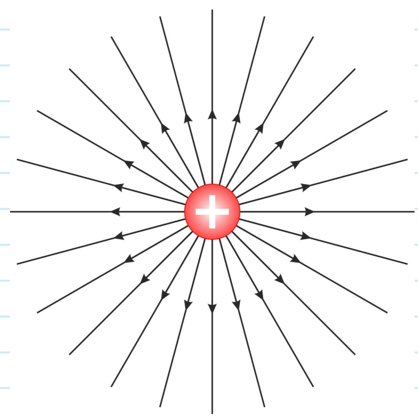
Cursul #10

10.1 Electricitate și magnetism

10.1.1 Legea lui Gauss

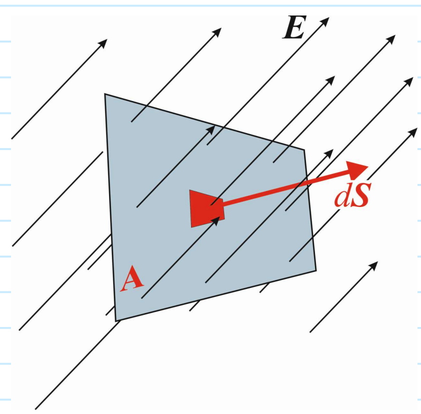
În C#9 am arătat cum putem să calculăm câmpul produs de o distribuție oarecare de sarcină electrică, iar folosind $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ am putea să calculăm forța asura unei sarcini plasată în acest câmp. În principiu, am putea să ne oprim aici, însă am văzut că integralele care trebuie calculate pentru a determina $\boldsymbol{E}$ sunt foarte complicate, chiar și în cazuri simple. O să discutăm aici o metodă foarte puternică, numită legea lui Gauss, care ne poate simplifica calculul câmpului electric în anumite cazuri.



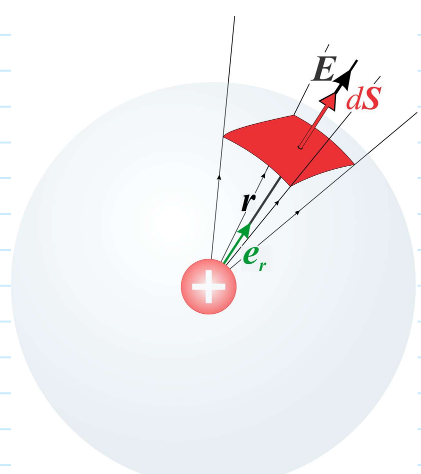
În imaginea alăturată am reprezentat o sarcină punctiformă și liniile de câmp, care reprezintă o metodă foarte confortabilă de vizualizare a câmpului electric produs de sarcină. O să definim o cantitate pe care o numim flux electric

$$\Phi_E = \int_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S},$$

și care este o măsură a *"numărului de linii"* de câmp care trec prin suprafața de arie A. Am pus în ghilimele deoarece, bineînțeles, numărul total de linii de câmp este infinit. Însă folosind convențiile din cursul C#9 relativ la liniile de câmp, deoarece densitatea de linii reprezentate este proporțională cu modulul câmpului, numărul de linii care trec printr-o suprafață infinitezimală $d\boldsymbol{S}$ este proporțional cu $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$. Produsul scalar din relația de mai sus ne dă numai componenta de-a lungul lui $\boldsymbol{E}$ a lui $d\boldsymbol{S}$, ca în imaginea alăturată. Când vorbim de fluxul printr-o suprafață ne referim numai la suprafața proiectată într-un plan perpendicular pe $\boldsymbol{E}$.



Deoarece sursele linilor de câmp sunt sarcinile, aceasta ne sugerează că fluxul printr-o suprafață închisă este proporțional cu sarcina totală care se găsește în volumul delimitat de suprafață, aceasta nu este altceva decât legea lui Gauss.



Haideți să calculăm fluxul produs de o sarcină punctiformă printr-o suprafață sferică de rază r. Suprafața prin care calculăm fluxul se numește suprafață gaussiană, ea se poate alege arbitrar, însă, de obicei, o alegem astfel încât să respecte simetria distribuției de sarcină, în cazul nostru aceasta este sferică. Fluxul prin suprafața sferică închisă o să fie:

$$\Phi_E = \oint_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\oint_A \boldsymbol{e_r} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\oint_A dS = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

unde am ținut cont de faptul că $\boldsymbol{e_r} \cdot d\boldsymbol{S} = dS$ și că $\oint_A dS$ este egală cu aria sferei de rază r, adică $4\pi r^2$. Observați că raza sferei se simplifică deoarece pe măsură ce supafața crește cu r^2 câmpul scade cu $1/r^2$. Aceasta se potrivește foarte bine cu ceea ce am spus mai sus, că fluxul este o măsură a numărului de linii de câmp care trece prin suprafață, deoarece același număr de linii o să treacă printr-o sferă cu centrul unde este sarcina, indiferent de raza ei. De fapt, nici nu trebuie să fie o sferă, același număr de linii o să treacă prin orice suprafață care închide sarcina. Atunci, putem concluziona că fluxul prin orice suprafață care închide sarcina este Q/ε_0.

Dacă avem o multitudine de sarcini, principiul superpoziției ne spune că fiecare sarcină produce un câmp independent de celelalte, iar câmpul total

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i\,,$$

atunci fluxul printr-o suprafață care închide toate sarcinile este:

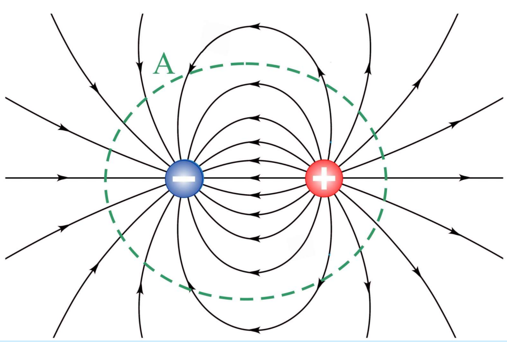
$$\Phi_E = \oint_A \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n}\left(\oint_A \boldsymbol{E_i}\cdot d\boldsymbol{S}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Q_i}{\varepsilon_0}\right),$$

și în final putem spune că fluxul prin orice suprafață închisă este dat de

$$\Phi_E = \oint_A \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\,,$$

unde Q_{int} este sarcina netă din interiorul suprafeței.

Observăm că dacă sarcina netă închisă de suprafață este pozitivă, atunci fluxul este pozitiv, dacă este negativă atunci fluxul este negativ, iar dacă este zero, fluxul este zero. Sarcină netă zero, nu înseamnă neapărat că nu trebuie să avem sarcină în interiorul volumului delimitat de suprafață, putem să avem sarcină, însă suma tuturor sarcinilor este zero. Ca în exemplul alăturat, unde fluxul prin suprafața indicată cu linie punctată este zero, deoarece numărul de linii care intră în suprafață este egal cu cel care ies.

