Serii de puteri. Serii Taylor.

November 5, 2024

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definiţie 1 *O serie de funcţii de forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ...$$

se numeşte ***serie de puteri*** *centrată în* x_0.

Notând $x - x_0 = t$ rezultă orice serie de puteri se transformă într-o serie de puteri centrată în 0.

Teoremă 1 (Abel) *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri. Atunci există* $R \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ *astfel ca:*
1) Seria este absolut convergentă pentru $|x| < R$*;*
2) Seria diverge pentru $|x| > R$*;*
3) Seria converge absolut şi uniform pentru $|x| \leq r < R$.

Numărul R din teorema de mai sus se numeşte **rază de convergenţă** a seriei de puteri şi este dat de relaţia

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Observaţie 1 *Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ *sau* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *atunci ele sunt egale cu* R.

Teoremă 2 (Abel) *Dacă seria de puteri* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge pentru* $x = R$ *(respectiv* $x = -R$*) atunci suma sa este continuă în* $x = R$ *(respectiv* $x = -R$*).*

Au loc următoarele **proprietăţi ale seriilor de puteri** care decurg din cele ale seriilor de funcţii uniform convergente:
- seriile de puteri se pot deriva termen cu termen pe $(-R, R)$
- suma unei serii de puteri este o funcţie indefinit derivabilă pe $(-R, R)$
- seriile de puteri se pot integra termen cu termen pe orice compact din intervalul $(-R, R)$.

Serii Taylor

Fie I un interval deschis din $\mathbb{R}$, $f \in C^{\infty}(I)$ şi $x_0 \in I$.

Definiţie 2 *Seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ *se numeşte* ***seria Taylor*** *asociată funcţiei* f *în punctul* x_0*.*

Dacă egalitatea $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x)$ are loc pe un interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ spunem că f se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului x_0. Are loc următorul rezultat:

Teoremă 3 *Presupunem că există* $M \geq 0$ *astfel ca*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n, \ \forall \ n \geq 1, \ \forall \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I.$$

Atunci f *se dezvoltă în serie Taylor în jurul punctului* x_0 *în intervalul* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*.*

Au loc următoarele dezvoltări în serie de puteri în jurul originii:

1) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \ |x| < 1;$

2) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots, \ x \in \mathbb{R};$

3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \ x \in \mathbb{R}$

4) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \ x \in \mathbb{R};$

5) $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \ |x| < 1;$

6) $(1 + x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots, \ |x| < 1, \ \alpha \in \mathbb{R}.$

1 Exerciţii şi probleme

Ex. 1 *Să se afle mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$;

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$;

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{5^{n+1} n!} x^n$;

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} x^n$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{2n}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$;

j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

l) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$;

m) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$;

n) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$.

Ex. 2 *Să se calculeze sumele următoarelor serii numerice:*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$;

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(2n+1)}$;

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$;

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+3)}$.

Ex. 3 *Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcţiile:*

a) $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \frac{8-2x}{x^2-8x+15},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}$;

c) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

e) $f(x) = \arcsin x,\ x \in [-1, 1]$;

f) $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2),\ x \in (-\frac{1}{2}, 1)$;

g) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, x \in (-1, 1)$;

h) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x},\ x \in (-1, \infty)$;

i) $f(x) = (\arctan x)^2, x \in \mathbb{R}$;

j) $f(x) = \cos^2 x, x \in \mathbb{R}$;

k) $f(x) = \cos^3 x, x \in \mathbb{R}$;

l) $f(x) = \sin^3 x, x \in \mathbb{R}$.

2 Indicaţii şi răspunsuri

Solutie Ex. 1 *a) Raza de convergenţă este* $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 3$, *iar mulţimea de convergenţă este* $C = [-3, 3)$.

$$S(x) = 3 \ln \frac{3}{3 - x},\ |x| < 3.$$

b) Raza de convergenţă este $R = 1$. $S(x) = \frac{1}{x} \ln (1 + x) + ln(1 + x) - 1$, $x \neq 0$.

c) Raza de convergenţă este $R = 1$. *Considerăm seria geomerică*

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,\ |x| < 1.$$

Prin derivări succesive se obţine suma $S(x) = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3},\ |x| < 1$.

d) Raza de convergenţă este $R = 1$. *Suma seriei este*

$$S(x) = \frac{2x}{(1 - x)^3},\ |x| < 1.$$

e) Raza de convergenţă este $R = +\infty$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 \right), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

f) Raza de convergenţă este $R = \infty$. $S(x) = e^{\frac{x}{5}} \left(\frac{x^2}{125} + \frac{2x}{25} + \frac{1}{5} \right)$, $x \in \mathbb{R}$.

g) Raza de convergenţă este $R = \infty$.

