

Cuprins

1 Oscilații	3
1.1 Oscilatorul armonic simplu	3
1.2 Oscilatorul armonic simplu în reprezentarea complexă	8
1.3 Compunerea oscilațiilor de aceeași frecvență	16
1.4 Oscilatorul amortizat	18
1.5 Oscilatorul întreținut	25
1.6 Rezonanța	27
Exerciții și probleme	35
2 Unde mecanice	39
2.1 Unde transversale într-o dimensiune	39
2.2 Ecuția de undă	40
2.3 Soluții ale ecuației de undă. Unde armonice	41
2.4 Puterea transmisă de undă	44
2.5 Superpoziția undelor	46
2.6 Unde staționare	49
2.7 Interferența undelor de frecvențe diferite. Bătăi	52
Anexa C8.1 Rezolvarea numerică a ecuației de undă	54
Exerciții și probleme	56

Listă de figuri

1.1 Un corp de masă m care este atașat de un resort de constantă k și care execută o mișcare oscilatorie armonică sub influența forței elastice.	3
1.2 Reprezentare grafică a ecuației de mișcare a unui oscilator armonic simplu. Sunt indicate principalele caracteristici ale mișcării.	4
1.3 Funcția Morse fitată cu o funcție parabolică pe un interval relativ larg și pe un interval relativ îngust în jurul poziției de echilibru.	6
1.4 În partea stângă este reprezentată energia potențială și punctele de întoarcere pentru un OAS. Regiunea permisă este dictată de energia totală. În partea dreaptă sunt reprezentate dependențele energiilor în funcție de timp.	8
1.5 Un vector complex $z = a + bi$ și conjugatul acestuia $z^* = a - bi$ reprezentați în planul complex.	8
1.6 Înmulțirea unui vector complex cu i este echivalentă cu o rotație cu 90° a acestuia.	9
1.7 O funcție $f(x)$ și primele două aproximări ale acesteia conform serii Taylor.	9
1.8 Vectorul complex $e^{i\theta}$ este un vector unitar rotit cu unghiul θ față de axa reală.	11
1.9 Vectorii $C_1 e^{i\omega_0 t}$ și $C_2 e^{-i\omega_0 t}$ și suma lor $x(t)$	13
1.10 (a) Legea de mișcare este partea reală a vectorului complex $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$. (b) Viteza este partea reală a derivatei în raport cu timpul a vectorului complex $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$. (c) Accelerarea este partea reală a celei de a doua derivate în raport cu timpul a vectorului complex $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$	14
1.11 Compunerea oscilațiilor de aceeași frecvență. Cei doi vectori complecsi $z_1(t)$ și $z_2(t)$ sunt defazați cu δ , vectorul $z_2(t)$ este suma acestora.	16
1.12 Compunerea a două oscilații în fază și în antifază, de aceeași frecvență și de aceeași amplitudine.	17
1.13 Un oscilator amortizat supus unei forțe de rezistență proporțională cu viteza $F_r = -c_1 v$	18

1.14 Soluția 1.95 este un vector care se rotește în planul complex cu viteza unghiulară ω și a cărui lungime scade exponențial în timp ca $e^{-\gamma t/2}$.	20
1.15 Oscilațiile slab amortizate sunt oscilații armonice simple cu amplitudine care scade exponențial în timp.	20
1.16 Elongația unui oscilator critic amortizat.	20
1.17 Dependența de timp a energiei totale a unui oscilator slab amortizat.	21
1.18 Un oscilator întreținut supus unei forțe de întreținere $F_0 \cos \omega t$.	25
1.19 Ecuația 1.119 reprezentată în spațiul complex	26
1.20 Amplitudinea și defazajul în funcție de frecvența forței externe.	27
1.21 Amplitudinea de oscilație în funcție de frecvența forței externe. Sunt indicate principalele caracteristici ale curbei de rezonanță.	28
1.22 Defazajului dintre forță și elongație în funcție de frecvența forței externe pentru oscilatorul care are curba de rezonanță din figura 1.21.	29
1.23 Elongația, viteza și puterea transferată la rezonanță în funcție de timp pentru un oscilator întreținut.	32
1.24 Puterea medie transferată unui oscilator (relația 1.153) în funcție de frecvența forței externe, pentru oscilatorul din secțiunea 1.6.	33
1.25 Curba de rezonanță magnetică nucleară pentru protonii din apă.	33
2.1 Un puls de undă care se deplasează prin coardă, de la stânga la dreapta, cu viteza c . La momentul t maximul pulsului se găsește în ct .	39
2.2 O coardă elastică, de lungime L , tensionată, astfel încât, în poziția de echilibru ea este de-a lungul axei Ox . Coarda este tensionată și apoi eliberată. Este indicat elementul infinitesimal AB și forțele de tensiune care acționează asupra acestuia.	40
2.3 Reprezentare grafică a soluției ecuației de undă la momentul inițial $t = 0$ și la un moment t .	42
2.4 Distribuția vitezei și accelerării unor puncte de pe coarda vibrantă, la momentul $t = 0$.	43
2.5 Un element infinitesimal dintr-o coardă prin care se deplasează o undă.	44
2.6 Interferența constructivă și destructivă două unde ψ_1 și ψ_2 de aceeași frecvență și amplitudine.	46
2.7 Interferometrul Young cu două fante.	47
2.8 Reprezentare schematică a interferenței Young pentru $r_1, r_2 \gg d$.	48
2.9 Două pulsuri unul negativ și unul pozitiv ce se propagă în sensuri diferite	49
2.10 Două pulsuri unul real și unul virtual ce se propagă în sensuri diferite	50
2.11 Primele trei moduri normale de oscilație ale unei corzi elastice.	50
2.12 O undă staționară într-o coardă elastică.	52
2.13 Interferența a două unde pentru care $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ și $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$, iar $A_0 = 0.1 \text{ m}$.	53
2.14 Interferența a două unde pentru care $\omega_1 = 270 \text{ rad/s}$ și $\omega_1 = 260 \text{ rad/s}$, iar $A_0 = 0.1 \text{ m}$.	53

1 Oscilații

Mișcarea periodică reprezintă cel mai des întâlnit tip de mișcare, de la mișcarea planetelor în jurul Soarelui până la vibrațiile moleculelor și atomilor din care este compus un organism biologic. Un tip special de mișcare periodică este reprezentată de *oscilațiile mici în jurul unei poziții de echilibru*, poziție pentru care forța este zero, iar energia potențială are un minim. Acest tip de oscilații se numesc *armonice* și o să le studiem în următorul capitol.

1.1 Oscilatorul armonic simplu

Cel mai simplu exemplu de mișcare oscilatorie este cea a unui corp de masă m care este atașat de un resort de constantă k , așa cum este ilustrat în figura 1.1. Corpul este scos din poziția de echilibru prin alungirea resortului pe distanța A_0 și apoi este lăsat liber. Forța elastică ($F = -kx$) o să fie îndreptată în sens negativ, înspre poziția de echilibru. Această forță o să imprime o accelerare corporului care va începe să se mișe spre poziția de echilibru. În momentul când ajunge în punctul de echilibru forța elastică și accelerarea corporului o să fie zero, iar viteza lui o să fie maximă în sens negativ. Datorită faptului că are viteză, corpul o să continue să se mișe. Resortul o să se comprime iar forța elastică și accelerarea o să-si schimbe sensul, astfel încât să fie îndreptate în sens pozitiv spre poziția de echilibru. Sub acțiunea acestei accelerări mărimea vitezei o să scadă. În momentul în care resortul este comprimat cu $x = -A_0$ forța și accelerarea o să aibă valori maxime, iar viteza o să fie zero. Din acest moment corpul va executa același tip de mișcare, doar că în sens pozitiv. Dacă în sistem nu avem forțe dissipative (forțe de frecare) mișcarea de oscilație va continua la nesfârșit.

Plecând de la legea a doua a lui Newton (L2) o să determinăm ecuația de mișcare. Forța elastică este dată de $F = -kx$, semnul '-' ne arată că pentru $x > 0$ forța este în sens negativ (adică este negativă), iar pentru $x < 0$ forța este în sens pozitiv (adică este pozitivă). Astfel, L2 se scrie

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad (1.1)$$

modificăm această ecuație

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (1.2)$$

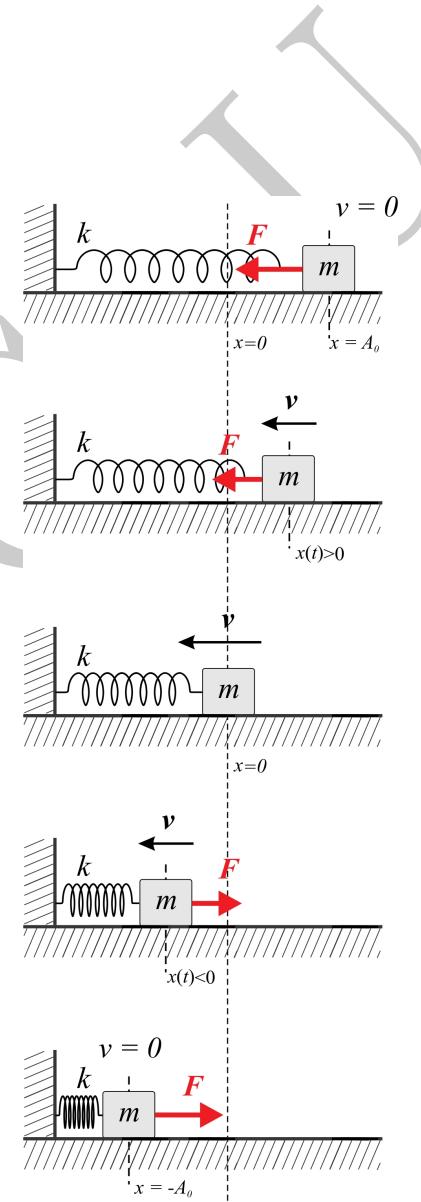


Figura 1.1: Un corp de masă m care este atașat de un resort de constantă k și care execută o mișcare oscilatorie armonică sub influența forței elastice.

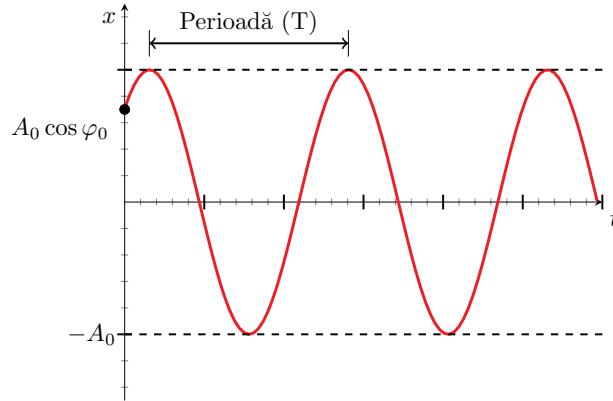


Figura 1.2: Reprezentare grafică a ecuației de mișcare a unui oscilator armonic simplu. Sunt indicate principalele caracteristici ale mișcării.

o să notăm $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, iar L2 devine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.3)$$

Se poate verifica prin înlocuire că funcția

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.4)$$

este o soluție a ecuației 1.3, adică este *ecuația de mișcare a oscilatorului armonic simplu* (OAS). Această soluție a ecuației diferențiale are o importanță deosebită. În primul rând, ea este valabilă în cazul în care forța depinde liniar de x . Din punct de vedere fizic în cazul unui sistem oscilant pe intervalele suficient de mici putem întotdeauna să aproximăm forța ca fiind liniară în x . În al doilea rând, conform teoremei lui Fourier, orice perturbație care este periodică, cu perioada T , se poate descompune într-o serie de oscilații armonice simple (sinusoidale) de perioadă T , $T/2$, $T/3$, ..., și amplitudini corespunzătoare. Cu alte cuvinte, orice fenomen periodic poate să fie tratat ca o suprapunere de oscilații sinusoidale simple.

