Note Title 12.12.2021

Curs 12

Diferenţiale de ordin superior

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^m(A)$. Fie $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, definim funcţia g prin relaţia

$$g(t) = f(a + th),$$

unde $t \in (-r, r)$, iar $r > 0$ este ales astfel ca $a + th \in A$. Funcţia g este de clasă $C^m(-r, r)$.

Definiţie 1 *Diferenţiala de ordinul p, $1 \le p \le m$, a funcţiei f în punctul a se defineşte prin formula*

$$d^p f(a)(h) = g^{(p)}(0).$$

Avem

$$g(t) = f(\underbrace{a_1 + th_1}_{u_1}, \underbrace{a_2 + th_2}_{u_2}, \dots, \underbrace{a_n + th_n}_{u_n}).$$

Derivând obţinem

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial u_1}(a+th)u_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(a+th)u_2'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(a+th)u_n'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u_1}(a+th)h_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}(a+th)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(a+th)h_n, \\ g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial u_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}(a)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(a)h_n, \end{aligned}$$

deci notând $h_k = dx_k$, $1 \le k \le n$

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Calculând derivata de ordinul 2 a funcţiei g şi punând $t = 0$ se obţine relaţia

$$d^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i^2}(a)h_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} f''_{x_i x_j}(a)h_i h_j$$

sau înlocuind h_i cu dx_i, $1 \le i \le n$, avem:

$$d^2 f(a)(dx) = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i^2}(a)dx_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} f''_{x_i x_j}(a)dx_i dx_j.$$

- Pentru o functie de 2 variabile $f(x, y)$ avem

$$d^2 f(x, y) = f''_{x^2}dx^2 + f''_{y^2}dy^2 + 2f''_{xy}dxdy.$$

- Pentru o functie de 3 variabile $f(x, y, z)$ avem

$$d^2 f(x, y, z) = f''_{x^2}dx^2 + f''_{y^2}dy^2 + f''_{z^2}dz^2 + 2f''_{xy}dxdy + 2f''_{xz}dxdz + 2f''_{yz}dydz.$$

Observaţie 2.1 *Diferenţiala a doua a unei funcţii într-un punct este o funcţie polinomială, omogenă de gradul al doilea numită formă pătratică.*

Matricea diferenţialei de ordinul 2 a funcţiei f într-un punct a se numeşte matricea hessiană şi este dată de

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(a) & f''_{x_1 x_2}(a) & \dots & f''_{x_1 x_n}(a) \\ f''_{x_2 x_1}(a) & f''_{x_2^2}(a) & \dots & f''_{x_2 x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_n x_1}(a) & f''_{x_n x_2}(a) & \dots & f''_{x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Exemplu 3.1 *Să se calculeze diferenţiala de ordinul doi a funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 - 3xyz^2$ în punctul $a = (1, 1, 1)$.*

$$f'_x = 3x^2 - 3yz^2, \quad f'_y = 6y^2 - 3xz^2, \quad f'_z = -6xyz.$$
$$f''_{x^2} = 6x, \quad f''_{y^2} = 12y, \quad f''_{z^2} = -6xy;$$
$$f''_{xy} = -3z^2, \quad f''_{yz} = -6xz, \quad f''_{xz} = -6yz.$$

Obţinem

$$d^2 f(a)(dx, dy, dz) = 6dx^2 + 12dy^2 - 6dz^2 - 6dxdy - 12dydz - 12dxdz.$$

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ -3 & 12 & -6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile

In acest paragraf ne propunem să extindem formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă reală la funcţii de mai multe variabile reale. Reamintim această formulă pentru funcţii de o variabilă reală.

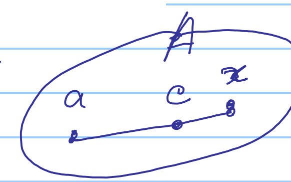
Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de $(n+1)$ ori derivabilă pe I. Atunci pentru orice $x, x_0 \in I$ cu $x \neq x_0$ există c cuprins între x şi x_0 astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Teorema 1 (Formula lui Taylor) *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime convexă şi deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^{m+1}(A)$. Atunci pentru orice $x, a \in A$ există $c \in [a, x]$ astfel încât*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{m!}d^m f(a)(x-a)}_{T_m(x)} + \underbrace{\frac{1}{(m+1)!}d^{(m+1)} f(c)(x-a)}_{R_m(x)}.$$

$T_m(x)$, $R_m(x)$ se numesc polinomul Taylor de ordin m, respectiv rest de ordinul m în formula lui Taylor.



