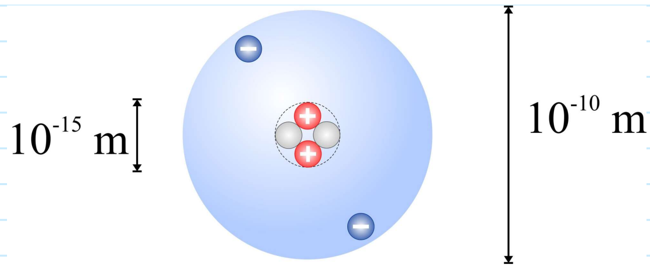
Cursul #9

9.1 Electricitate și magnetism

9.1.1 Structura atomului

În viziunea modernă atomul este format din nucleu și înveliș electronic. De exemplu, să considerăm atomul de heliu. Nucleul atomului de He conține doi protoni și doi neutroni, iar învelișul electronic conține doi electroni.

Electronul este o particulă fundamentală, acesta nu are constituenți. Protonul și neutronul sunt constituiți din combinații de câte trei quarcuri. Acestea din urmă sunt particule fundamentale care nu pot exista izolate.



Masele constituenților atomici sunt:

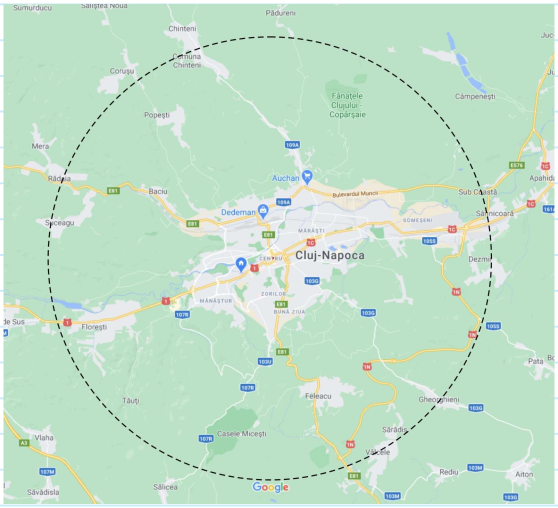
$m_e = 9.11 \times 10^{-31}\ kg,$

$m_p = 1.67 \times 10^{-27}\ kg,$

$m_n = 1.67 \times 10^{-27}\ kg.$

Observați că masa protonului (m_p) sau masa neutronului (m_n) este de aproximativ 1800 de ori mai mare decât masa electronului (m_e). Nucleul atomic are un diametru tipic de 10^{-15} m, iar atomul are un diametru tipic de 10^{-10} m. Aceasta înseamnă că nucleul este extrem de mic față de atom, însă conține mai mult de 99.9% din masa acestuia.

Atomul conține foarte mult spațiu *gol*. Ca să înțelegeți mai bine, să considerăm că nucleul este o minge de fotbal care se găsește în centrul Clujului. Atunci atomul ar avea circumferința indicată de linia punctată din imagine. Adică electronii din învelișul electronic s-ar afla undeva în această zonă.



Pe lângă masă, constituenții atomului au și sarcină electrică:

electronul - sarcină electrică negativă,
protonul - sarcină electrică pozitivă,
neutronul - sarcină electrică neutră (nu are sarcină electrică).

Ce este sarcina electrică ? Sarcina electrică este o proprietate intrinsecă a materiei. Relativ la interacțiunea dintre sarcini, putem să spunem că, dacă într-o zonă din spațiu avem două sarcini pozitive sau două sarcini negative, acestea se resping, dacă avem o sarcină pozitivă și una negativă, acestea se atrag, dacă avem o sarcină pozitivă sau negativă și o sarcină neutră, acestea nu interacționează, iar dacă avem două sarcini neutre, acestea nu interacționează.

9.1.2 Sarcina electrică

Deoarece electronul este o particulă fundamentală, ***sarcina*** acestuia este ***fundamentală***. Aceasta este egală cu

$$q_e = -1.6 \times 10^{-19}\ C,$$

iar sarcina protonului este egală cu a electronului însă este de semn opus

$$q_p = +1.6 \times 10^{-19}\ C.$$

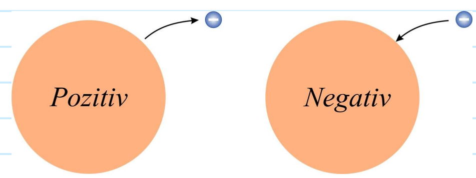
Unitatea de măsură pentru sarcina electrică este C - Coulomb.

Atomul este *neutru* din punct de vedere electric. Acesta conține *Z* electroni și protoni, astfel că

$$Q_{atom} = Zq_e + Zq_p = Z(-1.6 \times 10^{-19}\ C + 1.6 \times 10^{-19}\ C) = 0.$$

Cu toate că este neutru, atomul poate deveni negativ (ionizat negativ) dacă câștigă un electron sau poate deveni pozitiv (ionizat pozitiv) dacă pierde un electron.

Deoarece corpurile macroscopice sunt constituite din atomi, acestea sunt neutre din punct de vedere electric, însă pot fi încărcate electric prin transfer de electroni. Dacă pierde electroni corpul devine pozitiv, iar dacă câștigă electroni corpul devine negativ.



Există trei principii care guvernează comportamentul sarcinilor electrice:

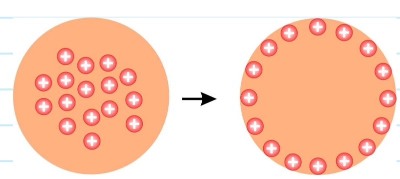
1. Sarcina electrică fundamentală este $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$ (nu există sarcină mai mică).

2. Într-un sistem închis sarcina electrică se conservă. Cu alte cuvinte, nu putem crea sau distruge sarcină electrică.

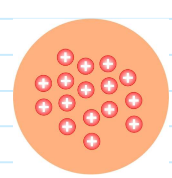
3. Sarcina electrică este cuantificată. Acest principiu ne spune că sarcina electrică a oricărui corp sau particulă este întotdeauna $\pm N \cdot 1.6 \times 10^{-19}\ C$, unde N este un număr natural, adică este întotdeauna un multiplu al sarcinii fundamentale.

Din punct de vedere al conducției electrice, există două categorii de materiale:

- *conductoare* (metalele, lichide ionice, ..), care conduc curentul electric. Acestea au intrinsec sarcini electrice libere și pentru care sarcinile adăugate în exces sunt libere să se miște prin conductor. Ca o consecință, la echilibru electrostatic sarcinile în exces se vor distribui întotdeauna la suprafața conductorului.



- *izolatoare* (plastic, sticlă, ...), care nu conduc curentul electric. Acestea nu au intrinsec sarcini electrice libere și pentru care sarcinile adăugate în exces nu sunt libere să se miște prin conductor.

