Calcul diferenţial pentru funcţii de mai multe variabile reale.

February 21, 2023

Operatori diferenţiali

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1(A)$. Funcţia $\nabla f : A \to \mathbb{R}^n$, definită prin

$$\nabla f = \mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

se numeşte **gradientul** lui f. Operatorul care asociază unei funcţii f gradientul său ∇f se numeşte *operatorul gradient.*

Fie funcţia cu valori vectoriale $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n$, de clasă $\mathcal{C}^1(A)$. Funcţia $\mathrm{div}F : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

se numeşte **divergenţa** lui F.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2(A)$. Funcţia $\Delta f : A \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

se numeşte **Laplaceanul** lui f. Operatorul care asociază funcţiei f Laplaceanul său se numeşte *operatorul lui Laplace.*

Se poate observa că:

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Pentru o funcţie vectorială de trei variabile reale, $F = (f_1, f_2, f_3) : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de clasă $\mathcal{C}^1(A)$ se poate defini **rotorul** funcţiei:

$$\text{rot}F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

Operatorul asociat se poate scrie şi în forma

$$\text{rot}F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \overset{not}{=} \nabla \times F.$$

1 Exerciţii şi probleme

Ex. 1 *Să se arate că:*

a) $xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = 2$ *unde*

$$f(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2), (x,y) \neq (0,0);$$

b) $xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = xy + f(x,y)$ *unde*

$$f(x,y) = xy + xe^{\frac{y}{x}},\ x \neq 0;$$

c) $f'_x(x,y,z) + f'_y(x,y,z) + f'_z(x,y,z) = 1$ *unde*

$$f(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z},\ y \neq z;$$

d) $f'_x(x,y,z) \cdot \sin 2x + f'_y(x,y,z) \cdot \sin 2y + f'_z(x,y,x) \cdot \sin 2z = 2$ *unde*

$$f(x,y,z) = \ln(\text{tg}x + \text{tg}y + \text{tg}z),\ x,y,z \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Ex. 2 *Demonstraţi că următoarele funcţii sunt* armonice *(adică Laplaceanul $\Delta f = 0$ în orice punct al domeniului de definiţie).*

a) $f(x,y) = e^x \cos y,$

b) $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$, $y \neq 0$,

c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$,

d) $f(x,y) = \frac{y}{2}\ln(x^2+y^2) - x\arctan\frac{x}{y}$, $y \neq 0$.

Ex. 3 *a) Fie $K \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă şi deschisă cu proprietatea că pentru orice $x \in K$ şi orice $t > 0$ avem $tx \in K$. Fie de asemenea $f : K \to \mathbb{R}$ o funcţie* ***omogenă de gradul*** *p, $p \in \mathbb{R}$, adică având proprietatea*

$$f(tx) = t^p f(x)$$

pentru orice $x \in K$ şi orice $t > 0$.

Să se arate că dacă $f \in C^1(K)$, atunci

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x),\ \forall\ x = (x_1,\ldots,x_n) \in K. \tag{1.1}$$

(Identitatea lui **Euler** *pentru funcţii omogene.)*

b) Reciproc, să se arate că dacă $f \in C^1(K)$ satisface relaţia (1.1) pentru orice $x \in K$, atunci f este omogenă de gradul p.

c) Să se arate că funcţiile următoare sunt omogene şi apoi sa se verifice identitatea lui Euler:

i) $f(x,y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x^3+y^3}$; $x>0, y>0$;

ii) $f(x,y) = \frac{y^2}{x}\cdot h\left(\frac{2x}{y}, \frac{y}{4x}\right)$, $h \in C^1$; $x \neq 0$.

Ex. 4 *Să se determine funcţiile f de forma:*

a) $f(x,y) = g(xy)$, *unde* $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$;

b) $f(x,y) = g(x^2-y^2)$, *unde* $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$;

c) $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, *unde* $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$;

d) $f(x,y) = g(x^2-y^2+xy)$, *unde* $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$;

e) $f(x,y) = g(\frac{y}{x})$ *unde* $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$;

care verifică ecuaţia lui Laplace, $\Delta f = 0$.

