Note Title

Derivarea funcţiilor compuse. Operatori diferenţiali

09.12.2021

1 Derivarea funcţiilor compuse

Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervale şi funcţiile u, f

$$I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Dacă funcţiile u, f sunt derivabile atunci funcţia compusă $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(u(x))$ este derivabilă pe I şi are loc relaţia

$$F'(x) = f'(u(x))u'(x), \quad \forall x \in I.$$

Formula de mai sus se poate extinde la funcţii de mai multe variabile.

Teorema 1 *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$ şi $u, v : I \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(u(x), v(x)) \in A$ pentru orice $x \in I$, i.e.,*

$$I \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{(u,v)} A \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Atunci funcţia compusă $F : I \to \mathbb{R}$ dată de relaţia

$$F(x) = f(u(x), v(x)), \quad x \in I,$$

este derivabilă pe I şi are loc relaţia

$$(1) \quad F'(x) = f'_u(u(x), v(x))u'(x) + f'_v(u(x), v(x))v'(x), \quad \forall x \in I.$$

Demonstraţie. Fie $x_0 \in I$. Pentru $x \neq x_0$ avem

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= f(u(x), v(x)) - f(u(x_0), v(x_0)) = \\ &= (f(u(x), v(x)) - f(u(x_0), v(x))) + (f(u(x_0), v(x)) - f(u(x_0), v(x_0))) \\ &= f'_u(c_1, v(x))(u(x) - u(x_0)) + f'_v(u(x_0, c_2))(v(x) - v(x_0)), \end{aligned}$$

unde c_k, $k = 1, 2$, sunt puncte intermediare situate între $u(x)$ şi $u(x_0)$ şi respectiv $v(x)$ şi $v(x_0)$, obţinute prin aplicarea teoremei lui Lagrange.

$u(x_0)$ c_1 $u(x)$

$v(x_0)$ c_2 $v(x)$

Din relaţia anterioară obţinem

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f'_u(c_1, v(x))\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + f'_v(u(x_0), c_2)\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}.$$

Făcând $x \to x_0$ şi ţinând seama de continuitatea derivatelor parţiale ale lui f şi de faptul că funcţiile u, v sunt derivabile obţinem

$$F'(x_0) = f'_u(u(x_0), v(x_0))u'(x_0) + f'_v(u(x_0), v(x_0))v'(x_0).$$

Observaţie 1.1 *1. Formula de derivare (1) se scrie de obicei sub o formă mai simplă şi anume*

$$F' = f'_u u' + f'_v v'.$$

Exemplu 1.1 *Fie $F(x) = f(\sin x, \cos x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $x \in \mathbb{R}$.*
Avem $u(x) = \sin x$, $v(x) = \cos x$ şi $F(x) = f(u(x), v(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$F'(x) = f'_u(\sin x, \cos x)\cos x - f'_v(\sin x, \cos x)\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

In continuare dăm câteva formule analoage formulei (1) pentru funcţii de mai multe variabile.

- Pentru o funcţie de două variabile de forma $F(x, y) = f(u(x, y))$, unde

$$A \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{u} I \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

$f \in C^1(I)$ şi $u \in C^1(A)$ au loc relaţiile:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y) &= f'(u(x, y))u'_x(x, y) \quad \textit{sau} \quad F'_x = f'(u)u'_x; \\ F'_y(x, y) &= f'(u(x, y))u'_y(x, y) \quad \textit{sau} \quad F'_y = f'(u)u'_y. \end{aligned}$$

Exemplu 1.2 *Determinaţi funcţiile* $f(x,y) = g(2x+3y)$, $g \in C^2(\mathbb{R})$ *care verifică relaţia:*

$$f''_{x^2}(x,y) + f''_{xy}(x,y) + f''_{y^2}(x,y) = 0$$

Sol: $u(x,y) = 2x+3y \Rightarrow f(x,y) = g(u(x,y))$

$f'_x = g'(u)\cdot u'_x = 2g'(u)$; $f'_y = g'(u)\cdot u'_y = 3g'(u)$

$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = (2g'(u))'_x = 2\cdot g''(u)\cdot u'_x = 4g''(u)$

Analog: $f''_{xy} = (f'_x)'_y = (2g'(u))'_y = 2g''(u)\cdot u'_y = 6g''(u)$

$f''_{y^2} = 9g''(u)$. Inlocuind acum :

$19g''(u) = 0 \Rightarrow g''(u) = 0 \Rightarrow g(u) = C_1u + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = C_1(2x+3y) + C_2$.

