeni canonici acoperiți.

Tabelul de acoperire

| | IP \ TC | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 | 9 | 11 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2,6 | | | x | | x | | | | |
| | 6,14 | | | | | x | | | | x |
| IPE | 12,14 | | | | | | | | $\boxed{\text{x}}$ | x |
| IPE | 0,1,2,3 | $\boxed{\text{x}}$ | x | x | x | | | | | |
| IPE | 1,3,9,11 | | x | | x | | $\boxed{\text{x}}$ | $\boxed{\text{x}}$ | | |

- Disjuncția IP aleși => **FDM**.

2 variante echivalente

$$\begin{cases} f = \overset{\underline{0,1,2,3}}{\overline{x_3}\cdot\overline{x_2}} + \overset{\underline{1,3,9,11}}{\overline{x_2}\cdot x_0} + \overset{\underline{12,14}}{x_3\cdot x_2\cdot\overline{x_0}} + \overset{\underline{2,6}}{\overline{x_3}\cdot x_1\cdot\overline{x_0}} \\ f = \overset{\underline{0,1,2,3}}{\overline{x_3}\cdot\overline{x_2}} + \overset{\underline{1,3,9,11}}{\overline{x_2}\cdot x_0} + \overset{\underline{12,14}}{x_3\cdot x_2\cdot\overline{x_0}} + \overset{\underline{6,14}}{x_2\cdot x_1\cdot\overline{x_0}} \end{cases}$$

# Metoda Quine-Mc Cluskey (FDM)

Ex$_2$: $n = 3 \;\; f = (x_0 \cdot x_1) + (x_0 \cdot \overline{x_1}) + (x_1 \cdot \overline{x_2}) = \sum(1,2,3,5,7)$

| TC | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 |

| | TC | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1,3 | 0 | - | 1 |
| | 1,5 | - | 0 | 1 |
| IP | 2,3 | 0 | 1 | - |
| | 3,7 | - | 1 | 1 |
| | 5,7 | 1 | - | 1 |

| | TC | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|
| IP | 1,3,5,7 | - | - | 1 |

IP $\begin{cases} (2,3) = \overline{x_2} \cdot x_1 \\ (1,3,5,7) = x_0 \end{cases}$

Tabelul de acoperire

| | IP \ TC | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| IPE | 2,3 | | $\boxed{X}$ | x | | |
| IPE | 1,3,5,7 | $\boxed{X}$ | | x | $\boxed{X}$ | $\boxed{X}$ |

$f = (\overline{x_2} \cdot x_1) + x_0$ - **FDM**

# Metoda Quine-Mc Cluskey (FDM la funcții incomplet definite)

- Se creează tabelul cu termenii canonici (TC) – mintermi + termenii corespunzători lui X – în care se trec codurile binare și se fac asocieri repetate până nu mai este posibil; se extrag implicanții primi (IP) rezultați.
- În tabelul de acoperire se trec pe coloane numai mintermii și pe linii doar acei IP care acoperă cel puțin un minterm.
- Disjuncția IP aleși din tabelul de acoperire => **FDM**.

Ex$_3$: $n = 3 \;\; f = \sum(1,2) + \sum_{\Phi}(3,4,5,7)$

| TC | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 |

| | TC | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1,3 | 0 | - | 1 |
| | 1,5 | - | 0 | 1 |
| IP | 2,3 | 0 | 1 | - |
| IP | 4,5 | 1 | 0 | - |
| | 3,7 | - | 1 | 1 |
| | 5,7 | 1 | - | 1 |

| | TC | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|
| IP | 1,3,5,7 | - | - | 1 |

$$\text{IP}\begin{cases}(2,3) = \overline{x_2} \cdot x_1 \\ \cancel{(4,5)} = x_2 \cdot \overline{x_1} \\ (1,3,5,7) = x_0\end{cases}$$

Tabelul de acoperire

| | IP \ TC | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| IPE | 2,3 | | $\boxed{\text{X}}$ |
| IPE | 1,3,5,7 | $\boxed{\text{X}}$ | |