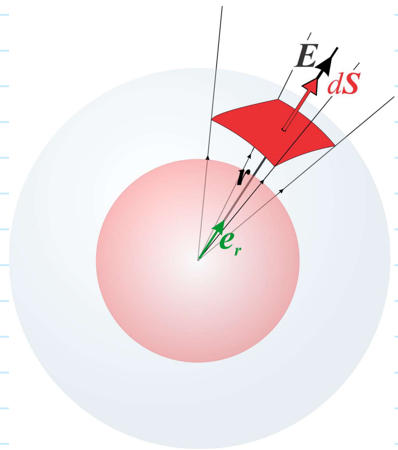


<u>Exemplul #1</u> Calculați câmpul electric produs de o sferă de rază *a* încărcată uniform cu sarcina *q*. O să calculăm câmpul atât în exteriorul cât și în interiorul sferei.

(a) Câmpul electric în exteriorul sferei.

Sfera încărcată cu sarcină electrică este sfera de culoare roșie din imagine. Datorită simetriei sferice, ne așteptăm ca liniile de câmp să fie pe direcția radială, similar cu cazul unei sarcini punctiforme discutat mai sus. În imagine sunt reprezentate câteva linii de câmp. Suprafața gaussiană pe care o să calculăm fluxul este suprafața sferică de rază *r* de culoare gri în imagine. Pentru a calcula câmpul electric la nivelul suprafeței gaussiene o să aplicăm legea lui Gauss. Pentru aceasta o să calculăm fluxul câmpului electric prin suprafața gaussiană indicată:

$$\Phi_E = \oint_{\text{sferă}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = E(r) \oint_{\text{sferă}} \boldsymbol{e_r} \cdot d\boldsymbol{S} = E(r) \oint_{\text{sferă}} dS = E(r)\,(4\pi r^2).$$



Aici am presupus că, după cum am precizat și mai sus, datorită simetriei sferice câmpul trebuie să fie dat de

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\boldsymbol{e}_r,$$

unde $E(r)$ este o funcție care depinde numai de distanța față de centrul sferei încărcate cu sarcină, cu alte cuvine câmpul are aceași valoare în orice punct de pe o suprafață sferică cu centrul în centrul serei încărcate.

Conform legii lui Gauss

$$\Phi_E = Q_{int}/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0,$$

deoarece sarcina din interiorul suprafeței gaussiene este egală cu sarcina totală a sferei. De aici obținem

$$E(r)\,(4\pi r^2) = Q/\varepsilon_0,$$

sau

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

rezultat similar cu cel obținut pentru o sarcină punctiformă. Putem concluziona că în exteriorul sferei câmpul electric este identic cu cel produs de o sarcină punctiformă de aceeași valoare plasată în centru sferei.

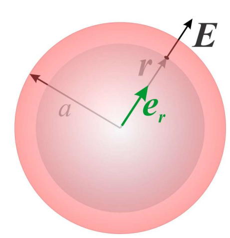
(a) Câmpul electric în interiorul sferei.

Pentru a putea calcula câmpul din interiorul sferei încărcate, trebuie să înțelegem că simetria rămâne aceeași; în interiorul sferei simetria sferică se păstrează, iar câmpul are aceeași formă

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\boldsymbol{e}_r,$$

ceea ce înseamnă că fluxul se calculează exact la fel

$$\Phi_E = \oint_{\text{sferă}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = E(r) \oint_{\text{sferă}} \boldsymbol{e_r} \cdot d\boldsymbol{S} = E(r) \oint_{\text{sferă}} dS = E(r)\,(4\pi r^2).$$



Singura diferență este că sarcina din interiorul suprafeței gaussiene nu mai este sarcina totală, ea o să fie

$$Q_{int} = Q\frac{4\pi r^3/3}{4\pi a^3/3} = Q\frac{r^3}{a^3},$$

atunci câmpul din interiorul sferei o să fie

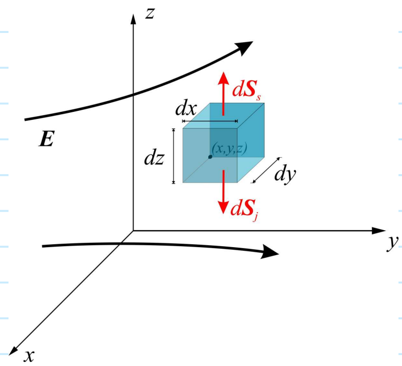
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q\,r}{a^3},$$

câmpul o să crească pe măsură ce ne îndepărtăm de centrul sferei încărcate, o să atingă valoarea maximă $Q/(4\pi\varepsilon_o a^2)$ pe suprafața sferei, iar apoi o să scadă în $1/r^2$.

Legea lui Gauss este valabilă întotdeauna, însă este cu adevărat utilă și permite calculul câmpului electric numai în cazuri de simetrie înaltă, cum sunt simetriile sferică, cilindrică și plană.

10.1.2 Divergența câmpului electric

Să considerăm o zonă în care avem un câmp electric $\boldsymbol{E}$ și o cutie infinitezimală de laturi dx, dy și dz. În imaginea alăturată este reprezentată cutia precum și două linii de câmp. Vrem să calculăm fluxul câmpului electric prin cutie. Pentru aceasta trebuie să calculăm fluxul prin cele 6 fețe ale cubului, însă o se ne rezumăm deocamdată doar la fața de sus și de jos. Fluxul o să fie atunci



$$\Phi_E^{sj} = \sum_{s+j} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}(z+dz)d\boldsymbol{S}_s + \boldsymbol{E}(z)d\boldsymbol{S}_j$$
$$= \boldsymbol{E}(z+dz)\cdot\boldsymbol{k}\,dxdy - \boldsymbol{E}(z)\cdot\boldsymbol{k}\,dxdy$$
$$= E_z(z+dz)\,dxdy - E_z(z)\,dxdy$$

unde am folosit faptul că $d\boldsymbol{S}_s = dxdy\boldsymbol{k}$ și $d\boldsymbol{S}_j = -dxdy\boldsymbol{k}$, iar $\boldsymbol{k}$ este versorul axei Oz, de asemenea faptul că $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k} = E_z$.

Putem să înmulțim și să împărțim relația de mai sus cu dz și o să obținem

$$\Phi_E^{sj} = \frac{E_z(z+dz)-E_z(z)}{dz}dxdydz = \frac{\partial E_z}{\partial z}dxdydz = \frac{\partial E_z}{\partial z}dV$$

unde am folosit faptul că $\left(E_z(z+dz)-E(z)\right)/dz = \partial E_z/\partial z$, conform formulei lui Taylor, și faptul că volumul cubului este $dV = dxdydz$.