În figura 1.2 este reprezentată grafic ecuația de mișcare $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ a OAS. Putem observa principalele caracteristici ale OAS:

1. Oscilația are loc între limitele $x = \pm A_0$, unde A_0 se numește *amplitudinea oscilației*.
2. Oscilația are o perioadă T care este egală cu intervalul de timp dintre două maxime succeseive de oscilație. Mai general, perioada este egală cu intervalul de timp dintre două momente în care x (care se mai numește și *elongație*) și viteza $v = dx/dt$ au aceeași valoare. În consecință, într-un interval de timp de o perioadă argumentul funcției cosinus trebuie să crească cu 2π , adică:

$$\omega_0(t + T) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi,$$

rezolvăm și obținem

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ sau } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad (1.5)$$

unde $\nu = 1/T$ reprezintă *frecvența de oscilație*, iar $\omega_0 = 2\pi\nu$ reprezintă *frecvența unghiulară de oscilație*.

3. Mărimea φ_0 , care se numește *fază initială* a oscilației, ne indică elongația oscilatorului la momentul inițial $t = 0$, adică poziția oscilatorului la momentul inițial:

$$x(0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_0 \cos(\varphi_0).$$

Observație. Pe parcursul unei perioade, oscilatorul va fi în același punct la două momente diferite de timp. O dată când are viteză pozitivă și încă o dată când are viteză negativă. Astfel, pentru a descrie complet starea unui oscilator trebuie să precizăm atât poziția cât și viteza acestuia.

Viteza și accelerată

Din legea de mișcare $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, prin derivare, putem să determinăm viteza și accelerata oscilatorului ca:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.6)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [-A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)] = -A_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.7)$$

Exemplul 1.1. Să presupunem că avem un OAS care oscilează cu amplitudinea de 3 cm și care la momentul inițial $t = 0$ se află în $x(0) = 2$ cm și avea viteza de $v(0) = -0.12$ cm/s. Care este legea de mișcare a acestui oscilator?

Legea de mișcare pentru un OAS este întotdeauna de tipul $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Ceea ce trebuie să facem este să găsim parametrii mișcării (A_0, ω_0, φ_0). La momentul inițial $t = 0$ oscilatorul se află în $x(0) = 2$ cm, de aici

$$x(0) = A_0 \cos(\varphi_0) = 2 \text{ cm},$$

dar $A_0 = 3$ cm, de unde

$$\cos(\varphi_0) = \frac{2}{3} \implies \varphi_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \implies \varphi_0 = 0.84 \text{ rad.}$$

Viteza oscilatorului este

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

La momentul inițial, $t = 0$, viteza oscilatorului este

$$v(0) = -A_0 \omega_0 \sin(\varphi_0) = -3 \omega_0 \sin(0.84) = -2.23 \omega_0 \text{ [cm/s]},$$

astfel

$$-0.12 = -2.23 \omega_0 \implies \omega_0 = 5.38 \times 10^{-2} \text{ [s}^{-1}\text{]},$$

iar legea de mișcare o să fie:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 3 \cos(5.38 \times 10^{-2} t + 0.84) \text{ [cm].}$$

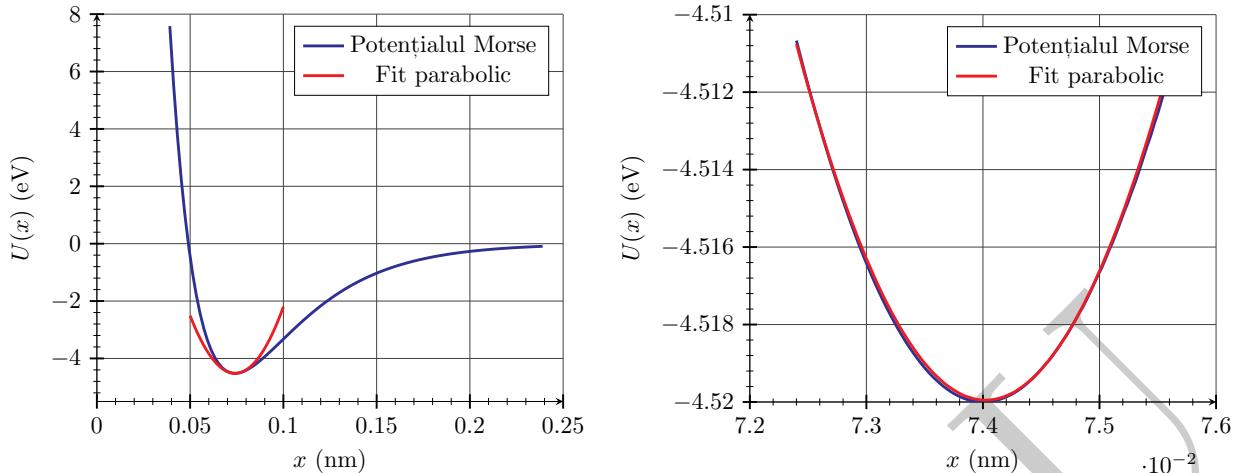


Figura 1.3: Funcția Morse fitată cu o funcție parabolică pe un interval relativ larg și pe un interval relativ îngust în jurul poziției de echilibru.

Energia potențială elastică

În secțiunea ?? am arătat că pentru o forță care depinde de poziție putem întotdeauna defini o energie potențială, astfel încât

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}, \quad (1.8)$$

de unde

$$dU(x) = -F(x) dx = kx dx, \quad (1.9)$$

prin integrare obținem

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C. \quad (1.10)$$

De obicei constanta de integrare C se alege astfel încât energia potențială să fie zero în momentul în care corpul este în poziția de echilibru. Dacă poziția de echilibru este în $x = 0$, atunci $C = 0$ și

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (1.11)$$

Acest rezultat ne indică faptul că dacă energia potențială a unui sistem este parabolică în funcție de x , atunci acesta execută o OAS care este descrisă de legea de mișcare 1.4 determinată mai sus. Aceasta are o importanță deosebită, deoarece o energie potențială care are un minim se poate considera întotdeauna ca fiind parabolică pe intervale suficient de mici în jurul poziției de echilibru. [Această afirmație este echivalentă cu cea de la începutul cursului "pe intervalele suficient de mici putem întotdeauna să aproximăm forță ca fiind liniară în x ".] Aceasta este motivul pentru care *toate sistemele care sunt în echilibru execută mici oscilații în jurul poziției de echilibru*. O să exemplificăm această afirmație într-un caz concret, cel al unei molecule diatomice de hidrogen. Știm că energia potențială în acest caz este dată de funcția Morse (valoarea constantelor a fost dată în capitolul 5)

$$U(x) = U_0 \left[1 - e^{-\frac{x-x_0}{\delta}} \right]^2 - U_0. \quad (1.12)$$

În graficele din figura 1.3 puteți observa funcția Morse fitată cu o funcție parabolică pe un interval relativ mare și pe un interval relativ mic în jurul poziției de echilibru. Cu toate că funcția Morse are o formă complicată, în jurul poziției de echilibru (în jurul minimului) ea poate fi aproximată cu o funcție parabolică. Astfel, în jurul minimului o moleculă diatomică execută o OAS.

Ecuația energiei

Putem să determinăm viteza în funcție de elongația OAS folosind ecuația energiei. Aceasta se scrie

$$E = E_c + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (1.13)$$

de unde putem determina viteza ca

$$v^2 = \frac{2}{m} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right) \implies v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{1}{2}kx^2 \right]}. \quad (1.14)$$

Vă reamintesc că E reprezintă energia totală și este o constantă pe care o determinăm dintr-o stare cunoscută, de obicei din starea inițială.

Putem să scriem *ecuația energiei explicit* în funcție de timp dacă înlocuim legea vitezei și legea de mișcare, astfel

$$\begin{aligned} E &= E_c + U(x) = \frac{1}{2}m[-A_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)]^2 + \frac{1}{2}k(A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_0])^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dacă folosim relația $\omega_0^2 = k/m$, energia totală devine

$$E = \frac{1}{2}kA_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_0^2. \quad (1.16)$$

Această relație ne indică faptul că într-adevăr energia totală este constantă, cu alte cuvinte energia totală nu variază în timp.

Din ecuația energiei putem să determinăm punctele de întoarcere ale mișcării știind că în acest caz $v = 0$, adică

$$E - \frac{1}{2}kx^2 = 0 \implies x = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} = \pm A_0. \quad (1.17)$$

În partea stângă a figurii 1.4 este reprezentată grafic energia potențială și punctele de întoarcere pentru un oscilator pentru care amplitudinea este de 0.75 cm, iar $k = 1$ N/m. Regiunea permisă este dictată de energia totală. În această regiune $U(x) \leq E$.

O să rescriem ecuația energiei explicit în funcție de timp pentru un oscilator care inițial este în repaus în $x = A_0$. Deoarece

$$x(0) = A_0 \cos(\varphi_0) = A_0 \implies \varphi_0 = 0, \quad (1.18)$$

atunci

$$E = E_c + U(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_0^2 \sin^2 \omega_0 t + \frac{1}{2}kA_0^2 \cos^2 \omega_0 t. \quad (1.19)$$

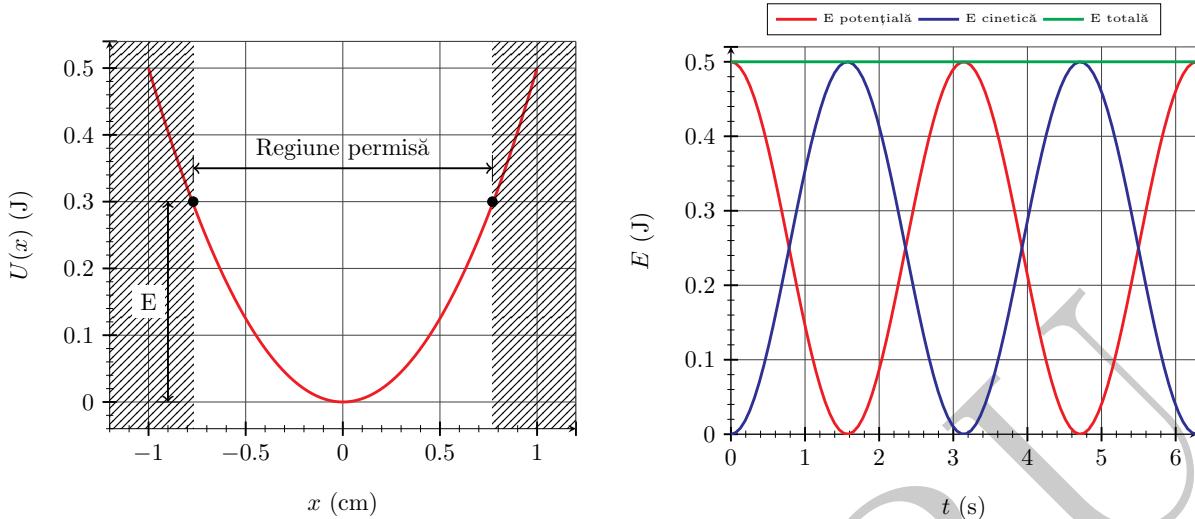


Figura 1.4: În partea stângă este reprezentată energia potențială și punctele de întoarcere pentru un OAS. Regiunea permisă este dictată de energia totală. În partea dreaptă sunt reprezentate dependențele energiilor în funcție de timp.