Dem Fie $a, x \in A$. Definim funcţia $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(a + t(x-a))$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

Funcţia F este de clasă C^{m+1} pe $[0,1]$. Aplicăm lui F formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă cu $x_0 = 0$, $x = 1$:

(1) $F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \dots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(\theta)$, $0 < \theta < 1$.

$$F(t) = f(\underbrace{a_1 + t(x_1 - a_1)}_{u_1}, \dots, \underbrace{a_n + t(x_n - a_n)}_{u_n})$$

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(a + t(x-a))\underbrace{u_i'(t)}_{x_i - a_i} = df(a + t(x-a))(x-a).$$

$$F''(t) = d^2 f(a + t(x-a))(x-a)$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$F^{(m+1)}(t) = d^{m+1} f(a + t(x-a))(x-a)$$

$$
\begin{aligned}
F(0) &= f(a)\\
F(1) &= f(x)\\
F'(0) &= df(a)(x-a)\\
\dots &\quad \dots \quad \dots\\
F^{(m)}(0) &= d^m f(a)(x-a)\\
F^{(m+1)}(\theta) &= d^{m+1} f(c)(x-a), \; c = a+\theta(x-a).
\end{aligned}
$$

Înlocuind $F^{(k)}(0)$, $0 \le k \le m$, respectiv $F^{(m+1)}(\theta)$ din relațiile anterioare în (1) obținem formula din T.1.

Pentru funcții de două variabile formula lui Taylor cu rest de ordinul 2 este dată de:

Corolar 2. *Fie $f \in C^3(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ deschisă și convexă, $(x_0, y_0) \in A$.*
Avem

$$
f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right) +
$$
$$
+ \frac{1}{2!}\Big((f''_{x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) + R_2(x,y).
$$

Prezentăm în continuare o aplicație a formulei lui Taylor.

Exemplu *Să se scrie primii trei termeni din formula lui Taylor pentru funcția $f(x,y) = x^2 + xy + \ln(x+y-1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x+y>1$ în jurul punctului $(1,1)$.*

Soluție 2 *Fie $(x_0,y_0) = (1,1)$. Avem*

$$
f'_x(x,y) = 2x + y + \frac{1}{x+y-1}, \quad f'_y(x,y) = x + \frac{1}{x+y-1}
$$

$$
f''_{x^2}(x,y) = 2 - \frac{1}{(x+y-1)^2}, \quad f''_{xy}(x,y) = 1 - \frac{1}{(x+y-1)^2}, \quad f''_{y^2}(x,y) = -\frac{1}{(x+y-1)^2}
$$

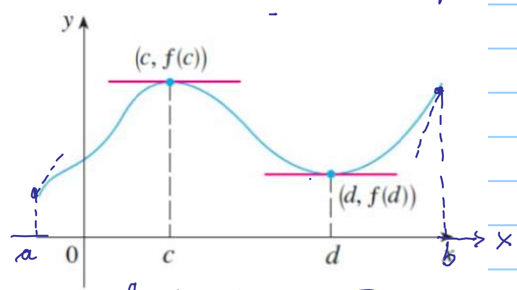
și

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = f(1,1) &+ \frac{1}{1!}\left(f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1)\right)\\
&+ \frac{1}{2!}\Big(f''_{x^2}(1,1)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + f''_{y^2}(1,1)(y-1)^2\Big) + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
f(x,y) = 2 + 4(x-1) + 2(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \cdots.
$$

Extreme pentru funcţii de mai multe variabile

1. Funcţii de o variabilă (recapitulare)



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Teorema 1 (Teorem lui Fermat) *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}I$, un punct de extrem local al lui f. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.*

Observaţie 1.1 *i) Teorema lui Fermat are o interpretare geometrică simplă: într-un punct de extrem local tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa Ox.*

ii) Din teorema lui Fermat rezultă că punctele de extrem local ale unei funcţii derivabile pe un interval şi interioare acestuia se află printre punctele critice. Nu orice punct staţionar este punct de extrem local.

(iii) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, are punctul staţionar $x = 0$, dar acesta nu este punct de extrem local.