- Pentru o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ de forma $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, unde

$$D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(u,v)} A \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

$f \in C^1(A)$ şi $u, v \in C^1(D)$ avem relaţiile:

$$\begin{aligned} F'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x \\ F'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y, \end{aligned}$$

sau cu celelalte notaţii pentru derivare parţială

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Exemplu 1.3 *Fie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *şi* $F(x,y) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. *Să se arate că are loc relaţia* $xF'_x + yF'_y = 0$.

Soluţie 2 *Fie* $u(x,y) = \frac{x}{y}$, $v(x,y) = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. *Avem*

$$\begin{aligned} F'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x = \frac{1}{y} f'_u - \frac{y}{x^2} f'_v \\ F'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y = -\frac{x}{y^2} f'_u + \frac{1}{x} f'_v. \end{aligned}$$

Atunci

$$xF'_x + yF'_y = \frac{x}{y} f'_u - \frac{y}{x} f'_v - \frac{x}{y} f'_u + \frac{y}{x} f'_v = 0.$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior avem următorul exemplu.

Exemplu 1.4 *Fie*

$$D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{(u,v)} A \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$$

cu $u, v \in C^2(D)$ *şi* $f \in C^2(A)$. *Atunci au loc relaţiile:*

$$\begin{aligned} F''_{x^2} &= f''_{u^2}(u'_x)^2 + 2f''_{uv}u'_x v'_x + f''_{v^2}(v'_x)^2 + f'_u u''_{x^2} + f'_v v''_{x^2} \\ F''_{y^2} &= f''_{u^2}(u'_y)^2 + 2f''_{uv}u'_y v'_y + f''_{v^2}(v'_y)^2 + f'_u u''_{y^2} + f'_v v''_{y^2} \\ F''_{xy} &= f''_{u^2}u'_x u'_y + f''_{uv}(u'_x v'_y + u'_y v'_x) + f''_{v^2}v'_x v'_y + f'_u u''_{xy} + f'_v v''_{xy}. \end{aligned}$$

Soluţie 3 $F'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$, $F'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y$.

$$\begin{aligned} F''_{x^2} &= (f'_u u'_x + f'_v v'_x)'_x = (f'_u u'_x)'_x + (f'_v v'_x)'_x \\ &= (f'_u)'_x u'_x + f'_u u''_{x^2} + (f'_v)'_x v'_x + f'_v v''_{x^2} \\ &= (f''_{u^2}u'_x + f''_{uv}v'_x)u'_x + f'_u u''_{x^2} + (f''_{uv}u'_x + f''_{v^2}v'_x)v'_x + f'_v v''_{x^2} = \\ &= f''_{u^2}(u'_x)^2 + 2f''_{uv}u'_x v'_x + f''_{v^2}(v'_x)^2 + f'_u u''_{x^2} + f'_v v''_{x^2}. \end{aligned}$$

Analog se calculează F''_{y^2} (tema). Pentru F''_{xy} avem:

$$\begin{aligned}
F''_{xy} &= (F_x)_y = (f'_u u'_x + f'_v v'_x)'_y = (f'_u u'_x)'_y + (f'_v v'_x)'_y \\
&= (f'_u)'_y u'_x + f'_u u''_{xy} + (f'_v)'_y v'_x + f'_v v''_{xy} \\
&= (f''_{u^2} u'_y + f''_{uv} v'_y) u'_x + f'_u u''_{xy} + (f''_{uv} u'_y + f''_{v^2} v'_y) v'_x + f'_v v''_{xy} = \\
&= f''_{u^2} u'_x u'_y + f''_{uv}(u'_x v'_y + u'_y v'_x) + f''_{v^2} v'_x v'_y + f'_u u''_{xy} + f'_v v''_{xy}.
\end{aligned}$$

- În general formula din Teorema 1 are loc pentru n funcţii $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de m variabile $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

  Fie
$$A \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{(u_1, u_2, \ldots, u_n)} B \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$F(x) = f(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)), \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in A.$$
  Dacă $u_k \in C^1(A)$, $1 \le k \le n$, $F \in C^1(B)$ atunci
$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial x_k}, \quad 1 \le k \le m.$$

2 Operatori diferenţiali

Operatorii care se definesc în acest paragraf sunt frecvent utilizaţi în analiza matematică, teoria ecuaţiilor diferenţiale , fizică, etc.

