Serii de numere reale

November 6, 2023

1 Noţiuni teoretice

Definiţie 1 *Pentru un şir de numere reale* $(a_n)_{n\geq 1}$ *expresia* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte serie numerică cu termenul general* a_n.

Şirul $(s_n)_{n\geq 1}$, definit prin $s_n = a_1 + a_1 + \cdots + a_n$, $n \geq 1$ se numeşte **şirul sumelor parţiale** ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dacă există limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $s \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci s se numeşte **suma seriei** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Dacă $s \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se numeşte **convergentă**. O serie care nu este convergentă se numeşte **divergentă**.

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Rezultă de aici următorul criteriu de divergenţă:

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

1.1 Serii remarcabile

1) **Seria geometrică** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$, $q \in \mathbb{R}$, este convergentă dacă şi numai dacă $q \in (-1, 1)$. Are loc relaţia

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, \text{ dacă } q \in (-1,1) \\ +\infty, \text{ dacă } q \in [1,\infty) \end{cases}.$$

Dacă $q \leq -1$, atunci seria geometrică este divergentă.

2) **Seria armonică generalizată** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

Pentru $\alpha > 1$ notăm $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Funcţia $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcţia Zeta a lui Riemann**. Au loc relaţiile

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ (Euler)}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se numeşte **serie armonică** şi avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

3) O altă serie remarcabilă este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

1.2 Criterii generale de convergenţă

Criteriul general al lui Cauchy. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Criteriul lui Abel-Dirichlet. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit şi $(b_n)_{n\geq 1}$ este un şir strict descrescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă.

Criteriul lui Abel. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ este un şir monoton şi mărginit, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă.

Criteriul lui Leibniz. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir descrescător pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Atunci **seria alternată** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ este convergentă.

2 Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

Criteriul raportului (D'Alembert).

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel că există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

i) Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

iii) Dacă $l = 1$ criteriul este ineficient.

Criteriul radicalului (Cauchy).

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel că există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

i) Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

iii) Dacă $l = 1$ criteriul este ineficient.

Criteriul lui Raabe-Duhamel.

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel că există

$\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

i) Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

iii) Dacă $l = 1$ criteriul este ineficient.

Criteriul condensării (Cauchy).

Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător de numere reale pozitive atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ au aceeaşi natură.

Criteriile comparaţiei. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi.

Criteriul 1. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a_n \leq b_n$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci:

i) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul 2. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci:

i) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

ii) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criterul 3. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, atunci:

i) Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ au aceeaşi natură

ii) Dacă $l = 0$ avem implicaţiile:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă;

În general pentru a decide natura unei serii prin al treilea criteriu al comparaţiei se folosesc seriile armonice generalizate. Se obţine astfel următoarea variantă a criteriului 3 des intâlnită în practică.

Consecinţa criteriului comparaţiei

Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\lim\limits_{n\emptyset\infty} n^{\alpha} a_n = l \in [0, \infty)$ atunci:

a) pentru $\alpha > 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $\alpha \leq 1$ şi $l \neq 0$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

3 Exerciţii şi probleme

Ex. 1 *Să se precizeze natura seriilor:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n^n}$*;*

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}a^n,\ a > 0$*;*

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)...(a+n)},\ a > 0$*;*

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^\alpha},\ a > 0,\ \alpha \neq a$*;*

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$*;*

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$*;*

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n,\ a > 0, c > 0;$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n;$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n^\alpha},\ \alpha > 0$*;*

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{n})}};$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right);$

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{a}{n}\right)^n,\ a > 0;$

m) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right);$

n) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n) \cdot \ln\ln(n)};$

o) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\cdots(2-\sqrt[n]{e})$;

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$;

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}$;

r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln n},\ a>0$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2},\ a>0$.

Ex. 2 *Să se precizeze natura seriilor:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{3^n}$;

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\cdot\sin\frac{1}{n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin n+b\cos n}{n}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{\sqrt{n}}$.