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}; \\ \frac{e^x - 1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Prin derivări succesive obţinem suma seriei $S(x) = e^x \frac{(x^3+x-1)}{x} + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

h) Raza de convergenţă este $R = 1$, *iar mulţimea de convergenţă este* $C = [-1, 1]$. *Fie*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

obţinem

$$S(x) = \ln(1 + x^2) - 2 + 2 \frac{\mathrm{arctg} x}{x}, \ |x| < 1, \ x \neq 0.$$

i) Fie $a_n = n^3$. *Raza de convergenţă este* $R = 1$ *şi mulţimea de convergenţă este* $C = (-1, 1)$. *Folosim seria geometrică*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4}, \quad |x| < 1.$$

j) Raza de convergenţă este $R = \infty$. *Avem*

$$\left.\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \end{aligned}\right., \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Adunăm cele două relaţii şi obţinem

$$e^x + e^{-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

k) Raza de convergenţă este $R = \infty$. *Avem*

$$\left.\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \end{aligned}\right., \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Scădem cele două relaţii şi obţinem

$$e^x - e^{-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{sh}x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

l) Raza de convergenţă este $R = \infty$. *Suma seriei este*

$$S(x) = \frac{\mathrm{ch}x + \cos x}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

m) Raza de convergenţă este $R = \infty$. *Suma seriei este*

$$S(x) = \frac{\mathrm{sh}x + \sin x}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

n)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^n}{n!} = e^{e^x}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Solutie Ex. 2 *a) Ataşăm seriei de numere următoarea serie de puteri:* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3}$. *Raza de convergenţă este* $R = 1$ *(seria de puteri este convergentă pentru* $x = 1$ *conform criteriului de convergentă a lui Leibniz). Notăm cu* $S(x)$ *suma seriei de puteri pe intervalul* $(-1, 1)$. *Atunci*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} = x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \ldots = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad |x| < 1.$$

Integrând rezultatul de mai sus avem

$$S(x) = \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = x - \operatorname{arctg}(x)$$

Suma seriei date este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} = \lim\limits_{x \nearrow 1} S(x) = 1 - \frac{\pi}{4}$.

b) Ataşăm seriei de numere următoarea serie de puteri: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$. *Raza de convergenţă este* $R = 1$ *şi seria de puteri este convergentă pentru* $x = 1$. *Notăm cu* $S(x)$ *suma seriei de puteri pe intervalul* $(-1, 1)$. *Atunci*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x \nearrow 1} S(x) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

c) Ataşăm seriei de numere următoarea serie de puteri: $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(2n+1)} x^{2n+2}$, $|x| < 1$. *Suma seriei numerice este* $\pi - 3$.

d) Derivând dezvoltarea $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, *obţinem* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$. *Înmulţim cu* x *şi derivăm din nou egalitatea. Rezultă*

$$e^x(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{n!}.$$

Repetând succesiv procedeul de mai sus avem

$$e^x(1+7x+6x^2+x^3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4x^{n-1}}{n!},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Înlocuim $x=1$ *în relaţia anterioară şi avem* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{n!}=15e.$

e) Ataşăm seriei de numere următoarea serie de puteri:
$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}x^{n+2}$, $|x|<1$ *Se obţine*

$$S(x)=\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x)-\frac{3x^2+2x}{4}.$$

Suma seriei numerice este $2\ln 2-\frac{5}{4}$.

f) Folosim dezvoltarea $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sin x$, *pentru orice* $x\in\mathbb{R}$. *Suma seriei numerice este* $\frac{\cos 1-\sin 1}{2}$.

g) Ataşăm seriei de numerice seria de puteri de la ex. 1*g*)*. Suma seriei numerice este* $\frac{3}{e}-1$.

h) Ataşăm seriei de numere următoarea serie de puteri:
$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+3)}x^{2n+3}$, $|x|<1$ *Suma seriei numerice este* $\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$.

Solutie Ex. 3 *a) Avem*

$$f'(x)=\arctan x,$$
$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\dots,\quad |x|<1.$$

Integrând de două ori obţinem:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+2},\ |x|<1.$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{5-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} \right) x^n, \quad |x| < 3.$$

c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$. *Folosind seria binomială obţinem*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

d) Se foloseşte produsul Cauchy al seriilor $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ *şi* $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) x^n, \ |x| < 1.$$

e) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. *Folosind seria binomială obţinem*

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

f)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1-x)(1+2x) = \ln(1-x) + \ln(1+2x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1-2^n) x^n, \ |x| \le \frac{1}{2} \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ |x| < 1. \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+1}\ln(x+1) = (1-x+x^2-\dots)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\right) \\ &= x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\dots,\ |x|<1. \end{aligned}$$

i)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}.$$

j)

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n}x^{2n}\right),\ x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

k)

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(3^{2n}+3)x^{2n},\ x\in\mathbb{R}.$$

l)

$$\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3-3^{2n+1})x^{2n+1},\ x\in\mathbb{R}$$