La fel putem să calculăm fluxurile prin celelalte fețe ale cubului, iar într-un final obținem fluxul total ca fiind dat de

$$\Phi_E = \sum_{cutie} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV$$

Deoarece fluxul total este proporțional cu volumul cutiei, acesta se apropie de zero pe măsură ce cutia se micșorează spre un punct. Mărimea interesantă este deci raportul dintre flux și volum Φ_E/dV, care se numește divergență. O să notăm divergența cu

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right),$$

și o să reprezinte fluxul lui $\boldsymbol{E}$ per unitatea de volum care iese din cutia de volum infinitezimal dV. Putem rescire mai simplu relația de mai sus ca

$$\Phi_E = \sum_{cutie} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} dV.$$

Orice volum delimitat de o suprafață închisă poate fi împărțit în cutii infinitezimale, iar fluxul dintr-o astfel de regiune este doar suma fluxului din fiecare dintre cutiile infinitezimale, deoarece fluxul net prin orice față comună va fi zero (dacă $\boldsymbol{E}$ intră printr-o față, o să iasă prin cea adiacentă). Astfel, fluxul total prin orice suprafață închisă o dă fie

$$\Phi_E = \oint_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} dV,$$

unde V este volumul închis de suprafața A. Divergența trebuie privită în felul următor, dacă este zero atunci fluxul net este zero, câte linii de câmp intră în suprafață, tot atâtea ies din suprafață. Dacă este pozitivă, fluxul net este pozitiv, înseamnă că ies mai multe linii de câmp decât intră, deci în volumul închis de suprafață trebuie să avem surse de câmp (sarcină pozitivă netă). Dacă este negativă, fluxul net este negativ, înseamnă că ies mai puține linii de câmp decât intră, deci în volumul închis de suprafață există zone unde câmpul este absorbit (există sarcină negativă netă).

10.1.3 Legea lui Gauss în formă diferențială

Legea lui Gauss se scrie

$$\Phi_E = \oint_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Sarcina Q_{int} din interiorul volumului delimitat de suprafața A se poate scrie, la fel ca în C#9, ca o integrală pe volum a densității de sarcină ρ, în felul următor:

$$Q_{\text{int}} = \int_V \rho dV,$$

atunci legea lui Gauss devine

$$\Phi_E = \oint_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV,$$

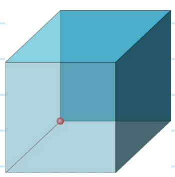
și cu relația de mai sus

$$\int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV,$$

de unde obținem legea lui Gauss în formă diferențială

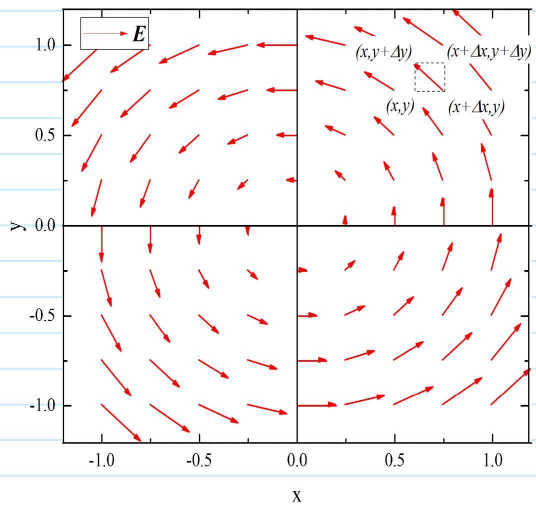
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

O sarcină punctiformă Q se găsește în colțul unui cub. Cât este fluxul electric prin latura de culoare mai închisă a cubului ?



10.2.1 Câmpul electrostatic este conservativ

În C#5 am discutat despre câmpul gravitațional și am spus că acesta este conservativ, la fel spunem și despre câmpul electrostatic că este conservativ. O să încercăm să detaliem aici această noțiune. În general, un câmp de forțe este conservativ, dacă lucrul mecanic efectuat de acesta asupra unui corp pentru a-l deplasa între două puncte A și B nu depinde de drumul ales, ci doar de ceea ce numim energie potențială evaluată în cele două puncte A și B. Matematic putem să scriem acest lucru ca $L_{AB} = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(A) - U(B)$. Mai mult decât atât, variația energiei cinetice este egală cu acest lucru mecanic $L_{AB} = E_c(B) - E_c(A)$, ceea ce ne conduce la legea conservării energiei totale, adică $E_{tot} = U(A) + E_c(A) = U(B) + E_c(B)$. Această lege să bazează pe faptul că forța care acționează asupra corpului este conservativă. Dar ce înseamnă acest lucru? Cum putem să decidem dacă o forță este conservativă sau nu? Pentru a înțelege o să luăm un exemplu și o să considerăm un *câmp electric fictiv neconservativ*, ca în imaginea alăturată. Pentru simplitate, câmpul ales este în 2D, fiecare săgeată reprezintă vectorul $\boldsymbol{E}$. Bineînțeles, câmpul electric umple tot spațiul. Câmpul electric reprezentat este descris matematic de $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} = -cy\boldsymbol{i} + cx\boldsymbol{j}$, unde c este o constantă. Dacă ne uităm la figură, pare că vectorul $\boldsymbol{E}$ are o *circulație* în sens trigonometric. Deoarece $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$, dacă am pune o sarcină q în acest câmp electric sarcina s-ar mișca în sens trigonometric și ar câștiga energie cinetică. Acest lucru nu este total neobișnuit, de exemplu, un corp care cade în câmp gravitațional terestru câștigă energie cinetică, însă în același timp pierde energie potențială deparece se aprope de Pământ, iar energia sa totală rămâne constantă. Deci, în cazul acestui câmp se pune întrebarea: putem defini o asemenea energie potențială care să scadă pe măsură ce sarcina se rotește, astfel încât să contrabalanseze creșterea de energie cinetică, iar energia totală să rămână constantă? În acest caz nu. Haideți să calculăm lucrul mecanic efectuat de câmp pentru a deplasa sarcina q între două puncte A, de coordonate (x, y), și B, de coordonate $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, dar pe două drumuri diferite. În primul rând, lăsăm sarcina să se miște de la (x, y) la $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pe direcția $+x$ către $(x + \Delta x, y)$ și apoi în direcția $+y$ către $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Lucrul mecanic o să fie



$$L_{AB}^1 = \int_x^{x+\Delta x} qE_x(y)dx + \int_y^{y+\Delta y} qE_y(x + \Delta x)dy = -qcy\Delta x + qcx\Delta y + qc\Delta x\Delta y.$$

Apoi lăsăm sarcina să se miște de la (x, y) la $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pe direcția $+y$ către $(x, y + \Delta y)$ și apoi în direcția $+x$ către $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Lucrul mecanic o să fie

$$L_{AB}^2 = \int_y^{y+\Delta y} qE_y(x)dy + \int_x^{x+\Delta x} qE_x(y + \Delta y)dx = qcx\Delta y - qcy\Delta x - qc\Delta y\Delta x.$$

Vedem că avem lucru mecanic diferit în funcție de drumul urmat. Aceasta înseamnă că lucrul mecanic nu poate fi definit ca o funcție de energie potențială care să depindă doar de cele două puncte A și B, adică $L_{AB} \neq U(A) - U(B)$, doarece diferența $U(A) - U(B)$ nu poate depinde de drumul ales. Diferența dintre lucurile mecanice efectuate la deplasarea pe cele două căi este $2qc\Delta x\Delta y$ și este egală cu lucru mecanic pentru a deplasa sarcina pe bucla închisă (din A în A):

$L_{AA} =$
$$= \oint q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_x^{x+\Delta x} qE_x(y)dx + \int_y^{y+\Delta y} qE_y(x+\Delta x)dy + \int_{x+\Delta x}^{x} qE_x(y+\Delta y)dx$$
$$+ \int_{y+\Delta y}^{y} qE_y(x)dy = 2qc\Delta x\Delta y$$

Prin urmare, pentru ca lucrul mecanic să poată fi definit ca o funcție de energie potențială care să depindă doar de poziție, este echivalent cu a spune că lucrul mecanic pe o buclă închisă trebuie să fie zero. În acest caz, lucrul mecanic de la A la B nu ar depinde de calea aleasă, iar variația energiei potențiale ar contrabalansa variația energiei cinetice și energia totală ar fi constantă, independentă de localizarea într-un astfel de câmp. Atunci ce constrângeri ar trebui să avem pentru ca un câmp să fie conservativ?