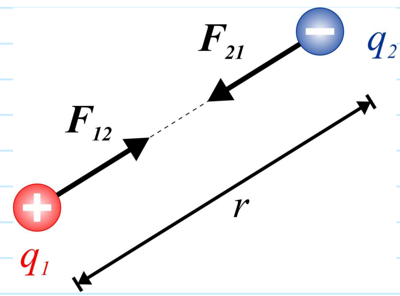


Poate ați observat câteodată că în momentul când apropiați o cheie de o yală se produce o scânteie (o descărcare electrică). Aceasta deoarece voi împreună cu cheia sunteți încărcați fie pozitiv, fie negativ, iar în momentul când apropiați cheia de yală avem un transfer de electroni între cheie și yală. În momentul transferului, electronii o să producă excitarea moleculelor aerului care vor emite lumină. Dacă cheia are o sarcină netă de $1.92 \times 10^{-16}\ C$, câți electroni se transferă între cheie și yală ?

9.1.3 Legea lui Coulomb

Charles Augustin de Coulomb a studiat experimental forța de interacțiune dintre sarcini electrice. Legea care îi poartă numele ne spune că forța dintre două sarcini punctiforme este direct proporțională cu produsul acestora și invers proporțională cu pătratul distanței dintre sarcini. Ce înseamnă sarcini punctiforme? Particulele subatomice sunt punctiforme, ele nu au formă, deci această lege este întotdeauna valabilă pentru acestea. În cazul corpurilor macroscopice, înseamnă că sarcinile trebuie să fie suficient de mici în raport cu distanța dintre ele astfel încât forma acestora să aibă un efect neglijabil. Există o excepție, pentru corpuri macroscopice sub formă de sferă și care sunt încărcate uniform legea lui Coulomb este valabilă, chiar dacă sferele sunt relativ apropiate.

Să presupunem că avem două sarcini una pozitivă q_1 și una negativă q_2. Sarcinile fiind de semn opus se vor atrage. Forța F_{12} este forța cu care sarcina 2 atrage sarcina 1, iar F_{21} este forța cu care sarcina 1 atrage sarcina 2.



Conform principiului acțiunii și reacțiunii aceste două forțe sunt egale în modul și de sens opus, astfel putem scrie:

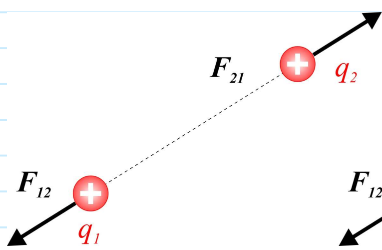
$$\begin{cases} \boldsymbol{F_{12}} = -\boldsymbol{F_{21}} \\ F_{12} = F_{21} \end{cases}.$$

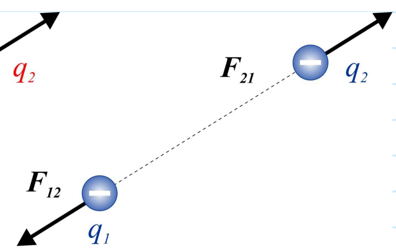
Legea lui Coulomb ne spune că

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

unde $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\ Nm^2/C^2$, iar $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ C^2/Nm^2$ și se numește permitivitatea electrică a vidului.

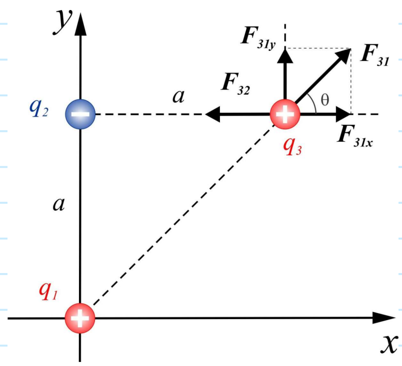
Dacă sarcinile au același semn atunci acestea se resping. Ca regulă, forțele electrostatice sunt întotdeauna pe direcția care unește cele două sarcini, înspre sarcini dacă au semene opuse și dinspre sarcini dacă au același semn, similar cu cazul forței de atracție gravitațională.





Care interacțiune este mai puternică: electrică sau gravitațională? Pentru a vedea care interacțiune este mai puternică, calculați raportul dintre forța electrostatică și forța de atracție gravitațională pentru doi electroni aflați la o distanță oarecare *r* unul de celălalt. Repetați calculul și pentru doi protoni. Constanta atracției gravitaționale se găsește în C#5. Pornind de la rezultatul obținut, de ce noi mai degrabă simțim efectul forței de atracție gravitațională decât cel al forței electrice?

Exemplul #1 Fie trei sarcini așezate ca în figură, unde $q_1 = q_2 = 5\ \mu C$ și $q_3 = -2\ \mu C$ și $a = 10$ cm. Care este forța netă asupra sarcinii q_3, care este modulul acestei forțe ?



Asupra sarcinii q_3 acționează două forțe. Forța F_{31} produsă de sarcina q_1 asupra lui q_3 și forța F_{32} produsă de sarcina q_2 asupra lui q_3.

Putem calcula modulul celor două forțe folosind legea lui Coulomb:

$$F_{31} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_3||q_1|}{(\sqrt{2}a)^2} = 11N,$$

$$F_{32} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_3||q_2|}{a^2} = 9\ N.$$

Forța rezultantă asupra sarcinii 3 este suma vectorială a celor două forțe. Pentru a le putea aduna vectorial trebuie să exprimăm cele două forțe în funcție de componentele lor. Din imagine vedem că forța $\boldsymbol{F}_{32}$ are componentă doar pe Ox și atunci putem scrie

$$\boldsymbol{F}_{32} = -F_{32}\boldsymbol{i},$$

iar forța $\boldsymbol{F}_{31}$ are componente pe ambele direcții și atunci

$$\boldsymbol{F}_{31} = F_{31x}\boldsymbol{i} + F_{31y}\boldsymbol{j},$$

unde $F_{31x} = F_{31}\cos\theta = F_{31}\cos\pi/4 = 7.9\ N$ și $F_{31y} = F_{31}\sin\theta = F_{31}\sin\pi/4 = 7.9\ N$.