Teorema 2 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(I)$ şi $x_0 \in \text{int}I$ un punct critic al lui f. Atunci:*

a) dacă $f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0$ este punct de maxim local al lui f.

b) dacă $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0$ este punct de minim local al lui f.

2. Funcţii de mai multe variabile

Definiţie 2.1 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. Punctul $a \in A$ se numeşte* ***punct de minim (maxim) local*** *al lui f dacă există $B(a,r)$ astfel încât*

$$f(a) \leq f(x)(f(a) \geq f(x)), \quad \forall x \in B(a,r) \cap A.$$

Un punct de minim sau maxim local se numeşte **punct de extrem local**.

Observaţie 2.2 *Un punct $a \in A$ este punct de extrem local al funcţiei $f : A \to \mathbb{R}$ dacă există $B(a,r)$ astfel încât diferenţa $f(x) - f(a)$ păstrează semn constant pentru orice $x \in B(a,r) \cap A$ (semnul $-$ pentru maxim şi semnul $+$ pentru minim).*

Definiţie 2.3 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. Punctul $a \in A$ se numeşte* ***punct de minim (maxim) global*** *al lui f dacă*

$$f(a) \leq f(x), (f(a) \geq f(x)), \quad \forall x \in A.$$

Un punct de minim sau maxim global se numeşte **punct de extrem global**.

Teorema 2.4 (Fermat) *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \text{int}A$, şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în a. Dacă a este punct de extrem local al lui f atunci $df(a) = 0$ $\iff \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$.*

Dem. Presupun ca a este punct de minim local al lui f. Atunci există $B(a,r) \subseteq A$ a.î. $f(a) \le f(x), \forall x \in B(a,r)$.

Definim $g : (-r, r) \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + ts)$, $t \in (-r, r)$ unde $s \in \mathbb{R}^n$ este un vector fixat cu $\|s\| = 1$.

Avem:

$g(0) = f(a) \le f(a+ts) = g(t)$, $\forall t \in (-r, r)$, deci $t = 0$ este punct de minim local al lui g. Atunci $g'(0) = 0$ conform teoremei lui Fermat pentru funcţii de o variabilă reală. Determinăm $g'(0)$.

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+ts) - f(a)}{t} = \frac{df}{ds}(a).$$

Rezultă că $\frac{df}{ds}(a) = 0$ pe orice direcţie s, prin urmare $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$, pentru $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Def. Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punct $a \in \text{int}A$ cu proprietatea $df(a) = 0$ s.n. punct critic sau punct staţionar al lui f.

Observaţie 2.5 *i) Teorema lui Fermat ne spune că pentru o funcţie diferenţiabilă pe o mulţime deschisă punctele de extrem local se găsesc printre punctele critice ale lui f.*

ii) Reciproca teoremei lui Fermat este falsă. Într-adevăr pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$ avem

$$f'_x(x,y) = 2x, \quad f'_y(x,y) = -2y$$

$\Longrightarrow$ $(0,0)$ punct critic al lui f. Dar $f(0,h) = -h^2 \le 0$ şi $f(h,0) = h^2 \ge 0$, pentru orice $h \in \mathbb{R}$. Deci $f(x,y) - f(0,0)$ nu păstrează semn constant în nicio vecinătate a lui $(0,0)$. Deci $(0,0)$ nu e punct de extrem local a lui f.

Înainte de a prezenta condiţii suficiente pentru ca un punct critic să fie punct de extrem vom prezenta câteva noţiuni despre forme pătratice.

Formele pătratice sunt funcţii polinomiale omogene de gradul doi.

De exemplu: $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + 5x_1x_2 + 3x_2x_3 + x_3x_1$; $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

O formă pătratică este o funcţie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ a. $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Matricea simetrică $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ s.n. matricea formei pătratice φ.
Din relația $a_{ij}=a_{ji}$, $1\le i,j\le n$ rezultă că φ se mai scrie sub forma:

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2+2\cdot\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j \quad , x=(x_1,\dots,x_n).$$

<u>Exemplu</u>: Forma pătratică

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1$$

are matricea:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 6\end{pmatrix}.$$

<u>Definiție</u>. O formă pătratică $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ s.n.:
1. pozitiv definită dacă $\varphi(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$;
2. negativ definită dacă $\varphi(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$;
3. nedefinită dacă există $x,y\in\mathbb{R}^n$ a.î. $\varphi(x)<0$, $\varphi(y)>0$;
4. pozitiv semidefinită dacă $\varphi(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ și există $x_0\in\mathbb{R}^n$, $x_0\ne 0$, a.î. $\varphi(x_0)=0$;
5. negativ semidefinită dacă $\varphi(x)\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ și $\exists x_0\in\mathbb{R}^n$, $x_0\ne 0$, a.î. $\varphi(x_0)=0$.

