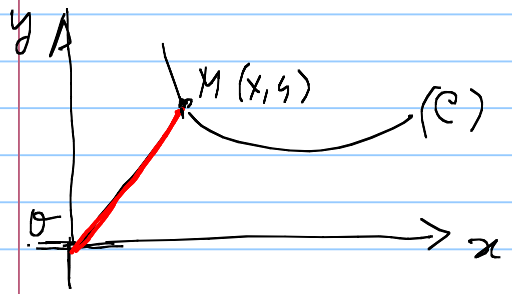
Note Title 05/01/2021

Extreme condiționate (cu legături)

Problema 1 Să se determine punctele de pe curba
$(C)\ x^2+xy+y^2-1=0$
aflate la distanță minimă față de origine.



M (x,y) variabil pe (C)

$OM^2 = x^2+y^2 \to \min$

Avem de minimizat funcția
$f(x,y) = x^2+y^2$
cu condiția
$x^2+xy+y^2-1=0.$

Aceasta e o problemă de extrem condiționat...

Formularea problemei de extrem condiționat:

Fie $f, g_1, g_2, \dots, g_m : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $m<n$.

Se cer extremele locale ale lui

(1) $f(x)$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in A$,

dacă variabila x satisface condițiile:

$$(2)\ \begin{cases} g_1(x)=0 \\ \dots \\ g_m(x)=0 \end{cases}$$; Notăm $g=(g_1,\dots,g_m): A \to \mathbb{R}^m$

Fie $C=\{x\in A \mid g_1(x)=0, \dots, g_m(x)=0\}$

D1 Punctul $a\in C$ s.n. punct de minim (maxim) local (global) condiționat al lui f dacă este punct de minim (maxim) local (global) al funcției $f|_C$ (restricția lui f la mulțimea C)

În acest caz a s.n. punct de extrem local (global) condiționat.

Prezentăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru rezolvarea problemei.
Ideea lui Lagrange a fost de introducere a unei noi funcții și a unor noi variabile a.î. ea să definească problema de extrem necondiționat pentru noua funcție.
Fie funcția $L : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ def. de:

$$L(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x).$$

L s.n. Lagrangeanul lui f și a lui $g_1, \dots, g_m$, iar variabilele λ_k, $1 \le k \le m$, s.n. multiplicatori Lagrange.

Def. Fie $h = (h_1, \dots, h_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^1 pe A. Matricea $J_h(x)$

$$J_h(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

s.n. matrice Jacobiană a lui h.
Dacă $m = n$, atunci $\det J_h(x)$ s.n. Jacobianul lui h.

T2 Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ o mulțime deschisă $f, g_k \in C^1(A)$, $1 \le k \le m$, și $a \in A$ punct de extrem local condiționat al lui f. Dacă rang $J_f(a) = m$, atunci $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ a.î.:

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(a, \lambda) = 0, \ 1 \le i \le n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(a, \lambda) = g_j(a) = 0, \ 1 \le j \le m. \end{cases}, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

Obs: Un punct $(a,\lambda) \in A \times \mathbb{R}^m$ care satisface (3) s.n. punct staționar condiționat a lui L.

T2 afirmă că punctele de extrem local condiționat ale lui f sunt puncte staționare condiționale ale lui L.

<u>Soluție Problema 1</u>. $f(x,y) = x^2+y^2$, $g(x,y) = x^2+xy+y^2-1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Lagrangeanul lui f: $L(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \iff$

$L(x,y;\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x^2+xy+y^2-1)$

Determinăm pct. staționare ale lui L.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(2x+y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(x+2y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+xy+y^2-1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (2+2\lambda)x + \lambda y = 0 \\ \lambda x + (2+2\lambda)y = 0 \\ x^2+xy+y^2 = 1 \end{cases}$$

Primele 2 ecuații formează un sistem liniar și omogen cu determinantul

$$\delta = \begin{vmatrix} 2+2\lambda & \lambda \\ \lambda & 2+2\lambda \end{vmatrix} = (2+2\lambda)^2 - \lambda^2 = (2+\lambda)(2+3\lambda)$$

Dacă $\delta \neq 0 \Rightarrow x=y=0$ care nu verifică ultima ecuație.

Dacă $\delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$.

1° $\boxed{\lambda = -2} \Rightarrow x+y=0$, $x^2+xy+y^2=1 \Rightarrow y=-x \Rightarrow$
$x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow (1,-1)$; $(-1,1)$ pct. staționare.

2° $\boxed{\lambda = -\frac{2}{3}} \Rightarrow x=y \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ pct staționare

Decidem natura punctelor staționare ale lui L.

Fie $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+xy+y^2-1=0\}$

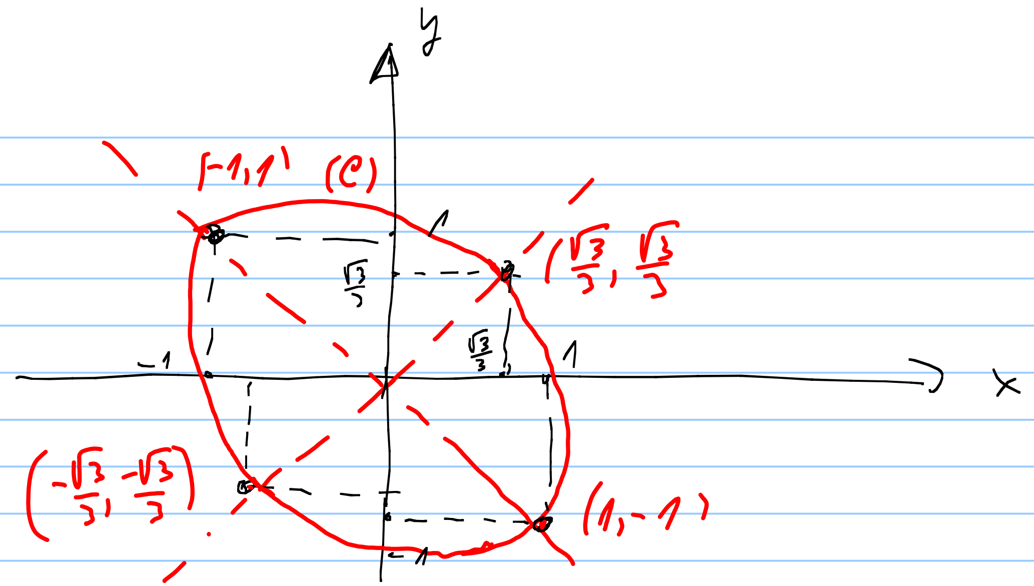
(C) este o elipsă $\Rightarrow$ C este mulțime compactă (închisă și mărginită)

Deci $f|_C$ fiind continuă își atinge marginile pe C. (Weierstrass).

Deci e suficient să calculăm valorile lui f în punctele staționare pt determinarea extremelor globale ale lui f.

$$f(1,-1) = f(-1,1) = 2 \rightarrow \max$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3} \rightarrow \min$$



Pentru cazul în care C nu e o mulțime compactă pentru determinarea naturii punctelor staționare ale lui L se poate utiliza următorul rezultat:

(T3) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $f, g_k \in C^2(A)$, $1 \le k \le m$ și (a, λ) un punct staționar al lui L.

Dacă pentru $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ cu $dg(a)(h) = 0$ avem:

$d^2L(a,\lambda)(h) > 0$ ($d^2L(a,\lambda)(h) < 0$) $\Longrightarrow$ a este punct minim (maxim) local condiționat al lui f.

Dacă $d^2L(a,\lambda)(h)$ este nedefinită $\Rightarrow$ a nu este punct de extrem local condiționat al lui f.