Astfel, forța netă asupra sarcinii 3 este

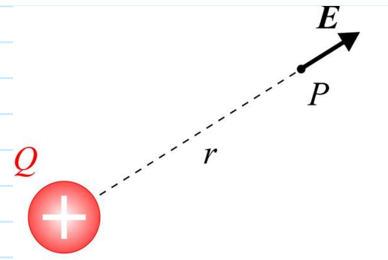
$$\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{F}_{32} + \boldsymbol{F}_{31} = (F_{31x} - F_{32})\boldsymbol{i} + F_{31y}\boldsymbol{j} = -1.1\boldsymbol{i} + 7.9\boldsymbol{j}\ [\mathrm{N}],$$

iar modulul

$$F_3 = \sqrt{(1.1)^2 + (7.9)^2} = 8\ \mathrm{N}.$$

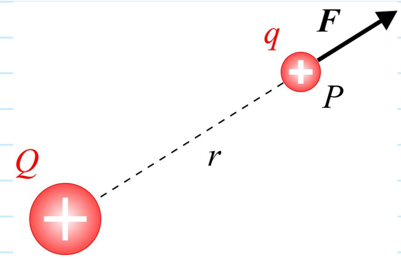
9.2.1 Câmpul electric

Similar cu cazul forței de atracție gravitațională, mediată de câmpul gravitațional, în cazul forței electrice o să spunem că aceasta este mediată de câmpul electric. În această interpretare interacțiune electrică este un proces în două etape: (i) în jurul unei sarcini electrice Q o să apară un câmp electric care, într-un anumit punct P aflat la distanța r față de sarcină, o să aibă intensitatea $\boldsymbol{E}$, (ii) dacă în acest punct P plasăm o sarcină q atunci asupra acesteia o să acționeze forța $\boldsymbol{F}$, dată de



$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}.$$

Trebuie subliniat faptul că prezența câmpului electric este independentă de sarcina q, acesta fiind produs de sarcina Q, deci nu este nevoie decât de o sarcină pentru a avea câmp electric. De asemenea, câmpul electric este non-zero oriunde în jurul sarcinii Q, nu doar în punctul în care am plasat sarcina q. Aici, rolul sarcini q este de sarcină de probă care ne permite să determină $\boldsymbol{E}$ prin măsurarea forței $\boldsymbol{F}$ asupra acesteia, în felul următor:



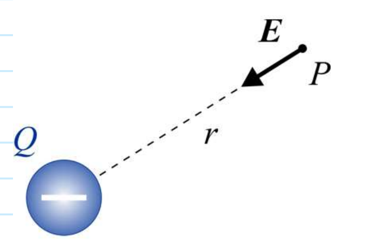
$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}.$$

Unitatea de măsură a lui E este N/C, iar modulul lui E este

$$E = \frac{F}{|q|}.$$

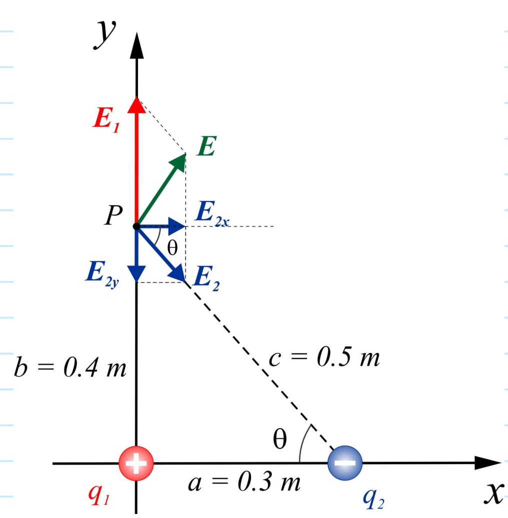
Dacă sarcina Q este punctiformă atunci, folosind legea lui Coulomb:

$$E = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q||q|}{r^2}}{|q|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2}.$$



Observăm că modulul lui E este independent de semnul lui Q, însă sensul vectorului $\boldsymbol{E}$ depinde de semnul lui Q. Dacă Q este pozitiv atunci $\boldsymbol{E}$ este pe direcție radială și are sensul dinspre sarcină, dacă Q este negativ atunci E este pe direcție radială și are sensul înspre sarcină.

Exemplul #2 Fie două sarcini așezate ca în figură, unde $q_1 = 7\ \mu C$ și $q_2 = -5\ \mu C$. Care este intensitatea câmpului electric în punctul P de coordonate (0, 0.4) m ?



Câmpul electric din punctul P o să fie rezultatul superpoziției câmpurilor produse de cele două sarcini. Sarcina 1 o să producă în punctul P un câmp electric de intensitate $\boldsymbol{E_1}$, iar sarcina 2 o să producă în punctul P un câmp electric de intensitate $\boldsymbol{E_2}$. Intenistatea câmpului rezultant o să fie suma vectorială a celor două intensități

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2.$$

Pentru a calcula această sumă trebuie să calculăm cei doi vectori $\boldsymbol{E_1}$ și $\boldsymbol{E_2}$.

Folosind definiția intensității câmpului electric putem calcula modulele lui E_1 și E_2 :

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|}{b^2} = 3.9 \times 10^5\ N/C,$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_2|}{c^2} = 1.8 \times 10^5\ N/C.$$

Din figură observăm că $\boldsymbol{E}_1$ are componentă doar pe Oy, iar $\boldsymbol{E}_2$ pe Ox și pe Oy, deci putem scrie:

$\boldsymbol{E}_1 = E_1\boldsymbol{j}$,

$\boldsymbol{E}_2 = E_{2x}\boldsymbol{i} + E_{2y}\boldsymbol{j}$,

unde

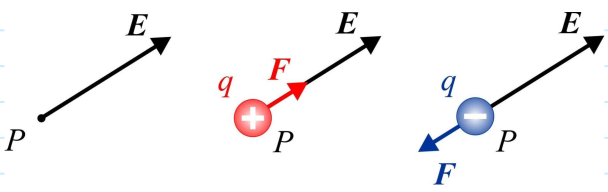
$E_{2x} = E_2 \cos\theta = E_2\frac{a}{c} = 1.1 \times 10^5\ N/C$ și $E_{2y} = E_2 \sin\theta = E_2\frac{b}{c} = 1.4 \times 10^5\ N/C$,

atunci

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = (1.1 \times 10^5\boldsymbol{i} + 2.5 \times 10^5\boldsymbol{j})$ [N/C],

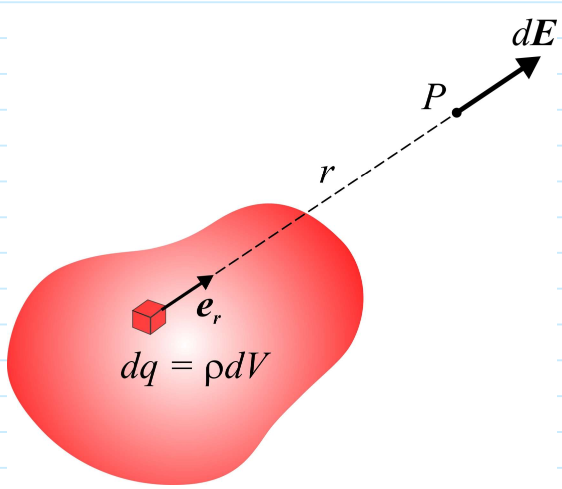
iar modulul lui $\boldsymbol{E}$ o să fie $E = \sqrt{(1.1 \times 10^5)^2 + (2.5 \times 10^5)^2} = 2.7 \times 10^5\ N/C$

De ce folosim noțiunea de intensitate a câmpului electric ? Intensitatea câmpul electric depinde numai de sursa care produce câmpul electric (sarcina/ sarcinile electrice). Într-un punct câmpul electric poate să fie o funcție foarte complicată care depinde de *istoria* sarcinilor electrice (la limită) din tot universul, însă acțiunea asupra unei sarcini q depinde numai de valoarea curentă a câmpului în punctul P și care se poate calcula simplu folosind relația $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$.



