Funcții reale de mai multe variabile

Note Title — 10.11.2020

1. Spațiul Euclidian $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ factori}} = \{x \mid x = (x_1, \dots, x_n),\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Fie $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ din $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definim operațiile:

$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ adunare;

$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ înm. cu scalari.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ sp. vectorial peste $\mathbb{R}$.

Produs scalar: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Norma: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2}$ - norma Euclidiană

Distanța: $d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}$ dist. Euclidiană

Astfel pe $\mathbb{R}^n$ avem o structură algebrică și una metrică.

Fie $a \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$. Definim în continuare următoarele mulțimi:

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) < r\}$ - bila deschisă de centru a și rază r

$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) \le r\}$ bila închisă de centru a și rază r.

$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a,x) = r\}$ sferă de centru a și rază r.

Ex 1 În $(\mathbb{R}, d)$; $d(x,y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$ avem:

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$

$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \le r\} = [a - r, a + r]$

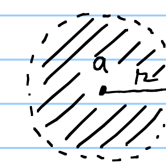
$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| = r\} = \{a - r, a + r\}$

Ex 2 În $(\mathbb{R}^2, d)$ avem pt. $a = (x_0, y_0)$:

$B(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$,

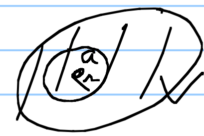
$\overline{B}(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2\}$,

$S(a,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$.



$B(a,r)$

D1.1 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ s.n. vecinătate a lui $a \in \mathbb{R}^n$ dacă $\exists B(a,r) \subseteq V$.



Notăm: $\mathcal{V}(a)$ = mult. vec. lui a din $\mathbb{R}^n$.

D1.2 O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ s.n.:

1) deschisă dacă A este vecinătate pt. orice punct al său;

2) închisă dacă $\mathbb{R}^n \setminus A$ este deschisă;

3) mărginită dacă $\exists M \geq 0$ a.î. $\|x\| \leq M$, $\forall x \in A$;

4) compactă dacă este închisă și mărginită;

5) conexă (prin arce) dacă orice 2 puncte din A pot fi unite printr-un arc de curbă din A.

6) convexă dacă $\forall a, b \in A \Rightarrow [a,b] \subseteq A$

unde $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = a + t(b-a),\ 0 \leq t \leq 1\}$

$[a,b]$ s.n. segment închis cu capetele a și b.

Exemple Considerăm $(\mathbb{R}, d)$, d - metrica Euclidiană.

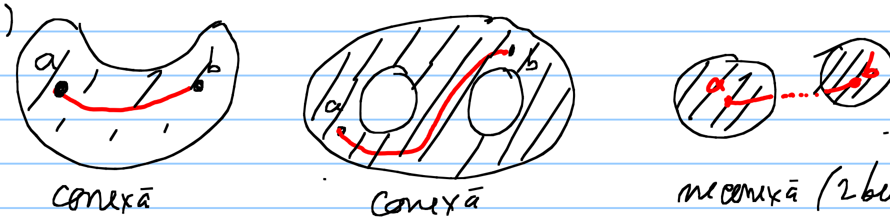
1) (a,b), (a,∞), $(-\infty,a)$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$ sunt mulțimi deschise, $a,b \in \mathbb{R}$;

2) $[a,b]$, $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$ sunt mulțimi închise, $a,b \in \mathbb{R}$;

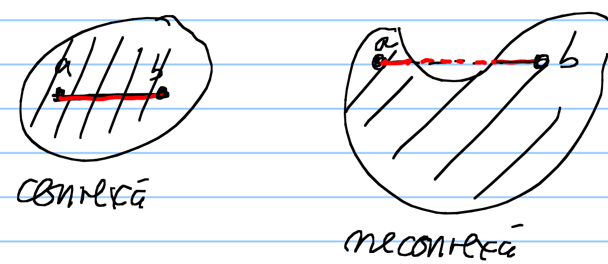
3) $[a,b]$, $[a,b] \cup [c,d]$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sunt mulțimi compacte.

Orice mulțime finită e compactă.

4)

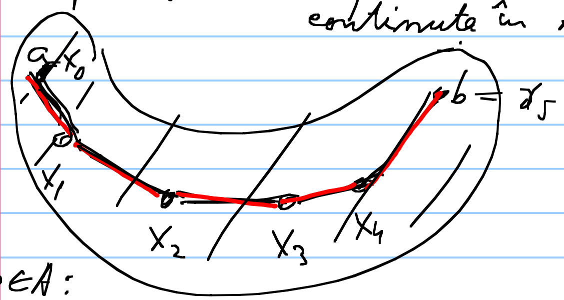


5)



Obs. Intuitiv mulțime conexă înseamnă mulțime formată dintr-o singură "bucată".

T1.3 Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă, deschisă. Atunci A este <u>conexă</u> $\Longleftrightarrow$ oricare 2 puncte din A pot fi unite printr-o linie poligonală conținută în A.



$\forall a, b \in A$:

$\exists\, L = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] \subseteq A$

$x_0 = a, \quad x_n = b.$

D1.4 Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Punctul $a \in \mathbb{R}^n$ s.n.:

1) punct <u>interior</u> lui A dacă $\exists B(a, r) \subseteq A$;

2) punct <u>aderent</u> a lui A dacă $\exists$ un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ în A, $x_n \to a$;

3) punct de <u>acumulare</u> a lui A dacă $\exists$ un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ în $A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$.