Ex. 5 *a) Determinaţi derivatele de ordinul I şi II pentru funcţia* F,

$$F(x) = f(u(x), v(x)), \text{ unde } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

este o funcţie arbitrară de clasă $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$,

$$u, v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \; u(x) = x^2 + 1, \; v(x) = \ln x.$$

b) Determinaţi derivatele parţiale de ordinul I şi II pentru funcţia F,

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)), \text{ unde } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

este o funcţie arbitrară de clasă $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, *iar*

$$u(x, y) = xy, v(x, y) = \frac{y}{x}, x \neq 0.$$

Ex. 6 *a) Determinaţi funcţiile* $f(x, y) = g(2x+3y)$, *unde* g *este o funcţie arbitrară de clasă* $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *care verifică relaţia:*

$$f''_{x^2}(x, y) + f''_{xy}(x, y) + f''_{y^2}(x, y) = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Determinţi funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de forma* $f(x, y) = g(y - 3x, y + 2x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ *care verifică relaţia:*

$$f''_{x^2}(x, y) + f''_{xy}(x, y) - 6f''_{y^2}(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

c) Determinţi funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de forma* $f(x, y) = g(2x - y, 3x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ *care verifică relaţia:*

$$f''_{x^2}(x, y) + 5f''_{xy}(x, y) + 6f''_{y^2}(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ex. 7 *Arătaţi că funcţiile următoare verifică relaţiile indicate:*

a)

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right);$$

$x^2 f''_{x^2} + 2xy f''_{xy} + y^2 f''_{y^2} = 0$, $(\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}))$.

b)

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), \ \varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2), \Delta\varphi = 0,$$

verifică ecuaţia lui Laplace; $(x,y) \neq (0,0)$.

Ex. 8 *Fie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Demonstraţi că f *este diferenţiabilă în* $(0,0)$*, dar* f'_x *şi* f'_y *nu sunt continue în* $(0,0)$*. (*Continuitatea derivatelor parţiale într-un punct nu este o condiţie necesară pentru diferenţiabilitatea funcţiei în acel punct.*)*

Ex. 9 *Să se arate că funcţia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nu este diferenţiabilă în origine.

Ex. 10 *Fie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Demonstraţi că $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$*.*

1.1 Aplicaţii

Ex. 11 *Determinaţi planul tangent si normala la sprafaţa* $(S) : z = 2x^2+y^2$ *în punctul* $M(1,1,3)$*.*

Ex. 12 *Demonstraţi că derivata unei funcţii* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ *pe direcţia gradientului este egală cu modulul gradientului său în acel punct.*

Ex. 13 *Să se arate că suprafeţele de ecuaţii* $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ *şi* $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ *sunt tangente în punctul* $M(2,-3,1)$*.*

Ex. 14 *Demonstraţi că suprafeţele de ecuaţii* $x^2+y^2+z^2=ax$ *şi* $x^2+y^2+z^2=by$ *sunt ortogonale în punctele de contact.*

Ex. 15 *Fie* $\overrightarrow{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\overrightarrow{i}+Q(x,y,z)\overrightarrow{j}+R(x,y,z)\overrightarrow{k}$, $P,Q,R\in\mathcal{C}^2(D)$, $D\subseteq\mathbb{R}^3$. *Să se arate că* $div(rot\overrightarrow{F})=0$.

Ex. 16 *Determinaţi planul tangent si normala la sprafaţa* (S) *în punctul* $M-0$.

a) $(S):\ x^2+2xy+y^2+4xz+z^2+2x+4y-6z+8=0,\quad M_0(0,0,2)$;

b) $(S):\ z=x^3+y^3\quad M_0(1,2,9)$;

2 Indicaţii şi răspunsuri

Solutie Ex. 1 *a)* $f'_x(x,y)=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$, $f'_y(x,y)=\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$,

b) $f'_x(x,y)=y+e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}$,$f'_y(x,y)=x+e^{\frac{y}{x}}$,

c) $f'_x(x,y,z)=1+\frac{1}{y-z}$, $f'_y(x,y,z)=\frac{z-x}{(y-z)^2}$, $f'_z(x,y,z)=\frac{x-y}{(y-z)^2}$.

d) $f'_x(x,y,z)=\frac{1}{\text{tg}x+\text{tg}y+\text{tg}z}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$, $f'_y(x,y,z)=\frac{1}{\text{tg}x+\text{tg}y+\text{tg}z}\cdot\frac{1}{\cos^2 y}$, $f'_z(x,y,z)=\frac{1}{\text{tg}x+\text{tg}y+\text{tg}z}\cdot\frac{1}{\cos^2 z}$.