9.2.2 Câmpul electric al unei distribuții continue de sarcină

În paragraful precedent am văzut cum putem calcula câmpul electric produs de sarcini punctiforme. Ce se întâmplă în cazul în care avem de calculat câmpul electric al unei distribuții de sarcină? Să presupunem că avem o distribuție uniformă de sarcină de densitate $\rho = Q_{total}/V_{total}$, unde Q_{total} este sarcina totală, iar V_{total} este volumul total al distribuției. O să împărțim distribuția în volume infinit mici dV, care o să conțină sarcina $dq = \rho dV$. Deoarece volumul dV este infinitezimal, putem considera sarcina dq ca fiind punctiformă. Această sarcină o să producă atunci în punctul P câmpul electric de intensitate infinitezimală



$$d\boldsymbol{E} = dE\boldsymbol{e_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\boldsymbol{e_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dV}{r^2}\boldsymbol{e_r}.$$

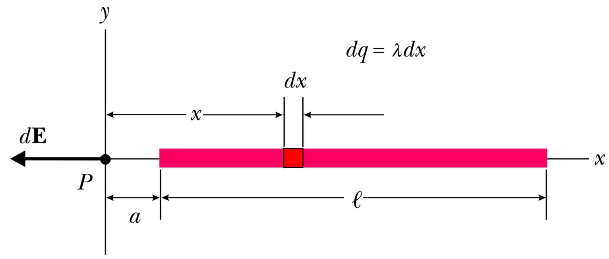
Aici am folosit faptul că $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$, deoarece sarcina dq poate fi considerată punctiformă.

Intensitatea totală se obține adunând contribuțiile tuturor elementelor dV care alcătuiesc distribuția de sarcină, adică integrând pe tot volumul distribuției

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{dq}{r^2}\boldsymbol{e_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho dV}{r^2}\boldsymbol{e_r}.$$

În general această integrare se realizează numeric, însă în anumite cazuri particulare se poate efectua și analitic.

Exemplul #3 Să presupunem că avem o tijă de lungime $l = 0.1$ m, încărcată uniform cu sarcina totală $Q = 100$ µC. Să calculăm câmpul electric în punctul P aflat la distanța $a = 1$ cm de tijă.



Densitatea liniară de sarcină a tijei o putem scrie $\lambda = Q/l$.

Ne alegem un element dx din tijă, aflat la distanța x față de punctul P. Acest element conține sarcina $dq = \lambda dx$ și o să producă câmpul $d\mathbf{E}$ în punctul P.

Din imagine vedem că $d\boldsymbol{E}$ este în direcția negativă a axei Ox , adică $d\boldsymbol{E} = -dE\,\boldsymbol{i}$, unde dE este dat de

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dx}{x^2}\,.$$

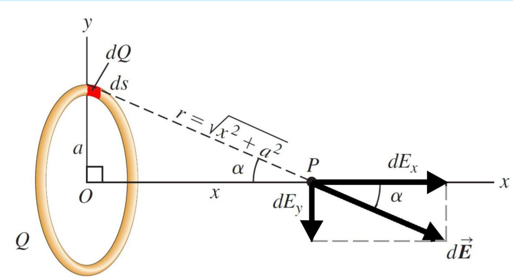
Deoarece orice element dx produce un câmp în aceeași direcție negativă a axei Ox, problema adunării tuturor contribuțiilor devine foarte simplă

$$E = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{l+a}\frac{dx}{x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a}\right),$$

iar intensitatea totală este

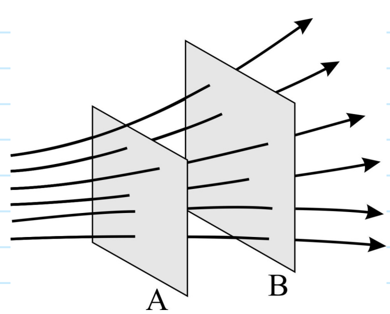
$$\boldsymbol{E} = -E\boldsymbol{i} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a}\right)\boldsymbol{i} = -8.18\times10^8\,\boldsymbol{i}\,\left[\frac{N}{C}\right].$$

Să considerăm un inel de rază $a = 1$ cm, încărcat uniform cu sarcina $Q = 10\mu C$, ca în imaginea alăturată. Un element ds produce câpul $d\boldsymbol{E}$ în punctul P, de coordonate (10 cm,0 cm), aflat pe axa inelului. Pentru a calcula câmpul produs de inel trebuie calculate inițial cele două componente ale câmpului, pe direcția axei inelului (E_x) și perpendicular pe direcția axei inelului (E_y). Calculați componentele și câmpul total.(*)



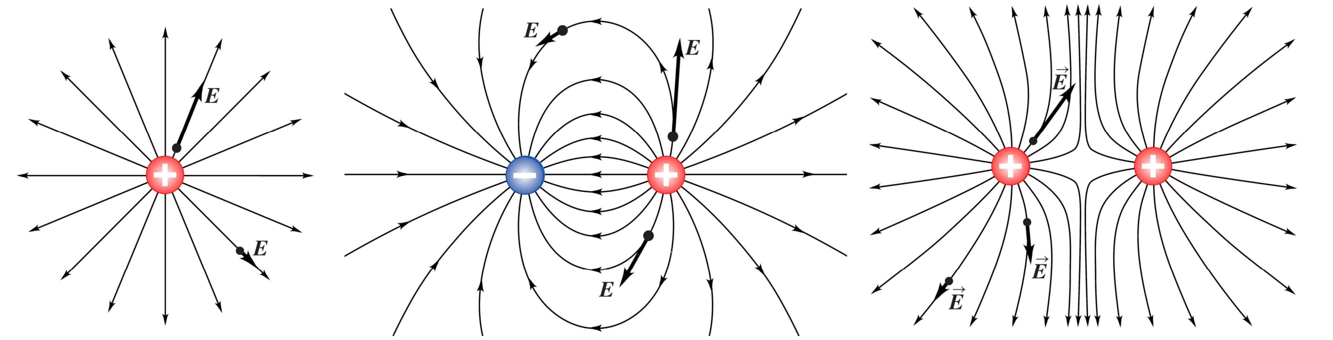
9.2.3 Linii de câmp electric

O modalitatea convenabilă de a vizualiza câmpul electric este prin intermediul linilor de câmp. Legătura dintre liniile de câmp și intensitatea câmpului electric este următoarea: 1) vectorul $\boldsymbol{E}$ este întotdeauna tangent la liniile de câmp, ca o consecință, liniile de câmp *ies din sarcini pozitive* și *intră în sarcini negative* și 2) densitatea liniilor de câmp este proporțională cu mărimea lui $\boldsymbol{E}$. De exemplu, deoarece densitatea de linii este mai mare la nivelul suprafeței A decât la nivelul suprafeței B, intensitatea câmpului electric este mai mare la nivelul suprafeței A decât la nivelul suprafeței B.