<u>Ex1</u>. $\varphi(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2$ este pozitiv definită pentru că $\varphi(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2+x_2^2>0$, $\forall (x_1,x_2)\ne(0,0)$.

<u>Ex2</u>. $\varphi(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2-x_2^2$ e nedefinită pentru că $\varphi(1,0)=1>0$; $\varphi(0,1)=-1<0$.

<u>Ex3</u>: $\varphi(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=(x_1-x_2)^2$ e pozitiv semidefinită pentru că $\varphi(x_1,x_2)\ge 0$, $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ și $\varphi(1,1)=0$.

Fie $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ o formă pătratică de matrice

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ - & - & \cdot\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}, \quad a_{ij}=a_{ji},\ 1\le i,j\le n.$$

Notăm prin $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ valorile proprii ale lui A.

Cum A e simetrică $\Rightarrow \lambda_k \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$.

Notăm: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

$\cdots$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$\cdots$

$\Delta_n = \det A$.

Teoremă (Criteriul lui Silvester)

1) φ este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$
$\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$;

2) φ este negativ definită $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots,$
$(-1)^n \Delta_n > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0$

3) φ este nedefinită $\Leftrightarrow \exists \lambda_i < 0, \lambda_j > 0$.

Obs: $d^2 f(a)$ este o formă pătratică.

Natura punctelor critice ale unei funcții se poate decide cu următorul rezultat.

Teoremă. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, $f \in C^2(A)$ și a un punct critic al lui f.

Atunci:

1) dacă $d^2 f(a)$ este pozitiv definită $\Rightarrow$ a este punct de minim local al lui f;

2) dacă $d^2 f(a)$ este negativ definită $\Rightarrow$ a este punct de maxim local al lui f;

3) dacă $d^2 f(a)$ nu e definită $\Rightarrow$ a nu este punct de extrem local al lui f.

Obs. dacă $d^2 f(a)$ este semidefinită atunci natura punctului critic se decide prin alte metode (de ex. studiul diferențialelor de ordin superior în acel punct)

Aplicație Să se determine extremele locale ale funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Sol. Determinăm punctele critice ale lui f:
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Big| :4 \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x^9 - x = 0$$
$$\Longleftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$$

Puncte critice: $(0,0)$; $(1,1)$; $(-1,-1)$.

Studiem $d^2 f$ în punctele critice. Avem:
$$d^2 f(x,y) = f''_{x^2} dx^2 + 2 f''_{xy} dx\,dy + f''_{y^2} dy^2$$
$$f''_{x^2} = 12x^2;\quad f''_{xy} = -4;\quad f''_{y^2} = 12y^2$$

$$d^2 f(x,y) = 12x^2 dx^2 - 8\,dx\,dy + 12y^2 dy^2$$
Sau
$$d^2 f(x,y) = 12x^2 h_1^2 - 8h_1 h_2 + 12y^2 h_2^2,\ (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$$

- $d^2 f(0,0) = -8h_1 h_2$

  Pt. $h_1 = h_2 = 1 \Rightarrow d^2 f(0,0) = -8 < 0$
  $h_1 = 1, h_2 = -1 \Rightarrow d^2 f(0,0) = 8 > 0$ $\Big| \Rightarrow d^2 f(0,0)$
  este nedefinită $\Rightarrow (0,0)$ nu e punct de extrem.

- $d^2 f(1,1) = 12h_1^2 - 8h_1 h_2 + 12h_2^2$ formă pătratică

  $$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 12 > 0 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 > 0$$

  deci $d^2 f(1,1)$ e pozitiv definită $\Rightarrow (1,1)$ e punct de min. local

- $d^2 f(-1,-1) = 12h_1^2 - 8h_1 h_2 + 12h_2^2$ e poz definită $\Rightarrow$ $(-1,-1)$ e punct de minim local.