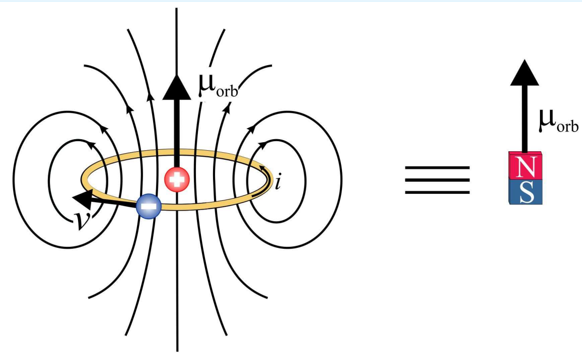
Cursul #12

12.1.1 Momentul magnetic orbital. Magnetonul Bohr

Există două tipuri de magnetism ? Unul care este datorat curenților electrici și altul care este datorat materialelor feromagnetice ? Răspunsul este nu, magnetismul materiei este datorat curenților produși de electroni în *mișcarea* lor în jurul nucleului.

Să considerăm cel mai simplu caz, cel al atomului de hidrogen. În modelul cel mai simplu, atomul de hidrogen este format dintr-un electron care se rotește în jurul nucleului. În mișcarea lui în jurul nucleului electronul produce un curent electric în sens invers direcției în care se rotește. Astfel, mișcarea electronului poate fi asimilată cu o buclă de curent.



O să definim ***momentul magnetic orbital (μ_{orb})*** ca fiind momentul magnetic produs de electron în mișcarea lui orbitală în jurul nucleului, acesta are punctul de aplicație în centrul buclei, este pe direcția câmpului magnetic produs de buclă și are modulul egal cu curentul prin buclă ori aria acesteia

$\mu_{orb} = iA.$

O să determinăm valoarea acestui moment magnetic

$\mu_{orb} = iA = (\pi r^2)q_e/T,$

unde q_e sarcina fundamentală $1.6 \times 10^{-19}C$, iar T este perioada de rotație.

Perioada de rotație este lungimea orbitei împărțită la viteza electronului

$T = 2\pi r/v$, atunci

$\mu_{orb} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} q_e v = \frac{r q_e v}{2},$

înmulțim numărătorul și numitorul cu masa electronului m_e și obținem

$$\mu_{orb} = \frac{q_e r(m_e v)}{2m_e} = \frac{q_e r p}{2m_e} = \frac{q_e}{2m_e} L$$

Unde L este momentul cinetic și care în mecanica clasică este egal cu $L = rp = r(mv)$. În general, ecuația de mai sus se pote scrie vectorial astfel:

$\boldsymbol{\mu_{orb}} = -\frac{q_e}{2m_e}\boldsymbol{L},$

unde semnul "$-$" se datorează faptului că mișcarea electronului este în sens invers curentului.

În mecanica cuantică se arată că unitatea fundamentală a momentului cinetic orbital este $h/2\pi$, unde $h = 6.634 \times 10^{-34}\, Js$ este constanta lui Planck, iar momentul cinetic nu poate fi decât multiplu întreg de $h/2\pi$. Astfel, putem defini un moment magnetic

$$\mu_B = \frac{q_e}{2m_e}\left(\frac{h}{2\pi}\right) \quad = 9{,}274 \times 10^{-24} A \cdot m^2,$$

acest moment se numește **magnetonul Bohr.**

Un electron în mișcarea lui în jurul nucleului este echivalent cu un magnet care are un moment magnetic egal cu μ_{orb}. Electronul pe orbita fundamentală în atomul de hidrogen are un moment magnetic egal cu un magneton Bohr. Pe lângă momentul magnetic orbital electronii mai au un moment magnetic intrinsec, numit *moment magnetic de spin,* care este mult mai important. Acest moment magnetic nu are un echivalent în mecanica clasică. Totuși, pentru a avea o imagine a acestui moment magnetic putem să spunem că ar fi datorită mișcării electronului în jurul axei proprii. La fel ca în cazul mișcării Pământului în jurul soarelui, putem să ne imaginăm că electronul are o mișcare orbitală (de revoluție) și de spin (de rotație). Chiar dacă ne dă o imagine intuitivă asupra momentului de spin, acest model nu este corect. Pauli a calculat care ar trebui să fie viteza de rotație a unui electron în jurul axei proprii pentru a produce un moment magnetic egal cu momentul magnetic de spin. Această viteză ar trebui să fie mai mare decât viteza luminii, ceea ce bineînțeles nu este posibil. Ca orice alt moment magnetic, prin aplicarea unui câmp magnetic atât momentul magnetic orbital cât și de spin vor fi supuse unui cuplu de rotație. Ne putem imagina că este mult mai ușor să rotim spinul electronului decât toată orbita sa printr-un câmp magnetic aplicat. De aceea momentul magnetic de spin este mai important în magnetism. Proiecția momentului magnetic de spin este egală cu +/-1μ_B. Pentru atomi, în cele mai multe cazuri momentele magnetice orbitale și de spin se adună și dau în total zero. Există și excepții, după cum o să vedem mai jos.

12.1.2 Magnetismul materiei

Din punct de vedere al proprietăților magnetice există trei tipuri principale de materiale: diamagnetice, paramagnetice și feromagnetice.

<u>Materiale diamagnetice.</u>

Materialele diamagnetice sunt materialele respinse de câmpul magnetic. Acesta este un efect slab intrinsec tuturor materialelor, însă numim materiale diamagnetice doar materialele care nu au și alte proprietăți magnetice. Putem să ne formăm o imagine intuitivă asupra diamagnetismului. Să considerăm electronul în mișcarea orbitală, această mișcare este susținută de forța electrică de atracție dintre electron și proton, care joacă rolul de forță centripetă:

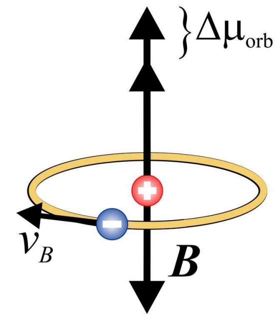
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r}.$$

Dacă aplicăm un câmp magnetic perpendicular pe orbita electronului, atunci asupra acestuia o să acționeze în plus forța Lorentz, iar relația de mai sus devine