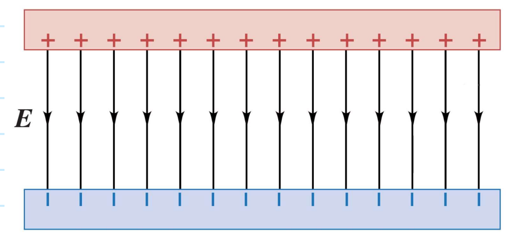


Exemple de geometrii de linii de câmp.

Sarcină izolată punctiformă, două sarcini de semn opus și două sarcini pozitive



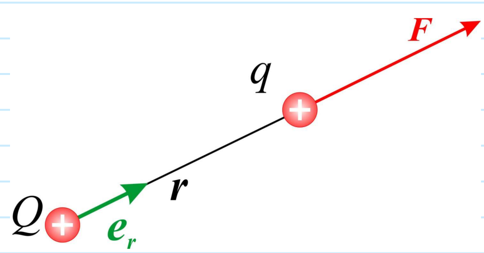
Dacă liniile de câmp sunt paralele și echidistante, atunci câmpul electric este constant și uniform, de exemplu cum este cazul între două suprafețe încărcate cu aceeași cantitate de sarcină, dar de semn opus, ca în cazul unui condensator plan. Aici am ignorat efectele de margine; în apropierea marginilor liniile de câmp se vor curba, acesta nemaifiind uniform.



La începutul cursului am spus că legea lui Coulomb este valabilă și pentru sfere care nu sunt punctiforme (adică sunt relativ apropiate). Este foarte ușor să ne imaginăm câmpul electric produs de o sferă încărcată uniform. În exteriorul sferei acesta trebuie să aibă aceeași simetrie radială ca și câmpul produs de o sarcină punctiformă. Practic, câmpul electric din exteriorul unei sfere încărcate uniform este echivalent cu câmpul electric produs de o sarcină punctiformă, astfel că, din punct de vedere al câmpului electric, o sarcină punctiformă sau o sferă încărcată uniform sunt echivalente.

9.2.4 Energia potențială electrică

După cum am văzut în secțiunea C#5.2.3, forței de atracție gravitațională putem să-i asociem o energie potențială. Forța lui Coulomb este tot o forță centrală, foarte similară cu cea de atracție gravitațională. Prin analogie o să-i asociem și acesteia o energie potențială U. Să presupunem că avem două sarcini punctiforme Q și q. Conform legii lui Coulomb, forța pe care sarcina Q o produce asupra sarcinii q este dată de



$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\boldsymbol{e_r}.$$

Componenta pe direcția radială a forței este

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2},$$

pe care o putem obține ca $F = -\frac{dU(r)}{dr}$ din *energia potențială*

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}\ .$$

Haideți să arătăm acest lucru:

$$F = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}\right) = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$$

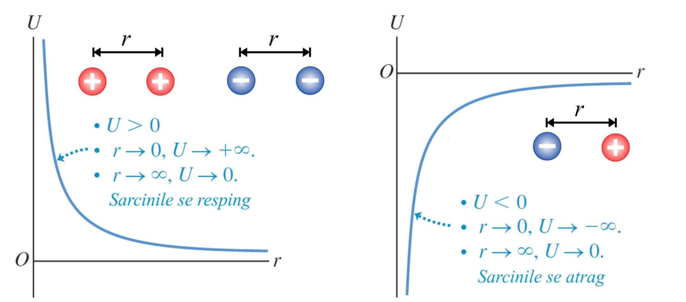
Relația de mai sus se poate generaliza pentru un sistem de mai multe sarcini ca

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} ,$$

unde am pus condiția $i < j$ pentru a nu însuma fiecare pereche de sarcini de două ori.

Energia potențială este întotdeauna definită relativ la o referință. Ca și în cazul energiei potențiale gravitaționale, în cazul energiei potențiale electrice referința este la infinit, adică dacă sarcinile sunt infinit îndepărtate energia lor potențială de interacțiune este zero $U(\infty) = 0$.

Observăm că energia potențială poate fi pozitivă sau negativă, în funcție de semnul celor două sarcini. La fel ca un sistem mecanic, un sistem de sarcini electrice, lăsat liber o să evolueze întotdeauna spre scăderea energiei potențiale electrice, așa cum este arătat în imaginea alăturată.



Energia totală a unei sarcini q , de masă *m,* care se mișcă în câmpul electric produs de sarcina Q este suma dintre energia cinetică și cea potențială

$$E = E_c + U(r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r} .$$

<u>Exemplul #4</u> Un pozitron (antiparticula unui electron) are masa $m_{e+} = 9.11 \times 10^{-31}\ kg$ și sarcina $q = 1.6 \times 10^{-19}\ C$. Să presupunem că pozitronul se mișcă în apropierea unei particule α (nucleu de heliu), care are masa $m_\alpha = 6.64 \times 10^{-27}\ kg$ și sarcina $Q = 3.2 \times 10^{-19}\ C$. Deoarece masa particulei α este de aproximativ 7000 de ori mai mare decât masa pozitronului, putem presupune că particula α o să rămână în repaus. Când pozitronul era la o distanță de $r_0 = 10^{-10}\ m$ de particula α acesta avea viteza de $v_0 = 3.0 \times 10^6\ m/s$ și se deplasa dinspre particula α. Care este viteza pozitronului când este la distanța de $r_1 = 2 \times 10^{-10}\ m$ de particula α? Care este viteza pozitronului când este foarte departe de particula α ?

O să folosim legea conservării energiei. Deoarece nu avem forțe disipative energia totală o să rămână constantă. Energia totală în momentul inițial (starea 0)

$$E_0 = \frac{1}{2}m_{e+}v_0^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_0},$$

unde am ținut cont că particula α este în repaus. Energia totală în starea 1

$$E_1 = \frac{1}{2}m_{e+}v_1^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_1},$$

unde am ținut cont că particula α rămâne în repaus. Deoarece $E_1 = E_0$ energia cinetică a pozitronului în starea 1 este

$$E_{c1}=\frac{1}{2}m_{e+}v_1^2=\frac{1}{2}m_{e+}v_0^2+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_0}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_1}=6.41\times10^{-18}\text{ J},$$

de unde viteza pozitronului în starea 1 este

$$v_1=\sqrt{2E_{c1}/m_{e+}}=3.8\times10^6\ m/s.$$

Când cele două particule sunt la distanță foarte mare (∞) energia potențială electrică de interacțiune dintre cele două particule o să fie zero $U(\infty)=0$, astfel energia totală la distanță foarte mare o să fie

$$E_\infty=\frac{1}{2}m_{e+}v_\infty^2+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{\infty}=\frac{1}{2}m_{e+}v_\infty^2.$$