Ex. 3 *Se consideră şirul* $(a_n)_n$ *definit prin relaţia de recurenţă*

$$a_{n+1}=\ln(1+a_n),\ n\geq 1 \text{ şi } a_1=1.$$

a) *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

b) Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

c) Să se arate că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *este convergentă.*

4 Indicaţii şi răspunsuri

Solutie Ex. 1

Solutie Ex. 2 *a) Aplicăm criteriul raportului. Seria este convergentă.*

b) Pentru $a < 4$ *seria este convergentă, iar pentru* $a \geq 4$ *seria este divergentă.*

c) Aplicăm criteriul lui Raabe Duhamel. Seria este convergentă pentru $a > 1$ *si divergentă pentru* $a \leq 1$.

d) Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel. Seria converge pentru $\alpha > a$ *şi diverge pentru* $\alpha < a$

e) Aplicăm criteriul condensării. Seria este divergentă.

f) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă pentru* $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$.

g) Aplicăm criteriul radicalului. Pentru $a \geq c$ *seria este divergentă iar pentru* $a < c$ *seria este convergentă.*

h) Seria este divergentă.

i) Comparăm cu seria armonică. Seria este convergentă pentru $\alpha > 1$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 1$.

j) Comparăm cu seria armonică. Seria este divergentă.

k) $a_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 0,\ \forall\ n \geq 1$. *Comparăm seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *cu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *pentru o valoare potrivită a lui* α, $\alpha > 0$. *Avem:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \lim_{x\searrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^\alpha}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\searrow 0} \frac{e - e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}}{x^\alpha} = \lim_{x\searrow 0} e \cdot \frac{1 - e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}}{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} \cdot \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x^\alpha} \\
&= -e \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^{\alpha+1}} = -e \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{(\alpha+1)x^\alpha} \\
&= \frac{e}{\alpha+1} \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x^{\alpha-1}(1+x)} = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 1 \\ \frac{e}{2}, & \alpha = 1 \\ 0, & \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{e}{2}$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ *implică* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$*, conform Criteriului 3 al comparaţiei.*

l) *Seria este convergentă pentru* $a < e$ *şi divergentă pentru* $a \geq e$.

m) *Seria este divergentă.*

n) *Seria este divergentă.*

o) *Se foloseşte inegalitatea* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *şi criteriul comparaţiei. Seria este divergentă.*

p) *Se foloseşte inegalitatea*

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Conform criteriului comparaţiei seria este convergentă pentru $\alpha > 2$ *şi divergentă pentru* $\alpha \leq 2$. *Se poate aplica si criteriul Raabe Duhamel pentru* $\alpha \neq 2$.

q) *Se compară seria data cu seria armonică. Conform criteriului 3 al comparaţiei seria este divergentă.*

r) *Pentru* $a \geq 1$ *seria este divergentă* $(a_n \nrightarrow 0)$. *Pentru* $a < 1$ *se aplică criteriul condensării. Seria este convergentă pentru* $a < \frac{1}{e}$ *şi divergentă pentru* $a \geq \frac{1}{e}$. *Se poate aplica si Raabe Duhamel.*

s) *Aplicăm criteriul radicalului. Seria este convergentă pentru* $a < e$ *şi divregentă pentru* $a \geq e$.

Solutie Ex. 3 *a) Se aplică criteriul lui Leibnitz. Seria este convergentă.*

b) Se aplică criteriul lui Leibnitz. Seria este convergentă.

c) Seria este convergentă.

d) Se aplică criteriul lui Abel-Dirichlet. Seria este convergentă.

e) Se aplică criteriul lui Abel-Dirichlet. Seria este convergentă.

f) Se aplică criteriul lui Abel-Dirichlet. Seria este convergentă.

Solutie Ex. 4 *a) Se arată că sirul este monoton şi mărginit.*

b) Aplicăm criteriul comparaţiei comparând cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

c) Aplicăm criteriul comparaţiei comparând cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.