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_e^2}{r^2} + q_e v_B B = m_e\frac{v_B^2}{r},$$

unde v_B este viteza electronului în prezența câmpului magnetic. Presupunând condițiile din figură, viteza electronului o să crească prin aplicarea câmpului magnetic. Scădem cele două relații și obținem:

$$q_e v_B B = \frac{m_e}{r}(v_B^2 - v^2) = \frac{m_e}{r}(v_B - v)(v_B + v).$$



Presupunem că variația vitezei $\Delta v = v_B - v$ este mică, atunci

$$q_e v_B B \cong \frac{m_e}{r}\Delta v(2v_B),$$

de unde

$$\Delta v = \frac{q_e r B}{2m_e}.$$

Variația vitezei o să ducă la variația momentului cinetic orbital și a momentului magnetic orbital; momentul cinetic orbital o să varieze proporțional cu viteza $\Delta L = r(m_e \Delta v)$, iar momentul magnetic orbital o să fie

$$\Delta \boldsymbol{\mu_{orb}} = -\frac{q_e}{2m_e}\Delta \boldsymbol{L} = -\frac{q_e^2 r^2}{2m_e}\boldsymbol{B}.$$

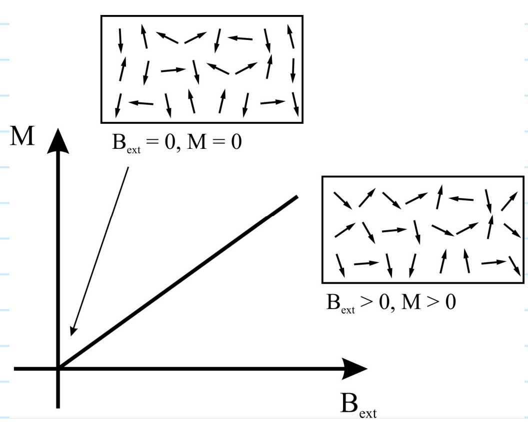
Observați că variația momentului magnetic orbital are sens opus câmpului magnetic. În general, orbitele electronilor sunt orientate aleator, iar momentele orbitale se anulează. Dar în prezența unui câmp magnetic, fiecare atom o să genereze un moment dipolar mic adițional antiparalel cu câmpul. Acesta este mecanismul responsabil pentru diamagnetism.

Materiale paramagnetice.

Sunt materiale care sunt atrase de câmpul magnetic. Moleculele/atomii materialului posedă moment magnetic, dar momentele nu interacționează între ele. Putem să definim magnetizarea unui material ca fiind suma tuturor momentelor magnetice atomice divizată la volumul probei.

$$\boldsymbol{M} = \frac{\sum_i \boldsymbol{\mu}_i}{V}$$

În câmp magnetic extern zero, datorită agitației termice momentele magnetice atomice au toate orientările posibile și momentul magnetic total o să fie zero. Însă prin aplicarea unui câmp magnetic extern momentele magnetice atomice vor începe să se alinieze cu câmpul și o să avem o magnetizare diferită de zero.



Atât substanțele diamagnetice cât și cele paramagnetice dezvoltă o magnetizare la aplicarea unui câmp magnetic extern. Între magnetizare și câmpul extern există o relație simplă

$$\boldsymbol{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{ext},$$

unde χ_m este susceptibilitatea magnetică. Trebuie precizat că ecuația de mai sus nu este definiția obișnuită a susceptibilității magnetice. Din motive practice un alt câmp vectorial $\boldsymbol{H}$**,** despre care nu vom dicuta aici, apare în locul lui $\boldsymbol{B}$.

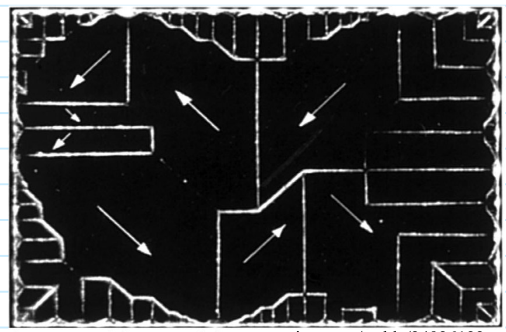
Diferența de definiție a susceptibilității magnetice nu are nicio consecință practică atâta vreme cât valorile lui χ_m sunt mult mai mici decât unu. În tabelul alăturat sunt date câteva valori ale susceptibilității unor materiale diamagnetice și paramagnetice.

Materiale diamagnetice	Materiale paramagnetice
Bi $\chi = -1.7 \times 10^{-4}$	Al $\chi = 2 \times 10^{-5}$
Cu $\chi = -1.0 \times 10^{-5}$	LO2 $\chi = 3.5 \times 10^{-3}$
H2O $\chi = -1.0 \times 10^{-5}$	Pt $\chi = 2.9 \times 10^{-4}$
Si $\chi = -4.2 \times 10^{-6}$	W $\chi = 6.8 \times 10^{-5}$

Materiale feromagnetice.

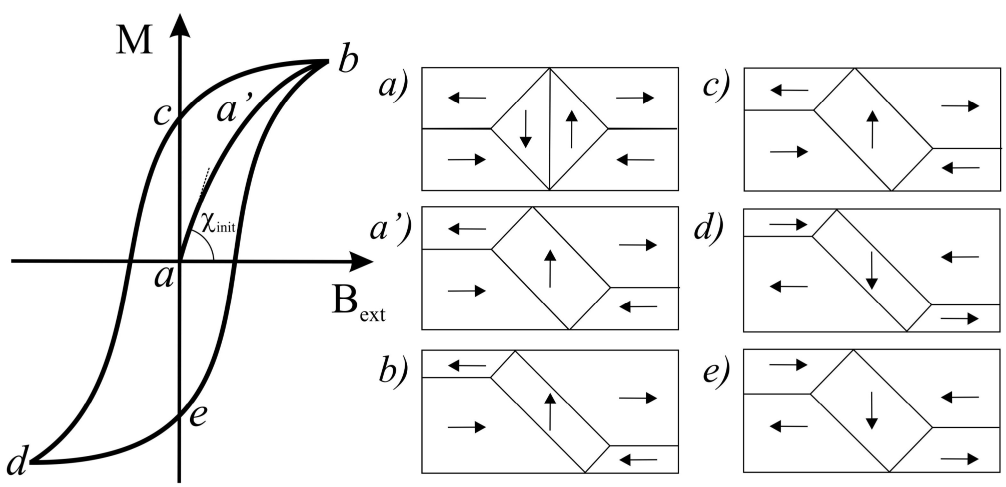
Sunt materiale puternic atrase de câmpul magnetic. Moleculele/atomii materialului posedă moment magnetic, iar momentele interacționează între ele prin *cuplaj de schimb* și se orientează spontan paralel. Cuplajul de schimb este un efect care nu poate fi explicat în mecanica clasică, ci doar în mecanica cuantică. Cele mai comune materiale feromagnetice sunt de două feluri: materiale 3d (Fe, Co, Ni, aliaje și oxizi ale acestora), pământuri rare (Gd, Dy) și aliaje ale acestora. Se pune întrebarea: dacă Fe este un material feromagnetic pentru care momentele magnetice atomice sunt așezate paralel datorită cuplajului de schimb, de ce o bucată de fier oarecare nu este un magnet puternic?

