Fizică I

Mihai Gabor

2024

Cuprins

Listă de figuri

1 Scalari și vectori

Mărimile fizice sunt de două feluri scalare și vectoriale. *O mărime fizică scalară* este complet descrisă de un număr și de o unitate de măsură. Exemple de mărimi fizice scalare sunt masa, densitatea, volumul, durata, temperatura etc. Numărul reprezintă mărimea (sau modulul) mărimii fizice și ne indică de câte ori este mai mare decât etalonul. De exemplu, dacă masa unui corp este de 5 kg atunci masa lui este de 5 ori masa kilogramului standard. *O mărime fizică vectorială* are pe lângă modul o direcție și un sens în spațiu. Pentru descrierea completă a mărimii vectoriale avem nevoie pe lângă unitate de măsură de trei numere care depind de sistemul de coordonate ales. Exemple de mărimi vectoriale sunt deplasarea, viteza, accelerația, forța etc.

1.1 Reprezentarea unui vector în sistemul de coordonate cartezian

Un vector este reprezentat geometric printr-o săgeată. Lungimea săgeții ne dă mărimea sau modulul vectorului, direcția vectorului este direcția săgeții, iar sensul este dat de vârful săgeții. Un vector poate fi descris și prin intermediul *componentelor scalare*, sau a proiecțiilor scalare pe axele de coordonate. De exemplu, setul de trei scalari (a_x, a_y, a_z) din figura 1.1 sunt componentele vectorului $\boldsymbol{a}$ în sistemul de coordonate cartezian indicat.

Observație. *În mod normal o mărime vectorială se reprezintă printr-o săgeată plasată deasupra simbolului mărimii respective, de exemplu $\vec{a}$. Pentru simplitate, pe parcursul acestui curs, o să reprezentăm un vector folosind caractere aldine, de exemplu $\boldsymbol{a}$. Mărimile descrise cu ajutorul caracterelor italice obișnuite vor descrie scalari, de exemplu a_x.*

Astfel, relația

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) \tag{1.1}$$

ne indică faptul că vectorul $\boldsymbol{a}$ este descris într-un anumit sistem de coordonate cartezian cu ajutorul componentelor scalare (a_x, a_y, a_z).

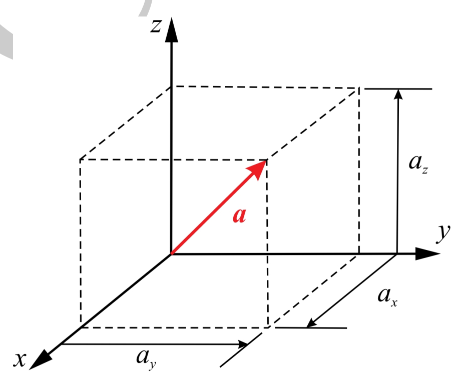


Figura 1.1: Reprezentarea unui vector în sistemul de coordonate cartezian.

1.2 Operații cu vectori

Egalitatea a doi vectori

Ecuația $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ sau $(a_x, a_y, a_z) = (b_x, b_y, b_z)$ este echivalentă cu un set de trei ecuații:

$$\begin{aligned} a_x &= b_x, \\ a_y &= b_y, \\ a_z &= b_z. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Aceasta înseamnă că doi vectori sunt egali dacă au componentele egale. Geometric, doi vectori sunt egali dacă au aceeași lungime și sunt paraleli, dar nu este necesar să aibă același punct de aplicație sau origine, așa cum este indicat în figura 1.2.

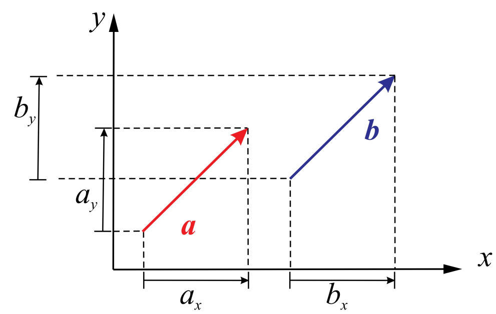


Figura 1.2: Doi vectori egali au componentele egale.

Adunarea a doi vectori

Adunarea a doi vectori este definită de ecuația

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \tag{1.3}$$

care este echivalentă cu

$$(a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z). \tag{1.4}$$

Suma a doi vectori este egală cu suma componentelor lor. Geometric, vectorul sumă este reprezentat de a treia latură a unui triunghi format din cei doi vectori care sunt adunați. De asemenea, vectorul sumă poate fi construit și folosind regula paralelogramului, ca în figura 1.3.

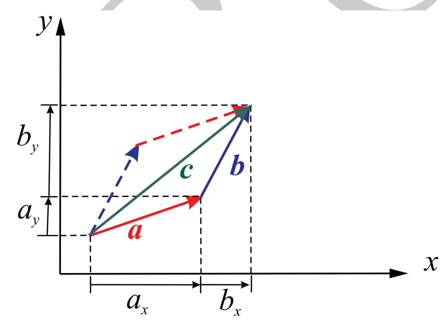


Figura 1.3: Adunarea a doi vectori. Vectorul sumă $\boldsymbol{c}$ este reprezentat de a treia latură a unui triunghi format din cei doi vectorii $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ care sunt adunați.

Înmulțirea cu un scalar

Dacă c este un scalar iar $\boldsymbol{a}$ este un vector atunci

$$c\boldsymbol{a} = c(a_x, a_y, a_z) = (ca_x, ca_y, ca_z). \tag{1.5}$$

Adică, produsul $c\boldsymbol{a}$ este un vector ale cărui componente sunt de c ori mai mari decât componentele lui $\boldsymbol{a}$. Dacă $c = -1$ atunci vectorul $-\boldsymbol{a}$ este un vector care are sensul opus lui $\boldsymbol{a}$, așa cum este indicat în figura 1.4.

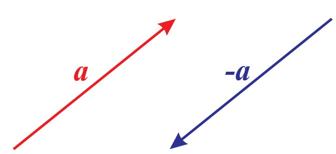


Figura 1.4: Vectorul $-\boldsymbol{a}$ este un vector care are sensul opus lui $\boldsymbol{a}$.