Am văzut că lucrul mecanic efectuat de câmp pentru a deplasa sarcina pe bucla închisă este
$$L = \oint q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = 2qc\Delta x\Delta y,$$

unde $\Delta A = \Delta x\Delta y$ este aria buclei, care a fost aleasă arbitrar, la fel ca și sarcina q. Acesta ne indică faptul că rezultatul trebuie să depindă de forma matematică a câmpului (în cazul nostru prin constanta c). Pentru a obține un rezultat general o să presupunem acum că $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j}$, însă să cunoaștem exact E_x și E_y. O să evaluăm aceste două componente în $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ folosind seria Taylor:

$$\begin{cases} E_x(y+\Delta y) = E_x(y) + \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y \\ E_y(x+\Delta x) = E_y(x) + \dfrac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x \end{cases}.$$

Calculăm lucrul mecanic pe bucla închisă
$L =$
$$= \oint q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_x^{x+\Delta x} qE_x(y)dx + \int_y^{y+\Delta y} qE_y(x+\Delta x)dy - \int_x^{x+\Delta x} qE_x(y+\Delta y)dx$$
$$- \int_y^{y+\Delta y} qE_y(x)dy = \int_y^{y+\Delta y} q\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x\right)dy - \int_x^{x+\Delta x} q\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y\right)dx = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y,$$

De aici este evident că lucrul mecanic o să fie zero dacă termenul din paranteză $(\partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y)$ este zero. Aceasta înseamnă că, dacă pentru câmpul nostru relația este satisfăcută, atunci acesta este conservativ.

De fapt, această condiție este o versiune oarecum simplificată a teoremei lui Stokes, care se scrie

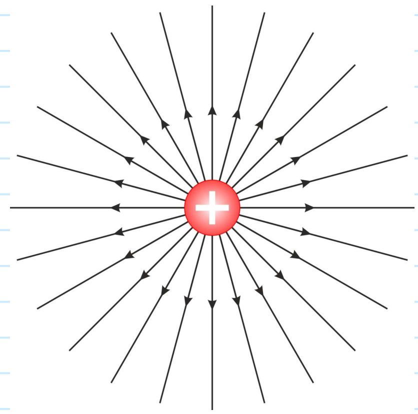
$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_A \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S},$$

unde $\nabla\times\boldsymbol{E}$ este *rotorul lui* $\boldsymbol{E}$ dat de

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Această teoremă ne spune că integrala pe o buclă închisă a unui câmp este egală cu rotorul câmpului integrat pe o suprafață delimitată de bucla pe care integrăm. În exemplul nostru, o suprafață ar fi ΔA, suprafața buclei rectangulare marcată cu linie punctată. Astfel, dacă $\nabla \times \boldsymbol{E}$ este zero, integrala pe o buclă închisă este zero și câmpul este conservativ. După cum sugerează și numele, rotorul ne dă *circulația* câmpului, astfel dacă un câmp nu are o circulație netă, atunci acesta este conservativ. Aceasta nu este cazul câmpului nostru fictiv reprezentat mai sus, care are o circulație netă în sens trigonometric.

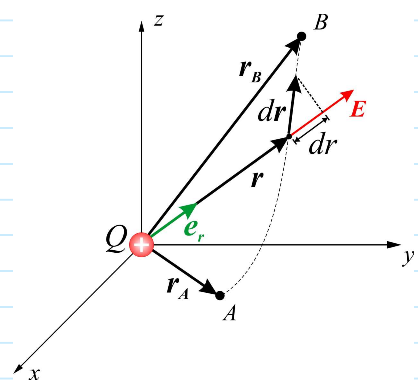
Dacă ar fi să ne uităm la câmpul electric produs de o sarcină punctiformă, este clar că acesta nu are niciun fel de circulație. Ne așteptăm ca $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ și câmpul să fie conservativ. Haideți să arătăm acest lucru, câmpul electric produs de o sarcină puntiformă este



$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e_r}.$$

Calculăm integrala de linie a acestui câmp între două puncte A și B oarecare. Calculul este similar cu cel din secțiunea C#5.2.3. Integrala de linie se scrie

$$\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e_r}\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}\bigg|_{r_A}^{r_B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_A} - \frac{Q}{r_B}\right),$$



unde am folosit faptul că $\boldsymbol{e_r}\cdot d\boldsymbol{r} = dr$. Deoarece integrala depinde doar de distanța de la cele două puncte până la sarcină, r_A și r_B, înseamnă că nu depinde de calea aleasă, iar integrala pe o buclă închisă este zero (deoarece atunci $r_A = r_B$):

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = 0\,,$$

ceea ce înseamnă că și $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$, iar *câmpul este conservativ.*

Noi am arătat că acest câmp electric este conservativ, însă câmpul este produs de o singură sarcină plasată în originea sistemului de coordonate. Dar asta nu are nicio importanță, puteam să plasăm sarcina oriunde, conservativitatea câmpului nu poate să depindă de cum am ales noi sistemul de coordonate. Mai mult decât atât, dacă avem o multitudine de sarcini, principiul superpoziției ne spune că fiecare sarcină produce un câmp independent de celelalte, iar

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots,$$

atunci

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 + \cdots) = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}_3 + \cdots = 0,$$

deci un *câmp produs de orice distribuție statică de sarcini este conservativ.*

Să considerăm o sarcină pozitivă Q în 2D. Plasați sarcina în originea sistemului de coordonate cartezian xOy și scrieți componentele vectorului $\boldsymbol{E}$. Calculați explicit $\nabla \times \boldsymbol{E}$ și arătați că acest câmp este conservativ. (*)

10.3.1 Gradientul potențialului

Câmpul electric $\boldsymbol{E}$ nu este un câmp oarecare, el este un tip special de câmp pentru care $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ și aceasta are o consecință importantă, pe care o vom discuta mai jos. Deoarece $\nabla \times \boldsymbol{E}$ este nul, toate componentele acestuia trebuie să se anuleze. Acesta se întâmplă dacă $\boldsymbol{E}$ poate fi obținut dintr-o funcție scalară $V(x, y, z)$, astfel încât:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

De exemplu, pentru componenta z a rotorului

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Putem repeta procedura pentru celelalte componente și să arătăm că într-adevăr un câmp conservativ $\boldsymbol{E}$ poate fi obținut dintr-o funcție scalară $V(x, y, z)$, iar

