Serii Fourier

November 24, 2024

1 Noţiuni teoretice

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $T = 2\pi$, integrabilă pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

Definiţie 1 *Seria trigonometrică* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *în care coeficienţii* a_n *şi* b_n *sunt daţi de relaţiile*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \geq 1$$

se numeşte ***seria Fourier*** *a funcţiei* f *pe* $[-\pi, \pi]$, *iar* a_n, b_n *se numesc* ***coeficienţii Fourier*** *ai lui* f.

Observaţie 1 *1) O serie Fourier poate fi convergentă sau nu. În caz de convergenţă suma ei poate să fie diferită de funcţia* f.

2) Dacă funcţia f *este o funcţie pară, atunci au loc relaţiile*

$$\begin{array}{l} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \geq 0 \\ b_n = 0, \quad n \geq 1 \end{array}$$

deci seria Fourier a lui f *este o serie de cosinusuri.*

3) Dacă funcţia f *este o funcţie impară, atunci au loc relaţiile*

$$\begin{array}{l} a_n = 0, \quad n \geq 0 \\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \geq 1, \end{array}$$

deci seria Fourier a lui f *este o serie de sinusuri.*

Teoremă 1 (Inegalitatea Bessel) *Fie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă iar $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şirurile coeficienţilor Fourier ai lui f. Atunci are loc inegalitatea:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Dacă seria Fourier ataşată lui f converge uniform la f pe intervalul $[-\pi, \pi]$ atunci inegalitatea lui **Bessel** devine egalitatea lui **Parseval**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Daca f este o funcţie continua pe $\mathbb{R}$ şi periodică de perioada 2π atunci egalitatea lui Parseval are loc.

Teoremă 2 (Dirichlet) *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de perioadă 2π, monotonă pe porţiuni şi mărginită. Atunci seria Fourier a funcţiei f este convergentă pe $\mathbb{R}$ şi suma ei este*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2 Exerciţii şi probleme

Ex. 1 *Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de perioadă 2π, dată de relaţia:*

a) $f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$.
Demonstraţi egalitatea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

b) $f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi]$.

Ex. 2 *Dezvoltaţi funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, în serie Fourier de cosinusuri.*

Ex. 3 *Să se dezvolte în serie Fourier funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *periodică de perioadă* 2π, *definită prin* $f(x)=e^{ax}$, $x\in(-\pi,\pi]$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *şi să se deducă suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$, $a\in\mathbb{R}$.

Ex. 4 *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie periodică de perioada* 2π,

$$f(x)=|x|,\ x\in[-\pi,\pi].$$

Să se dezvolte în serie Fouriei. Cu ajutorul dezvoltării să se deduca sumele seriilor: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Ex. 5 *Să se demonstreze relaţiile:*

a)

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\ x\in(0,\pi);\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4};$$

b)

$$\cos x=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1},\ x\in(0,\pi);$$

c)

$$\sin x=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1},\ x\in(0,\pi);$$

d)

$$x^2=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}((-1)^n-1)\right)\sin nx,\ x\in(0,\pi);$$

e)

$$\cos ax=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{\pi(a^2-n^2)}\right),\ x\in[-\pi,\pi],a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

Calculaţi suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}$.

3 Indicaţii şi răspunsuri

Solutie Ex. 1 *a) Deoarece f este o funcţie pară, $b_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\left(x^2\sin nx\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x\sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi x(\cos nx)'dx = \frac{4}{\pi n^2}\left(x\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx\,dx\right) = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

Din teorema lui Dirichlet rezultă dezvoltarea

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Pentru $x = \pi$ din relaţia anterioară obţinem

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Avem $a_n = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deoarece f este o funcţie impară. Avem

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x(\cos nx)'dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx\,dx\right) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Din teorema lui Dirichlet obţinem:

$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = \pm\pi \end{cases}$$

Solutie Ex. 2 *Extindem f la o funcţie pară $\overline{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,*

$$\overline{f}(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Atunci $b_n = 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi*

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x\, dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1), \quad n \geq 1.$$

Obţinem dezvoltarea

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Solutie Ex. 3 *Determinăm coeficienţii Fourier. Avem*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi a} e^{ax} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} = \frac{2}{a\pi} \mathrm{sh} a\pi.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi a} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{ax})' \cos nx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi a} \left(e^{ax} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi a} \left((-1)^n (e^{a\pi} - e^{-a\pi}) + \frac{n}{a} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{ax})' \sin nx\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi a} \left(2(-1)^n \mathrm{sh} a\pi + \frac{n}{a} \left(e^{ax} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx\, dx \right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi a} \left(2(-1)^n \mathrm{sh} a\pi - \frac{n^2 \pi}{a} a_n \right),
\end{aligned}$$

de unde obţinem $a_n = \frac{2(-1)^n a \cdot \mathrm{sh} a\pi}{(a^2+n^2)\pi}$, $n \geq 1$.
Analog $b_n = \frac{2(-1)^{n+1} n \cdot \mathrm{sh} a\pi}{a^2+n^2}$, $n \geq 1$. *Aplicând teorema lui Dirichlet obţinem următoarea relaţie*

$$\frac{2\mathrm{sh} a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right) = \begin{cases} e^{ax}, & x \in (-\pi, \pi) \\ \mathrm{ch} a\pi, & x = \pm\pi \end{cases}$$

Pentru $x = \pi$ relaţia de mai sus conduce la următoarea relaţie

$$\frac{2\text{sh}a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}\right) = \text{ch}a\pi,$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2a}\coth a\pi - \frac{1}{2a^2}, \quad a \neq 0.$$

Solutie Ex. 4 *Funcţia f este pară deci $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$ şi*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \ n \geq 0.$$

Se obţine $a_0 = 2\int_0^{\pi} x dx = \pi$ şi $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}$, $n \geq 1$. Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

deci

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \ x \in [-\pi, \pi].$$

Pentru $x = 0$ obţinem $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Apoi, tinând cont de absolut convergenţa seriei avem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

deci

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Egalitatea lui Parseval

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

conduce la $\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2\pi^2}{3}$, *deci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. *Avem:*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4} \\ &= \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},\end{aligned}$$

deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Solutie Ex. 5 $a), b), d)$ *Se dezvoltă funcţiile din membrul stâng în serie de sinusuri.*

$c)$ *Se dezvoltă* $f(x) = \sin x,\ x \in (0, \pi)$ *în serie de cosinusuri.*