Mărimea unui vector

Mărimea sau modulul unui vector $\boldsymbol{a}$ se notează cu $|a|$ sau cu a, este definită ca

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{1.6}$$

și reprezintă lungimea diagonalei paralelipipedului determinat de componentele vectorului, așa cum este ilustrat în figura 1.1.

Înmulțirea scalară

Înmulțirea scalară a doi vectori $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ se definește ca suma produsului componentelor vectorilor

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{1.7}$$

Produsul scalar a doi vectori are o interpretare geometrică simplă care poate fi utilizată pentru a determina unghiul dintre doi vectori, așa cum este indicat în figura 1.5 Deoarece produsul scalar este un scalar, valoarea lui nu depinde de alegerea sistemului de coordonate. Astfel, dacă avem doi vectori, $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ definiți într-un sistem de coordonate x, y, z putem întotdeauna să definim un alt sistem de coordonate x', y', z' în care vectorul $\boldsymbol{a}$ să fie paralel cu Ox', iar Oz' să fie perpendicular pe planul format de cei doi vectori. În acest nou sistem de coordonate vectorul $\boldsymbol{a}$ are componentele $(a_{x'}, 0, 0)$ sau $(a, 0, 0)$, iar vectorul $\boldsymbol{b}$ are componentele $(b_{x'}, b_{y'}, 0)$ sau $(b\cos\theta, b\sin\theta, 0)$, iar

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_{x'} b_{x'} = a(b\cos\theta) = ab\cos\theta. \tag{1.8}$$

Din punct de vedere geometric, $b\cos\theta$ este proiecția vectorului $\boldsymbol{b}$ pe vectorul $\boldsymbol{a}$. Observați că produsul scalar a doi vectori perpendiculari este zero.

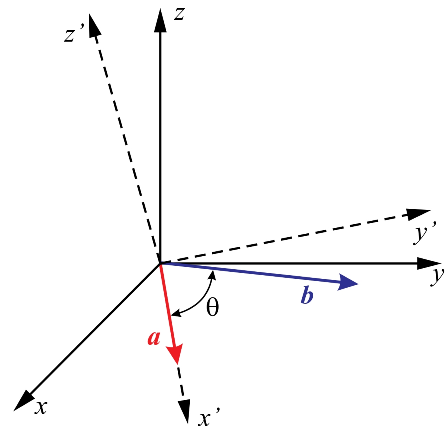


Figura 1.5: Interpretare geometrică a produsului scalar a doi vectori.

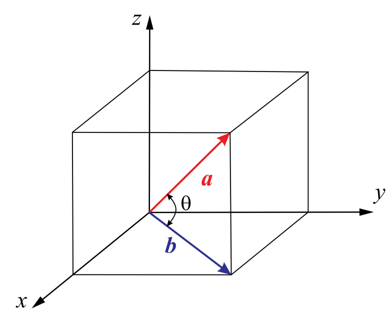
Exemplul 1.1. Care este unghiul dintre diagonala principală și diagonala unei fețe adiacente a unui cub?

Diagonala principală este dată de vectorul $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)$, iar diagonala unei fețe adiacente este dată de vectorul $\boldsymbol{b} = (1, 1, 0)$. Astfel

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{ab} = \frac{(1 + 1 + 0)}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = 0.8165$$

de unde

$$\theta = 35.26°.$$



Reprezentarea unui vector folosind versorii axelor de coordonate

Conform figurii 1.6, dacă avem un vector $\boldsymbol{a}$, putem să-l descompunem de-a lungul celor trei axe de coordonate în felul următor

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z. \tag{1.9}$$

Cei trei vectori $\boldsymbol{a}_x$, $\boldsymbol{a}_y$ și $\boldsymbol{a}_z$ reprezintă componentele vectoriale ale vectorului $\boldsymbol{a}$ și se pot scrie în funcție de componentele scalare a_x, a_y și a_z astfel:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_x &= a_x \boldsymbol{i}, \\ \boldsymbol{a}_y &= a_y \boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{a}_z &= a_z \boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

unde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ și $\boldsymbol{k}$ se numesc versorii axelor de coordonate.

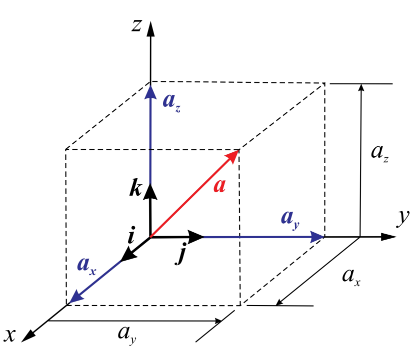


Figura 1.6: Reprezentarea unui vector folosind versorii axelor de coordonate.

Aceștia sunt vectori unitari paraleli cu axele de coordonate, adică:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= (1,0,0), \quad \boldsymbol{i}||Ox, \quad |\boldsymbol{i}| = 1, \\ \boldsymbol{j} &= (0,1,0), \quad \boldsymbol{j}||Oy, \quad |\boldsymbol{j}| = 1, \\ \boldsymbol{k} &= (0,0,1), \quad \boldsymbol{k}||Oz, \quad |\boldsymbol{k}| = 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Se poate arăta simplu că

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \tag{1.12}$$

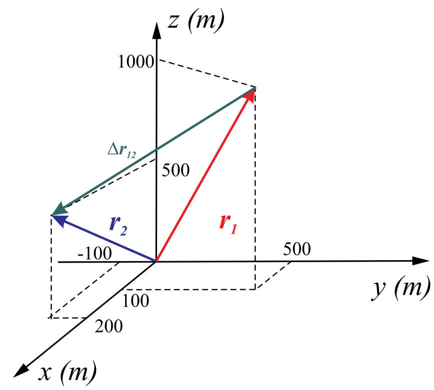
și că

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} = 0. \tag{1.13}$$

Astfel, un vector se poate scrie folosind componentele sale scalare și versorii axelor de coordonate în felul următor:

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}. \tag{1.14}$$

Exemplul 1.2. Un elicopter se ridică la 1000 m și zboară 100 m spre E și 500 spre N. Un al doilea elicopter se ridică din același punct la înălțimea de 500 m și zboară 200 m spre E și 100 m spre S. Care este distanța dintre cele două elicoptere?