$f = (\overline{x_2} \cdot x_1) + x_0$ - **FDM**

# Metoda Quine-Mc Cluskey (FCM)

- Se creează tabelul cu termenii canonici (TC) – maxtermi – în care se trec codurile binare și se fac asocieri repetate până nu mai este posibil; se extrag implicanții primi (IP) rezultați.
- Expresia implicantului prim = disjuncție de variabile: variabila apare negată dacă prezintă 1 în dreptul ei și nenegată dacă prezintă 0.
- Conjuncția IP aleși din tabelul de acoperire => **FCM**.

Ex$_4$: $n = 4 \;\; f = \prod(4,5,7,8,10,13,15)$

| TC | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | TC | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| IP | 4,5 | 0 | 1 | 0 | - |
| IP | 8,10 | 1 | 0 | - | 0 |
| | 5,7 | 0 | 1 | - | 1 |
| | 5,13 | - | 1 | 0 | 1 |
| | 7,15 | - | 1 | 1 | 1 |
| | 13,15 | 1 | 1 | - | 1 |

| | TC | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| IP | 5,7,13,15 | - | 1 | - | 1 |

$$\text{IP} \begin{cases} (4,5) = x_3 + \overline{x_2} + x_1 \\ (8,10) = \overline{x_3} + x_2 + x_0 \\ (5,7,13,15) = \overline{x_2} + \overline{x_0} \end{cases}$$

Tabelul de acoperire

| | IP \ TC | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IPE | 4,5 | $\boxed{\text{X}}$ | x | | | | | |
| IPE | 8,10 | | | | $\boxed{\text{X}}$ | $\boxed{\text{X}}$ | | |
| IPE | 5,7,13,15 | | x | $\boxed{\text{X}}$ | | | $\boxed{\text{X}}$ | $\boxed{\text{X}}$ |

$$f = (x_3 + \overline{x_2} + x_1) \cdot (\overline{x_3} + x_2 + x_0) \cdot$$
$$\cdot (\overline{x_2} + \overline{x_0})$$ - **FCM**

## Metoda Quine-Mc Cluskey (FCM la funcții incomplet definite)

- Se creează tabelul cu termenii canonici (TC) – maxtermi + termenii corespunzători lui X – în care se trec codurile binare și se fac asocieri repetate până nu mai este posibil; se extrag implicanții primi (IP) rezultați.
- Expresia implicantului prim = disjuncție de variabile: variabila apare negată dacă prezintă 1 în dreptul ei și nenegată dacă prezintă 0.
- În tabelul de acoperire se trec pe coloane numai maxtermii și pe linii doar acei IP care acoperă cel puțin un maxterm.
- Conjuncția IP aleși din tabelul de acoperire => **FCM**.

Ex$_5$: $n = 3 \;\; f = \prod(0,6) \cdot \prod_{\Phi}(3,4,5,7)$

| TC | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 |

| | TC | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|
| IP | 0,4 | - | 0 | 0 |
| | 4,5 | 1 | 0 | - |
| | 4,6 | 1 | - | 0 |
| IP | 3,7 | - | 1 | 1 |
| | 5,7 | 1 | - | 1 |
| | 6,7 | 1 | 1 | - |

| | TC | $x_2$ | $x_1$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|
| IP | 4,5,6,7 | 1 | - | - |

$$\text{IP}\begin{cases}(0,4) = x_1 + x_0\\ (3,7) = \overline{x_1} + \overline{x_0}\\ (4,5,6,7) = \overline{x_2}\end{cases}$$

Tabelul de acoperire

| | IP \ TC | 0 | 6 |
|---|---|---|---|
| IPE | 0,4 | $\boxed{\text{X}}$ | |
| IPE | 4,5,6,7 | | $\boxed{\text{X}}$ |

$f = (x_1 + x_0) \cdot \overline{x_2}$ - **FCM**