Răspunsul este: deoarece într-un material se formează domenii magnetice. Domeniile magnetice sunt zone în interiorul cărora momentele atomice sunt paralele între ele, însă magnetizările domeniilor au orientări aleatorii, iar per ansamblu magnetizarea poate fi zero. În imaginea alăturată puteți să vedeți domeniile magnetice ale unui cristal de Ni demagnetizat (magnetizare totală zero). Liniile albe sunt granițe dintre domenii, iar săgețile indică direcția magnetizării în interiorul domeniilor.



Courtesy Ralph W. DeBlois jstor.org/stable/24926122

Dacă aplicăm un câmp magnetic extern și măsurăm magnetizarea unei probe feromagnetice o să obținem o curbă de histereză, exemplificată mai jos:



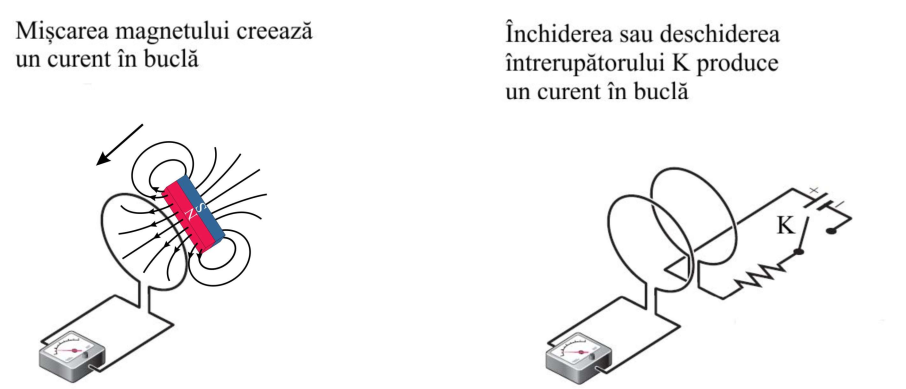
Dacă proba este demagnetizată o să avem în câmp zero situația a) în care, per ansamblu, magnetizarea este zero. La aplicarea câmpului se pot produce două fenomene. 1) domeniile care sunt instabile termodinamic pot să dispară (magnetizarea în tot domeniul se poate roti) sau 2) pereții de domeniu pot să se deplaseze astfel încât domeniile paralele cu câmpul să crească în dimensiune (a'). Prin creșterea câmpului domeniile cu magnetizarea pe direcția câmpului continuă să crească (b). Este dificil ca un material masiv să fie magnetizat complet pe o direcție, câmpurile necesare sunt extrem de mari. Deoarece deplasarea pereților de domeniu nu este un fenomen reversibil, la scăderea câmpului din (b) o să ajungem în (c), stare în care materialul este magnetizat și are o magnetizare netă pe direcția pe care a fost aplicat câmpul extern. Similar se explică celelalte situații indicate.

Spre deosebire de materialele diamagnetice sau paramagnetice, materialele feromagnetice produc propriul lor câmp magnetic persistent chiar și în absența unui câmp magnetic aplicat. Materialele feromagnetice au o gamă extrem de largă de aplicații de la memorii magnetice până la motoare și generatoare electrice. Un ultim punct legat de materialele feromagnetice, peste o anumită temperatură (770° C), pentru fier, numită temperatură Curie, acestea suferă o tranziție de fază și trec din stare feromagnetică în stare paramagnetică.

Cu noțiunile studiate până aici se poate explica de ce nu există magneți cu un singur pol (nord sau sud) ci numai cu doi poli (nord și sud).

12.2. Inducția electromagnetică. Legea lui Faraday

Oersted a arătat că un curent electric produce un câmp magnetic. Se pune întrebarea dacă un câmp magnetic produce un curent electric? Pentru a răspunde la această întrebare Michael Faraday a făcut o serie de experimente care, în principiu, se pot rezuma la cele două de mai jos:



În primul experiment avem o buclă care este conectată la un galvanometru și un magnet în apropierea ei. Putem observa următoarele:

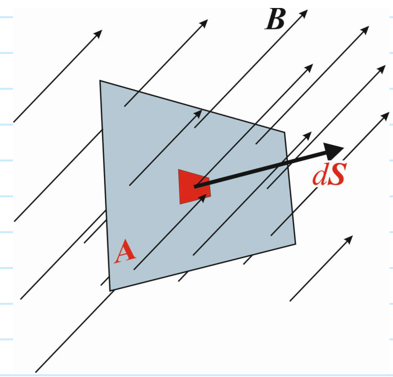
- Dacă magnetul este fix, *nu* se măsoară curent în buclă.
- Dacă magnetul se apropie brusc de buclă, se măsoară curent electric. Dacă magnetul se îndepărtează brusc, se măsoară curent în sens invers.
- Cu cât mișcarea este mai rapidă, cu atât curentul măsurat în buclă este mai mare.
- Dacă se inversează magnetul cu 180°, astfel încât polul nord să devină sud, se observă aceleași fenomene, însă sensul curentului va fi invers față de cazul când magnetul nu era inversat.