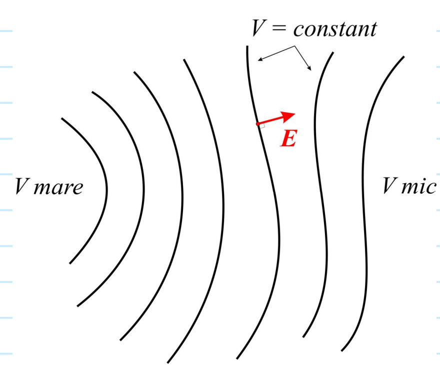
$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right),$$

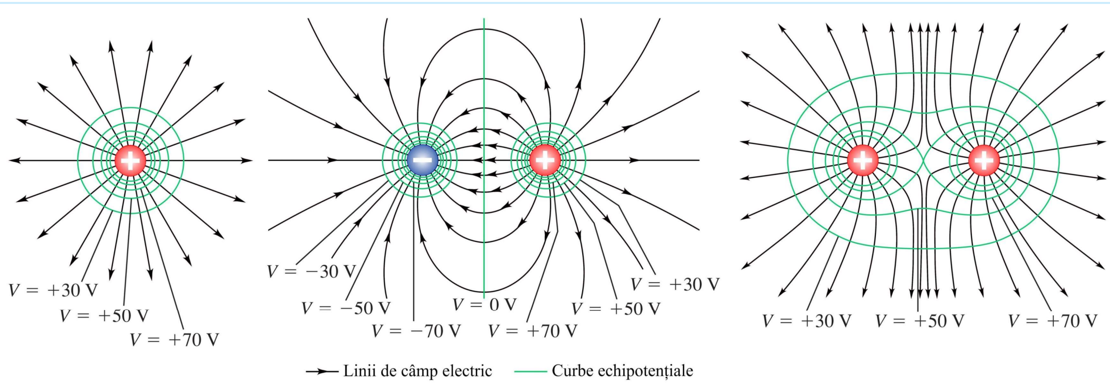
relație care se poate scrie mai condensat

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V,$$

dacă folosim notația $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$, unde $\boldsymbol{\nabla}$ se numește operatorul gradient. Acum este mai clar de ce notăm cu $\nabla \times \boldsymbol{E}$ rotorul, iar cu $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ divergența.

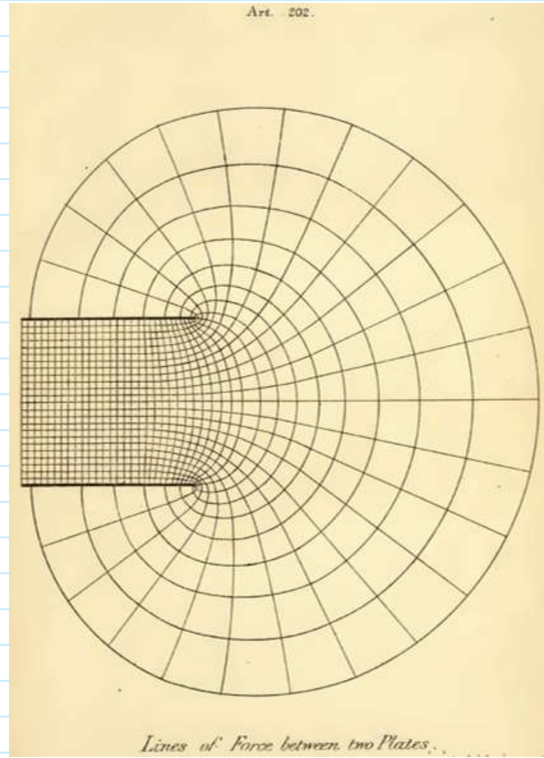
Observați că gradientul este un operator care ne transformă funcția scalară V în funcția vectorială $\boldsymbol{E}$. Deoarece gradientul are ca și componente variațiile spațiale pe cele trei direcții ale potențialului, acesta este un vector care reprezintă maximul variației spațiale al lui V în direcție și mărime. Deoarece $\boldsymbol{E}$ este *minusul gradientului*, acesta o să fie aliniat pe direcția pe care potențialul *scade cel mai rapid*. Ca și o consecință, pe direcția perpendiculară la $\boldsymbol{E}$ potențialul nu variază, adică $\boldsymbol{E}$ este perpendicular pe curbele echipotențiale (pe care potențialul este constant - ca în figura alăturată). Mai mult decât atât, deoarece liniile de câmp electric sunt tangente la $\boldsymbol{E}$, acestea vor fi întotdeauna perpendiculare pe curbele echipotențiale (ca mai jos).





Dacă lăsăm o *sarcină pozitivă* liberă într-un câmp electric, deoarece se deplasează paralel cu ***E***, ea se va deplasa pe direcția pe care *potențialul scade cel mai rapid*. Dacă lăsăm o *sarcină negativă* liberă într-un câmp electric, deoarece se deplasează antiparalel cu ***E***, ea se va deplasa pe direcția pe care potențialul *crește cel mai rapid.*

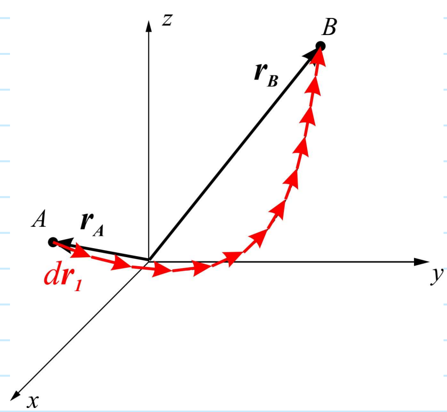
În imaginea alăturată puteți să observați liniile de câmp și suprafețele echipotențiale pentru două plăci încărcate cu sarcini egale și de semn opus, calculate de Maxwell în "*Treatise on Electricity & Magnetism*" (1873). Vederea este transversală, iar plăcile sunt liniile îngroșate. Acesta este un condensator plan paralel. Se poate observa că în interiorul acestuia câmpul este uniform, liniile de câmp sunt paralele și echidistante. La marginea condensatorului liniile de câmp se curbează, iar câmpul nu mai este uniform. Avem ceea ce numim efecte de margine. Care sunt liniile de câmp și care sunt suprafețele echipotențiale? Unde este câmpul electric mai intens?