În partea dreaptă a figurii 1.4 sunt reprezentate grafic dependențele energiilor în funcție de timp. Putem să observăm caracteristica principală a unui OAS. Aceasta este un sistem în care energia potențială se transformă continuu în energie cinetică și invers, iar energia totală a sistemului rămâne constantă. Graficul s-a reprezentat pentru $m = 1 \text{ kg}$, $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$, $k = 1 \text{ N/m}$, $A_0 = 1 \text{ m}$.

La <https://drive.matlab.com/sharing/e19e9987-f679-45cf-9b62-a5277a2b9adc> puteți să vedeați diferite reprezentări grafice ale elongației, vitezei, accelerării și energiei unui oscilator armonic simplu.

1.2 Oscilatorul armonic simplu în reprezentarea complexă

Reprezentarea grafică a numerelor complexe

Un număr complex se poate scrie ca

$$z = a + bi, \quad (1.20)$$

unde a și b sunt două numere reale, iar i este numărul imaginar pentru care $i^2 = -1$. Un număr complex se poate reprezenta ca un vector în planul complex, de componente a și b (figura 1.5). Bineînteleas, mărimea (modulul) acestui vector este

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{z \cdot z^*}, \quad (1.21)$$

unde $z^* = a - bi$ este vectorul complex conjugat vectorului z , care se obține prin înlocuirea lui i cu $-i$. Din punct de vedere geometric vectorul complex z poate fi considerat

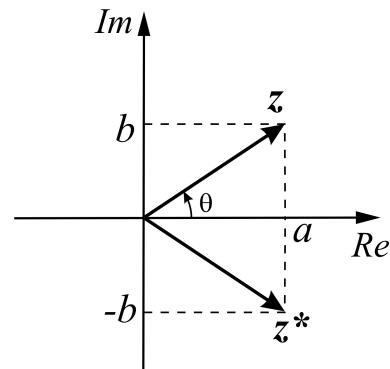


Figura 1.5: Un vector complex $z = a + bi$ și conjugatul acestuia $z^* = a - bi$ reprezentați în planul complex.

ca un vector de modul $|z|$ care este rotit față de axa reală cu unghiul θ , unghi pentru care $\tan \theta = b/a$.

Se poate observa că

$$z + z^* = 2a \in \mathbb{R}. \quad (1.22)$$

Dacă avem un vector $z = a + bi$ și îl înmulțim cu i o să obținem vectorul

$$iz = ai + bi^2 = ai - b. \quad (1.23)$$

Din punct de vedere geometric vectorul iz se obține prin rotirea vectorului z cu 90° în sens trigonometric. Ceea ce înseamnă că înmulțirea cu i este echivalentă cu o rotație cu 90° , aşa cum este ilustrat în figura 1.6.

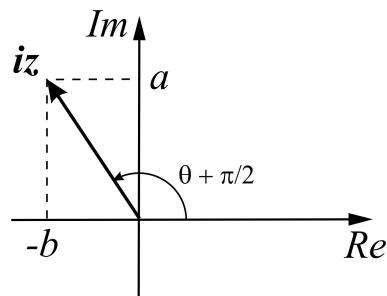


Figura 1.6: Înmulțirea unui vector complex cu i este echivalentă cu o rotație cu 90° a acestuia.

Seria Taylor

Să presupunem că avem o funcție $f(x)$ (reprezentată în graficul din figura 1.7) pe care nu o cunoaștem, însă știm care este valoarea ei pentru $x = 0$, adică $f(0)$ și cunoaștem care este valoarea derivatorilor ei în $x = 0$. Întrebarea este: putem să găsim valoarea funcției pentru orice x ? Prima aproximare este să spunem că funcția noastră este egală cu $f(0)$, adică linia orizontală verde din grafic. Dacă funcția noastră $f(x)$ ar fi o constantă atunci problema ar fi rezolvată. Însă funcția nu este o constantă, deci funcția trebuie să fie

$$f(x) = f(0) + \dots \quad (1.24)$$

Ce ar trebui să adăugăm în partea dreaptă în loc de puncte?

Pentru a înțelege mai ușor, să considerăm un exemplu concret. Să spunem că funcția noastră ne dă temperatura medie în fiecare lună. Cunoaștem valoarea ei în luna iunie 20°C și derivata ei în luna iunie 5°C/lună . Vă reamintesc că derivata ne spune cum variază funcția de la o lună la alta, adică rata de variație a funcției. Cu aceste informații putem spune că temperatura medie în luna mai este de 15°C și în luna iulie este de 25°C , adică

$$f(x) = f(0) + \frac{df}{dx} \Big|_0 \cdot x, \quad (1.25)$$

aici notația $\frac{df}{dx} \Big|_0$ reprezintă prima derivată a lui $f(x)$ în raport cu x în $x = 0$. Este oare suficient, am rezolvat problema? Dacă funcția noastră ar fi liniară cu siguranță da. Dacă nu, aceasta ne

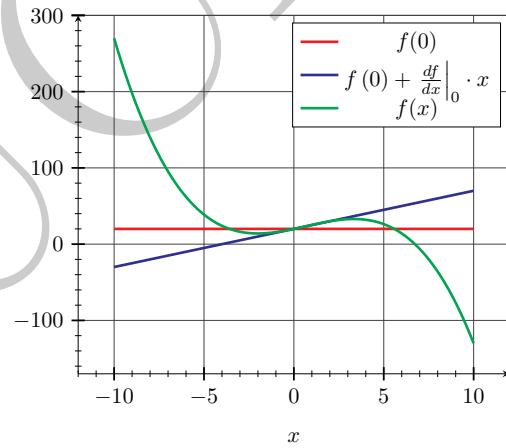


Figura 1.7: O funcție $f(x)$ și primele două aproximări ale acesteia conform serii Taylor.

dă doar o aproximare în jurul lui 0 și nu ne dă valoarea funcției în orice punct (linia albastră din grafic). Problema e că în această aproximare am ignorat rata de variație a ratei de variație a funcției. În exemplul nostru cu temperatură medie este clar că rata de variație a funcției (derivata) nu poate fi constantă de la o lună la alta. Dacă ar fi constantă, ar însemna că temperatura medie ar trebui să crească tot timpul de la o lună la alta, ceea ce bineînțeles nu este adevărat, în lunile de toamnă temperatura medie scade de la o lună la alta. Dar ce înseamnă *rata de variație a ratei de variație?* Aceasta nu este altceva decât a doua derivată. Atunci, o aproximare mai bună ar fi

$$f(x) = f(0) + \frac{df}{dx} \Big|_0 \cdot x + \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_0 \cdot \frac{x^2}{2!}, \quad (1.26)$$

aici am împărțit cu $2!$ astfel încât dacă derivăm funcția $f(x)$ de două ori în $x = 0$ să obținem $\frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_0$ (adică pentru ca puterea să se simplifice). Este oare suficient, am rezolvat problema? Dacă funcția noastră ar fi parabolică, da. Dacă nu, trebuie să continuăm să adăugăm termeni în partea dreaptă. Folosind aceleasi argumente putem să generalizăm:

$$f(x) = f(0) + \frac{df}{dx} \Big|_0 \cdot x + \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_0 \cdot \frac{x^n}{n!}. \quad (1.27)$$

Adică, atâtia termeni trebuie să adăugăm câte derivate avem sau cunoaștem. Dacă știm toate derivatele atunci:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_0 \cdot \frac{x^n}{n!}. \quad (1.28)$$

Această formulă este valabilă pentru orice funcție continuă și are în general o infinitate de termeni, exceptând cazul în care funcția pe care o căutăm este polinomială.

Exponențiala complexă

Haideți să dezvoltăm în serie Taylor funcțiile armonice sinus și cosinus:

$$\sin \theta = \sin 0 + \theta \cos 0 + \frac{\theta^2}{2!} (-\sin 0) + \frac{\theta^3}{3!} (-\cos 0) + \dots = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots, \quad (1.29)$$

$$\cos \theta = \cos 0 + \theta (-\sin 0) + \frac{\theta^2}{2!} (-\cos 0) + \frac{\theta^3}{3!} (\sin 0) + \dots = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \quad (1.30)$$

Să calculăm acum suma:

$$\cos \theta + i \sin \theta = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \quad (1.31)$$

Dezvoltăm în serie Taylor funcția exponențială

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad (1.32)$$

și îl înlocuim pe x cu $x = i\theta$, atunci

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots, \quad (1.33)$$

de unde putem observa că:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (1.34)$$

aceasta este relația lui Euler, este una dintre cele mai importante formule care ne leagă funcția exponentială de funcțiile trigonometrice [R.P. Feynman spunea că aceasta este cea mai remarcabilă formulă din matematică, dacă vreți să vedeați cu adevărat frumusețea acestei relații înlocuiți $\theta = \pi$ și o să obțineți $e^{i\pi} + 1 = 0$, formulă care conține baza logaritmului natural, numărul imaginari i , raportul dintre lungimea cercului și diametrul lui (π), precum și baza tuturor numerelor în binar (0 și 1)].

Interpretarea geometrică a relației lui Euler.

Să considerăm vectorul complex

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (1.35)$$

Observăm că

$$\left| e^{i\theta} \right| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1, \quad (1.36)$$

ceea ce înseamnă că vectorul $e^{i\theta}$ este un vector unitar rotit cu unghiul θ față de axa reală. Se poate arăta cu ușurință că înmulțirea unui vector complex z cu vectorul $e^{i\theta}$ este echivalentă cu rotirea vectorului z cu unghiul θ fără a-i modifica lungimea.

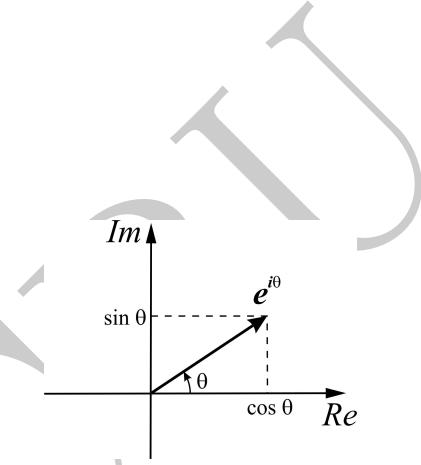


Figura 1.8: Vectorul complex $e^{i\theta}$ este un vector unitar rotit cu unghiul θ față de axa reală.