Vectorii care ne dau poziția celor două elicoptere sunt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= 100\boldsymbol{i} + 500\boldsymbol{j} + 1000\boldsymbol{k} \text{ [m]}, \\ \boldsymbol{r}_2 &= 200\boldsymbol{i} - 100\boldsymbol{j} + 500\boldsymbol{k} \text{ [m]}. \end{aligned}$$

Vectorul care ne dă distanța dintre cele două elicoptere este

$$\Delta\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = +100\boldsymbol{i} - 600\boldsymbol{j} - 500\boldsymbol{k},$$

iar distanța dintre cele două elicoptere este dată de

$$\Delta r_{12} = |\Delta\boldsymbol{r}_{12}| = (100^2 + 600^2 + 500^2)^{1/2} = 787.4 \text{ m}.$$

Produsul vectorial a doi vectori

Conform definiției, prin înmulțirea vectorială a doi vectori $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ se obține un vector $\boldsymbol{c}$ care are componentele date de

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x), \tag{1.15}$$

sau folosind un determinant se poate arăta simplu că

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

Geometric, vectorul $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ este un vector care are direcția perpendiculară pe vectorii $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ și al cărui sens se poate determina cu regula burghiului. Se plasează burghiul (tirbușonul) paralel cu vectorul $\boldsymbol{c}$, se rotește vectorul $\boldsymbol{a}$ spre $\boldsymbol{b}$ pe drumul cel mai scurt și se rotește burghiul în același sens, așa cum este ilustrat în figura 1.7. Sensul în care înaintează burghiul este sensul vectorului $\boldsymbol{c}$.

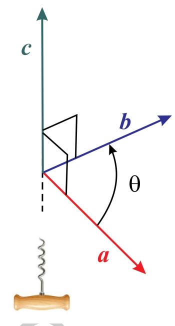


Figura 1.7: Regula burghiului pentru determinarea sensului vectorului $\boldsymbol{c}$.

De asemenea, se poate arăta că modulul lui $\boldsymbol{c}$ este dat de

$$c = |a \times b| = ab \sin\theta. \tag{1.17}$$

Conform definiției 1.15, produsul vectorial este anticomutativ, adică

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}. \tag{1.18}$$

Exerciții și probleme

1.1. Se dau doi vectori $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ și $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, calculați:

(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ și $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$.

(b) $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$.

(c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

(d) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ și $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.

1.2. Se dau doi vectori $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ și $\boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{j}$, calculați:

(a) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ și $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

(b) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ și $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$.

(c) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ și $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$.

1.3. Determinați unghiul dintre vectorii $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{i} + 2a\boldsymbol{j}$ și $\boldsymbol{b} = a\boldsymbol{i} + 2a\boldsymbol{j} + 3a\boldsymbol{k}$. (*Acești vectori reprezintă diagonala principală și diagonala unei fețe adiacente pentru un paralelipiped de laturi a, $2a$ și $3a$*) [R: $\approx 53°$].

1.4. Să considerăm un cub ale cărui laturi au fiecare o lungime unitară. Un colț coincide cu originea sistemului de coordonate cartezian xyz. Trei dintre laturile cubului se extind de la origine de-a lungul direcției pozitive a fiecărei axe de coordonate. Găsiți vectorul care începe de la origine și se extinde:

(a) de-a de-a lungul unei diagonale principale a cubului;

(b) de-a lungul diagonalei feței inferioare a cubului;

(c) dacă acești vectori sunt $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{a}$, găsiți $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$;

(d) găsiți unghiul dintre $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{a}$.

1.5. Se dau doi vectori $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$. Vectorul $\boldsymbol{c}$ este necunoscut, dar $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = u$, unde u este o mărime cunoscută, iar $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$. Determinați vectorul $\boldsymbol{c}$ în funcție de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, u, precum și de modulul a. [R: $\boldsymbol{c} = \frac{u}{a^2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{a^2}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$].

1.6. Pentru ce valori ale lui q vectorul $\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ este perpendicular pe vectorul $\boldsymbol{b} = q\boldsymbol{i} - q\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$? [R: 1 sau 2].

1.7. Fie vectorul variabil în timp $\boldsymbol{a} = \alpha t\boldsymbol{i} + \beta t^2\boldsymbol{j} + \gamma t^3\boldsymbol{k}$, unde α, β și γ sunt trei constante. Determinați prima și a doua derivată a vectorului în raport cu timpul.

1.8. Doi vectori $\boldsymbol{a}$ și $\boldsymbol{b}$ descriu un paralelogram. Arătați că aria paralelogramului este egală cu $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.

1.9. Arătați că $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ nu este egal cu $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$.

1.10. Trei vectori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ și $\boldsymbol{c}$ descriu un paralelipiped. Arătați că volumul paralelipipedului este $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$.

1.11. Demonstrați identitatea $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

1.12. Arătați că $\boldsymbol{a}$ este perpendicular pe $\boldsymbol{b}$ dacă $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$.

Mecanica newtoniană

Mecanică newtoniană este un capitol al fizicii care descrie mișcarea corpurilor. Ea are două părți, de fapt toată fizica poate fi reprezentată ca o problemă în două părți, scopul este de a prezice viitorul pornind de la prezent. Ce înseamnă aceasta? În primul rând trebuie să ne alegem un sistem fizic. A cunoaște prezentul pentru un sistem fizic înseamnă să cunoaștem toate informațiile relevante pentru sistem la momentul prezent astfel încât să fim capabili să prezicem evoluția lui. De exemplu, dacă studiem mișcarea unui corp pe care îl aruncăm vertical în sus (sistemul fizic este reprezentat de corp și Pământ), dacă ignorăm frecarea cu aerul, informațiile prezente relevante pentru sistem sunt unde este corpul și ce viteză are. Exemple de informații irelevante sunt ce culoare are corpul, ce formă sau ce masă are. Această parte a mecanicii newtoniene care descrie informațiile relevante și complete pentru a cunoaște starea prezentă a unui sistem fizic se numește *cinematică*. A doua parte a mecanicii newtoniene care tratează cauzele mișcării și care ne permite să prezicem evoluția sistemului se numește *dinamică*.