Știm că pentru o sarcină punctiformă Q potențialul este $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$. Folosind acestă expresie se poate determina expresia vectorială a lui ***E.*** Pentru aceasta trebuie exprimat r în funcție de componentele carteziene (x, y, z) și apoi aplicată relația $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. Determinați expresia vectorială a lui ***E***. (*)

Să presupunem că avem potențialul $V(x, y, z)$. Pornind din punctul A vrem să ajungem în punctul B, pe calea indicată în imagine. Pornind din A o să ne mișcăm pe o distanță infinitezimală $d\boldsymbol{r}_1$, potențialul se va modifica cu cantitatea

$$dV = (\boldsymbol{\nabla} V)\cdot d\boldsymbol{r}_1,$$



apoi ne mișcăm pe o distanță infinitezimală $d\boldsymbol{r}_2$, potențialul se va modifica cu $dV = (\boldsymbol{\nabla} V)\cdot d\boldsymbol{r}_2$, ș.a.m.d. până când ajungem în B. Bineînțeles, modificarea totală a lui V, la deplasarea de la A la B o să fie

$$\int_A^B (\boldsymbol{\nabla} V)\cdot d\boldsymbol{r} = V(B) - V(A)\,,$$

dar $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$ și dacă înmulțim cu q obținem

$$q\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = q(\,V_A - V_B\,),$$

unde am notat $V(A) = V_A$ și $V(B) = V_B$ și care nu reprezintă atlceva decât lucrul mecanic efectuat de câmp pentru a deplasa o sarcină din A în B, ceea ce ne așteptam deoarece câmpul este conservativ, modificarea energiei cinetice este contrabalansată de cea a energiei potențiale, iar energia totală rămâne constantă.

Exemplul #2 Potențialul unui câmp este dat de

$$V(\boldsymbol{r}) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-\frac{r^2}{\delta^2}},$$

unde $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ și V_0, k și δ sunt constante. Determinați expresia lui $\boldsymbol{E}$.

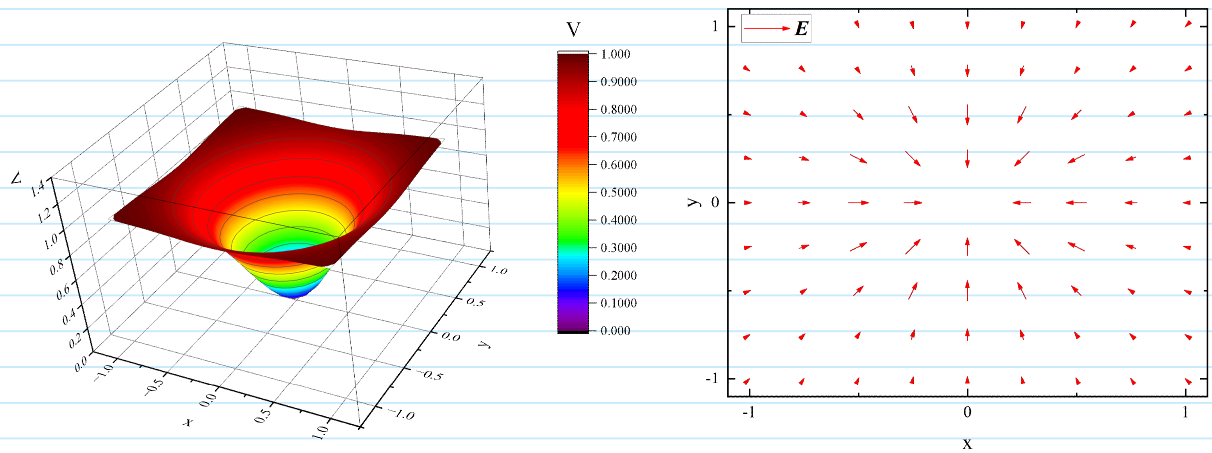
Prima dată trebuie să scriem expresia lui V în coordonate carteziene

$$V(x,y) = V_0 - \frac{1}{2}k\delta^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{\delta^2}}$$

și apoi aplicăm operatorul gradient

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)V(x,y) = -k(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})e^{-\frac{x^2+y^2}{\delta^2}} = -k\boldsymbol{r}e^{-\frac{r^2}{\delta^2}}.$$

Observați că V_0 nu intervine în expresia câmpului electric, el doar scade sau ridică valoarea potențialului, însă nu are efect asupra variației acestuia, deci nu are nici un efect asupra lui $\boldsymbol{E}$.

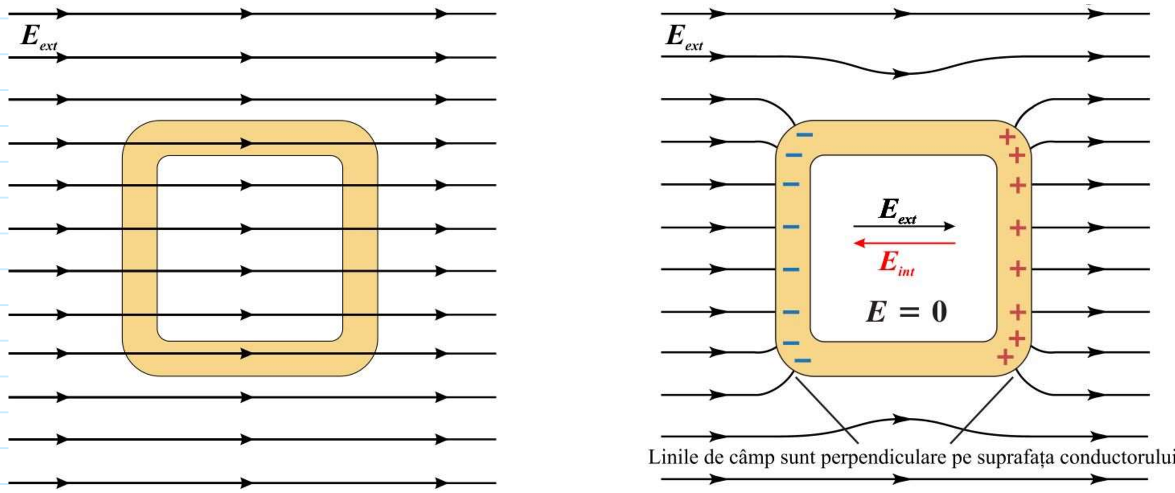


În imaginea de mai sus puteți să observați reprezentarea grafică a potențialului și a câmpului electric. Minimul potențialului atinge cea mai joasă valoare în origine, care este evident locația unei surse de atracție (o distribuție de sarcini negative). Cercurile concentrice din jurul minimului sunt echipotențiale. $\boldsymbol{E}$ este perpendicular pe curbele echipotențiale, așa cum se poate vedea din graficul din dreapta în care vectorii $\boldsymbol{E}$ sunt îndreptați spre origine, spre minimul potențialului.

Este câmpul $\boldsymbol{E} = xy\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + yx\boldsymbol{k}$ conservativ?, dar câmpul $\boldsymbol{E} = (-k/r^2)\ \boldsymbol{e}_r$? Pentru ce valori ale lui a, b și c câmpul $\boldsymbol{E} = (ax + by^2)\boldsymbol{i} + cxy\boldsymbol{j}$ este conservativ? (**)

10.4.1 Conductor în câmp electric

Să presupunem că avem corp conductor gol în interior, adică o cutie conductoare. Să aplicăm un câmp electric exterior. Pentru simplitate o să aplicăm un câmp uniform. Imediat după aplicarea câmpului electric, sarcinile libere din interiorul conductorului se vor redistribui. Astfel, pe fața din partea stângă o să avem un surplus de sarcini negative, iar pe fața din partea dreaptă o să



avem un deficit de sarcini negative, ceea ce este echivalent cu a avea un surplus de sarcini pozitive. Această redistribuire de sarcini libere are loc până când conductorul se va găsi la potențial constant. Adică, oricare două puncte (1) și (2) de pe conductor vor avea același potențial. Aceasta trebuie să se întâmple, deoarece în caz contrar lucrul mecanic pentru a transporta o sarcină între aceste două puncte nu o să fie zero $L_{12} = q(V_1 - V_2) \neq 0$ și o să avem un transfer de sarcini libere între aceste două puncte. Deci, după redistribuirea sarcinilor, *la echilibru electrostatic potențialul conductorului o să fie constant*.