Solutie Ex. 2 *a)* $f''_{x^2}(x,y)=e^x\cos y$, $f''_{y^2}(x,y)=-e^x\cos y$.

b) $f''_{x^2}(x,y)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{y^2}(x,y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

c) $f''_{x^2}(x,y)=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f''_{y^2}(x,y)=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

d) $f''_{x^2}(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $f''_{y^2}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$.

Solutie Ex. 3 *a) Derivând relaţia*

$$f(\underbrace{tx_1}_{u_1}, \underbrace{tx_2}_{u_2}, \ldots, \underbrace{tx_n}_{u_n}) = t^p f(x),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in K,$$

în raport cu t obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(tx)\frac{du_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx)\frac{du_n}{dt} = pt^{p-1}f(x)$$

sau

$$x_1\frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) = pt^{p-1}f(x).$$

Punând în ultima relaţie $t = 1$ obţinem

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x).$$

b) Fie $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ fixat. Considerăm funcţia $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)}{t^p}, \quad \forall\ t \in (0, \infty).$$

Demonstrăm că $\varphi'(t) = 0$, pentru orice $t \in (0, \infty)$. Fie $u_1 = tx_1, \ldots, u_n = tx_n$. Avem

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{(f'_{u_1}(tx)u'_1 + \cdots + f'_{u_n}(tx)u'_n) \cdot t^p - f(tx) \cdot pt^{p-1}}{t^{2p}} = \\ &= \frac{(f'_{u_1}(tx)x_1 + \cdots + f'_{u_n}(tx)x_n) \cdot t - pf(tx)}{t^{p+1}} = \\ &= \frac{u_1 f'_{u_1}(tx) + \cdots + u_n f'_{u_n}(tx) - pf(tx)}{t^{p+1}} = 0.\end{aligned}$$

Cum $\varphi'(t) = 0$ pentru orice $t \in (0, \infty)$, rezultă că φ este constantă, deci $\varphi(t) = \varphi(1)$, ceea ce este echivalent cu $f(tx) = t^p f(x)$. Cum x este arbitrar, rezultă că f este omogenă de gradul p.

c) i) Se vede că $f(tx,ty) = t^{\frac{3}{2}} \cdot f(x,y)$ *deci funcţia este omogenă de gradul* $\frac{3}{2}$*. Derivatele parţiale de ordinul întai sunt*

$$f'_x = \sqrt{y} + \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}} \quad f'_x = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}},$$

de unde rezulă că $xf'_x(x,y) + yf_y(x,y) = \frac{3}{2} \cdot f(x,y)$.

ii) Se vede că $f(tx,ty) = t\frac{y^2}{x} \cdot h(\frac{2x}{y}, \frac{y}{4x})$ *deci funcţia este omogenă de gradul* 1*. Notând* $u(x,y) = \frac{2x}{y}$, $v(x,y) = \frac{y}{4x}$, *derivatele parţiale de ordinul întai sunt*

$$f'_x = -\frac{y^2}{x^2}h(u,v) + \frac{2y}{x}h'_u(u,v) - \frac{y^3}{4x^3}h'_v(u,v)$$
$$f'_y = \frac{2y}{x}h(u,v) - 2h'_u(u,v) + \frac{y^2}{4x^2}h'_v(u,v),$$

de unde rezulă că $xf'_x(x,y) + yf_y(x,y) = \frac{y^2}{x} \cdot h(\frac{2x}{y}, \frac{y}{4x})$.

Solutie Ex. 4 *a) Derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui* f *sunt*

$$f'_x(x,y) = yg'(u), \qquad f'_y(x,y) = xg'(u),$$

unde am notat $u(x,y) = xy$*. Ecuaţia* $\Delta f = 0$ *devine*

$$\Delta f = g''(u)(x^2+y^2) = 0,$$

deci $g''(u) = 0$.