2 Cinematica în spațiul unidimensional (1D)

2.1 Mărimi cinematice

O să începem să studiem cinematica pornind de la cel mai simplu exemplu posibil. O să considerăm un punct material (un corp idealizat care nu are dimensiuni, dar are masă) și care se deplasează pe o singură direcție, de exemplu axa Ox, ca în figura 2.1.

Pentru a descrie complet mișcarea acestui corp trebuie să putem determina unde se află. Pentru aceasta ne alegem pe axă o origine O și o să împărțim axa în segmente egale de 1 m. O să definim sensul pozitiv al axei de la stânga la dreapta, iar sensul negativ de la dreapta la stânga. Nu este suficient să știm unde este corpul, trebuie să determinăm și momentul de timp la care corpul se află în poziția respectivă. Pentru aceasta o să folosim un cronometru. De exemplu, corpul nostru se află în poziția $x = 4$ m la momentul $t = 1$ s.

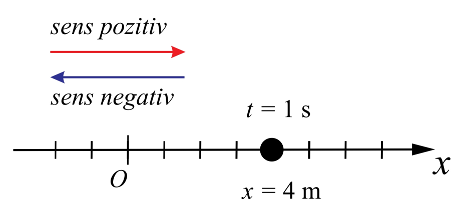


Figura 2.1: Un punct material care se deplasează de-a lungul axei Ox.

O să descriem mișcarea corpului prin înregistrarea poziției corpului la diferite momente de timp și prin trasarea unui grafic $x = f(t)$. Să presupunem că am obținut graficul din figura 2.2.

Viteza

Prima mărime cinematică pe care o definim este *viteza medie* între intervalele de timp t_1 și t_2:

$$v_{med} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\ [\text{m/s}]. \tag{2.1}$$

Cu toate că această noțiune conține informații referitoare la mișcarea corpului, ea nu conține informații complete relativ la viteza corpului pe durata mișcării. De exemplu, dacă $t_1 = 1$ s și

$t_2 = 5$ s, iar $x_1 = 4$ m și $x_2 = 8$ m viteza medie pe acest interval de timp este

$$v_{med} = \frac{8-4}{5-1} = 1 \text{ [m/s]}.$$

Această viteză medie este pozitivă, însă pe durata mișcării corpul a avut și viteză negativă. Puteți observa din graficul din figura 2.2 că la un moment dat x începe să scadă în timp, ceea ce indică mișcare în sens negativ.

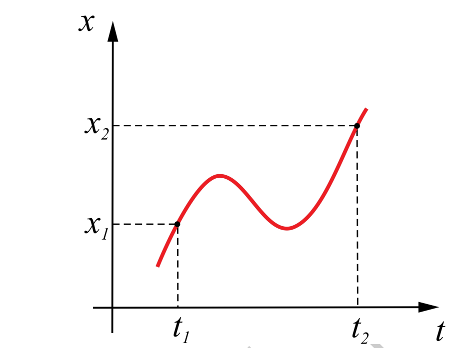


Figura 2.2: Poziția punctului material de-a lungul axei Ox în funcție de timp.

O să definim în continuare *viteza instantanee*, o mărime cinematică care ne descrie viteza la orice moment t pe parcursul mișcării. Pentru aceasta o să pornim de la noțiunea de viteză medie. Să presupunem că la momentul t corpul se află în poziția x, iar după un interval de timp Δt se află în poziția $x + \Delta x$. Aici Δt reprezintă un interval mic de timp, dar finit. Din graficul din figura 2.3 putem să observăm că viteza medie pe intervalul de timp Δt reprezintă panta dreptei care unește punctele P_1 și P_2, dată de

$$v_{med} = \frac{x + \Delta x - x}{t + \Delta t - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

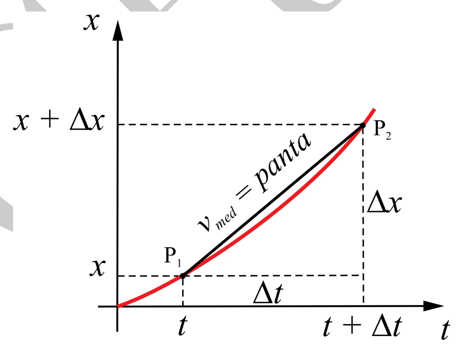


Figura 2.3: Viteza medie pe intervalul de timp Δt reprezintă panta dreptei care unește punctele P_1 și P_2.

Cum putem să definim viteza instantanee la momentul t? Pentru aceasta trebuie să aducem punctul P_2 cât mai aproape de P_1, adică să micșorăm cât mai mult intervalul de timp Δt, așa cum este ilustrat în graficul din figura 2.4. La limită, viteza instantanee la momentul t o să fie

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \tag{2.3}$$

Aceasta înseamnă că *viteza instantanee* la momentul t reprezintă panta tangentei la grafic la momentul t, adică *derivata în funcție de timp a funcției $x(t)$ la momentul t.*

Observație. *În notațiile consacrate Δx și Δt reprezintă intervale finite, iar dx și dt reprezintă intervale infinit mici. Astfel dx/dt reprezintă derivata funcție $x(t)$ în raport cu t.*

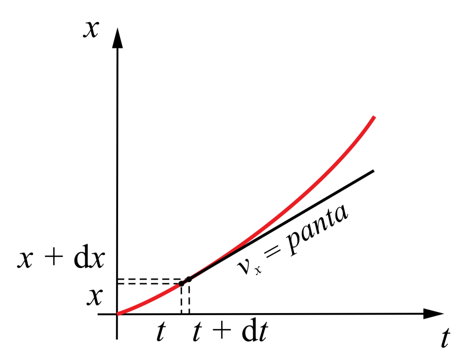


Figura 2.4: Viteza instantanee la momentul t reprezintă panta tangentei la grafic la momentul t.