Ca o consecință, liniile de câmp electric se vor redistribuii astfel încât să devină perpendiculare pe conductor (liniile de câmp sunt întotdeauna perpendiculare pe suprafețele echipotențiale). Mai mult decât atât, deoarece conductorul reprezintă o zonă din spațiu în care potențialul este constant, *în interiorul conductorului câmpul electric o să fie zero* (aceasta este o consecință a faptului că $E = -\boldsymbol{\nabla} V$, adică pe direcția pe care potențialul nu variază câmpul electric este zero).

O astfel de cutie conductoare pentru care câmpul electric în interior este zero se numește cutie sau cușcă Faraday. Ca o observație, cușca Faraday nu trebuie să fie închisă ermetic.

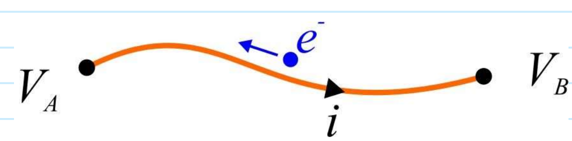
Persoana din imaginea alăturată se află într-o cușcă Faraday. În exteriorul cuștii există un câmp electric foarte puternic care produce descărcări electrice, însă persoana se află în siguranță deoarece câmpul electric din interiorul cuștii este zero.

Puteți să testați acest fenomen mai simplu, de exemplu, dacă înveliți telefonul mobil în folie de aluminiu și încercați să-l apelați.


Sursa imaginii: hotstreamer.deanostoybox.com/ross/Arc_pics/beth.jpg

10.4.2 Curentul electric

Să considerăm o zonă în care avem două puncte A și B care au potențialele V_A și V_B pentru care $V_A > V_B$. Conectăm aceste puncte printr-un conductor electric. Deoarece în conductor există electroni liberi, ei se vor deplasa de la B la A. Prin conductor o să avem o

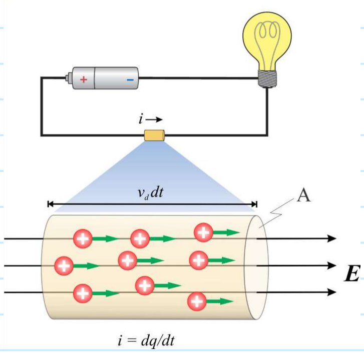


deplasare netă de sarcini electrice, o curgere de sarcini electrice, pe care o să o denumim *curent electric***.** Din motive istorice (noțiunea de curent electric există dinainte ca să se cunoască de existența electronilor, inițial s-a considerat curgerea curentului electric ca fiind o curgere de sarcini pozitive) o să considerăm direcția convențională de curgere a curentului electric ca fiind în sens opus curgerii electronilor prin conductor.

O să definim intensitatea curentului electric ca fiind cantitatea de sarcină care trece printr-o secțiune a conductorului într-o secundă

$$i = \frac{dq}{dt},$$

vedem că *i* se măsoară în C/s care a primit numele de A (amper).



Un curent de ordinul amperului este generat de exemplu de o baterie de lanternă conectată la un bec (ca în imaginea alăturată), bateria unei mașini poate să genereze curenți și de 100 A,în circuitele electronice obișnuite curenții folosiți sunt de ordinul miliamperilor (mA) sau microamperilor (μA) iar în circuitele integrate (procesoare) curenții sunt de ordinul nanoamperilor (nA) sau picoamperilor (pA).

10.4.3 Densitatea de curent, viteza de drift

Să considerăm cel mai simplu circuit electric posibil format dintr-o baterie și un bec (ca în imaginea de mai sus). Becul este conectat la baterie (care are două borne aflate la potențiale diferite, de obicei diferența de potențial între borne este de 1.5 V) cu ajutorul a doi conductori desenați cu linii negre. Să luăm o porțiune dintr-un conductor pe care o mărim ca să putem observa mai bine ce se întâmplă în interiorul conductorului. Viteza medie cu care se deplasează sarciniile electrice se numește viteză de drift (alunecare) v_d. Haideți să determinăm relația dintre curentul electric și viteza de drift. Încă o dată, vă reamintesc, chiar dacă electronii sunt cei care se mișcă prin conductor, o să presupunem că purtătorii de sarcină care asigură conducția sunt pozitivi, deoarece direcția convențională de curgere a curentului electric este în sens opus curgerii electronilor prin conductor.

Să presupunem că avem un număr *n* de purtători pe m^3 care se deplasează prin conductor. Deoarece toți purtătorii se deplasează cu viteza medie v_d, într-un interval dt, aceștia se vor deplasa pe o distanță $v_d dt$. Purtătorii care trec prin secțiunea (A) a conductorului în intervalul de timp dt sunt aceia care se găsesc în cilindrul de lungime $v_d dt$ (marcat în imagine). Cei care sunt mai *în spate* cu lungime $v_d dt$ față de (A) nu au timp în intervalul *dt* să ajungă până la secțiunea (A). Volumul acestui cilindru marcat în imagine este $A v_d dt$ [Atenție!, cu A am notat aria secțiunii (A) din imagine]. Numărul de purtători de sarcină din acest cilindru este $nAv_d dt$. Dacă fiecare purtător are sarcina q , atunci cantitatea de sarcină care se găsește în cilindrul de lungime $v_d dt$ și care trece prin secțiunea (A) a conductorului în intervalul de timp *dt* este:

$$dq = q(nAv_d dt) = nqv_d A dt,$$

iar curentul este

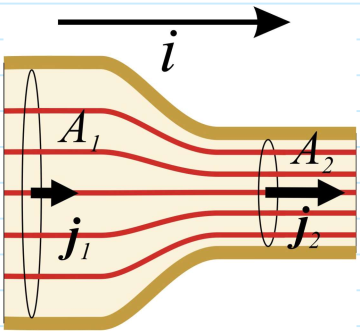
$$i = \frac{dq}{dt} = nqv_d A.$$

Definim densitatea de curent, ca fiind curentul pe unitatea de suprafață a secțiunii conductorului:

$$j = \frac{i}{A} = nqv_d.$$

În general $\boldsymbol{j}$ este o mărime vectorială, iar relația de mai sus devine

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v_d}$$



Ca să înțelegeți mai bine noțiunea de densitatea de curent, am reprezentat în imaginea alăturată un conductor care are două secțiuni de arie A_1 și A_2 prin care trece un curent electric constant *i* . În imagine sunt reprezentate și câteva linii de curent. Puteți să observați că în zona în care conductorul are secțiune mai mică liniile de curent sunt mai *înghesuite*, iar densitatea de curent este mai mare.