De unde se obţine

$$f(x,y) = C_1xy + C_2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui f *sunt*

$$f'_x(x,y) = 2xg'(u), \qquad f'_y(x,y) = -2yg'(u),$$

unde am notat $u(x,y) = x^2 - y^2$*. Ecuaţia* $\Delta f = 0$ *devine*

$$\Delta f = g''(u)4(x^2+y^2) = 0,$$

deci $g''(u) = 0$.

De unde se obţine

$$f(x,y) = C_1(x^2 - y^2) + C_2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) *Derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui* f *sunt*

$$f'_x(x,y) = 2xg'(x^2+y^2), \quad f'_y(x,y) = 2yg'(x^2+y^2).$$

Se obţine $\Delta f = 4ug''(u) + 4g'(u)$, *unde am notat* $u(x,y) = x^2 + y^2$.

Notând $g'(u) = \psi(u)$, *ecuaţia* $\Delta f = 0$ *devine* $u\psi'(u) + \psi(u) = 0$ *adică* $(u\psi(u))' = 0$.

De aici rezultă că $u\psi(u) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. *Deci* $g'(u) = \frac{C_1}{u}$ *cu soluţia* $g(u) = C_1 \ln|u| + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$. *Prin urmare*

$$f(x,y) = C_1 \ln(x^2+y^2) + C_2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

d) *Derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui* f *sunt*

$$f'_x(x,y) = (2x+y)g'(u), \qquad f'_y(x,y) = (x-2y)g'(u),$$

unde am notat $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$. *Ecuaţia* $\Delta f = 0$ *devine*

$$\Delta f = g''(u)[(2x+y)^2 + (x-2y)^2] = 0,$$

deci $g''(u) = 0$. *Se obţine*

$$f(x,y) = C_1(x^2 - y^2 + xy) + C_2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

e) *Derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui* f *sunt*

$$f'_x(x,y) = -\frac{y}{x^2}g'(u), \quad f'_y(x,y) = \frac{1}{x}g'(u),$$

unde am notat $u(x,y) = \frac{y}{x}$. *Relaţia* $\Delta f = 0$ *este echivalentă cu*

$$(1+u^2)g''(u) + 2ug'(u) = 0.$$

Notând $g'(u) = \psi(u)$*, obţinem* $(1+u^2)\psi'(u) + 2u\psi(u) = 0$*, adică* $((1+u^2)\psi(u))' = 0$.

De aici rezultă că $u\psi(u) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$*. Deci* $g'(u) = \frac{C_1}{1+u^2}$ *cu soluţia* $g(u) = C_1 \arctan u + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$*. Prin urmare*

$$f(x,y) = C_1 \arctan \frac{y}{x} + C_2, \ x \neq 0.$$

Solutie Ex. 5 *a) Avem* $F'(x) = f'_u(u(x),v(x)) \cdot 2x + f'_v(u(x),v(x)) \cdot \frac{1}{x}$*. Pentru derivata de ordinul al doilea, derivăm din nou, ţinând cont că,* $f'_u(u(x),v(x))$ *şi* $f'_v(u(x),v(x))$ *sunt de asemenea funcţii compuse.*

$$\begin{aligned} F''(x) &= \left(f''_{u^2} \cdot 2x + f''_{uv} \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot 2x + f'_u \cdot 2 + \\ &+ \left(f''_{uv} \cdot 2x + f''_{v^2} \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} + f'_v \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= 4x^2 f''_{u^2} + \frac{1}{x^2} f''_{v^2} + 4 f''_{uv} + 2 f'_u - \frac{1}{x^2} f'_v. \end{aligned}$$

b) $F'_x(x,y) = f'_u \cdot y + f'_v \left(-\frac{y}{x^2}\right)$, $F'_y(x,y) = f'_u \cdot x + f'_v \cdot \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} F''_{x^2}(x,y) &= \left(f''_{u^2} \cdot y + f''_{uv}(-\frac{y}{x^2})\right) \cdot y + \\ &+ \left(f''_{uv} \cdot y + f''_{v^2} \cdot (-\frac{y}{x^2})\right) \cdot (-\frac{y}{x^2}) + f'_v \cdot \frac{2y}{x^3}, \\ F''_{y^2}(x,y) &= \left(f''_{u^2} \cdot x + f''_{uv} \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x + \left(f''_{uv} \cdot x + f''_{v^2} \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}, \\ F''_{xy}(x,y) &= \left(f''_{u^2} \cdot y + f''_{uv}(-\frac{y}{x^2})\right) \cdot x + f'_u + \\ &+ \left(f''_{uv} \cdot y + f''_{v^2} \cdot (-\frac{y}{x^2})\right) \cdot \frac{1}{x} + f'_v \cdot (-\frac{1}{x^2}). \end{aligned}$$