Accelerația

În mod similar putem să definim accelerația medie și accelerația instantanee urmărind variația vitezei în raport cu timpul. Să presupunem că la momentul t corpul are viteza v_x, iar după un interval de timp Δt are viteza $v_x + \Delta v_x$. Din graficul alăturat putem să observăm că accelerația medie pe intervalul de timp Δt reprezintă panta dreptei care unește punctele P_1 și P_2.

$$a_{med} = \frac{v_x + \Delta v_x - x}{t + \Delta t - t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}. \tag{2.4}$$

La fel cum viteza unui corp poate varia pe parcursul mișcării, și accelerația poate să varieze. În asemenea caz, suntem interesați de accelerația instantanee care, la limită, la momentul t o să fie

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}. \tag{2.5}$$

Aceasta înseamnă că *accelerația instantanee* la momentul t reprezintă panta tangentei la graficul $v_x(t)$ la momentul t, adică *derivata în funcție de timp a funcției* $v_x(t)$ *la momentul* t, așa cum este ilustrat în figura 2.6. Dacă ținem cont de faptul că $v_x(t) = dx/dt$ atunci putem scrie

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{2.6}$$

adică accelerația instantanee la momentul t este a doua derivată în funcție de timp a funcției $x(t)$, la momentul t.

Accelerația instantanee este variația vitezei în unitatea de timp. Ea este diferită de zero atât timp cât viteza variază. Când viteza este constantă accelerația este zero.

Observație. *Cu toate că denumirea corectă este viteză și accelerație instantanee, pentru simplitate, în continuare pe parcursul cursului o să le numim simplu viteză și accelerație. Când o să ne referim la viteză medie o să specificăm denumirea completă.*

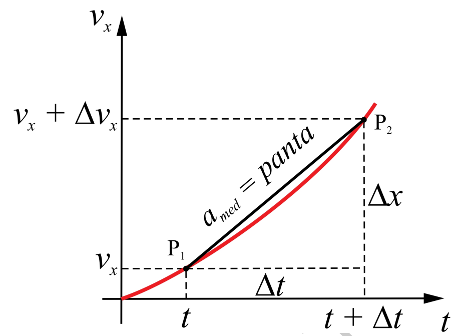


Figura 2.5: Accelerația medie pe intervalul de timp Δt reprezintă panta dreptei care unește punctele P_1 și P_2.

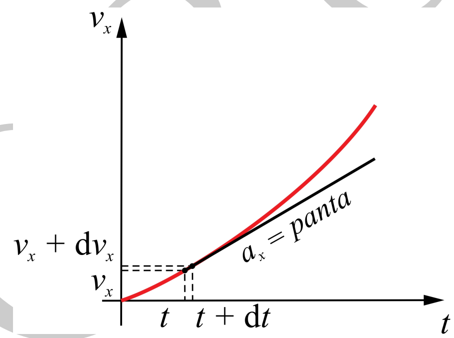


Figura 2.6: Accelerația instantanee la momentul t reprezintă panta tangentei la grafic la momentul t.

Exemplul 2.1. Un corp se mișcă pe direcția Ox după legea $x(t) = t^3 - 2t + 1$ [m]. (a) Determinați viteza și accelerația corpului.

Viteza este dată de

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 2t + 1) = 3t^2 - 2 \text{ [m/s]}.$$

$$v_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 2) = 6t \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

(b) Care este viteza corpului la momentele $t_1 = 1$ s și $t_2 = 2$ s ?

$$v_x(t_1) = 3t_1^2 - 2 = 3 \cdot 1^2 - 2 = 1 \text{ s}$$

$$v_x(t_2) = 3t_2^2 - 2 = 3 \cdot 2^2 - 2 = 10 \text{ s}$$

(c) Care este viteza medie pe intervalul de timp $t_1 = 1 \text{ s} \to t_2 = 2$ s ?

$$v_{med} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{5 - 0}{2 - 1} = 5 \text{ m/s}$$

Atenție! Viteza medie pe intervalul de timp $t_1 \to t_2$ **nu** este $\frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{2}$.

2.2 Mișcarea 1D cu accelerație constantă.

Un caz special de mișcare este mișcarea cu accelerație constantă. Acest caz este important deoarece toate corpurile în cădere liberă în apropierea suprafeței Pământului se mișcă cu accelerație constantă, numită accelerație gravitațională, egală cu 9.81 m/s^2.

Să presupunem că avem un corp care se mișcă pe direcția Ox cu accelerația $a_x = ct$. Ne dorim să determinăm funcțiile după care viteza și poziția depind de timp, adică *legea vitezei* și *legea de mișcare*. Pentru a determina legea vitezei o să plecăm de la definiția accelerației

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \tag{2.7}$$

Observație. Pentru a simplifica notația am eliminat indicația explicită a faptului că accelerația depinde de timp, astfel $a_x(t)$ s-a transformat în a_x. La fel o să procedăm și pentru viteză și spațiu.

Prin separarea variabilelor, o să obținem

$$dv_x = a_x dt, \tag{2.8}$$

iar legea vitezei se obține prin integrarea relației de mai sus

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = a_x \int_0^t dt. \tag{2.9}$$

Singura dificultate în rezolvarea corectă a integralelor de mai sus o reprezintă alegerea limitelor de integrare. Cel mai simplu este să scriem prima dată limitele de integrare în partea dreaptă a ecuației. Trebuie să integrăm de la momentul inițial, *pe care trebuie să-l cunoaștem*, până la un moment oarecare t. Cu toate că în general momentul inițial poate să fie diferit de zero, pentru simplitate, o să presupunem că la momentul inițial $t = 0$. În partea stângă o să integrăm de la viteza v_{x0} până la viteza v_x. Aici, v_{x0} reprezintă *viteza la momentul inițial* $t = 0$*, pe care trebuie să o cunoaștem*, iar v_x *este viteza la momentul* t*, pe care vrem să o determinăm.*