Curentul este constant, atunci:

$$i = j_1 A_1 = j_2 A_2,$$

deoarece $A_1 > A_2 \Rightarrow j_2 > j_1$.

Exemplul #3 Un curent electric de i = 1.9 A trece printr-un fir timp de 4 minute.

(a) Câtă sarcină trece printr-o secțiune a firului în acest timp ?

Curentul este $i = \frac{dq}{dt}$, deoarece intervalul de timp nu este infinitezimal și deoarece curentul este constant:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \Rightarrow \Delta q = i\Delta t = 1.9A \times 240\ s = 456\ C$$

(b) Câți purtători de sarcină trec printr-o secțiune a firului în acest timp ?

$N = \frac{\Delta q}{q}$, unde $q = 1.6 \times 10^{-19} C$ este sarcina fundamentală

$$N = \frac{456\ C}{1.6 \times 10^{-19} C} = 2.85 \times 10^{21} \text{ purtători de sarcină.}$$

(c) Dacă firul are diametrul de $d =$ 4mm, care este densitatea de curent prin fir?

Densitatea de curent este $j = i/A$, unde $A = (\pi d^2)/4$, deoarece firul are secțiune circulară, iar

$$j = \frac{i}{A} = \frac{4i}{\pi d^2} = 1.51 \times 10^5\ {}^{A}/_{m^2}$$

(d) Dacă firul este de Cu, care este viteza de drift a purtătorilor de sarcină ?

Știm că $j = nqv_d \Rightarrow v_d = \frac{j}{nq}$.

Densitatea de purtători de sarcină este în Cu este $n = 8.49 \times 10^{28}\ m^{-3}$, atunci

$$v_d = \frac{j}{nq} = \frac{1.51 \times 10^5 \mathrm{Cs^{-1}m^{-2}}}{1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C} \times 8.49 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}} = 1.11 \times 10^{-5}\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}} \cong 40\ \frac{\mathrm{mm}}{\text{oră}} \text{ !!!}$$

Această viteză este extrem de mică, de exemplu un purtător de sarcină ca să parcurgă un metru de conductor are nevoie de 25 de ore. Atunci de ce lumina se aprinde instantaneu când închidem întrerupătorul ?

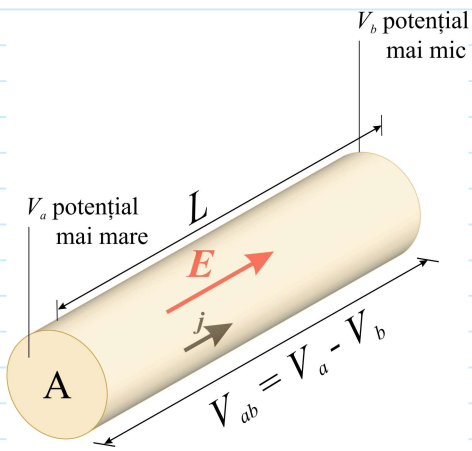
10.4.4 Legea lui Ohm

Experimental s-a observat că pentru o foarte mare clasă de materiale există următoarea relație între câmpul electric $\boldsymbol{E}$ aplicat și densitatea de curent $\boldsymbol{j}$ prin material:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E},$$

aici σ reprezintă conductibilitatea electrică a materialului și este o constantă de material care depinde doar de natura acestuia.

Să presupunem că avem un conductor de formă cilindrică, cu aria secțiunii A și de lungime L. La capetele acestui conductor o să aplicăm potențialele V_a și V_b, astfel încât $V_a > V_b$.



Deoarece $V_a > V_b$ o să avem un curent electric prin conductor de la V_a la V_b (vă aduc aminte că întotdeauna un curent electric curge de la potențial mai mare la potențial mai mic)

Datorită geometriei putem să scriem

$$j = \frac{i}{A}$$

și

$$E = \frac{V_a - V_b}{L} = \frac{V_{ab}}{L}.$$

Combinând relațiile de mai sus obținem:

$\frac{i}{A} = \sigma \frac{V_{ab}}{L}$ sau $V_{ab} = \frac{L}{\sigma A} i = Ri$ unde am notat $R = \frac{L}{\sigma A}$.

R este o constantă și se numește rezistență electrică. Cu această ultimă notație putem să scriem legea lui Ohm sub o formă pe care voi o cunoașteți:

$$V_{ab} = Ri.$$

Rezistența electrică se măsoară în $\frac{V}{A}$, care a primit numele de Ohm $1\Omega = \frac{1V}{1A}$.

Rezistivitatea și conductibilitatea electrică

Am văzut mai sus că pentru un conductor de formă regulată (adică, un conductor care are secțiune constantă de-a lungul lungimii) rezistența electrică se scrie:

$$R = \frac{L}{\sigma A},$$

unde σ este conductibilitatea materialului. O să definim rezistivitatea electrică ca

$$\rho = \frac{1}{\sigma}\ .$$

Astfel, rezistența se poate scrie:

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

Din relațiile de mai sus se poate observa că unitatea de măsură pentru rezistivitate este $[\rho] = \Omega.\mathrm{m}$ iar pentru conductibilitate este $[\sigma] = [\Omega.\mathrm{m}]^{-1}$.

Rezistivitate electrică și inversul ei, conductibilitatea electrică, sunt mărimi care caracterizează materialul din care este făcut conductorul. Rezistența este o mărime care depinde de geometria (de forma, de dimensiunile) conductorului.

În tabelul de mai jos găsiți rezistivitățile pentru câteva materiale:

Material	**Rezistivitate @ 20 °C (Ωm)**	**Coeficient de temperatură α $(°C)^{-1}$**
Conductori		
Argint	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Cupru	1.70×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Aur	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
Aluminiu	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Wolfram	5.60×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Fier	10.0×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Platină	11.0×10^{-8}	3.92×10^{-3}
Plumb	22.0×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Nichrom (aliaj NiCr)	150×10^{-8}	0.4×10^{-3}
Grafit (Carbon)	3500×10^{-8}	-0.5×10^{-3}
Semiconductori puri		
Germaniu	0.46	-48×10^{-3}
Siliciu	640	-75×10^{-3}
Izolatori		
Sticlă	10^{10} - 10^{14}	
Cauciuc	10^{13}	
Quartz	10^{16}	

Sunt date rezistivitățile a câtorva conductori, semiconductori și deoarece nu există izolatori perfecți (toți izolatorii conduc într-o anumită măsură curentul electric) și pentru câțiva izolatori. Puteți să observați variația cu 24 de ordine de mărime a rezistivității acestor materiale, de la cel mai bun conductor (Ag) la cel mai bun izolator (Quartz - care nu este altceva decât dioxid de siliciu cristalizat).

Puteți să observați următorul fapt: Cu are rezistivitate mai mică decât Au, deci este mai bun conductor decât Au, mai mult decât atât, Cu este mai ieftin Au. Atunci de ce contactele pentru procesoare sunt de Au sau de ce conectorii auriți sunt cei mai buni, de ce nu se folosesc conectori de Cu ?