Deoarece energia totală este egală cu energia inițială totală ($E_0=E_\infty$), energia cinetică a pozitronului când cele două particule sunt la distanță foarte mare este

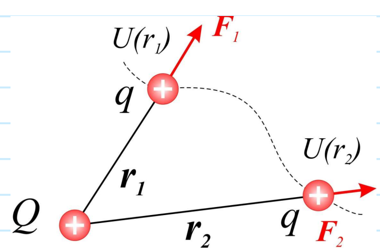
$$E_{c\infty}=\frac{1}{2}m_{e+}v_\infty^2=\frac{1}{2}m_{e+}v_0^2+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r_0}=8.71\times10^{-18}\text{ J},$$

de unde viteza pozitronului o să fie

$$v_\infty=\sqrt{2E_{c\infty}/m_{e+}}=4.4\times10^6\ m/s.$$

Relația $F=-\frac{dU(r)}{dr}$ se poate scrie vectorial în felul următor:

$$\boldsymbol{F}=-\frac{dU(r)}{dr}\boldsymbol{e_r}.$$

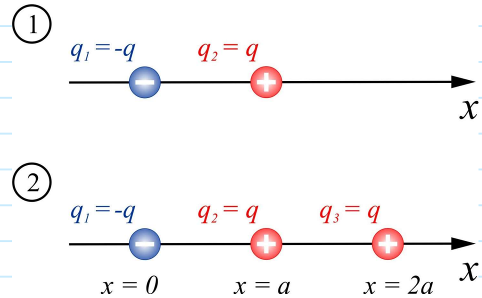


Astfel, conform cu C#5.2.3, lucrul mecanic produs de această forță pentru a deplasa sarcina q din poziția dată de vectorul $\boldsymbol{r}_1$ până în cea dată de vectorul $\boldsymbol{r}_2$ este

$$L_{12}=\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{r_1}^{r_2}dU(r)=U(\boldsymbol{r_1})-U(\boldsymbol{r_2}),$$

unde am folosit faptul că $d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e_r}=dr$. Relația de mai sus înseamnă că *lucrul mecanic efectuat de forța electrică pentru a deplasa sarcina q din poziția dată de* r_1 *până în cea dată de* r_2 *depinde doar de energia potențială corespunzătoare celor două poziții, câmpul electrostatic fiind conservativ.*

Exemplul #5. Două sarcini punctiforme sunt aranjate ca în figură. Determinați care este lucrul mecanic efectuat de câmpul electric prin intermediul forței electrice pentru a aduce o a treia sarcină până în poziția indicată.



Lucrul mecanic o să fie diferența dintre energiile celor două stări.

În starea 1 energia potențială o să fie

$$U_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{a}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a},$$

iar în starea 2

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{2a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{a} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2a}.$$

Atunci lucrul mecanic o să fie dat de

$$L_{12} = U_1 - U_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2a} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2a}.$$

9.3.1 Potențialul electric

În paragraful precedent am văzut cum putem calcula lucrul mecanic efectuat de câmpul electric produs de sarcina Q pentru a deplasa o sarcină q din poziția dată de vectorul $\boldsymbol{r}_1$ până în cea dată de vectorul $\boldsymbol{r}_2$. Haideți să calculăm cât este lucrul mecanic per unitatea de sarcină

$$\frac{L_{12}}{q} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \frac{\boldsymbol{F}}{q}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{U(\boldsymbol{r}_1)}{q} - \frac{U(\boldsymbol{r}_2)}{q} = V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2),$$

unde am notat cu

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{U(\boldsymbol{r})}{q},$$

mărime care se numește *potențial electric*, se măsoară în V (volți) și reprezintă energia potențială per unitatea de sarcină.

Lucrul mecanic efectuat de câmpul electric pentru a deplasa o sarcină q din poziția dată de vectorul $\boldsymbol{r}_1$ până în cea dată de vectorul $\boldsymbol{r}_2$ se poate scrie în funcție de potențial astfel

$$L_{12} = q[V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2)]$$

9.3.2 Potențialul electric creat de sarcini punctiforme

În cazul sarcinilor punctiforme, deoarece avem simetrie sferică știm că putem scrie

$$F = -\frac{dU(r)}{dr}.$$

Dacă împărțim această relație cu q o să obținem

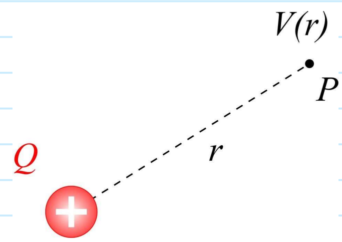
$$F/q = -\frac{dU(r)}{dr}/q \implies E = -\frac{d}{dr}\left(\frac{U(r)}{q}\right) = -\frac{dV(r)}{dr},$$

de unde

$$dV(r) = -Edr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr.$$

Putem să folosim această relație pentru a determina potențialul produs de o sarcină Q în punctul P la distanța r față de sarcină. Pentru aceasta o să integrăm relația de la r la infinit:

$$\int_r^\infty dV(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V(\infty) - V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$



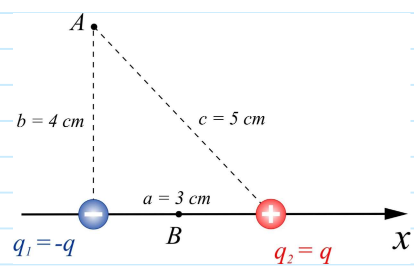
prin convenție potențialul la infinit se consideră zero $V(\infty) = 0$, atunci

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

Observați că potențialul este o mărime scalară care poate fi negativă sau pozitivă.

Exemplul #6. Dacă $q = 1\mu C$, calculați potențialul electric în punctele A și B. Care este lucrul mecanic efectuat de câmp pentru a deplasa o sarcină de probă $q_0 = 1$ nC din A în B, dar din A la infinit, dar din B la infinit?

Potențialul în A este egal cu suma algebrică a potențialelor create de cele două sarcini în A



$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{b} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q}{b} + \frac{q}{c}\right) = -4.5 \times 10^4\ V.$$

Similar, potențialul în B este

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{a/2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{a/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q}{a/2} + \frac{q}{a/2}\right) = 0\ V$$

Lucrul mecanic pentru a deplasa sarcina $q_0 = 1$ nC din A în B

$$L_{AB} = q_0(V_A - V_B) = 10^{-9}\,(-4.5 \times 10^4 - 0) = -4.5 \times 10^{-5}\ J.$$

Lucrul mecanic pentru a deplasa sarcina $q_0 = 1$ nC din A la infinit.

$$L_{A\infty} = q_0(V_A - V_\infty) = 10^{-9}\,(-4.5 \times 10^4 - 0) = -4.5 \times 10^{-5}\ J.$$