Prin integrare o să obținem

$$v_x - v_{x0} = a_x t, \tag{2.10}$$

sau

$$v_x = v_{x0} + a_x t, \tag{2.11}$$

care reprezintă *legea vitezei pentru un corp care se mișcă în 1D cu accelerație constantă.*

Pentru a determina legea de mișcare o să plecăm de la definiția vitezei

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \tag{2.12}$$

separăm variabilele

$$dx = v_x dt, \tag{2.13}$$

înlocuim legea vitezei 2.11 și obținem

$$dx = (v_{x0} + a_x t)dt = v_{x0}dt + a_x t dt \tag{2.14}$$

relația se poate integra ușor

$$\int_{x0}^{x} dx = v_{x0} \int_{0}^{t} dt + a_x \int_{0}^{t} t dt \tag{2.15}$$

unde x_0 este poziția corpului la momentul inițial $t = 0$, *pe care trebuie să o cunoaștem*, iar x este poziția corpului la momentul t, *pe care vrem să o determinăm*. După integrare obținem

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \tag{2.16}$$

care reprezintă *legea de mișcare a unui corp care se mișcă în 1D cu accelerație constantă*.

2.3 Ecuația lui Galileo Galilei

Pentru un corp care se mișcă cu accelerație constantă este posibil să obținem o relație care leagă viteza de spațiu fără a implica timpul. Relație care se mai numește și ecuația lui Galileo Galilei. O să pornim de la definițiile vitezei și accelerației:

$$\begin{aligned} a_x =& \frac{dv_x}{dt}, \\ v_x =& \frac{dx}{dt}, \end{aligned}$$

care se pot rearanja astfel:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} =& a_x, \\ v_x =& \frac{dx}{dt}, \end{aligned}$$

iar prin înmulțire o să obținem

$$v_x \frac{dv_x}{dt} = a_x \frac{dx}{dt}. \tag{2.17}$$

O să eliminăm variația în timp, astfel încât

$$v_x dv_x = a_x dx. \tag{2.18}$$

Această ecuație ne spune că într-un interval de timp infinitezimal $[t, t + dt]$, variabilele v_x și x se schimbă cu dv_x și dx, iar aceste variații sunt legate prin ecuația de mai sus. În limita $dx \to 0$ sau $dv_x \to 0$ ecuația se reduce la $0 = 0$. Cu toate acestea, putem să interpretăm ecuația în alt mod. Să presupunem că în intervalul de timp finit $[0, t]$, variabila v_x variază de la v_{x0} la v_x și x de la x_0 la x. Dacă împărțim intervalul $[0, t]$, într-un număr foarte mare N de subintervale egale, de lățime dt și dacă dx și dv_x sunt variațiile lui x și v_x în intervalul $[t, t + dt]$, atunci relația dintre aceste variații este dată de ecuația 2.18. Putem să sumăm aceste N ecuații pentru fiecare interval $[t, t + dt]$, iar pentru $N \to \infty$ sumele se transformă în integrale și ecuația 2.18 devine

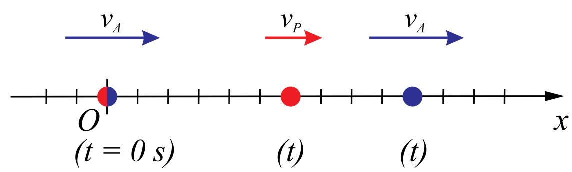
$$\int_{v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x = a_x \int_{x0}^{x} dx. \tag{2.19}$$

prin integrare și rearanjarea termenilor *obținem ecuația lui Galileo Galilei*

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0). \tag{2.20}$$

Exemplul 2.2. Un automobil se deplasează cu viteza constantă de 15m/s. La momentul $t = 0$, când trece prin fața acesteia, o mașină de poliție pleacă din repaus în urmărirea automobilului cu accelerația de $3\,\mathrm{m/s^2}$. După cât timp mașina de poliție ajunge automobilul? Ce distanță a parcurs mașina de poliție până să ajungă automobilul? Care este viteza mașinii de poliție în acel moment?

În figura de mai jos este ilustrată poziția celor două autovehicule la momentul inițial și la un moment oarecare t.



Pentru a rezolva problema trebuie să determinăm legile vitezei și de mișcare pentru automobil și pentru mașina de poliție. Deoarece ambele autovehicule se deplasează cu accelerație constantă, aceste legi se scriu în general:

$$v_x = v_{x0} + a_x t,$$
$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2.$$

Legile trebuie particularizate pentru fiecare autovehicul în parte. Pentru automobil, știm că se deplasează cu viteză constantă, atunci $v_{x0} = 15\,\mathrm{m/s}$, iar accelerația este $a_x = 0$. Mai mult, știm că la momentul inițial cele două autovehicule sunt în același loc pe care o să-l considerăm originea axei de coordonate, atunci $x_0 = 0$. Astfel, pentru automobil cele două legi o să fie:

$$v_x = v_{x0} = 15\,[\mathrm{m/s}],$$
$$x = v_{x0}t = 15t\,[\mathrm{m}].$$

Pentru mașina de poliție, știm că era inițial în repaus, atunci $v_{x0} = 0$ și că are accelerația $a_x = 3\,\mathrm{m/s^2}$, iar $x_0 = 0$. Astfel, pentru mașina de poliție:

$$v_x = a_x t = 3t\,[\mathrm{m/s}]$$
$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 = 1.5t^2\,[\mathrm{m}].$$