1. **Operatorul gradient**

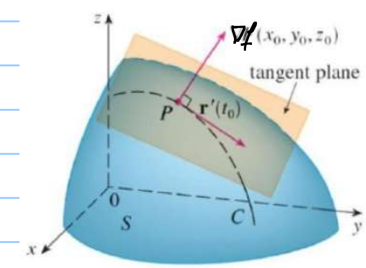
   Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$, o funcţie de clasă $C^1(A)$. Funcţia $\nabla f : A \to \mathbb{R}^n$, definită prin

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

se numeşte **gradientul** lui f. Operatorul care asociază unei funcţii f gradientul său ∇f se numeşte *operatorul gradient*. Acesta se scrie simbolic
$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}).$$

Obs: Altă notaţie pentru gradientul lui f este grad f; ∇f se citeşte "nabla f"

În cele ce urmează prezentăm o proprietate importantă a gradientului unei funcţii într-un punct.



Considerăm o suprafaţă (S) de ecuaţie $f(x, y, z) = 0$, unde $f \in C^1(A)$ şi $P(x_0, y_0, z_0) \in (S)$, i.e., $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Teorema 2 *Vectorul $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ este normal la suprafaţa (S) în punctul $P(x_0, y_0, z_0)$.*

Demonstraţie.

Fie (C) o curbă oarecare pe suprafaţa (S) care trece prin punctul P şi ale cărei ecuaţii parametrice sunt

$$(2.-1) \qquad (C): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I. \\ z = z(t) \end{cases}$$

Presupunem că $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$, $t_0 \in I$. Deoarece (C) se află pe suprafaţa (S) avem relaţia
$$f(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad t \in I.$$

Prin derivarea în raport cu t obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t) = 0$$

iar pentru $t = t_0$ obţine, $< \nabla f(x_0, y_0, z_0), r'(t_0) >= 0$ unde $r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

Deci vectorul $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ este ortogonal pe vectorul tangent la orice curba arbitrară prin punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ de pe suprafaţa (S), de unde rezultă că este normal la suprafaţa (S) în (x_0, y_0, z_0). ■

Aplicaţie Să se determine ecuaţia planului tangent la sfera $(S): x^2+y^2+z^2-169=0$ în punctul $M(3,4,12)$.

Soluţie. Punctul M aparţine lui (S) întrucât $3^2+4^2+12^2-169=0$. Fie

$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-169$.

Un vector normal la planul tangent la (S) în punctul M este

$$\nabla f(M) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(M), \frac{\partial F}{\partial y}(M), \frac{\partial F}{\partial z}(M)\right)$$

Avem: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$, deci

$\nabla F(M) = (6, 8, 24)$.

Ecuaţia planului tangent este

(1) $\frac{\partial F}{\partial x}(M)(x-x_M) + \frac{\partial F}{\partial y}(M)(y-y_M) + \frac{\partial F}{\partial z}(M)(z-z_M) = 0 \iff$

$6(x-3)+8(y-4)+24(x-12)=0 \iff$

$3x+4y+12z = 169$.

OBS. Ecuaţia planului tangent la o suprafaţă de ecuaţie $F(x,y,z)=0$ într-un punct M al acesteia este dată de relaţia (1).