Oscilatorul armonic simplu în reprezentarea complexă

Haideți să rescriem L2 pentru un OAS

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.37)$$

unde $\omega_0^2 = k/m$. Am spus că soluția acestei ecuații este o funcție armonică de tip cosinus. Bineîntele că aceasta nu este singura soluție și funcția sinus poate fi o soluție. De fapt, orice funcție care printr-o combinație liniară cu a doua ei derivată ne dă zero poate fi o soluție. Aceasta înseamnă că și funcția exponentială poate fi o soluție. Să presupunem că funcția

$$x(t) = C e^{pt}, \quad (1.38)$$

este o soluție a ecuației diferențiale de mai sus. Prin înlocuire o să determinăm coeficienții C și p , care pot fi numere complexe. Derivatele lui $x(t)$ sunt date de:

$$\frac{d}{dt}(C e^{pt}) = C p e^{pt}, \quad (1.39)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(C e^{pt}) = \frac{d}{dt}(C p e^{pt}) = C p^2 e^{pt}. \quad (1.40)$$

Prin înlocuire în relația 1.37 o să obținem

$$Cp^2e^{pt} + \omega_0^2Ce^{pt} = 0 \implies C(p^2 + \omega_0^2)e^{pt} = 0, \quad (1.41)$$

ceea ce este adevărat dacă:

$$C(p^2 + \omega_0^2) = 0. \quad (1.42)$$

O să ignorăm soluția trivială $C = 0$, atunci

$$p^2 + \omega_0^2 = 0, \quad (1.43)$$

deoarece ω_0 este real, o să obținem

$$p = \pm i\omega_0. \quad (1.44)$$

Aceasta înseamnă că o să avem două soluții:

$$\begin{cases} x_1(t) = Ce^{i\omega_0 t}, \\ x_2(t) = Ce^{-i\omega_0 t}. \end{cases} \quad (1.45)$$

Nu avem niciun motiv să ignorăm una dintre cele două soluții, ambele sunt valide. De fapt ecuația

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0, \quad (1.46)$$

este o ecuație liniară și omogenă. Este liniară deoarece nu avem decât puterea unu pentru funcția x și derivatele ei, nu avem pătrate sau cuburi sau alte puteri ale lui x și ale derivatelor. Este omogenă deoarece nu avem niciun termen constant (ecuația este egală cu zero). Ecuațiile liniare și omogene au o proprietate foarte importantă care se numește *principiul superpoziției* și care ne spune că dacă $x_1(t)$ și $x_2(t)$ sunt soluții ale ecuației liniare și omogene, atunci orice combinație liniară a acestor soluții este o soluție a ecuației. Cu alte cuvinte, dacă C_1 și C_2 sunt doi coeficienți constanți complecsi, atunci funcția $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ este, de asemenea, o soluție a ecuației. Importanța acestei proprietăți devine cu adevărat evidentă în mecanica cuantică.

Putem să demonstrăm foarte simplu această proprietate dacă scriem:

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2x_1 = 0, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0^2x_2 = 0, \end{cases} \quad (1.47)$$

înmulțim prima ecuație cu C_1 și a doua cu C_2 și le adunăm. O să obținem

$$C_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + C_1\omega_0^2x_1 + C_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + C_2\omega_0^2x_2 = 0 \quad (1.48)$$

de unde

$$\frac{d^2}{dt^2}(C_1x_1 + C_2x_2) + \omega_0^2(C_1x_1 + C_2x_2) = 0, \quad (1.49)$$

ceea ce ne indică clar că $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ este o soluție a ecuației. Aceasta înseamnă că dacă avem două soluții independente ale unei ecuații liniare și omogene, putem să construim o infinitate de soluții deoarece C_1 și C_2 se pot alege oricum. *Acstea două soluții liniar independente* [$x_1(t)$ și $x_2(t)$] sunt baze cu ajutorul cărora putem construi orice soluție. Soluțiile liniar independente sunt similare cu versorii axelor de coordonate i și j cu ajutorul cărora putem să construim orice vector în două dimensiuni.

Astfel, soluția noastră are forma generală

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (1.50)$$

În principiu, putem să alegem cei doi coeficienți C_1 și C_2 oricum dorim, însă există anumite restricții, pe care o să le discutăm mai jos. În primul rând soluția $x(t)$ trebuie să fie reală deoarece descrie poziția oscilatorului care este o cantitate măsurabilă, deci reală. Haideți să reprezentăm cei doi vectori $C_1 e^{i\omega_0 t}$ și $C_2 e^{-i\omega_0 t}$ în planul complex, ca în figura 1.9. Primul vector are lungimea C_1 și face unghiul $\omega_0 t$ cu axa reală (se rotește în sens trigonometric), iar al doilea vector lungimea C_2 și face unghiul $-\omega_0 t$ cu axa reală (se rotește în sens invers trigonometric). Din figura 1.9 este evident faptul că dacă $x(t)$ este pe axa reală, atunci trebuie ca $C_1 e^{i\omega_0 t} = (C_2 e^{-i\omega_0 t})^*$, de unde $C_1 = C_2^*$. În principiu, C_1 poate să fie un număr complex. În acest caz, îl putem scrie folosind relația lui Euler ca $C_1 = A e^{i\varphi_0}$, unde A este real și egal cu modulul lui C_1 , iar φ_0 este o fază. Atunci C_2 o să fie $C_2 = A e^{-i\varphi_0}$. Astfel, soluția devine

$$x(t) = A e^{i\varphi_0} e^{i\omega_0 t} + A e^{-i\varphi_0} e^{-i\omega_0 t} = A [e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)}], \quad (1.51)$$

care se rescrie folosind relația lui Euler

$$x(t) = A [\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + i \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - i \sin(\omega_0 t + \varphi_0)], \quad (1.52)$$

după simplificare

$$x(t) = 2A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \equiv A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.53)$$

unde am notat $A_0 = 2A$. Se poate observa că soluția este identică cu legea de mișcare 1.4 pe care am găsit-o la începutul capitolului.

Legea de mișcare

Să considerăm vectorul complex

$$z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}. \quad (1.54)$$

Din figura 1.10 observăm că partea reală a acestui vector este egală cu legea de mișcare 1.53, sau echivalent

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)], \quad (1.55)$$

adică legea de mișcare este partea reală a vectorului complex $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$. Observați că, deoarece fază $\omega_0 t + \varphi_0$ depinde de timp, vectorul $z(t)$ este un vector de lungime A_0 care se rotește în timp în sens trigonometric.

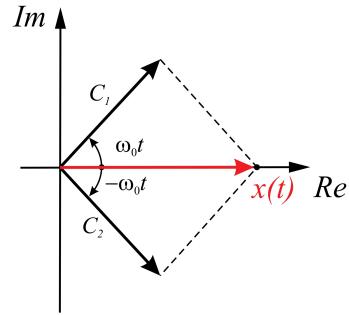


Figura 1.9: Vectorii $C_1 e^{i\omega_0 t}$ și $C_2 e^{-i\omega_0 t}$ și suma lor $x(t)$.

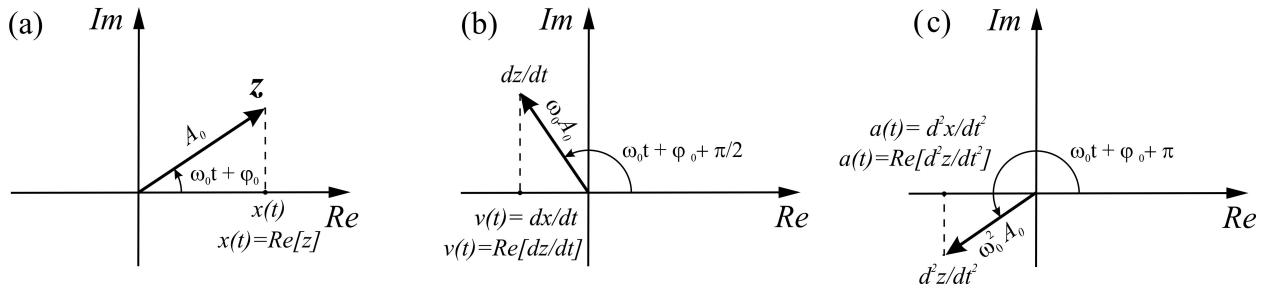


Figura 1.10: (a) Legea de mișcare este partea reală a vectorului complex $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$. (b) Viteza este partea reală a derivatei în raport cu timpul a vectorului complex $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$. (c) Acelerația este partea reală a celei de a doua derivate în raport cu timpul a vectorului complex $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$.

Viteza

Să calculăm derivata vectorului $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$ în funcție de timp

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} \right) = A_0 \frac{d}{dt} e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} \\ &= i\omega_0 A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} = i\omega_0 z \\ &= \omega_0 A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

ceea ce înseamnă că acest vector are lungimea $\omega_0 A_0$ și este rotit cu 90° față de vectorul $z(t)$ (vezi figura 1.10). Vă aduc aminte că am arătat că înmulțirea unui vector complex cu i este echivalentă cu rotația acestuia cu 90° . Partea reală a acestui vector este

$$Re \left[\frac{dz}{dt} \right] = Re \left[\omega_0 A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2)} \right] = \omega_0 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (1.57)$$

dacă transformăm cosinusul în sinus obținem

$$Re \left[\frac{dz}{dt} \right] = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.58)$$

relație identică cu expresia vitezei OAS 1.6 dedusă la începutul capitolului. De unde rezultă că:

$$v(t) = Re \left[\frac{dz}{dt} \right]. \quad (1.59)$$

Acelerația

Să derivăm de două ori vectorul $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$ în funcție de timp

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt} (i\omega_0 z) = i\omega_0 \frac{dz}{dt} = -\omega_0^2 A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} = -\omega_0^2 z, \quad (1.60)$$

ceea ce înseamnă că acest vector are lungimea $\omega_0^2 A_0$ și este antiparalel cu $z(t)$ (vezi figura 1.10). Partea reală a acestui vector este

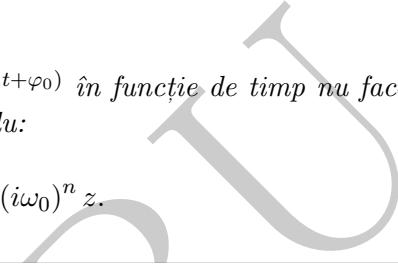
$$\operatorname{Re} \left[\frac{d^2 z}{dt^2} \right] = -\omega_0^2 \operatorname{Re}[z] = -\omega_0^2 x = -\omega_0^2 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.61)$$

care reprezintă accelerarea oscilatorului, dată de

$$a(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{d^2 z}{dt^2} \right]. \quad (1.62)$$

Observație. Prin derivarea unui vector complex $z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}$ în funcție de timp nu facem altceva decât să coborâm $i\omega_0$ și să-l înmulțim cu $z(t)$, de exemplu:

$$\frac{dz}{dt} = i\omega_0 z, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = (i\omega_0)^2 z, \quad \frac{d^n z}{dt^n} = (i\omega_0)^n z.$$



Exemplul 1.2. Un corp atașat de un resort oscilează cu o amplitudine de 5 cm și o frecvență de 1 Hz. La momentul inițial corpul este în poziția de echilibru ($x = 0$). Scrieți ecuația de mișcare, viteza și accelerarea sub formă sinusoidală și exponentomial complexă. Care sunt valorile pentru elongație, viteza și accelerare la $t = 8/3$ secunde.

Parametrii mișcării sunt: $A_0 = 5$ cm și $\nu = 1\text{Hz} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi$.