Solutie Ex. 6 *a) Fie* $u(x,y) = 2x + 3y$ *atunci* $f(x,y) = g(u(x,y))$*. Avem*

$$f'_x = 2g'(u(x,y)) \quad f'_y = 3g'(u(x,y)).$$

Derivatele parţiale de ordinul 2 sunt

$$f''_{x^2} = 4g''(u(x,y)), \ f''_{y^2} = 9g''(u(x,y)) \ f''_{xy} = 6g''(u(x,y))$$

Relaţia din enunţ ne conduce la

$$19g''(u(x,y)) = 0 \Leftrightarrow g'(u(x,y)) = C_1 \Leftrightarrow g(u) = C_1u + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind u obţinem $f(x,y) = C_1(2x+3y) + C_2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Fie $u(x,y) = y-3x$, $v(x,y) = y+2x$, *atunci* $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$. *Avem*

$$f'_x = -3g'_u(u,v) + 2g'_v(u,v) \quad f'_y = g'_u(u,v) + g'_v(u,v).$$

Derivatele parţiale de ordinul 2 sunt:

$$\begin{aligned} f''_{x^2} &= (-3g'_u(u,v) + 2g'_v(u,v))'_x = 9g''_{u^2} - 12g''_{uv} + 4g''_{v^2} \\ f''_{y^2} &= (g'_u(u,v) + g'_v(u,v))'_y = g''_{u^2} + 2g''_{uv} + g''_{v^2} \\ f''_{xy} &= -3g''_{u^2} - g''_{uv} + g''_{v^2}, \end{aligned}$$

iar relaţia din enunţ devine

$$f''_{x^2}(x,y) + f''_{xy}(x,y) - 6f''_{y^2}(x,y) = -25g''_{uv} = 0.$$

Deci $(g'_u)'_v = 0\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$. *De aici rezultă că* $g'_u(u,v) = h(u)$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Integrând această ultimă relaţie în raport cu u obţinem*

$$g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v),\ \text{cu } \varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}).$$

Înlocuind u şi v obţinem $f(x,y) = \varphi(y-3x) + \psi(y+2x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Fie $u(x,y) = 2x-y$, $v(x,y) = 3x-y$, *atunci* $f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y))$. *Se obţine* $g''_{uv} = 0$, *deci* $g'_u(u,v) = h(u)$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Integrând această ultimă relaţie în raport cu u obţinem*

$$g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v),\ \text{cu } \varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}).$$

Înlocuind u şi v obţinem $f(x,y) = \varphi(2x-y) + \psi(3x-y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solutie Ex. 7 *1)* $f'_x = -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)$,
$f'_y = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \psi'\left(\frac{y}{x}\right)$

$$f''_{x^2} = \frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3}\psi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f''_{xy} = -\frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\psi''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f''_{y^2} = \frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\psi''\left(\frac{y}{x}\right).$$

2) Fie

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ v(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y)).$$

Avem

$$f''_{x^2} = \varphi''_{u^2}(u'_x)^2 + 2\varphi''_{uv}u'_x v'_x + \varphi''_{v^2}(v'_x)^2 + \varphi'_u u''_{x^2} + \varphi'_v v''_{x^2};$$
$$f''_{y^2} = \varphi''_{u^2}(u'_y)^2 + 2\varphi''_{uv}u'_y v'_y + \varphi''_{v^2}(v'_y)^2 + \varphi'_u u''_{y^2} + \varphi'_v v''_{y^2},$$

unde

$$u'_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ u'_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$v'_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ u'_y = \frac{x^2-y2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$u''_{x^2} = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3},\ u''_{y^2} = -\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$
$$v''_{x^2} = -\frac{2y^3-6yx^2}{(x^2+y^2)^3},\ v''_{y^2} = \frac{2y^3-6yx^2}{(x^2+y^2)^3}.$$

$$\Delta f = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}(\varphi''_{u^2} + \varphi''_{v^2}) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\Delta\varphi = 0.$$