În al doilea experiment avem bucla cu aparatul de măsură și în apropierea ei o altă buclă conectată în serie cu o sursă, o rezistență și un întrerupător. Observăm următoarele:

- Dacă întrerupătorul este deschis, nu măsurăm curent în buclă.
- Dacă închidem întrerupătorul, observăm pentru un timp scurt curent în buclă într-un sens, apoi curentul devine zero.
- Dacă deschidem întrerupătorul, observăm pentru un timp scurt curent în buclă în sens invers, apoi curentul devine zero.

Este clar din aceste experimente că se induce un curent în buclă atât timp cât avem o modificare a ceva. Acel ceva este *fluxul magnetic*, pe care o să-l definim similar cu fluxul electric

$$\Phi_B = \int_A \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S},$$

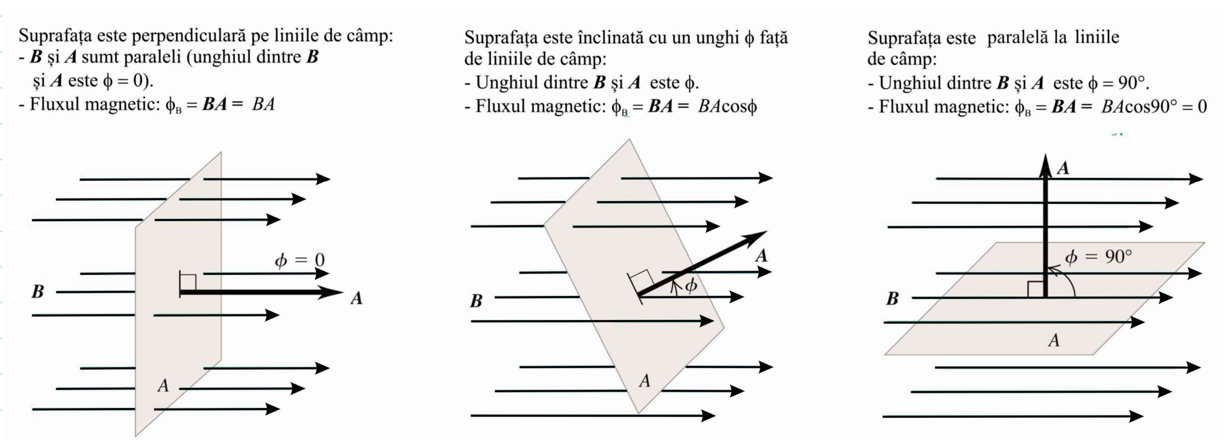


și care este o măsură a *"numărului de linii"* de câmp care trec prin suprafața de arie A. Am pus în ghilimele deoarece, bineînțeles, numărul total de linii de câmp este infinit. Însă folosind convențiile din cursul C#9 relativ la liniile de câmp, de vreme ce densitatea de linii reprezentate este proporțională cu modulul câmpului, numărul de linii care trec printr-o suprafață infinitezimală $d\boldsymbol{S}$ este proporțional cu $\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$. Produsul scalar din relația de mai sus ne dă numai componenta de-a lungul lui $\boldsymbol{B}$ a lui $d\boldsymbol{S}$, ca în imaginea alăturată. Când vorbim de fluxul printr-o suprafață ne referim numai la suprafața proiectată într-un plan perpendicular pe $\boldsymbol{B}$.

În cazul în care suprafața este planară, iar câmpul magnetic este uniform, relația de mai sus se simplifică și devine:

$$\phi_B = \boldsymbol{BA} = BA\cos\phi.$$

Mai jos puteți să observați cum se calculează fluxul magnetic pentru o suprafață planară și un câmp uniform.



Acum suntem pregătiți să enunțăm legea inducție electromagnetice a lui Faraday: *Într-un circuit electric se induce o tensiune electromotoare (tem) egală cu minusul vitezei de variație a fluxului magnetic prin circuit*, matematic:

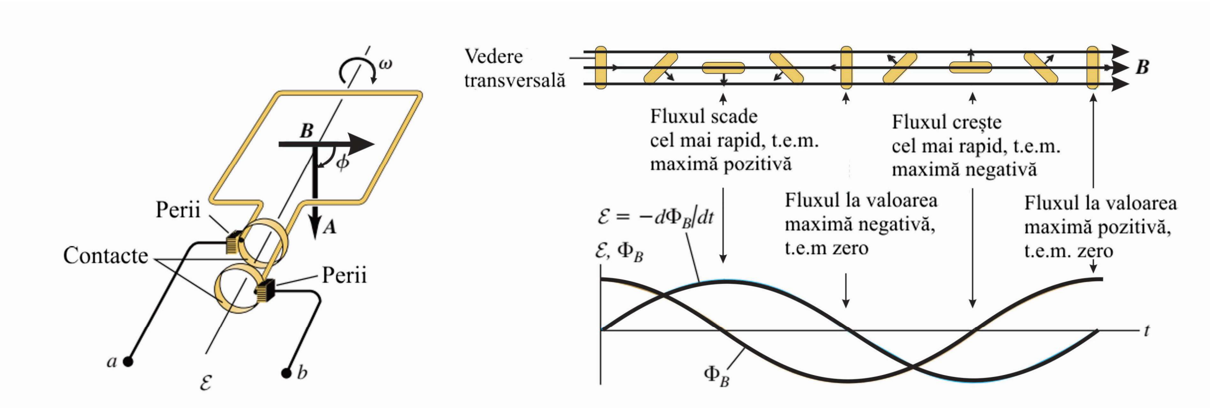
$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t}.$$

Fenomenul de inducție electromagnetică descoperit de Faraday este probabil cel mai important fenomen descoperit de umanitate. Descoperirea acestui fenomen a permis realizarea de generatoare electrice care sunt componenta esențială a unei centrale electrice. Acest fenomen a permis producerea în masă a energiei electrice și *iluminarea* (la propriu) a umanității.

Pentru a avea o tensiune indusă trebuie să avem o variație de flux magnetic. Pentru a varia fluxul putem varia:1) câmpul magnetic 2) aria circuitului 3) unghiul dintre circuit și câmp sau, bineînțeles, putem să avem o combinație a celor trei moduri.

Exemplul #1: Generatorul de tensiune electromotoare alternativă.

Generatorul de tensiune electromotoare alternativă este reprezentat schematic mai jos și este compus dintr-un cadru care se rotește cu o frecvență de 50 Hz într-un câmp magnetic constant. Cadrul are la capete două contacte pe care se așază perii colectoare, la capetele cărora putem măsura tensiunea electromotoare indusă ε.