Legea de mișcare în formă sinusoidală se scrie $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, la momentul inițial

$$x(0) = A_0 \cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0) = A_0 \cos(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2},$$

de unde elongația este:

$$x(t) = 5 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) [\text{cm}],$$

iar în format exponentomial complex

$$z(t) = A_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} = 5e^{i(2\pi t + \frac{\pi}{2})},$$

unde

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] = 5 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) [\text{cm}].$$

Derivata vectorului exponentomial complex $z(t) = 5e^{i(2\pi t + \frac{\pi}{2})}$ este:

$$\frac{dz}{dt} = (i\omega_0) z = (i2\pi) z = 10\pi i e^{i(2\pi t + \frac{\pi}{2})} = 10\pi e^{i(2\pi t + \pi)},$$

de unde viteza

$$\begin{aligned} v(t) &= \operatorname{Re} \left[\frac{dz}{dt} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[10\pi i e^{i(2\pi t + \frac{\pi}{2})} \right] = \operatorname{Re} \left[10\pi i \left(\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] \\ &= -10\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) [\text{cm/s}] \end{aligned}$$

sau echivalent:

$$v(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{dz}{dt} \right] = \operatorname{Re} \left[10\pi e^{i(2\pi t + \pi)} \right] = 10\pi \cos(2\pi t + \pi) [\text{cm/s}].$$

Pentru a calcula accelerația, calculăm a doua derivată a vectorului complex care ne descrie oscilatorul

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (i\omega_0)^2 z = (i2\pi)^2 z = -20\pi^2 e^{i(2\pi t + \frac{\pi}{2})},$$

de unde accelerația

$$a(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{d^2z}{dt^2} \right] = \operatorname{Re} \left[-20\pi^2 e^{i(2\pi t + \frac{\pi}{2})} \right] = -20\pi^2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) [\text{cm/s}^2],$$

la $t = 8/3$ secunde:

$$x(8/3) = \frac{5\sqrt{3}}{2} [\text{cm}] = 4.33 \text{ cm}$$

$$v(8/3) = 5\pi [\text{cm/s}] = 15.7 \text{ cm/s}$$

$$a(8/3) = -10\sqrt{3}\pi^2 [\text{cm/s}^2] = -170.9 \text{ cm/s}^2$$

1.3 Compunerea oscilațiilor de aceeași frecvență

Să presupunem că avem un oscilator supus unei combinații de două oscilații armonice date de:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad (1.63)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \quad (1.64)$$

oscilația rezultantă o să fie scrisă astfel:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (1.65)$$

Deoarece au aceeași frecvență unghiulară ω_0 , prin compunerea celor două OAS o să obținem tot o OAS. Putem să determinăm legea de mișcare în mod simplu dacă folosim reprezentarea complexă. Astfel, vectorii complecsi asociați celor două oscilații sunt:

$$z_1(t) = A_1 e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)}, \quad (1.66)$$

$$z_2(t) = A_2 e^{i(\omega_0 t + \varphi_2)}, \quad (1.67)$$

iar oscilația rezultantă o să fie dată de

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t), \quad (1.68)$$

cu

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]. \quad (1.69)$$

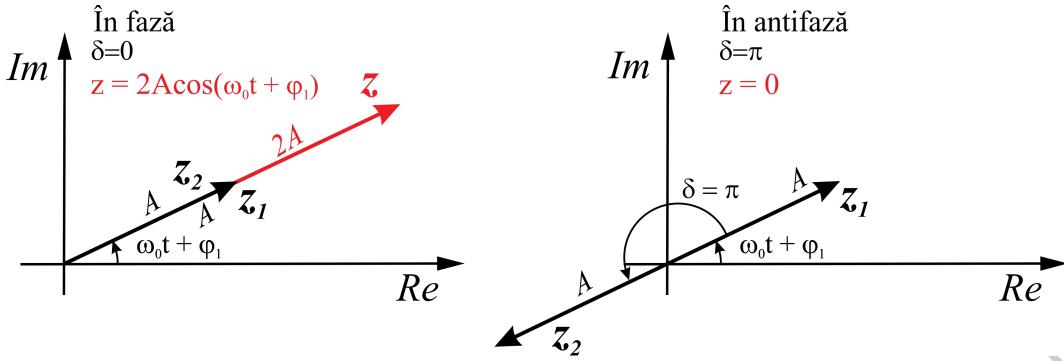


Figura 1.12: Compunerea a două oscilații în fază și în antifază, de aceeași frecvență și de aceeași amplitudine.

Putem scrie

$$z(t) = A_1 e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega_0 t + \varphi_2)}, \quad (1.70)$$

dacă dăm factor comun obținem

$$z(t) = e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} [A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}] \quad (1.71)$$

sau

$$z(t) = e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} [A_1 + A_2 e^{i\delta}], \quad (1.72)$$

care se mai poate scrie ca

$$z(t) = A_1 e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega_0 t + \varphi_1)} e^{i\delta}, \quad (1.73)$$

unde am notat cu $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$, care se numește defazajul dintre cele două oscilații. Vă aduc aminte că $e^{i\delta}$ înseamnă doar o rotație cu δ a vectorului complex, astfel putem reprezenta cei trei vectori complecși ca în figura 1.11. În cazul particular în care $A_1 = A_2$ se poate observa imediat din figură

$$\beta = \frac{\delta}{2} \text{ și } A = 2A_1 \cos \beta.$$

De asemenea, din figura 1.11 mai putem observa că $z(t)$ se poate scrie ca

$$z(t) = A e^{i(\omega_0 t + \varphi_1 + \beta)} = (2A_1 \cos \beta) e^{i(\omega_0 t + \varphi_1 + \beta)}, \quad (1.74)$$

de aici $x(t)$ este

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1 + \beta) = (2A_1 \cos \beta) \cos(\omega_0 t + \varphi_1 + \beta). \quad (1.75)$$

Dacă $\delta = 0$ atunci $\beta = 0$, cei doi oscilatori sunt în fază și oscilația rezultantă este dată de

$$x(t) = 2A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad (1.76)$$

adică prin suprapunerea a două oscilații cu aceeași frecvență unghiulară, amplitudine și aflate în fază, oscilația rezultantă va avea amplitudine dublă (figura 1.12).

Dacă $\delta = \pi$ atunci $\beta = \pi/2$, cei doi oscilatori sunt în antifază și oscilația rezultantă este dată de

$$x(t) = (2A_1 \cos \beta) \cos(\omega_0 t + \varphi_1 + \pi/2) = 0, \quad (1.77)$$

adică prin suprapunerea a două oscilații cu aceeași frecvență unghiulară, amplitudine și aflate în antifază oscilațiile se vor anula reciproc (figura 1.12).

Exemplul 1.3. Să presupunem că avem două OAS date de $x_1(t) = \cos \omega t$ și $x_2(t) = \sin \omega t$ care se compun. Scrieți oscilația rezultantă sub forma $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$.

În primul rând trebuie să scriem cei doi vectori complecsi asociați celor două oscilații. Pentru prima oscilație este foarte simplu:

$$z_1(t) = e^{i\omega t}.$$

Se poate verifica imediat că $x_1(t) = \operatorname{Re}[z_1(t)]$, deoarece partea reală este întotdeauna egală cu cosinusul argumentului exponențialei complexe (fără i).

Pentru a doua oscilație o să transformăm $x_2(t) = \sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$, astfel vectorul este

$$z_2(t) = e^{i(\omega t - \pi/2)}.$$

Se poate verifica imediat că $x_2(t) = \operatorname{Re}[z_2(t)]$.

Folosind rezultatele de mai sus obținem

$$z(t) = A e^{i(\omega t + \varphi_1 + \beta)},$$

unde $\varphi_1 = 0$, $\beta = \pi/4$, iar $A = 2 \cos \beta = \sqrt{2}$, de unde

$$z(t) = \sqrt{2} e^{i(\omega t + \pi/4)},$$

iar

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] = \sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)$$

1.4 Oscilatorul amortizat

Să presupunem că avem un oscilator care este supus unei forțe de rezistență proporțională cu viteza $F_r = -c_1 v$, unde c_1 este o constantă pozitivă, ca în figura 1.13. Ne dorim să determinăm legea de mișcare pentru un astfel de oscilator. În acest caz L2 se scrie

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F + F_r, \quad (1.78)$$

unde forța elastică este dată de $F = -kx$, semnul '-' ne arată că pentru $x > 0$ forța este în sens negativ (adică este negativă) iar pentru $x < 0$ forța este în sens pozitiv (adică este pozitivă). Forța de rezistență este dată de $F_r = -c_1 v$, semnul '-' ne arată că forța de rezistență are sens opus vitezei. Dacă viteza este în sens pozitiv (pozitivă) forța este în sens negativ (adică este negativă) și invers. Astfel, L2 devine

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c_1 v. \quad (1.79)$$

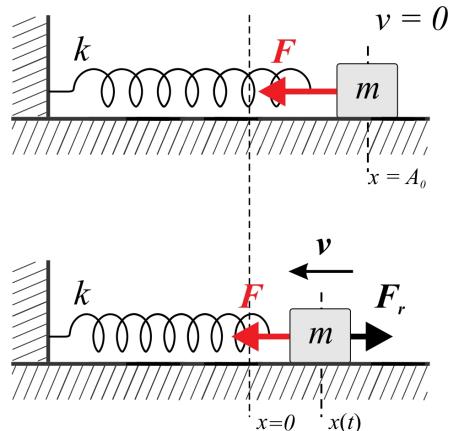


Figura 1.13: Un oscilator amortizat supus unei forțe de rezistență proporțională cu viteza $F_r = -c_1 v$.

Trecem toți termenii în partea stângă și folosim definiția vitezei $v = dx/dt$, astfel

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (1.80)$$

împărțim cu m și obținem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.81)$$

unde am notat $\gamma = c_1/m$ și, ca de obicei, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Pentru a rezolva această ecuație o să presupunem că soluția este partea reală a unui vector complex dat de

$$z(t) = A_0 e^{i(pt+\varphi_0)} \implies x(t) = \operatorname{Re}[z(t)], \quad (1.82)$$

unde A_0 și φ_0 sunt amplitudinea și faza inițială, cu ajutorul cărora o să ajustăm soluția la condițiile inițiale, iar p trebuie determinat. O să scriem L2 pentru vectorul complex

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0, \quad (1.83)$$

unde

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (ip)^2 z = -A_0 p^2 e^{i(pt+\varphi_0)} \quad (1.84)$$

și

$$\frac{dz}{dt} = (ip) z = ip A_0 e^{i(pt+\varphi_0)}. \quad (1.85)$$

Înlocuim derivelele 1.84 și 1.85 în relația 1.83 și obținem

$$(-p^2 + \gamma ip + \omega_0^2) A_0 e^{i(pt+\varphi_0)} = 0. \quad (1.86)$$

Pentru ca această ecuație să fie satisfăcută la orice moment de timp, trebuie ca

$$(-p^2 + \gamma ip + \omega_0^2) = 0. \quad (1.87)$$

Deoarece în ecuația 1.87 avem numărul complex i , ecuația nu poate să fie satisfăcută decât dacă p este un număr complex deoarece γ și ω_0 sunt mărimi fizice reale. Astfel p se poate scrie

$$p = \omega + \rho i, \quad (1.88)$$

unde ρ și ω sunt reale. Dacă înlocuim expresia 1.88 în 1.87 obținem

$$\rho^2 - \omega^2 - 2\rho\omega i + i\gamma(\omega + \rho i) + \omega_0^2 = 0. \quad (1.89)$$

Această ecuație este satisfăcută dacă partea reală și partea imaginară sunt fiecare egale cu zero. Partea imaginată este dată de

$$-2\rho\omega + \gamma\omega = 0, \quad (1.90)$$

de unde

$$\rho = \gamma/2. \quad (1.91)$$

Partea reală este dată de

$$\rho^2 - \omega^2 - \gamma\rho + \omega_0^2 = 0, \quad (1.92)$$

dacă înlocuim relația 1.91 în 1.92 obținem

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}, \quad (1.93)$$

astfel, dacă înlocuim 1.91 și 1.93 în soluția 1.82, aceasta devine

$$z(t) = A_0 e^{i(pt+\varphi_0)} = A_0 e^{i(\omega t + \rho i t + \varphi_0)} = A_0 e^{-\rho t} e^{i(\omega t + \varphi_0)}, \quad (1.94)$$

care se poate rescrie ca

$$z(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i(\omega t + \varphi_0)}. \quad (1.95)$$

Din punct de vedere geometric, soluția 1.95 este un vector care se rotește în planul complex cu viteza unghiulară ω și a cărui lungime scade exponential în timp după $e^{-\gamma t/2}$. Vârful vectorului complex se va mișca pe o traекторie sub formă de spirală, ca în figura 1.14. Ecuatația de mișcare o determinăm din $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$, de unde

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.96)$$

cu

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}, \text{ iar } \gamma = \frac{c_1}{m}. \quad (1.97)$$

Aici ω reprezintă frecvența unghiulară a oscilatorului amortizat, iar ω_0 ar reprezenta frecvența unghiulară a același oscilator dacă nu ar fi amortizat, care se mai numește și *frecvență naturală a oscilatorului*. Observăm că frecvența unghiulară a oscilatorului amortizat ω este mai mică decât a oscilatorului ideal ω_0 .