Solutie Ex. 8 *Avem*

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}|x|\sin\frac{1}{|x|} = 0$$

şi analog

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}|y|\sin\frac{1}{|y|} = 0.$$

Vom arăta că $df(0,0) = 0$. Într-adevăr, avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x-0, y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Pentru $(x,y) \neq (0,0)$ avem

$$f'_x(x,y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y(x,y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} f'_x\left(\frac{1}{2n\pi}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n\pi} \sin 2n\pi - \cos 2n\pi\right) = -1$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} f'_x\left(0, \frac{1}{2n\pi}\right) = 0$$

rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ *nu există, deci* f'_x *este discontinuă în* $(0,0)$. *Analog rezultă că şi* f'_y *este discontinuă în* $(0,0)$.

Solutie Ex. 9 *Avem* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$ *şi*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = 0.$$

Dacă f ar fi diferenţiabilă în origine, diferenţiala ei în acest punct ar fi $df = 0$ şi ar trebui ca:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x-0, y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} = 0,$$

dar limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ *nu există. Pe direcţia* $x = y$, *limita este* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$, *iar pe direcţia* $y = 2x$ *limita este* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)}{5x^2} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}$.

Solutie Ex. 10 *Studiem existenţa derivatelor partţiale de ordinul I în origine. Avem*

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

şi analog

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Pe de altă parte $f'_x(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ *iar*

$$f'_y(x,y) = x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2},\ \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Deci $f''_{yx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = 1$ *iar* $f''_{xy} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = -1$.

Solutie Ex. 11 *Fie* $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z$. *Gradientul lui* f *este* $\nabla f = (4x, 2y, -1)$. *Ecuaţia planului tangent la* (S) *în punctul* $M(1,1,3)$ *este*

$$4x + 2y - z - 3 = 0$$

iar ecuaţia normalei este

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

Solutie Ex. 12 *Fie* $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *Versorul direcţiei gradientului este* $s = \frac{\nabla f(M)}{\|\nabla f(M)\|}$. *Se obţine astfel derivata direcţională*

$$\frac{df}{ds}(M) = \nabla f(M) \cdot s = \nabla f(M) \cdot \frac{\nabla f(M)}{\|\nabla f(M)\|} = \|\nabla f(M)\|$$

Solutie Ex. 13 *Fie* $f(x,y,z) = x + 2y - \ln z + 4$ *şi* $g(x,y,z) = x^2 - xy - 8x + z + 5$. $f(2,-3,1) = 0$, $g(2,-3,1) = 0$ *deci punctul* M *aprţine ambelor suprafeţe. Avem,* $\nabla f(x,y,z) = (1, 2, -\frac{1}{z})$ *şi* $\nabla g(x,y,z) = (2x - y - 8, -x, 1)$; $\nabla f(2,-3,1) = -\nabla g(2,-3,1)$, *deci vectorii sunt coliniari.*

Solutie Ex. 14 *Fie* $M(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *un punct de contact*

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a\, x_0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = b\, y_0 \end{cases}$$

deci $ax_0 = by_0$. *Considerăm* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - ax$ *şi* $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - by$. *Arătăm că* $\nabla f(M) \perp \nabla g(M)$. *Avem,*

$$\begin{aligned} \nabla f(M) \cdot \nabla g(M) &= (2x_o - a, 2y_0, 2z_0) \cdot (2x_0, 2y_0 - b, 2z_0) \\ &= 4(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) - 2ax_0 - 2by_0 \\ &= 4ax_0 - 2ax_0 - 2by_0 = 2ax_0 - 2by_0 = 0. \end{aligned}$$

Solutie Ex. 15 *Avem*

$$rot\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \overset{not}{=} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\vec{k},$$

iar $div(rot)\overrightarrow{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$

Solutie Ex. 16

a) Ecuaţia planului tangent la (S) *în punctul* M *este* $5x + 2y - z + 2 = 0$.
Ecuaţia normalei la suprafaţă în punctul M_0 *este* $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$;

b) Ecuaţia planului tangent la (S) *în punctul* M *este* $3x + 12y - z - 18 = 0$.
Ecuaţia normalei la suprafaţă în punctul M_0 *este* $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{12} = \frac{z-9}{-1}$.