În acest caz nu variază nici aria, nici câmpul magnetic, ci variază unghiul dintre circuit și câmp. Fluxul magnetic prin circuit o să fie:

$\phi_B = B\,\mathrm{A}\cos\phi = B\,\mathrm{A}\cos\omega t.$

Aici am presupus că rotirea are loc cu viteză unghiulară constantă $\omega = 2\pi\nu = 314\frac{rad}{s}$, iar unghiul o să fie $\phi = \omega t$

Tensiunea electromotoare indusă este

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t} = -BA\frac{\mathrm{d}(\cos\omega t\,)}{\mathrm{d}t} = BA\omega\sin\omega t = \varepsilon_0\sin\omega t\,.$$

Se poate observa că tem este alternativă și are amplitudinea $\varepsilon_0 = BA\omega$, frecvența tensiunii alternative este $\nu = \omega/2\pi$ și este egală cu frecvența cu care se rotește cadrul (50 Hz). Dacă, de exemplu, dorim să construim un generator cu amplitudine de 310 V și frecvență de 50 Hz, în funcție de câmpul magnetic de care dispunem trebuie să ne alegem o arie a circuitului astfel încât BA$\cdot$ $(2\pi 50\mathrm{Hz}) = 310\,V$.

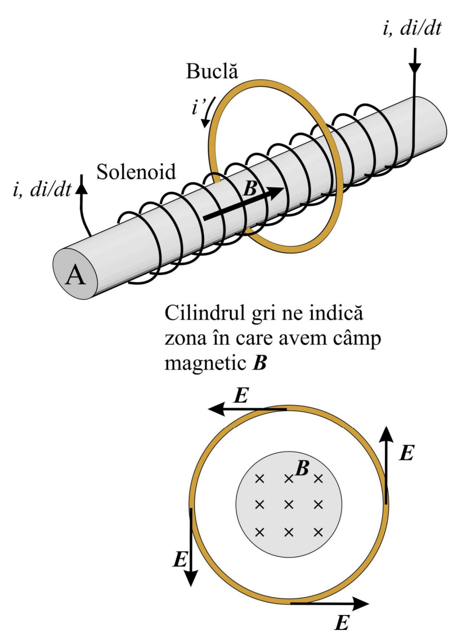
Dacă B = 0.3 T, atunci aria o să fie $A = 3.29\ m^2$. Această arie este destul de mare, cadrul ar trebui să aibă dimensiunile $1 \times 3.29\ m$. Putem să scădem aria cadrului dacă punem mai multe spire pe el. De exemplu, dacă am înfășura 100 de spire aria cadrului ar trebui să fie de 100 de ori mai mică (adică $0.0329\ m^2$) deoarece fiecare spiră ar contribui cu $0.0329\ m^2$ la aria circitului, iar aria totală o să fie $0.0329\ m^2 \cdot 100 = 3.29\ m^2$.

Toate centralele electrice (hidrocentrale, termocentrale, centrale eoliene, centrale nucleare) funcționează pe acest principiu, rotesc o bobină într-un câmp magnetic. Acestea transformă energia mecanică în energie electrică.

Oare putem construi un generator de tem alternativă de amplitudine 310 V și frecvență 50 Hz folosind câmpul magnetic terestru ? Calculați care ar trebui să fie aria unui cadru care rotit în câmpul magnetic terestru cu frecvența de 50 Hz să producă o tem de 310 V. Dacă am alege o arie de $1m^2$, câte spire ar trebui să înfășurăm pe cadru? Ce lungime minimă ar avea toate spirele adunate ? Dacă diametrul firului de Cu din care sunt făcute spirele este de 1 mm care ar fi masa bobinei ? (căutați pe internet valoarea câmpului magnetic terestru și densitatea cuprului) Este practic un astfel de generator ? (**)

12.3 Câmpul electric indus

În cazul experimentelor de inducție în care aveam un circuit care se mișca în câmp magnetic, ne puteam imagina tem indusă ca fiind datorată forței Lorentz care acționează asupra purtătorilor de sarcină care se mișcă în câmp magnetic. Însă există cazuri în care avem tem indusă și fără a avea circuite care se mișcă în câmp magnetic.



Să considerăm experimentul descris în figură. Avem un solenoid prin care trece un curent electric variabil i, care o să producă un câmp magnetic variabil $\boldsymbol{B}$ în interiorul solenoidului. Putem să ignorăm câmpul mult mai mic din exteriorul solenoidului și să considerăm că avem câmp magnetic numai în cilindrul de culoare gri.

Punem în jurul solenoidului o buclă conductoare, dacă i variază, o să măsurăm un curent electric i' în buclă.

Câmpul magnetic din interiorul solenoidului este $\mathrm{B} = \mu_0 n i$, unde n este numărul de spire pe unitatea de lungime.

Atunci fluxul magnetic prin buclă este

$$\phi_B = BA = \mu_0 n i A,$$

unde A este aria secțiunii solenoidului. Conform legii lui Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 n A \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Dacă rezistența buclei este R, atunci curentul prin buclă o să fie dat de

$$\mathrm{i}' = \varepsilon / R.$$

Dar cine produce forța care mișcă sarcinile? Bucla nici măcar nu este în câmp magnetic, deci nu poate fi vorba de forța Lorentz. Singura concluzie logică este că *în jurul acestui câmp magnetic variabil apare un câmp electric variabil care pune sarcinile în mișcare și produce curentul și tem indusă în buclă. Atenție, acest câmp nu este produs de sarcini electrice, ci de câmpul magnetic variabil.*

Să considerăm o sarcină q_0 care se deplasează sub acțiunea câmpului electric în bucla noastră. Lucrul mecanic produs de câmpul electric este $L = \oint q_0 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$, cercul de pe semnul de integrală ne arată că trebuie integrat pe bucla completă.

Știm că $\varepsilon = L/q_0$, deci putem scrie:

$\varepsilon = \oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l}$.