Oscilații slab amortizate

Observăm că ecuația de mișcare 1.96 este formată din produsul a două funcții: o funcție care scade exponential și o funcție care este periodică în timp. Deoarece parametrul $\gamma = c_1/m$ intervine în argumentul funcției exponențiale, acesta ne dictează cât de puternic sunt amortizate oscilațiile. Factorul γ este mic dacă c_1 este mic, adică dacă forța de rezistență este slabă, sau dacă m este mare, adică dacă sistemul are inerție mare. În figura 1.15 am reprezentat grafic ecuația de mișcare pentru $\varphi_0 = 0$ și

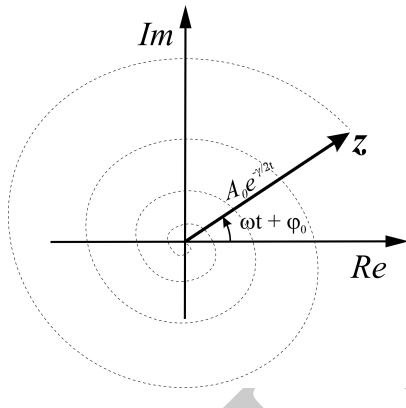


Figura 1.14: Soluția 1.95 este un vector care se rotește în planul complex cu viteza unghiulară ω și a cărui lungime scade exponential în timp ca $e^{-\gamma t/2}$.

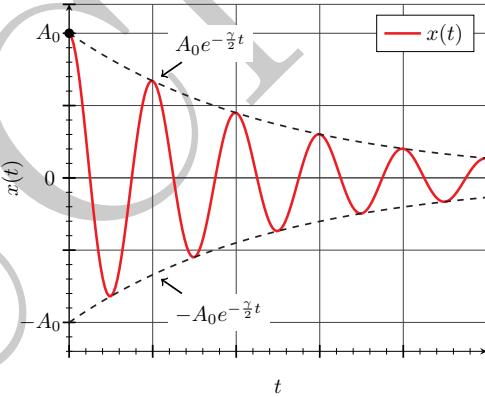


Figura 1.15: Oscilațiile slab amortizate sunt oscilații armonice simple cu amplitudine care scade exponential în timp.

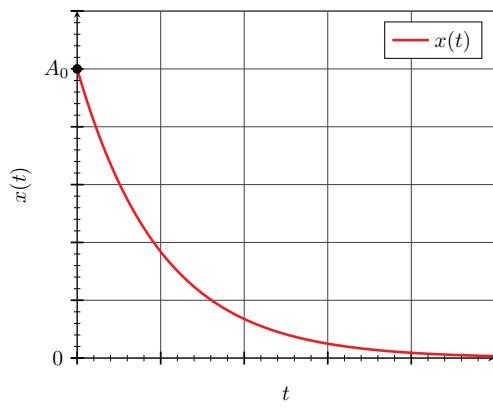


Figura 1.16: Elongația unui oscilator critic amortizat.

pentru γ relativ mic. Din grafic este clar că putem interpreta oscilațiile ca fiind oscilații armonice simple cu amplitudine care scade exponențial în timp:

$$\begin{cases} x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \\ A(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}. \end{cases} \quad (1.98)$$

Un caz special este cel al oscillatorului critic amortizat, pentru care $\gamma = 2\omega_0$. În acest caz frecvența unghiulară o să fie $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4 = \omega_0^2 - \omega_0^2 = 0$. Aceasta înseamnă că acest sistem nu o să mai oscileze. Dacă este scos din echilibru sistemul o să evolueze exponențial spre starea de echilibru, așa cum este reprezentat în figura 1.16. Un exemplu de astfel de sistem sunt suspensiile unui automobil. Este important ca suspensiile să fie critic amortizate astfel încât să se evite oscilațiile care pot duce la pierderea aderenței roțiilor la șosea.

Energia în cazul oscillatorului amortizat

În continuare o să discutăm numai despre oscilații slab amortizate, pentru care $\gamma \ll 2\omega_0$. Energia totală a unui oscillator este suma dintre energia cinetică și potentială

$$E = E_c + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (1.99)$$

În cazul oscillatorului ideal energia totală era constantă și egală cu $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_0^2 = \frac{1}{2}kA_0^2$. Pentru oscillatorul amortizat acest lucru nu mai este valabil, datorită forței de rezistență energia se va disipa. Ținând cont că amplitudinea oscilațiilor scade în timp putem să scriem energia totală ca

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2(t) = \frac{1}{2}kA_0^2e^{-\gamma t}, \quad (1.100)$$

sau

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t}, \quad (1.101)$$

unde

$$E_0 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_0^2 = \frac{1}{2}kA_0^2. \quad (1.102)$$

În graficul din figura 1.17 este reprezentată dependența de timp a energiei totale a oscillatorului slab amortizat pentru care am reprezentat legea de mișcare în figura 1.15. După cum se poate observa, și așa cum este indicat de relația 1.101, scăderea este exponențială. Din relația 1.98 puteți să observați că argumentul funcției exponențiale este de două ori mai mare decât pentru $A(t)$, astfel că energia totală are o scădere exponențială mai rapidă decât amplitudinea.

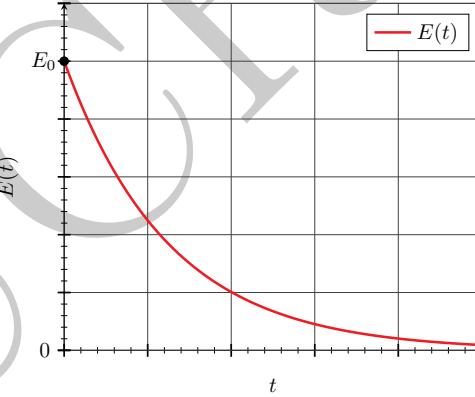


Figura 1.17: Dependența de timp a energiei totale a unui oscillator slab amortizat.

Factorul de calitate

Rata cu care pierde energie un oscilator este cel mai bine descrisă de factorul de calitate Q . Acesta este definit ca 2π ori energia înmagazinată de oscilator per energia pierdută de oscilator într-o perioadă

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}, \quad (1.103)$$

unde

$$\Delta E = E(t+T) - E(t) = E_0 e^{-\gamma(t+T)} - E_0 e^{-\gamma t} = E_0 e^{-\gamma t} (e^{-\gamma T} - 1). \quad (1.104)$$

Deoarece exponențiala din paranteză este subunitară modulul devine

$$|\Delta E| = E_0 e^{-\gamma t} (1 - e^{-\gamma T}), \quad (1.105)$$

iar dacă folosim $T = \frac{2\pi}{\omega}$ obținem

$$|\Delta E| = E_0 e^{-\gamma t} \left(1 - e^{-\frac{2\pi\gamma}{\omega}}\right). \quad (1.106)$$

Oscilațiile sunt slab amortizate, adică $\gamma \ll \omega_0$, atunci deoarece

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}\right), \quad (1.107)$$

putem aproxima $\omega \approx \omega_0$, iar argumentul exponentialei $e^{-\frac{2\pi\gamma}{\omega}}$ o să fie mic $\frac{2\pi\gamma}{\omega_0} \ll 1$ și exponențiala se poate aproxima folosind $e^{\pm\alpha} \simeq 1 \pm \alpha$, pentru $\alpha \ll 1$. Astfel $|\Delta E|$ o să fie dat de

$$|\Delta E| \simeq E_0 e^{-\gamma t} \frac{2\pi\gamma}{\omega_0}, \quad (1.108)$$

iar Q se va putea scrie ca

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (1.109)$$

Factorul de calitate este o mărime adimensională și trebuie înțeleasă în felul următor: cu cât este mai mare cu atât oscilatorul este mai aproape de ideal. Pentru un oscilator ideal $\gamma = 0$, iar $Q \rightarrow \infty$. În tabelul de mai jos puteți observa valoarea lui Q pentru diferiți oscilatori.

Oscilator	Q
Pământul (pentru cutremure)	$250 - 1400$
Coardă de pian	3000
Oscilator de quart	10^4
Atom	10^7
Stea neutronică	10^{12}
Nucleu de Fe^{57}	3×10^{12}

Exemplul 1.4. Frecvența unghiulară a unui oscilator amortizat este jumătate din frecvența unghiulară a aceluiași oscilator dacă ar fi ideal. Determinați raportul dintre două maxime succesive de oscilație.

Legea de mișcare este dată de

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0).$$

O să avem maxime de oscilație când cosinusul este maxim, adică 1. Dacă la momentul t_0 avem un maxim de oscilație, atunci

$$x(t_0) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t_0},$$

următorul maxim o să fie peste o perioadă, deci la $t_0 + T$

$$x(t_0 + T) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(t_0+T)},$$

raportul dintre cele două maxime este

$$\frac{x(t_0 + T)}{x(t_0)} = \frac{A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(t_0+T)}}{A_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t_0}} = e^{-\frac{\gamma T}{2}}$$

Pentru a determina acest raport trebuie să găsim γ și T . Din enunț știm că

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_0,$$

dar

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4},$$

de unde

$$\gamma = \sqrt{3}\omega,$$

și ținând cont de

$$T = 2\pi/\omega_0$$

obținem

$$\frac{\gamma T}{2} = 10.88$$

atunci

$$\frac{x(t_0 + T)}{x(t_0)} = e^{-10.88} = 1.88 \times 10^{-5},$$

ceea ce ne arată că oscilatorul este puternic amortizat.

Exemplul 1.5. Viteza limită pentru o mină de oină la căderea prin aer este de 30 m/s. Folosind această mină o să construim un pendul simplu de lungime 1 m. Determinați raportul dintre două maxime succesive de oscilație. Cum se modifică perioada de oscilație a pendulului față de cazul în care pendulul ar fi ideal?

În secțiunea ?? am văzut că în cazul unui corp care cade prin aer și pentru care forța de rezistență din partea aerului (forța de vâscozitate) depinde liniar de viteza putem determina

viteza limită folosind relația

$$v_{lim} = \frac{mg}{c_1}$$

aici c_1 este coeficientul forței de vâscozitate. Astfel, putem să determinăm factorul γ ce intervine în ecuația de mișcare a oscillatorului amortizat ca

$$\gamma = \frac{c_1}{m} = \frac{mg/v_{lim}}{m} = \frac{g}{v_{lim}} = \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{30 \text{ m/s}} = 0.327 \text{ s}^{-1}$$

Din problema precedentă știm că raportul dintre două maxime succesive este

$$\frac{x(t_0 + T)}{x(t_0)} = e^{-\frac{\gamma T}{2}},$$

de unde observăm că pentru a determina raportul trebuie să găsim perioada pendulului. Perioada se va determina folosind frecvența unghiulară. Știm că pentru un oscillator amortizat

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4},$$

iar pentru pendul $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, de unde

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{1 \text{ m}} - 2.67 \times 10^{-2} \text{ s}^{-2}} = 3.127 \text{ s}^{-1},$$

iar perioada

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.009 \text{ s},$$

de aici raportul între două maxime succesive este

$$\frac{x(t_0 + T)}{x(t_0)} = e^{-\frac{\gamma T}{2}} = e^{-0.328} = 0.72,$$

ceea ce ne indică faptul că oscilațiile sunt destul de slab amortizate.