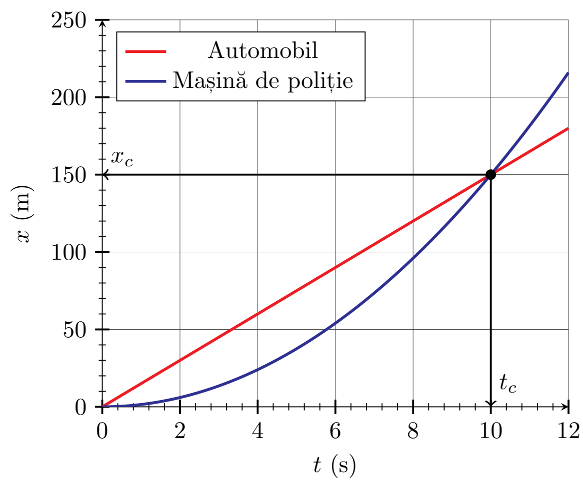
O să reprezentăm grafic cele două legi de mișcare pentru automobil și mașina de poliție. Pentru automobil legea de mișcare este o dreaptă, iar pentru mașina de poliție este o parabolă. Putem să citim direct de pe grafic momentul și locul unde se întâlnesc cele două autovehicule $(t_c, x_c) = (10\,\mathrm{s}, 150\,\mathrm{m})$. Altfel, deoarece în momentul când se întâlnesc cele două autovehicule sunt în același loc, putem înlocuim (t_c, x_c) în legile de mișcare:

$$x_c = 15t_c,$$
$$x_c = 1.5t_c^2,$$

de unde obținem

$$15t_c = 1.5t_c^2,$$

rezolvăm și găsim două soluții $t_c = 0$ și $t_c = 10\,\text{s}$. Prima soluție corespunde întâlnirii de la momentul inițial.



Ca să determinăm locul unde se întâlnesc cele două autovehicule putem să înlocuim $t_c = 10\,\text{s}$ în oricare dintre cele două legi de mișcare și obținem

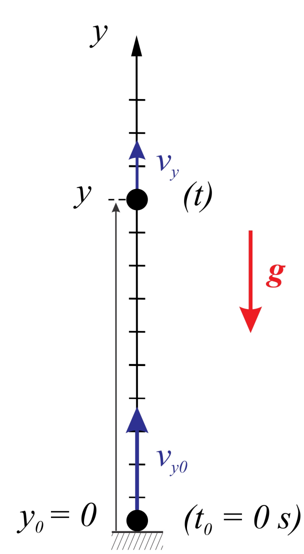
$$x_c = v_{x0} t_c = 1/2 a_x t_c^2 = 150\,\text{m}.$$

Distanța parcursă de mașina de poliție până la întâlnire este $x_c - x_0 = 150\,\text{m} - 0\,\text{m} = 150\,\text{m}$.

Pentru a determina viteza mașinii de poliție la momentul întâlnirii o să înlocuim $t_c = 10\,\text{s}$ în legea vitezei acesteia, astfel

$$v_{xc} = a_x t_c = 3 t_c = 30\,\text{m/s}.$$

Exemplul 2.3. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza de $10\,\text{m/s}$. La ce moment de timp corpul ajunge la înălțime maximă? Care este înălțimea maximă ? Cât timp petrece corpul în aer ?



Pentru a rezolva problema trebuie să determinăm legile vitezei și de mișcare pentru corp. O să vedem în cursurile următoare că toate corpurile care se mișcă liber în apropierea suprafeței pământului, adică numai sub acțiunea greutății, sunt supuse unei accelerații constante $g = 9.81\,\text{m/s}^2$ orientată vertical în jos, adică în sens negativ axei Oy. Astfel, accelerația corpului o să fie $a_y = -g = -9.81\,\text{m/s}^2$.

Deoarece accelerația este constantă, legile vitezei și de mișcare se scriu în general:

$$v_x = v_{x0} + a_x t,$$
$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2.$$

Știm că $y_0 = 0$, $v_{y0} = 10\,\mathrm{m/s}$, iar pentru simplitate o să aproximăm $a_y = -g \approx -10\,\mathrm{m/s^2}$. Particularizăm legile pentru cazul nostru:

$$v_y = v_{y0} - gt = 10 - 10t\ [\mathrm{m/s}],$$
$$y = v_{x0}t - 1/2gt^2 = 10 - 5t^2\ [\mathrm{m}].$$

La înălțime maximă viteza corpului este 0, folosind această informație o să determinăm momentul de timp (t_{max}) la care corpul ajunge la înălțime maximă

$$v_y(t_{max}) = v_{y0} - gt_{max} = 0 \implies t_{max} = v_{y0}/g = 1\,\mathrm{s}.$$

Înălțimea maximă (y_{max}) o să o determinăm înlocuind t_{max} în legea de mișcare:

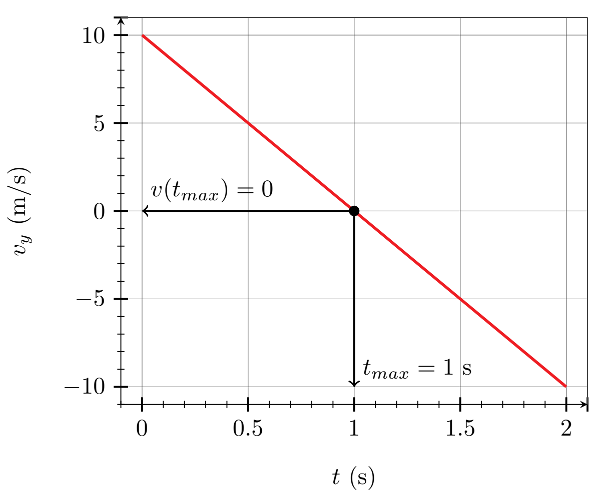
$$y_{max} = y(t_{max}) = v_{y0}t_{max} - 1/2gt_{max}^2 = 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2\ [\mathrm{m}] = 5\,\mathrm{m}.$$