Conform legii lui Faraday $\varepsilon = -\mathrm{d}\phi_B/dt$, deci relația de mai sus devine

$\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\phi_B}{\mathrm{d}t}$ sau, mai general, dacă înlocuim relația care ne dă fluxul, putem scrie

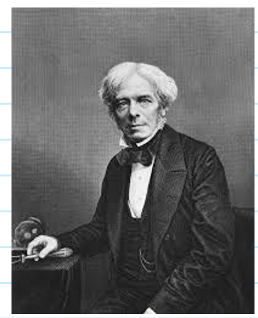
$\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A}$, unde *A* este aria buclei.

Acest câmp electric este ciudat, deoarece noi știm că pentru un câmp electric conservativ integrala pe contur, $\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l}$, trebuie să fie zero. Aceasta înseamnă că *un câmp electric produs de un câmp magnetic variabil nu este conservativ, spunem că acest câmp este un câmp electric non-electrostatic.*

12.4 Ecuațiile lui Maxwell

Toate fenomenele electromagnetismului clasic pot fi reduse la un set de 4 ecuații, numite ecuațiile lui Maxwell. Teoria electromagnetismului clasic a fost dezvoltată de James Clerk Maxwell (1831-1879) , pornind de la rezultatele experimentale ale lui Michael Faraday (1791-1867).

Maxwell



Faraday

Ecuațiile lui Maxwell sau ecuațiile electromagnetismului sunt un set de ecuații vectoriale ale câmpului electric și magnetic care pot fi scrise sub formă diferențială sau integrală.

În continuare o să scriem aceste ecuații sub formă integrală și o să încercăm să explicăm semnificația lor.

1) $\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

2) $\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} = 0$

3) $\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{B} d\boldsymbol{A}$

4) $\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \boldsymbol{i_{int}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A}$

Semnificația fizică a ecuațiilor lui Maxwell:

(1) ne spune că fluxul electric printr-o suprafață închisă este egal cu sarcina din interiorul volumului închis de suprafață împărțit la ε_0, cu alte cuvinte această ecuație ne spune că liniile de câmp electric ies din sarcini pozitive și intră în sarcini negative (aceasta este legea lui Gauss pentru câmpul electric C#10). (2) ne spune că fluxul magnetic printr-o suprafață închisă este egal

cu zero, cu alte cuvinte această ecuație ne spune că liniile de câmp magnetic se închid în ele însele și că nu există monopoli magnetici (aceasta este legea lui Gauss pentru câmpul magnetic C#11). (3) ne spune că circulația câmpului electric pe un contur închis este egală cu variația fluxului magnetic prin suprafața delimitată de contur (aceasta este legea lui Faraday C#12). (4) ne spune că circulația câmpului magnetic pe un contur închis este egală cu curentul electric care trece prin suprafața delimitată de contur (aceasta este legea lui Ampere C#10) plus variația fluxului electric prin suprafața delimitată de contur (termen adăugat de Maxwell).

12.4.1 Ecuațiile lui Maxwell în vid. Unde electromagnetice.

În vid, departe de sarcini electrice sau de curenți electrici ecuațiile lui Maxwell se pot scrie:

1) $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$

2) $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$

3) $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{B} d\boldsymbol{A}$

4) $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{A}$

Vedem că ecuația (1) și (4) se modifică dacă suntem departe de sarcini electrice sau de curenți electrici. Urmărind ecuațiile de mai sus putem să concluzionăm următoarele:

(1) + (2) - liniile de câmp electric, în vid, departe de sarcini sau curenți, se închid în ele însele, la fel ca liniile de câmp magnetic.

(3) + (4) - o variație a fluxului magnetic produce un câmp electric, iar o variație a fluxului electric produce un câmp magnetic.

Să recapitulăm ceea ce cunoaștem deja:

(i) dacă avem sarcini în repaus, în jurul lor avem un câmp electric constant.
(ii) dacă avem sarcini în mișcare cu viteză constantă, adică un curent electric continuu, în jurul lui avem în plus un câmp magnetic.

Cum putem să producem un câmp electric și magnetic variabil în timp ? *Este necesar ca sarcinile să se miște accelerat* (să avem curent variabil). Dacă sarcinile se mișcă accelerat, în jurul lor o să apară câmpuri electrice și magnetice variabile care, conform cu (3) și (4) se vor autoîntreține și vor duce la crearea de unde electromagnetice (uem).

În vid, departe de orice sarcini electrice, ecuațiile (3) și (4) se pot scrie într-o formă simplificată astfel:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}.$$

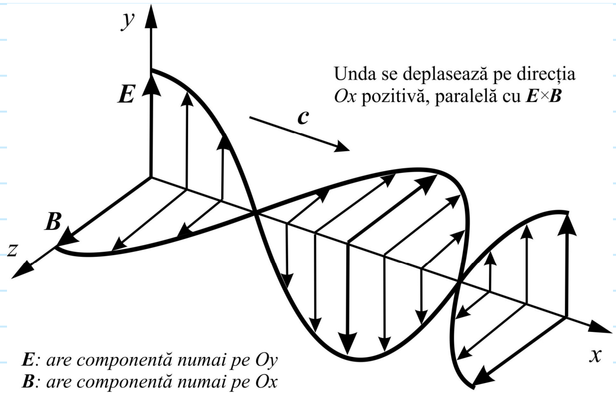
Aceste două ecuații sunt ecuații tipice care descriu unde plane. Vă reamintesc că ecuația unei unde plane este $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$. Prin identificare putem să determinăm viteza uem în vid

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{(8.854 \times 10^{-12}\mathrm{F/m})(4\pi \times 10^{-7}\mathrm{Tm/A})}} = 2.99792 \times 10^8 \mathrm{~m/s} \cong 3 \times 10^8 \mathrm{~m/s},$$

bineînțeles, această viteză este egală cu viteza luminii.