Lucrul mecanic pentru a deplasa sarcina $q_0 = 1$ nC din B la infinit

$$L_{B\infty} = q_0(V_B - V_\infty) = 10^{-9}\,(0 - 0) = -0\ J.$$

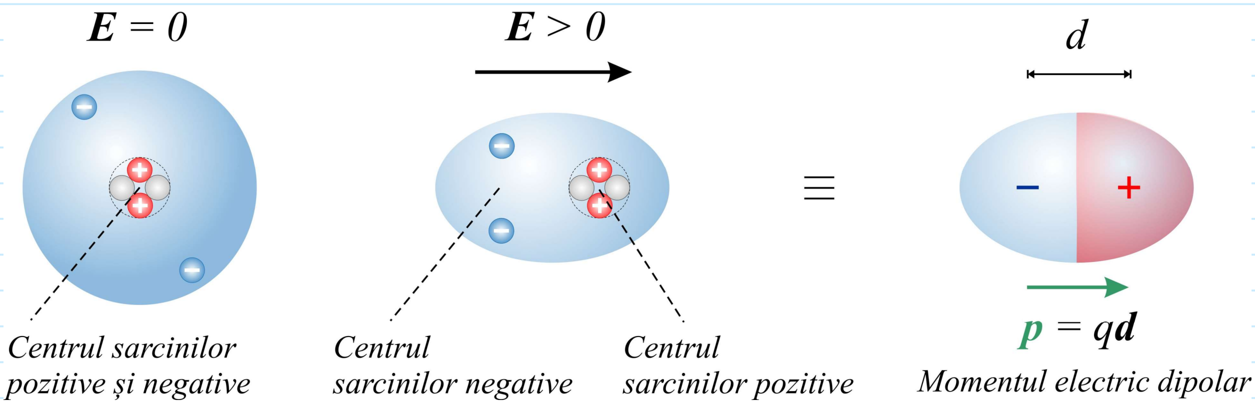
9.4.1 Dipolul electric indus

Să presupunem că avem un atom sau o moleculă cu simetrie sferică pe care le plasăm într-un câmp electric. Să considerăm exemplul concret al atomului de He. Bineînțeles, sarcina totală a atomului este zero și, mai mult decât atât, în cazul în care câmpul electric aplicat este zero, centrul sarcinilor pozitive coincide cu centrul sarcinilor negative. Dacă aplicăm un câmp electric extern în direcția indicată în figură, atomul se va deforma, deoarece electronii care formează norul electronic vor fi atrași de câmp, iar protonii din nucleu vor fi respinși. Subliniez faptul că forța electrică netă asupra atomului o să fie zero, deoarece forța asupra sarcinilor pozitive o să fie egală cu forța asupra sarcinilor negative și de sens opus ($\boldsymbol{F}_{q+} + \boldsymbol{F}_{q-} = 0$), iar câmpul electric nu va deplasa atomul.

O să definim modulul momentului electric dipolar ca fiind

$p = qd,$

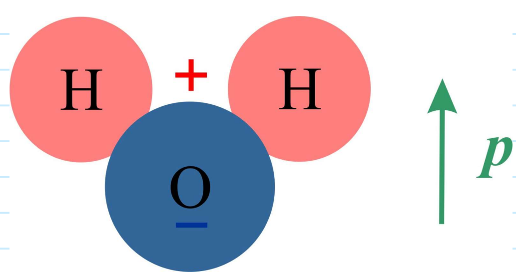
adică produsul dintre sarcina pozitivă a dipolului și distanța dintre centrele celor două tipuri de sarcini. Momentul electric dipolar este un vector pe direcția care unește centrele celor două tipuri de sarcini, iar sensul este de la centrul sarcinilor negative la centrul sarcinilor pozitive.



Folosind aceste noțiuni explicați de ce un liniar încărcat electrostatic *atrage întotdeauna* o bucată de hârtie neîncărcată electric.

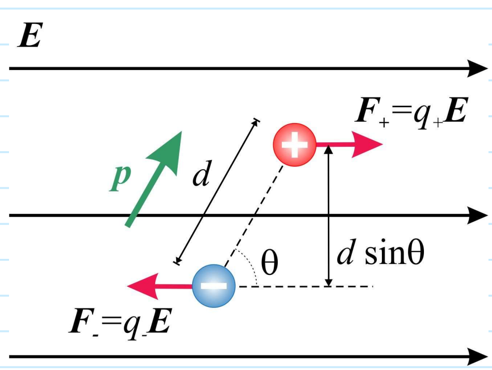
9.4.2 Dipolul electric permanent

Există anumite molecule care nu au simetrie sferică și care posedă un moment electric dipolar permanent. Un exemplu comun ar fi molecula de apă. Pentru molecula de apă, unghiul dintre legăturile H-O este de aproximativ 105°. Din acest motiv centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative și molecula de apă are un moment electric dipolar permanent. Din acest motiv, apa este un solvent excelent pentru substanțele ionice, cum ar fi, de exemplu, molecula de NaCl. Când se dizolvă în apă, molecula de NaCl disociază într-un ion pozitiv Na+ și un ion negativ Cl-, care vor fi atrași de capătul negativ, respectiv, pozitiv al moleculei de apă. Ceea ce va reține ionii în soluție. Vreau să subliniez faptul că dacă molecula de apă nu ar fi polară, ea nu ar fi un solvent bun, iar reacțiile chimice care au loc în soluții apoase ar fi imposibile. Aceasta înseamnă că și reacțiile biochimice care au loc în orice organism viu de pe Pământ ar fi imposibile. În acest sens, viața pe Pământ se datorează faptului că molecula de apă este o moleculă polară.



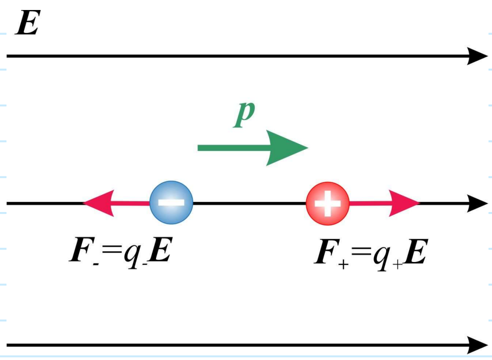
9.4.3 Cuplul asupra unui dipol și energia acestuia într-un câmp electric

Să considerăm un dipol electric, care este plasat într-un câmp electric uniform, așa cum este reprezentat în imagine. Aici am reprezentat schematic cu + și - centrele sarcinilor pozitive și negative. Asupra dipolului o să acționeze două forțe $\boldsymbol{F}_- = q_-\boldsymbol{E}$ și $\boldsymbol{F}_+ = q_+\boldsymbol{E}$ de aceași mărime, dar de sens diferit. Forța netă asupra dipolului este zero, însă deoarece forțele nu sunt pe aceași linie, ele vor produce un moment de rotație asupra dipolului, care se va roti în jurul centrului acestuia până când momentul electric dipolar $\boldsymbol{p}$ va



deveni paralel cu câmpul electric ***E***.