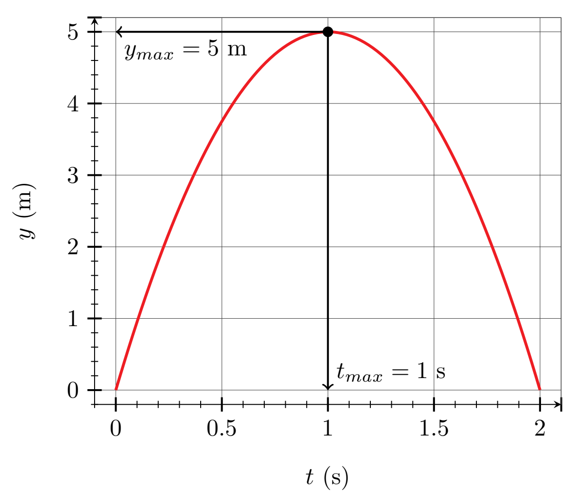
Pentru a determina timpul cât este corpul în aer, timpul de zbor t_z, o să determinăm momentele de timp la care corpul este pe sol, diferența dintre aceste momente o să fie timpul de zbor. Când corpul este pe sol $y = 0$, atunci

$$v_{y0}t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 = 0 \implies t_s\left(v_{y0} - \frac{1}{2}gt_s\right) = 0,$$

rezolvăm și găsim două soluții $t_{s1} = 0$ și $t_{s2} = 2v_{y0}/g = 2\,\mathrm{s}$, aceste soluții ne indică faptul că la momentele 0 s și 2 s corpul este pe sol, adică în momentul când îl aruncăm și în momentul când cade din nou pe sol. Timpul de zbor o să fie dat de

$$t_z = t_{s2} - t_{s1} = 2\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{s}.$$





În graficele de mai sus sunt reprezentate cele două legi. Se poate observa că din grafice se pot extrage toate informațiile necesare pentru descrierea completă a mișcării corpului. Aceasta înseamnă că cele două legi descriu complet mișcarea corpului. Observați că reprezentarea grafică este limitată la intervalul $[0, 2\mathrm{s}]$. În afara acestui interval cele două legi nu sunt valabile, ele descriu mișcarea corpului doar atâta timp cât acesta este în zbor.

Exerciții și probleme

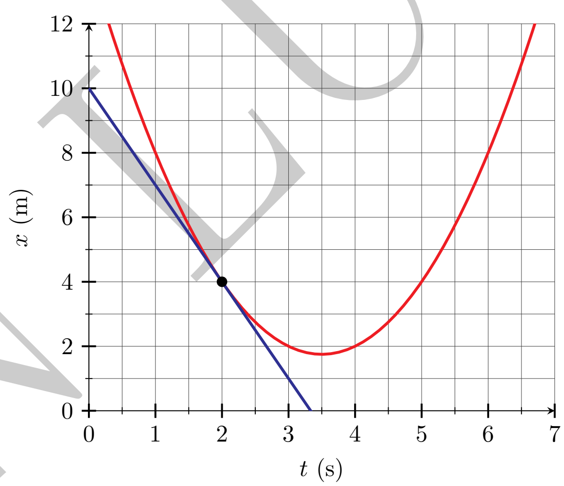
2.1. Un corp este aruncat vertical în sus cu o viteză de 25 m/s. (a) Cât timp durează până când corpul ajunge la înălțime maximă? (b) Cât este această înălțime ?

2.2. Un corp este aruncat vertical în sus de pe acoperișul unei clădiri aflat la înălțimea de 50 m cu o viteză de 20 m/s. (a) Cât timp durează până când corpul ajunge la înălțime maximă? (b) Cât este această înălțime ? (c) Cât timp durează până când corpul ajunge la sol? (d) Cât este viteza acestuia când atinge solul ?

2.3. O bilă A este lăsată să cadă de pe o clădire de înălțime H. Exact în același timp o bilă B este aruncată vertical în sus pe direcția pe care bila A cade. În momentul când se ciocnesc, bila A are o viteză de două ori mai mare decât bila B. Dacă cele două bile se ciocnesc la înălțimea h. Care este raportul h/H? [R: 2/3].

2.4. Un automobil care se deplasează în linie dreaptă frânează, iar viteza lui scade de la 45 km/h la 30 km/h pe o distanță de 50 m. (a) Care este accelerația automobilului, dacă presupunem că este constantă? (b) Cât timp a durat frânarea? (c) Cât timp durează până automobilul se oprește? Care este distanța parcursă de automobil până la oprire? [R:-0.87 m/s^2; 4.805 s; 14.4 s; 90 m].

2.5. În graficul de mai jos este reprezentată poziția unui corp în funcție de timp. Linia dreaptă de culoare albastră reprezintă tangenta la grafic la momentul 2 s. (a) Care este viteza medie pe intervalul de la 1.5 la 4 s. (b) Care este viteza corpului la momentul 2 s. (c) Care este viteza corpului la momentul 6 s. (d) Este viteza zero pe parcursul mișcării? Dacă da, la ce moment?



2.6. Un leu aflat în $x = 0$ la $t = 0$ vede o gazelă în repaus la $x = 40$ m. Leul începe să fugă spre gazelă cu viteza de 5 m/s. (a) Inițial gazela nu vede leul și fuge înspre el cu accelerația 2 m/s^2. (a) Când și unde se vor întâlni ? Reprezentați mișcarea celor două animale pe un grafic $x = f(t)$. (b) Să presupunem acum că de fapt gazela a văzut leul și începe să fugă de acesta cu o accelerație a. Care este accelerația minimă cu care poate fugi gazela pentru ca leul să nu o prindă ?

2.7. Un corp se mișcă cu după legea de mișcare $x(t) = 10 + 20t + 30t^2 + 40t^3$ [m]. Determinați legea vitezei și legea accelerației.

2.8. Un electron aflat în repaus este accelerat cu o accelerație care crește liniar în timp, adică $a(t) = kt$, unde $k = 1.5\ \mathrm{m/s^3}$. (a) Pentru primele 10 s, reprezentați grafic $a = f(t)$. (b) Folosind acest grafic, reprezentați grafic $v = f(t)$ și determinați viteza la momentul 5 s. (c) Folosind graficul $v = f(t)$, reprezentați grafic $x = f(t)$ și determinați poziția electronului la momentul 5 s.

2.9. Poziția unui corp este dată de legea de mișcare

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right),$$

unde v_{0x} și k sunt constante. (a) Reprezentați grafic $x = f(t)$. (b) Care este poziția finală a acestui corp? (c) Determinați viteza corpului. (d) Care este viteza inițială? (e) Reprezentaţi grafic $v_x = f(t)$. (f) Determinați accelerația corpului. (g) Care este accelerația inițială? (h) Reprezentați grafic $a_x = f(t)$. (i) Care este relația dintre sensul vitezei și al accelerației? (j) Corpul este accelerat sau decelerat?