Soluția ecuațiilor de mai sus o să fie două funcții de undă plane:

$\boldsymbol{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\boldsymbol{j}$,
$\boldsymbol{B}(x,t) = B_0 \cos(kx - \omega t)\boldsymbol{k}$,

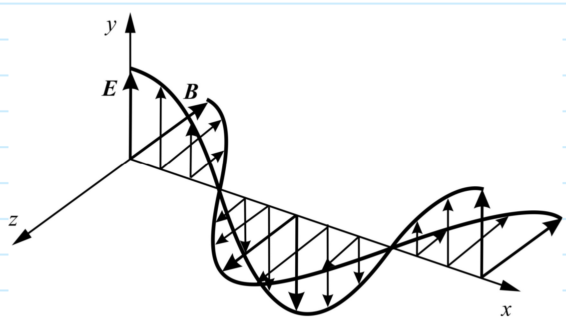


unde E_0 și B_0 sunt amplitudinile câmpului electric și magnetic. Alăturat am reprezentat cele două ecuații. k este numărul de undă sau vectorul de undă și este egal cu $k = 2\pi/\lambda$, unde λ este lungimea de undă a uem. ω este frecvența unghiulară, egală cu $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, unde ν este frecvența, iar T este perioada uem.

Deoarece $\lambda = cT = c/\nu$, între frecvența unghiulară și vectorul de undă există următoarea relație $c = \omega/k$. Se poate arăta că pentru uem există următoarea relație între amplitudinile câmpului electric și magnetic: $E_0 = cB_0$.

Pentru o uem, întotdeauna câmpul electric este perpendicular pe câmpul magnetic $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$. Viteza uem este perpendiculară pe planul format de $\boldsymbol{E}$ și $\boldsymbol{B}$ și este paralelă cu $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$.

Exemplul #2: Scrieți ecuația componentei electrice și magnetice ale uem din imagine. Pe ce direcție se deplasează unda?



Din imagine observăm că ecuațiile trebuie să fie:

$\boldsymbol{E}(x,t) = E_0 \cos(kx + \omega t)\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{B}(x,t) = -B_0 \cos(kx + \omega t)\boldsymbol{k}$

Folosind regula de mai sus, uem se deplasează pe direcția *-Ox*

Intensitatea undelor electromagnetice.

Intensitatea unei uem se definește ca fluxul de energie al uem per unitatea de timp, adică ce cantitate de energie transportă unda printr-o suprafață de $1\mathrm{m}^2$, într-o secundă.

Transportul de energie a uem este descris de o mărime care se numește *vectorul Poynting*, ce se definește ca

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}.$$

O să calculăm vectorul Poynting pentru unda descrisă de ecuațiile:

$\boldsymbol{E}(x,t) = E_0\, cos(kx\ - \omega t)\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{B}(x,t) = B_0\, cos(kx\ - \omega t)\boldsymbol{k}$

Înlocuind în definiția vectorului Poynting avem

$$\mathbf{S}(x,t) = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}(x,t) \times \boldsymbol{B}(x,t) = \frac{1}{\mu_0}[E_0\, cos(kx\ - \omega t)\boldsymbol{j}] \times [B_0\, cos(kx\ - \omega t)\boldsymbol{k}],$$

deoarece $\mathbf{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$, obținem $\boldsymbol{S}(x,t) = \frac{1}{\mu_0}E_0 B_0\, cos^2(kx - \omega t)\boldsymbol{i}$.

Ecuația de mai sus ne spune că energia este transportată pe direcția lui $\boldsymbol{i}$ (Ox), după legea $\frac{1}{\mu_0}E_0 B_0 \cos^2(kx - \omega t)$

Intensitatea uem este valoarea medie a vectorului Poynting

$$I = \langle S \rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_0}E_0 B_0\, cos^2(kx - \omega t)\right\rangle = \frac{1}{\mu_0}E_0 B_0 \langle cos^2(kx - \omega t)\rangle = \frac{1}{2\mu_0}E_0 B_0.$$

Dacă folosim relația $E_0 = cB_0$ o să obținem

$$I = \frac{1}{2\mu_0}E_0 B_0 = \frac{c}{2\mu_0}B_0^2 = \frac{1}{2\mu_0 c}E_0^2.$$

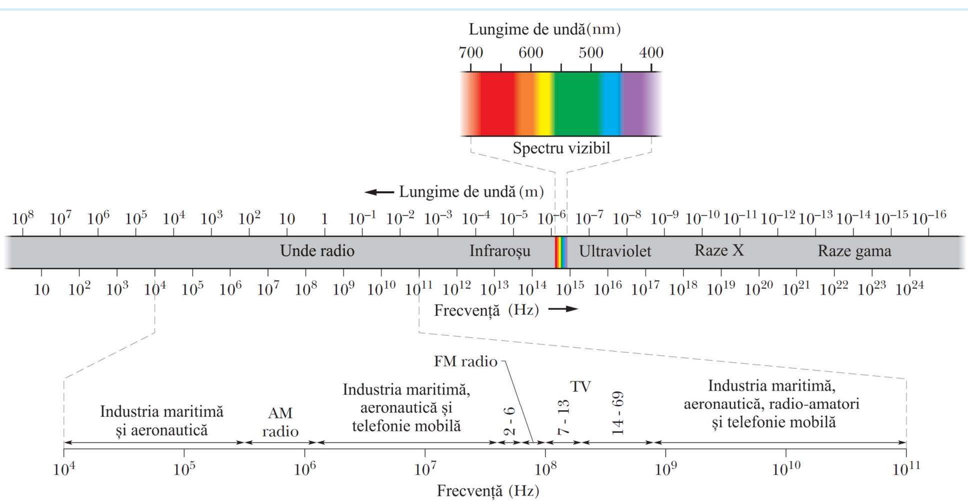
Exemplul #3: Calculați, pentru unda de mai sus, valoarea câmpului magnetic maxim (B_0), și a intensității undei, dacă E_0 = 100 V/m.

$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{100\ V/m}{3\times 10^8\ m/s} = 3.33 \times 10^{-7}\ T$, iar intensitatea undei

$I = \frac{1}{2\mu_0}E_0 B_0 = \frac{1}{2\cdot 4\pi\times 10^{-7} AT/m}$(100 V/m)(3.33× $10^{-7}T$)=13.2 W/m^2

Spectrul undelor electromagnetice.

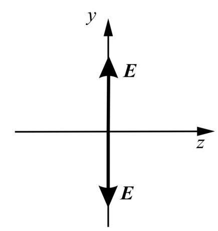
În imaginea de mai jos este reprezentat spectrul undelor electromagnetice.