2. Operatorul divergenţă

Fie funcţia cu valori vectoriale $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n$, de clasă $C^1(A)$. Funcţia $\operatorname{div} F : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Observaţie 2.2 *Divergenţa (lat. divergere) reprezintă fluxul câmpului care trece printr-o suprafaţă închisă. Divergenţa într-un punct (P) al spaţiului este fluxul câmpului care trece prin suprafaţa închisă care înconjoară un volum infinitezimal, care cuprinde punctul (P) al spaţiului.*

$\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle$

3. **Operatorul rotor** Pentru o funcţie vectorială de trei variabile reale, $F=(f_1,f_2,f_3):A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, de clasă $\mathcal{C}^1(A)$ se poate defini **rotorul** funcţiei:

$$\mathrm{rot}F=\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3},\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1},\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

Operatorul asociat se poate scrie şi în forma

$$\mathrm{rot}F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}\overset{not}{=}\nabla\times F.$$

Observaţie 2.3 *În calculul vectorial, rotorul este un operator care scoate în evidenţă "rata de rotaţie" a unui câmp vectorial, adică direcţia axei de rotaţie şi magnitudinea rotaţiei.*

4. **Operatorul lui Laplace (Laplaceanul)**

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2(A)$. Funcţia $\Delta f:A\to\mathbb{R}$, definită prin

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

se numeşte **Laplaceanul** lui f. Operatorul care asociază funcţiei f Laplaceanul său se numeşte *operatorul lui Laplace*.

Se poate observa că:

$$\Delta f=\mathrm{div}(\nabla f).$$

Ecuaţia $\Delta f=0$ se numeşte ecuaţia lui Laplace, iar soluţiile ei se numesc funcţii armonice.

5. **Matricea Jacobiană**

Fie $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $a\in E$, fie funcţia $F=(f_1,f_2,\dots,f_m):A\to\mathbb{R}^m$, fiecare componentă f_i având derivate parţiale de ordinul întâi continue. Matricea

$$J_F(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$

se numeşte **matricea jacobiană** a funcţiei F în punctul a.

Dacă $m=n$, determinantul acestei matrice se numeşte **jacobianul** funcţiei F în a (sau determinantul funcţional) şi se notează

$$\det J_F(a)=\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}(a).$$

Exemplu. Fie $F:(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$F(r,t)=(r\cos t, r\sin t)$

Notând $f_1(r,t)=r\cos t$, $f_2(r,t)=r\sin t$ avem:

$$J_F(r,t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial t}\\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t & -r\sin t\\ \sin t & r\cos t\end{pmatrix}$$

$\det J_F(r,t)=r.$

6. Derivata pe o direcție

Definim o noțiune de derivată pentru o funcție de mai multe variabile, care generalizează noțiunea de derivată parțială.

Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a=(a_1,\dots,a_n) \in \mathrm{int}\, A$, $s=(s_1,s_2,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|s\| = 1$.

Def. Spunem că f este derivabilă pe direcția s în punctul a dacă

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+ts)-f(a)}{t}$$

există și este finită.

Limita de mai sus se notează $\frac{df}{ds}(a)$ și se numește derivata lui f pe direcția s în punctul a.

Obs. Fie $B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^n$, $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $e_n=(0,0,\dots,0,1)$.

Dacă luăm $s=e_k$ obținem

$$\frac{df}{de_k}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_k)-f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Relativ la existența și calculul derivatei pe o direcție avem următorul rezultat

(T) Dacă f este de clasă C^1 într-o vecinătate a punctului a atunci f are derivată pe orice direcție $s \in \mathbb{R}^n$, $\|s\|=1$, în punctul a și

$$\frac{df}{ds}(a) = \langle \nabla f(a), s\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot s_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot s_n.$$

Dem. Cum $a \in \mathrm{int}\, A \Rightarrow \exists B(a,r) \subseteq A$. Definim

$$g:(-r,r) \to \mathbb{R}, \quad g(t)=f(a+ts), \ |t|<r$$

unde $s \in \mathbb{R}^n$, $\|s\|=1$ este un vector fixat. Avem

$$g(t) = f(\underbrace{a_1+ts_1}_{u_1},\dots,\underbrace{a_n+ts_n}_{u_n})$$

Funcția g este derivabilă și are loc relația

$$g'(t)=\frac{\partial f}{\partial u_1}(a+ts)\cdot u_1'(t)+\dots+\frac{\partial f}{\partial u_n}(a+ts)\cdot u_n'(t);$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_1}(a+ts)\cdot s_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(a+ts)\cdot s_n \Longrightarrow$$

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, s_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot s_n. \quad (1)$$

Pe de altă parte avem

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+ts) - f(a)}{t} = \frac{df}{ds}(a). \quad (2)$$

Din (1), (2) obținem:

$$\frac{df}{ds}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot s_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot s_n = \langle \nabla f(a), s \rangle.$$

7. Diferenţiala unei funcţii

Problema diferenţiabilităţii unei funcţii este legată de approximarea funcţiilor în jurul unui punct printr-o funcţie liniară.

- Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în punctul $a \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Relaţia de mai sus poate fi scrisă echivalent

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0,$$

sau

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{x - a} = 0,$$

unde $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(h) = f'(a)h$ este o funcţie liniară.

Obs *De aici se poate deduce că $f(x) - f(a) \cong T(x - a)$, pe o vecinătate a lui a, adică variaţia lui f în jurul lui a poate fi aproximată printr-o funcţie liniară.*

- Considerăm acum cazul aplicaţiilor de mai multe variabile reale. Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in \text{int}A$. Funcţia f se numeşte **diferenţiabilă** în a, dacă există funcţia liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, astfel ca

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0. \quad (3)$$

Se poate arăta că dacă f este diferenţiabilă în a aplicaţia T este unică. T se numeşte **diferenţiala** lui f în punctul a şi se notează cu $df(a)$.

Teorema 1 *Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, diferenţiabilă în $a \in \text{int}A$. Atunci:*

- *f este continuă în a;*
- *f are derivate parţiale de ordinul întâi in raport cu toate variabilele în punctul a şi $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n,$$

pentru orice $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Notând $h_k = dx_k$, $1 \le k \le n$, avem

$$df(a)(dx) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Teorema 2 *Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi $f \in C^1(A)$, atunci f este diferenţiabilă pe A.*

Diferenţiala se poate calcula şi prin utilizarea regulilor de diferenţiere, care sunt similare cu regulile de derivare. Dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sunt diferenţiabile în $a \in \text{int}A$, atunci

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$$

$$d(\lambda f)(a) = \lambda df(a), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g^2(a)}, \quad g(a) \neq 0.$$

Exemplu 2.1 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 2xy$, $a = (1,1)$, $df(1,1) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 5$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2.$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2$$

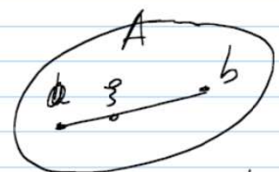
$$df(x,y)(h_1,h_2) = (3x^2+2y)h_1 + 2xh_2$$
$$df(1,1)(h_1,h_2) = 5h_1 + 2h_2$$
$$df(1,1)(dx,dy) = 5dx + 2dy.$$

Pentru o funcție derivabilă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

T1.6 (teorema de medie). Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime convexă și deschisă și $f \in C^1(A)$. Atunci $\forall a, b \in A$, $\exists \xi \in [a,b]$ a.î.

$$\boxed{f(b) - f(a) = df(\xi)(b-a)}$$

Dem.



Definim $g : [0,1] \to \mathbb{R}$
$g(t) = f(a + t(b-a))$,
pt $a, b \in A$.

Fie $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ $\Rightarrow$

$$g(t) = f(\underbrace{a_1 + t(b_1 - a_1)}_{u_1}, \dots, \underbrace{a_n + t(b_n - a_n)}_{u_n})$$

g este derivabilă pe $[0,1]$ – compunere de funcții derivabile.

Avem:

$$g'(t) = f'_{u_1}(a + t(b-a)) \cdot u_1'(t) + \dots + f'_{u_n}(a + t(b-a)) \cdot u_n'(t)$$
$$= f'_{u_1}(a + t(b-a)) \cdot (b_1 - a_1) + \dots + f'_{u_n}(a + t(b-a))(b_n - a_n)$$
$$= df(a + t(b-a))(b-a).$$

Conform t. lui Lagrange aplicată lui g există $c \in (0,1)$ a.î.

$$g(1) - g(0) = (1-0)\, g'(c) \iff$$

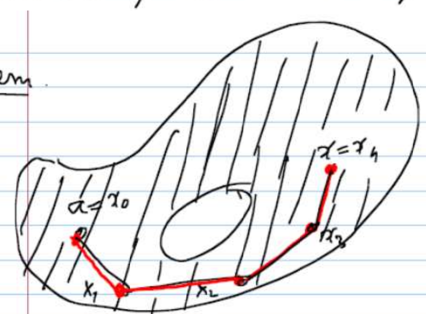
$$f(b) - f(a) = g'(c) = df(\xi)(b-a)$$

unde $\xi = a + c(b-a)$. ⊠

Prezentăm o consecință a T.1.6.