Perioada pendulului ideal este

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2.006 \text{ s}.$$

Observați că efectul frecării cu aerul pentru perioada de oscilație este foarte mic

$$T - T_0 = 0.003 \text{ s}$$

Este de menționat că aici am simplificat în oarecare măsură efectul frecării cu aerul. Din câte știm noi, pentru un astfel de corp forța de vâscozitate este mai degrabă proporțională cu pătratul vitezei $-c_2 v^2$ decât cu viteza $-c_1 v$.

Exemplul 1.6. Un corp de masă $m = 0.5$ mg atașat de un resort de $k = 0.05$ N/m oscilează într-un lichid. Forța de vâscozitate este $F_r = -c_1 v$. Observăm că amplitudinea de oscilație scade la jumătate după 40 de secunde. Care este factorul de calitate al oscilatorului? Care este valoarea constantei c_1 ? Câte oscilații executa corpul în cele 40 de secunde?

Amplitudinea oscilațiilor este dată de

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

după 40s amplitudinea o să fie

$$A(t + 40s) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}(t+40s)},$$

de unde

$$\frac{A(t + 40s)}{A(t)} = e^{-\frac{\gamma}{2}40} = e^{-20\gamma} = \frac{1}{2} \implies \gamma = 0.0347 \text{ s}^{-1},$$

iar factorul de calitate

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\gamma} = 2882.$$

1.5 Oscilatorul întreținut

Putem să întreținem oscilațiile unui oscilator amortizat prin aplicarea unei forțe externe periodice. Să presupunem că asupra oscilatorului amortizat mai acționează o forță de întreținere a oscilațiilor, tip $F_0 \cos \omega t$, ca în figura 1.18. Atunci L2 se va scrie

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c_1 v + F_0 \cos \omega t. \quad (1.110)$$

Împărțim ecuația la masă și mutăm termenii cu ' $-$ ' în partea stângă, atunci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c_1}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (1.111)$$

Cu notăriile obișnuite $\gamma = c_1/m$ și $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ecuația devine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (1.112)$$

iar în formalismul exponențial complex relația de mai sus se scrie ca

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (1.113)$$

Putem să găsim foarte ușor soluția acestei ecuații folosind următorul raționament. În absența forței externe $F_0 \cos \omega t$, după un timp suficient de lung oscilațiile se vor amortiza și oscilatorul se va opri. Dacă am avea forță externă $F_0 \cos \omega t$ și nu am avea forță elastică și forță de rezistență, corpul

nostru ar executa o mișcare de oscilație guvernată de forță externă. Din acest punct de vedere mișcarea corpului se poate considera ca fiind o suprapunere de două mișcări, o oscilație guvernată de forță externă plus o oscilație amortizată datorată forței elastice și forței de rezistență. Deoarece după un timp suficient de lung aceasta din urmă se va atenua complet, putem considera soluția ca fiind de forma

$$z(t) = Ae^{i(\omega t - \delta)}, \quad (1.114)$$

cu

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)], \quad (1.115)$$

unde A și δ o să fie dependente de forță externă, iar ω este frecvența unghiulară a forței externe. Observați că în loc de φ_0 am pus $-\delta$. Aceasta o să ne simplifice calculele, după cum o să vedem mai jos. Calculăm cele două derivate ca:

$$\frac{dz}{dt} = (i\omega) z = i\omega A e^{i(\omega t - \delta)}. \quad (1.116)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (i\omega)^2 z = -\omega^2 A e^{i(\omega t - \delta)}, \quad (1.117)$$

Dacă înlocuim în ecuația diferențială 1.113 o să obținem

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) A e^{i(\omega t - \delta)} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}, \quad (1.118)$$

sau dacă grupăm termenii și simplificăm cu $e^{i\omega t}$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A + i\gamma\omega A = \frac{F_0}{m} e^{i\omega\delta}, \quad (1.119)$$

Ecuația 1.119 sus se poate interpreta foarte simplu dacă o reprezentăm în spațiul complex, ca în figura 1.19. Termenul $(\omega_0^2 - \omega^2) A$ este real, deci reprezintă un vector pe axa reală de lungime $(\omega_0^2 - \omega^2) A$. Termenul $i\gamma\omega A$ este pur imaginar, deci reprezintă un vector pe axa imaginară de lungime $i\gamma\omega A$. Suma acestor doi vectori este egală cu vectorul $(F_0/m) e^{i\omega\delta}$ care este un vector de lungime F_0/m rotit cu unghiul δ față de axa reală. Aceasta ne indică faptul că unghiul δ este defazajul dintre forță externă și elongația oscilatorului. Din figura 1.19 vedem imediat că

$$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 = (\gamma\omega A)^2 + ((\omega_0^2 - \omega^2) A)^2, \quad (1.120)$$

de unde

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2\right]^{1/2}}. \quad (1.121)$$

Tot din figura 1.19 mai observăm că

$$\tan \delta(\omega) = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (1.122)$$

atunci defazajul este dat de

$$\delta(\omega) = \tan^{-1} \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (1.123)$$

În figura 1.20 sunt reprezentate grafic amplitudinea și defazajul în funcție de frecvență unghiulară a forței externe. Vedem că pentru o anumită frecvență unghiulară a forței externe ω_m , apropiată de ω_0 , amplitudinea are un maxim de oscilație.

Se mai poate observa că dacă $\omega = 0$ atunci

$$A(0) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k},$$

ceea ce este echivalent cu alungirea resortului produsă de o forță constantă. Dacă $\omega \rightarrow \infty$ atunci

$$A(\infty) \rightarrow 0,$$

adică pentru frecvențe ale forței externe foarte mari relativ la frecvența naturală a sistemului ω_0 , forța externă nu poate produce oscilații.

Din graficul defazajului δ dintre forța externă și elongația oscillatorului, observăm că acesta crește continuu de la 0 la 180° , iar dacă $\omega = \omega_0$ defazajul este $\pi/2$.

La <https://drive.matlab.com/sharing/bd32327b-31d1-4e22-9214-445d0e6c0494> puteți să vedeați o reprezentare în timp real a amplitudinii și elongației unui oscilator în funcție de frecvență unghiulară a forței externe..

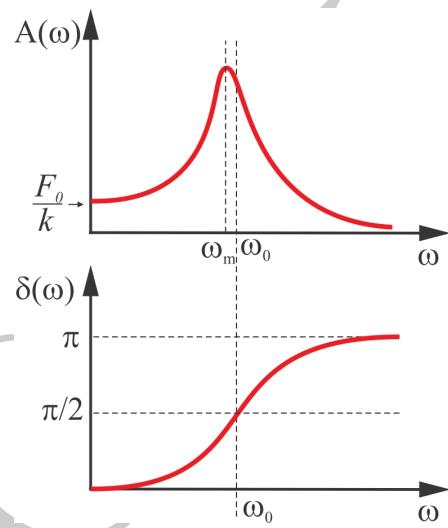


Figura 1.20: Amplitudinea și defazajul în funcție de frecvență forței externe.

1.6 Rezonanță

În cazul în care forța externă are o frecvență unghiulară ω pentru care amplitudinea de oscilație să aibă un maxim, spunem că se produce fenomenul de rezonanță. Să presupunem că avem un oscilator slab amortizat pentru care $\gamma \ll 2\omega_0$ și pe care îl supunem acțiunii unei forțe externe $F_0 \cos \omega t$. Se poate arăta că maximul amplitudinii de oscilație (exercițiul 1.25) obținut pentru $\omega = \omega_m$ este dat de

$$A(\omega_m) = \frac{F_0/m}{\gamma [\omega_0^2 - \gamma^2/4]^{1/2}}. \quad (1.124)$$

În limita $\gamma \ll 2\omega_0$, în relația de mai sus se poate ignora al doilea termen din paranteză relativ la primul, iar relația o să devină

$$A(\omega_m) \simeq \frac{F_0/m}{\gamma\omega_0}. \quad (1.125)$$

Dacă frecvența forței externe este egală cu cea naturală a sistemului $\omega = \omega_0$, atunci amplitudinea de oscilație este

$$A(\omega_0) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega_0)^2]^{1/2}} = \frac{F_0/m}{\gamma\omega_0}. \quad (1.126)$$

Aceasta înseamnă că în limita $\gamma \ll 2\omega_0 \rightarrow A(\omega_0) = A(\omega_m)$, adică maximul amplitudinii de oscilație, sau rezonanță, se obține pentru o frecvență a forței externe egală cu frecvența naturală de oscilație a sistemului $\omega = \omega_0$.

Calitatea rezonanței

Să considerăm funcția reprezentată în figura 1.21 care ne dă amplitudinea în funcție de frecvența forței externe

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}}, \quad (1.127)$$

și să presupunem că frecvența forței externe ω nu este foarte diferită de frecvența naturală a oscilatorului ω_0 , adică suntem în apropierea frecvenței de rezonanță. O să facem următoarele aproximări:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega), \quad (1.128)$$

$$(\gamma\omega)^2 \simeq (\gamma\omega_0)^2. \quad (1.129)$$

De aici putem scrie

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2]^{1/2}} \simeq \frac{F_0/m}{2\omega_0[(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}]^{1/2}} = \frac{A(\omega_0)\gamma}{2\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}}. \quad (1.130)$$

Din ecuația de mai sus observăm că dacă $|\omega_0 - \omega| = \gamma/2$ sau, echivalent, dacă

$$\omega = \omega_0 \pm \gamma/2, \quad (1.131)$$

atunci

$$A(\omega) = \frac{A(\omega_0)}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot A(\omega_0), \quad (1.132)$$

sau echivalent

$$A(\omega)^2 = 0.5 \cdot A(\omega_0)^2. \quad (1.133)$$

Ceea ce înseamnă că lărgimea curbei de rezonanță $\Delta\omega$ măsurată la 0.707 din înălțimea de rezonanță $A(\omega_0)$ este egală cu factorul de amortizare γ ,

$$\Delta\omega = \gamma \quad (1.134)$$

Factorul de calitate Q , ce caracterizează rata cu care pierde energie oscilatorul amortizat characterizează și curba de rezonanță. Deoarece pentru oscilatorul slab amortizat $Q = \omega_0/\gamma$ putem scrie

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad (1.135)$$

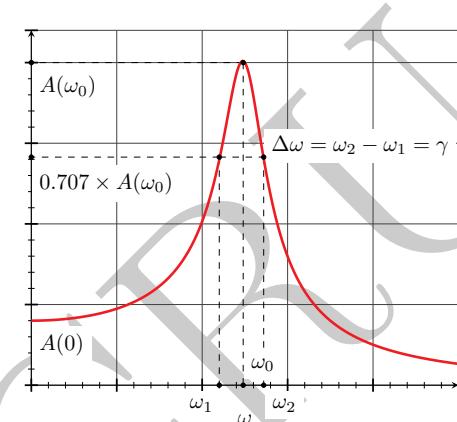


Figura 1.21: Amplitudinea de oscilație în funcție de frecvența forței externe. Sunt indicate principalele caracteristici ale curbei de rezonanță.

cu cât factorul de calitate este mai mare cu atât curba de rezonanță este mai îngustă ($\Delta\omega$ este mai mic). Mai putem observa din

$$A(\omega_0) = \frac{F_0/m}{\gamma\omega_0},$$

și din

$$A(\omega \rightarrow 0) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2},$$

că

$$Q = \frac{A(\omega_0)}{A(\omega \rightarrow 0)},$$

adică factorul de calitate ne dă și raportul dintre amplitudinea de rezonanță și amplitudinea când $\omega \rightarrow 0$. Vă aduc aminte că $A(\omega \rightarrow 0)$ corespunde alungirii resortului dacă forță aplicată ar fi constantă F_0 și egală cu amplitudinea forței $F_0 \cos \omega t$. Valori de ordinul zecilor, sutelor sau chiar mii nu sunt atipice. Aceasta înseamnă că o forță relativ mică aplicată la rezonanță (cu frecvență egală cu frecvența naturală a sistemului oscilant) poate să creeze un răspuns enorm.