<u>Notăm</u>: int A (sau $\mathring{A}$) mulțimea punctelor interioare ale lui A și o numim interiorul lui A;

$\bar{A}$ – notăm mult. pct. aderente ale lui A și o numim aderența sau închiderea lui A;

A' – notăm mult. pct. de acum. ale lui A și o numim mulțimea derivată.

Definim de asemenea mulțimile:

$\text{ext} A = \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$ <u>exteriorul</u> lui A;

$\text{fr} A = \bar{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$ frontiera lui A.

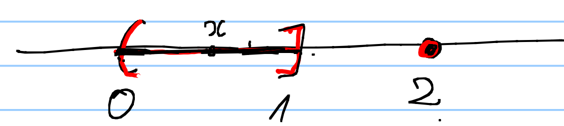
(fr A se mai notează ∂A)

<u>Ex</u> 1) $A = (0,1] \cup \{2\}$ din $(\mathbb{R}, d)$.

$\text{int} A = (0,1)$;

$\bar{A} = [0,1] \cup \{2\}$

$A' = [0,1]$;



Ex 2) $A = \mathbb{Q}$. Atunci: $\text{int}\, A = \emptyset$; $\bar{A} = \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$.

Mai jos avem o caracterizare a mulțimilor închise și a mulțimilor compacte.

T1.5 Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Atunci:

3) A închisă $\iff$ $A = \bar{A}$;

4) A este compactă $\iff$ Orice șir din A conține un subșir convergent la un element din A.

2) Limite de funcții

Consider 2 tipuri de funcții de mai multe variabile:

Funcții scalare $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 2xy$

Funcții vectoriale $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$, $f_k: A \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le p$.

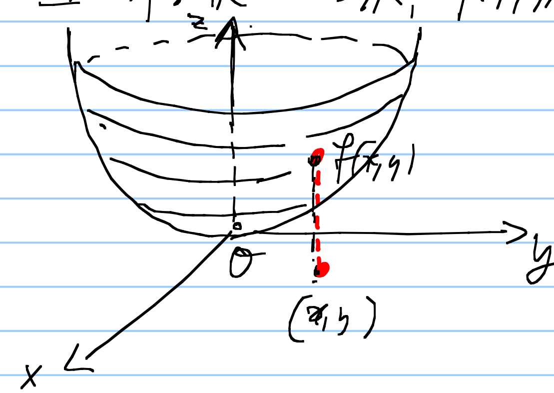
Ex: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (xy, x+y)$

$f_1(x,y) = xy$; $f_2(x,y) = x+y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Obs – graficul unei funcții de o variabilă reală este o curbă în general;

– graficul unei funcții reale de 2 variabile reale este o suprafață.

Ex: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2y^2$



Paraboloid eliptic

Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$
$a = (a_1, \dots, a_n) \in A'$, $l = (l_1, \dots, l_p) \in \mathbb{R}^p$.

D2.1 Spunem că funcția f are limita l în punctul a (notăm $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$) dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ a.î. $\forall x \in A \setminus \{a\}$ cu prop. $\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a limitei:

T2.2 Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$;

2) $\forall (x_n)_{n \geq 1}$ un șir din $A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$
$\Longrightarrow f(x_n) \to l$ (dacă $n \to \infty$).

Pt funcții vectoriale avem următorul rezultat:

T2.3 $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f_1(x) = l_1, \dots,$
$\exists \lim\limits_{x \to a} f_p(x) = l_p$.

Dem: Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ șir din $A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$.
$f(x_n) = (f_1(x_n), \dots, f_p(x_n))$, $n \geq 1$.
și rez. se obține din teorema referitoare la șiruri din spațiul $\mathbb{R}^p$ (cu produs).

DECI:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = (\lim\limits_{x \to a} f_1(x), \dots, \lim\limits_{x \to a} f_p(x))$
dacă limitele din membrul drept există și sunt finite.

Ex1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 2xy$. Atunci
$\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} f(x,y) = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 5$

Ex2. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$. Avem:
$\lim\limits_{(x,y) \to (1,2)} f(x,y) = (\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (x^2+y^2), \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} 2xy) = (5, 4)$

Ex 3. Calculați $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Sol. Nedeterminarea "$\frac{0}{0}$". Fie $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$

Avem: $f(x,x)=\frac{2x^3}{2x^2}=x\to 0$ dacă $x\to 0$;

$f(x,0)=\frac{x^3}{x^2}=x\to 0$ dacă $x\to 0$;

Vom demonstra că limita este egală cu zero

Avem:

$$|f(x,y)|=\frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}\leq\frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2}=\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}|x|+\underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1}|y|$$

deci obținem:

$$0\leq|f(x,y)|\leq|x|+|y|,\ \forall (x,y)\neq(0,0)$$

$$\Downarrow (x,y)\to(0,0)$$

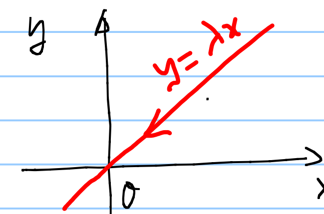
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$$

Ex 4. Să se calculeze $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

Soluție. Nedet. "$\frac{0}{0}$", $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$

Fie $y=\lambda x$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Avem:

$$f(x,\lambda x)=\frac{2x\cdot\lambda x}{x^2+\lambda^2x^2}=\frac{2\lambda}{1+\lambda^2},\ \forall x\neq 0.$$



Dem. că limita nu există:

Fie șirul $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)\Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=1\xrightarrow{n\to\infty}1$

Fie șirul $\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\to(0,0)\Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)=\frac{4}{5}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{4}{5}$.

Deci limita nu există.