<u>Corolar 1.7</u>. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și conexă și $f \in C^1(A)$ a.î. $df(x) = 0$, $\forall x \in A$. Atunci f este constantă pe A.

<u>Dem.</u>



Fie $a \in A$ fixat și $x \in A$ variabil. Cum A e conexă și deschisă $\Rightarrow$ $\exists$ o linie poligonală

$$L = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

cu $x_0 = a$, $x_n = x$, $L \subseteq A$.

cf. T.1.6 $\Rightarrow \exists\, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ a.î.

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = df(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = 0$$

$\Rightarrow f(x_{k-1}) = f(x_k)$, $k = \overline{1,n}$ $\Rightarrow f(x_0) = f(x_n) \Rightarrow$

$f(x) = f(a)$, $\forall x \in A \Rightarrow f \equiv ct.$ pe A.

<u>Aplicație</u> Să se determine mulțimea valorilor funcției

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \cdot y \neq 1.$$

<u>Sol:</u>

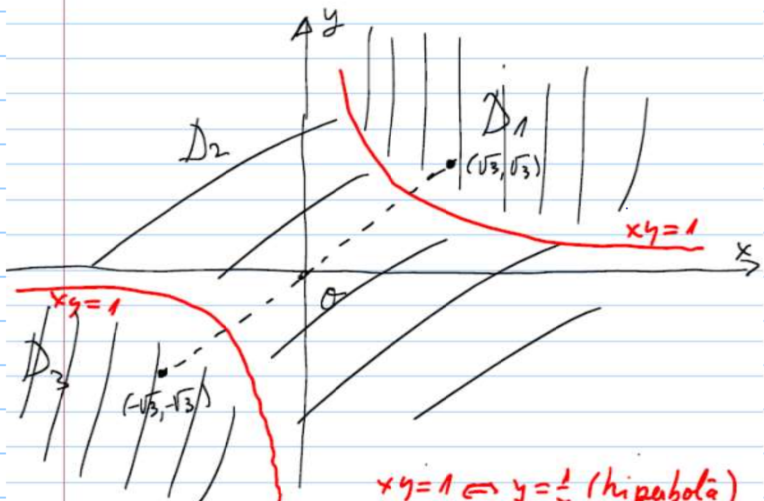
$$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\dfrac{1-xy-(x+y)\cdot(-y)}{(1-xy)^2}}{1 + \left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1 + x^2y^2 + x^2 + y^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = 0;$$

Analog $f'_y(x,y) = 0$. Deci
$df = f'_x dx + f'_y dy = 0$

Dom. de def a lui f este:
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$
Avem $df(x,y) = 0, \ \forall (x,y) \in D$



$xy=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$ (hiperbolă)

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ - reuniunea a 3 mulțimi conexe, dar D nu este conexă.
D_1, D_2, D_3 sunt mulțimi conexe și deschise $\Rightarrow$

$$f(x,y) = \begin{cases} C_1, & (x,y) \in D_1 \\ C_2, & (x,y) \in D_2 \\ C_3, & (x,y) \in D_3 \end{cases}; \quad C_1, C_2, C_3 = ?$$

$(x,y) \in D_1 \Rightarrow f(\sqrt{3},\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{1-3}$
$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi = C_1$

$(x,y) \in D_2 \Rightarrow f(0,0) = 0 = C_2$

$(x,y) \in D_3 \Rightarrow f(-\sqrt{3},-\sqrt{3}) = -\pi = C_3$. Prin urmare:

$$f(x,y) = \begin{cases} \pi, & xy>1,\ x,y>0 \\ 0, & xy<1 \\ -\pi, & xy>1,\ x,y<0 \end{cases}$$