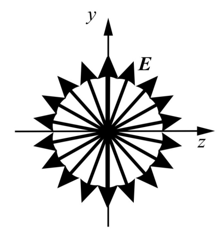
Undele electromagnetice au un spectru foarte larg de frecvențe sau lungimi de undă, de la unde radio, la unde infraroșii, la spectrul vizibil, ultraviolet, raze X și raze gama. Singura diferență dintre aceste unde este lungimea lor de undă sau frecvența. Nu există nicio altă diferență, toate sunt uem. Observați cât de îngust este spectrul uem pe care le putem vedea cu ochiul liber.

Polarizarea undelor electromagnetice.

În general undele electromagnetice nu sunt polarizate, însă există diferite metode prin care undele electromagnetice se pot polariza. Cel mai simplu tip de polarizare este polarizarea liniară. O undă liniar polarizată este o undă care are un singur plan de oscilație al câmpului magnetic sau electric. Undele pe care le-am reprezentat până acum au fost toate unde liniar polarizate.



Pentru o undă liniar polarizată pe direcția *Oy*, dacă am privi doar câmpul electric pe direcția de deplasare am vedea câmpul oscilând pe o singură direcție, similar cu imaginea alăturată.



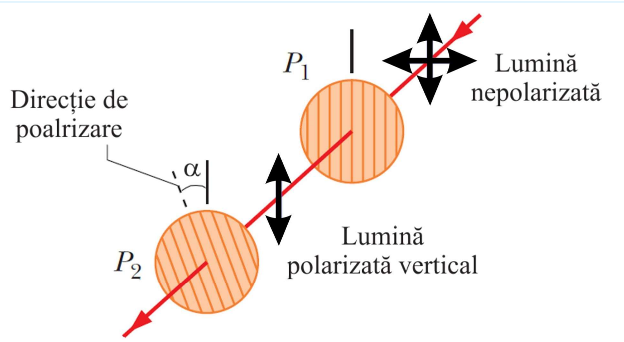
Pentru o undă nepolarizată, dacă am privi doar câmpul electric pe direcția de deplasare am vedea câmpul oscilând la întâmplare pe toate direcțiile, similar cu imaginea alăturată.

Lumina naturală este o uem nepolarizată, însă uem se poate polariza, de exemplu prin reflexie, prin traversarea unor materiale transparente care au o anizotropie structurală (transmisie), prin împrăștierea de către unele molecule care nu au simetrie sferică etc.

Cele mai comune tipuri de polarizoare pentru uem din spectrul vizibil sunt filtrele Polaroid. Acestea sunt constituite din molecule filiforme (mult mai lungi pe o direcție decât pe celelalte) care sunt fixate într-o matrice de plastic. Acest tip de polarizori se folosesc, de exemplu, pentru filtrele foto sau pentru ochelari.

Să considerăm o rază de lumină nepolarizată, dacă trecem raza printr-un polarizor vertical, aceasta se va polariza vertical. Dacă în calea ei mai punem un al doilea polarizor cu direcția de polarizare rotită cu un unghi α față de primul polarizor, atunci intensitatea uem care trece prin acest sistem este dată de :

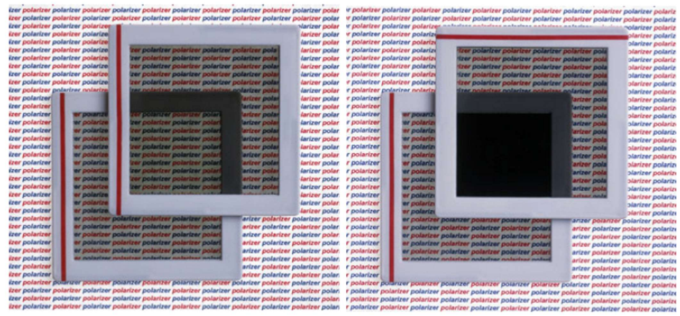
$$I = I_0 \cos^2 a$$



Intensitatea luminii care trece de polarizorul P_2 depinde de unghiul dintre direcțiile de polarizare ale lui P_1 și P_2.

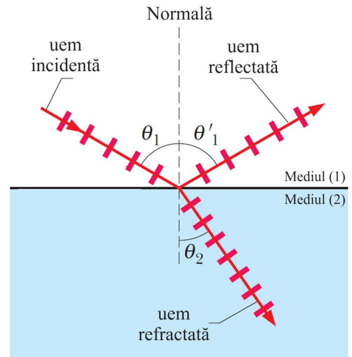
Puteți observa că dacă α este 0° lumina trece neatenuată, iar dacă α este 90° lumina nu trece prin al doilea polarizor.

În imaginea alăturată puteți observa această situație, în care avem doi polarizori paraleli sau perpendiculari.



Reflexia și refracția undelor electromagnetice. Dispersia cromatică.

Dacă o undă electromagnetică în timp ce se propagă întâlnește granița dintre două medii transparente se produc două fenomene cu unda: reflexie și refracție.



Prin reflexie unda se întoarce în mediul (1), iar prin refracție continuă să se deplaseze în mediul (2).

Transparența unui mediu la uem depinde de lungimea de undă a uem. De exemplu, sticla este transparentă pentru lumina vizibilă, însă nu este transparentă pentru lumina UV. Alt exemplu, țesuturile corpului uman nu sunt transparente pentru lumina vizibilă, însă sunt transparente pentru raze X. Pentru undele radio, zidurile nu foarte groase sunt transparente ...

Legea reflexiei spune că uem reflectată este în același plan cu uem incidentă și că $\theta'_1 = \theta_1$.

Legea reflexiei spune că uem refractată este în același plan cu uem incidentă și că $n_2 sin\theta_2 = n_1 sin\theta_1$, unde n_1 și n_2 sunt indicii de refracție ai mediului (1) și (2). Indicele de refracție este o constantă supraunitară (este 1 pentru vid) și depinde de materialul din care este făcut mediul. Indicii de refracție depind de lungimea de undă sau de frecvența uem.

Din acest motiv, dacă uem nu este monocromatică (este compusă din unde cu mai multe lungimi de undă sau frecvențe) unghiul de refracție θ_2 nu este unic, ci acoperă o anumită plajă. Astfel, se produce fenomenul de *dispersie cromatică***.** Acest fenomen este cel mai bine exemplificat cu lumina albă care trece printr-o prismă optică, lumina care iese din prismă iese la diferite unghuri în funcție de lungimea ei de undă sau de culoarea ei (sursa imaginii britannica.com/technology/prism-optics).