Putem să scriem momentul de rotație (vă reamintesc, momentul de rotație este suma produselor dintre forțe și brațul acestora relativ la centrul de rotație) ca și



$M = F_+ \frac{d}{2} sin\,\theta + F_- \frac{d}{2} \sin\theta = qE\ \ d\sin\theta\,,$

unde cu am notat $q = |q_-| = |q_+|$. Astfel

$M = pE\ sin\,\theta\,.$

În general putem să scriem momentul de rotație sub forma unui produs vectorial

$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}.$

Puteți să observați că atât timp cât unghiul θ este diferit de zero sau de 180° momentul de rotație este diferit de zero. Aceasta înseamnă că efectul acestui moment de rotație este să alinieze ***p*** cu ***E***.

Deoarece câmpul electric rotește dipolul, acesta efectuează lucru mecanic asupra dipolului. Lucrul mecanic efectuat de câmp la rotația dipolului de la unghiul θ_1 la unghiul θ_2 este :

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -Md\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -pE\sin\theta\, d\theta = pE\cos\theta_2 - pE\cos\theta_1 = -pE\cos\theta_1 + pE\cos\theta_2$$

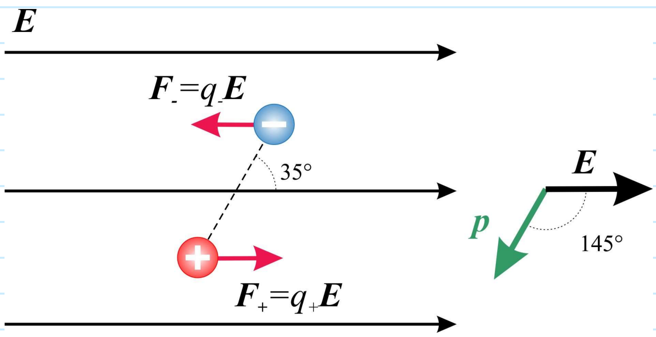
Relația de mai sus se poate scrie ca $L = U(\theta_1) - U(\theta_2)$, unde

$U(\theta) = -pE\ cos\,\theta = -\boldsymbol{pE},$

reprezintă energia potențială a unui dipol ***p*** în câmpul electric ***E***.

<u>Exemplul #7:</u> Fie un dipol electric, ca în figura alăturată. Câmpul este uniform și are intensitatea de $5 \times 10^5\ N/C$. Valoarea sarcinilor este de $\pm 1.6 \times 10^{-19}\ C$. Distanța dintre sarcini este de 0.125 nm. Determinați:

(a) Forța netă asupra dipolului.



Deoarece câmpul este uniform, forța netă o să fie zero $\boldsymbol{F}_- + \boldsymbol{F}_+ = 0$

(b) Mărimea și direcția momentului electric dipolar.

Direcția este indicată în figură, 145° față de direcția lui ***E***, iar mărimea este

$p = qd = (1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(0.125 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})$
$= 2 \times 10^{-29}\ \mathrm{Cm}.$

(c) Mărimea cuplului de rotație

$M = pE\,sin\,\theta = (2 \times 10^{-29}\,Cm)\left(5 \times 10^5 \frac{N}{C}\right)(sin\,145°) = 5.7 \times 10^{-24}\,Nm.$

(d) Energia potențială a dipolului

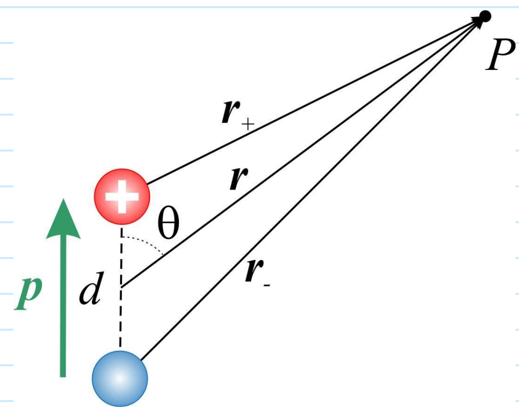
$M = pE\,cos\,\theta = -(2 \times 10^{-29}\,Cm)\left(5 \times 10^5 \frac{N}{C}\right)(cos\,145°) = 8.2 \times 10^{-24}\,J.$

9.4.3 Potențialul și câmpul unui dipol

Dacă suntem foarte departe de o distribuție de sarcină localizată, aceasta *pare* punctiformă, iar potențialul ne așteptăm să fie într-o bună aproximație $(1/4\pi\varepsilon_0)Q/r$, unde Q este sarcina totală. Deci pentru un dipol ne așteptăm ca potențialul să fie zero, deoarece sarcina totală este zero. În prinicipiu este corect, potențialul scade rapid spre zero la distanță mare față de dipol. Haideți să vedem cât de rapid.

Potențialul în punctul *P* o să fie suma potențialelor create de cele două sarcini

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right).$$



Folosind formula cosinusului, putem scrie

$$r_\pm^2 = r^2 + \frac{d}{2} \pm rd\,cos\,\theta = r^2\left(1 \mp \frac{d}{r}cos\,\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right),$$

la distanță mare față de dipol $r \gg d$, ultimul termen se poate neglija:

$$r_\pm^2 \cong r^2\left(1 \mp \frac{d}{r}cos\,\theta\right),$$

putem modifica relația

$$\frac{1}{r_\pm} \cong \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{d}{r}cos\,\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}cos\,\theta\right),$$

unde am folosit aproximația binomială. Astfel obținem

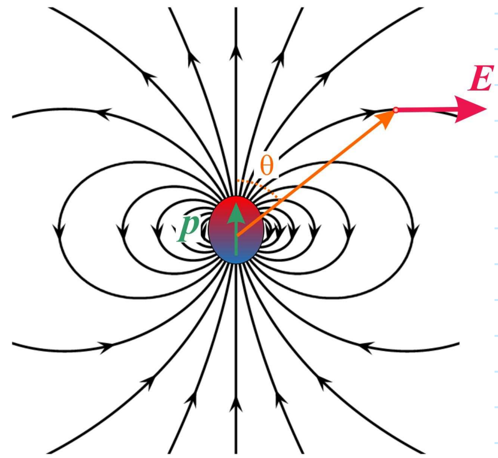
$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \cong \frac{d}{r^2}cos\,\theta\,,$$

iar potențialul

$$V(\boldsymbol{r}) \cong \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Observăm că potențialul unui dipol scade în $1/r^2$, deci mai repede decât potențialul unui monopol, care scade în $1/r$.

Cu noțiunile de până acum, calculul câmpului electric este ceva mai dificil, însă în cursul următor în C#10.2.1 o să arătăm cum se poate calcula în general câmpul pornind de la potențial, astfel o să obținem



$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j}$,

unde:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{3p\sin\theta\cos\theta}{r^3} \\ E_y = \dfrac{p(3\cos^2\theta - 1)}{r^3} \end{cases}.$$

Observăm că intensitatea câmpului electric al unui dipol scade în $1/r^3$, deci mai repede decât al unui monopol, care scade în $1/r^2$.

Obțineți expresiile de mai sus folosind C#10.2.1. (*)