Urmărind linkul https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU&ab_channel=BritishPath%C3%A9 puteți să vedeați un videoclip cu distrugerea unui pod din cauza rezonanței produsă de vântul care bate cu frecvența apropiată de frecvența naturală a podului.

Defazajul la rezonanță

În graficul din figura 1.22 puteți să observați dependența de frecvență forței externe a defazajului dintre forță și elongație (deformarea resortului relativ la valoarea de echilibru) pentru oscilatorul care are curba de rezonanță din figura 1.21. Cel mai interesant este faptul că la rezonanță defazajul este $\pi/2$. Cum poate fi interpretat acest lucru? În primul rând știm că elongația este

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)], \quad (1.136)$$

unde

$$z(t) = A e^{i(\omega t - \delta)}, \quad (1.137)$$

adică

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta), \quad (1.138)$$

unde A și δ sunt funcții de ω și sunt date de relațiile de mai sus. Putem să determinăm viteza oscilatorului ca

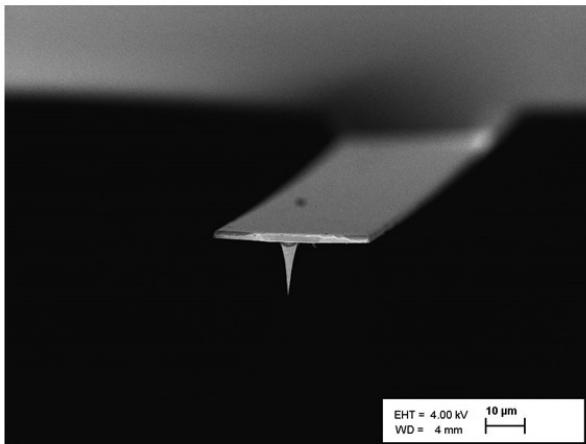
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - \delta). \quad (1.139)$$

Relația se poate modifica folosind identități trigonometrice și să obținem

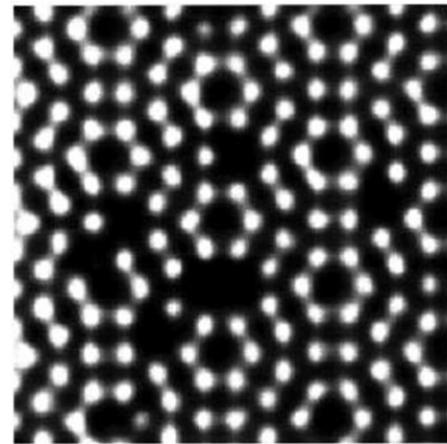
$$v(t) = A\omega \sin(-\omega t + \delta) = A\omega \cos\left(\omega t - \delta + \frac{\pi}{2}\right), \quad (1.140)$$

ceea ce ne indică faptul că elongația $x(t)$ este defazată cu $\pi/2$ față de viteza $v(t)$. De aici rezultă că la rezonanță forța externă și viteza oscilatorului sunt în fază. Se poate înțelege cu ușurință de ce trebuie ca aceasta să se întâpte. Să presupunem că împingeți o persoană pe un leagăn. În mod cert, cine a făcut asta știe că cel mai bine e să împingi leagănul pe direcția pe care se deplasează, adică trebuie să aplici forță în fază cu viteza. De fapt, o să vedem ceva mai jos că în mod ideal leagănul trebuie împins pe direcția pe care se deplasează, chiar în momentul când trece prin poziția de echilibru (adică când elongația este zero și viteza este maximă).

Exemplul 1.7. Un microscop de forță atomică (MFA) este un instrument cu care se poate determina topografia unei suprafete cu rezoluție extrem de ridicată, la nivel atomic. În principiu, microscopul este format dintr-o lamelă de Si, care se mai numește cantilever, de dimensiuni micrometrice și care are un vârf de dimensiuni nanometrice. Mai jos puteți să vedeați o imagine de microscopie electronică a unui astfel de vârf de MFA. Vârful este pus în oscilație la frecvența de rezonanță prin intermediul unei forței externe și adus în apropierea unei suprafete. Datorită interacțiunii dintre vârf și atomii din suprafață, frecvența de rezonanță se va modifica și astfel se poate cuantifica interacțiunea dintre vârf și atomii din suprafață. Prin scanarea întregii suprafete se poate determina o hartă a topografiei suprafetei. În figura de mai sus să observați în partea stângă cantileverul MFA, iar în partea dreaptă o imagine de MFA a unei suprafete de Si cu rezoluție atomică, petele albe sunt atomii de Si.



Imagine luată de pe scan-sens.de



Imagine luată din Physics B Condensed Matter, 93, 267

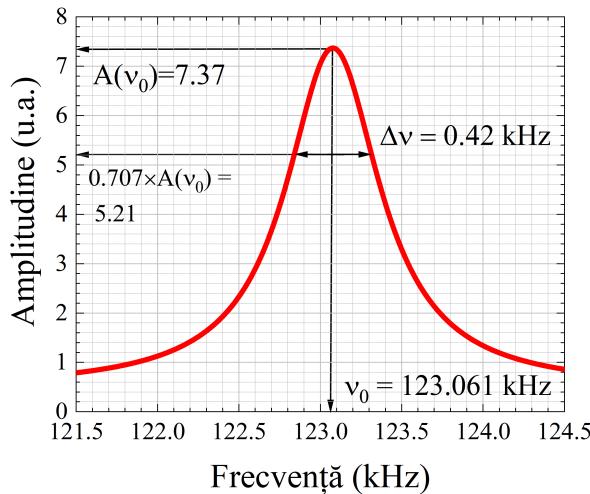
În graficul de mai jos puteți să observați curba de rezonanță în aer pentru un cantilever de MFA tipic. Determinați coeficientul forței de rezistență și factorul de calitate al rezonatorului. Dacă amplitudinea la rezonanță este de 20 de nm, care este constanta elastică a cantileverului dacă amplitudinea forței externe este 2.75 nN?

Din grafic observăm că

$$\omega_0 = 2\pi \times 123.061 \text{ kHz} = 7.73 \times 10^5 \text{ rad/s.}$$

iar

$$\Delta\omega = 2\pi \times 0.42 \text{ kHz} \times 10^3 \text{ rad/s,}$$



de unde

$$\gamma = 2.64 \times 10^3 \text{ rad/s},$$

iar

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 293.$$

Deoarece

$$Q = \frac{A(\omega_0)}{A(\omega \rightarrow 0)},$$

obținem

$$A(\omega \rightarrow 0) = \frac{A(\omega_0)}{Q} = \frac{20 \text{ nm}}{293} = 6.82 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

Stim că

$$F_0 = kA(\omega \rightarrow 0),$$

de unde

$$k = \frac{F_0}{A(\omega \rightarrow 0)} = 40.3 \text{ N/m.}$$

Cum putem cântări un virus? Să presupunem că de vârful cantileverului s-a lipit un virus. Din acest motiv masa cantileverului crește, iar frecvența de rezonanță o să scadă. Măsurările de frecvență în circuite electronice sunt extrem de precise. Dacă determinăm o scădere a frecvenței unghiulare de rezonanță de la 772294.74 rad/s la 772294.68 rad/s, care este masa virusului?

Puterea transferată la rezonanță

Pentru a întreține rezonanța, forța externă trebuie să transmită oscilatorului energia disipată de forța de rezistență, astfel încât energia totală să rămână constantă. Energia este disipată de forța de rezistență prin intermediul lucrului mecanic efectuat de aceasta. Puterea instantanee transmisă

de forța externă se poate calcula ca pentru orice alt sistem dinamic ca forța înmulțită cu viteza:

$$P = \frac{dL}{dt} = F \frac{dx}{dt} = Fv. \quad (1.141)$$

Astfel, puterea transmisă de forță externă, $F_0 \cos \omega t$, o să fie

$$P_{trans} = (F_0 \cos \omega t)v. \quad (1.142)$$

Deoarece

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t - \delta), \quad (1.143)$$

puterea transmisă de forță externă este

$$P_{trans} = -F_0 A \omega \cos \omega t \sin(\omega t - \delta). \quad (1.144)$$

Putem să transformăm relația de mai sus dacă dezvoltăm sinusul

$$P_{trans} = -F_0 A \omega \cos \omega t (\sin \omega t \cos \delta - \cos \omega t \sin \delta), \quad (1.145)$$

iar dacă desfacem paranteza obținem

$$P_{trans} = -(F_0 A \omega \cos \delta) \cos \omega t \sin \omega t + (F_0 A \omega \sin \delta) \cos^2 \omega t. \quad (1.146)$$

La rezonanță, când $\omega = \omega_0$ și $\delta = \pi/2$ și relația de mai sus devine

$$P_{trans, rez} = F_0 A \omega_0 \cos^2 \omega_0 t. \quad (1.147)$$

În imaginea din figura 1.23 alăturată sunt reprezentate elongația, viteza și puterea calculată cu relația de mai sus, pentru un oscilator întreținut la rezonanță ($\omega = \omega_0$). Se poate observa că transferul de putere este maxim când viteza este maximă și elongația este zero. După cum am discutat mai sus, în acest moment defazajul dintre forță externă și viteza este zero.

Putem să calculăm o valoare medie pe o perioadă a puterii transmise ca

$$\langle P_{trans} \rangle = \langle -(F_0 A \omega \cos \delta) \cos \omega t \sin \omega t + (F_0 A \omega \sin \delta) \cos^2 \omega t \rangle, \quad (1.148)$$

care se poate scrie și

$$\langle P_{trans} \rangle = -(F_0 A \omega \cos \delta) \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle + (F_0 A \omega \sin \delta) \langle \cos^2 \omega t \rangle, \quad (1.149)$$

unde

$$\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = \langle \frac{1}{2} \sin 2\omega t \rangle = 0, \quad (1.150)$$

iar

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}, \quad (1.151)$$

astfel că

$$\langle P_{trans} \rangle = \frac{1}{2}(F_0 A \omega \sin \delta) \quad (1.152)$$

Observăm că, puterea medie transferată este maximă dacă $\delta = \frac{\pi}{2}$, adică la rezonanță.

Folosind aceleasi aproximații ca în secțiunea 1.6, putem să arătăm că puterea medie transferată unui oscilator poate fi scrisă și ca

$$\langle P_{trans} \rangle = \frac{\gamma F_0^2}{2m} \frac{1}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (1.153)$$

În graficul din figura 1.24 este reprezentată puterea medie transferată unui oscilator (relația 1.153) în funcție de frecvența forței externe, pentru oscilatorul din secțiunea 1.6. Se poate arăta simplu că lărgimea curbei $\Delta\omega$ măsurată la jumătate din înălțimea de rezonanță $P(\omega_0)$ este egală cu factorul de amortizare γ . Observăm că unui oscilator îi se poate transfera putere numai într-o bandă relativ îngustă în jurul frecvenței naturale a acestuia.

Un exemplu relativ ușor de înțeles este radioul. Cu toate că există foarte multe stații radio care emit pe frecvențe diferite, aparatul de receptie radio se poate regla astfel încât să receptioneze o singură stație. Aceasta se realizează prin modificarea frecvenței de oscilație naturală a unui circuit electric intern al aparatului până când aceasta coincide cu frecvența la care emite stația radio. În acest moment aparatul radio îi să absoarbe putere numai de la stația la care este acordat și îi să receptioneze emisia numai de la această stație.

Un alt exemplu de rezonanță este rezonanța magnetică nucleară, procesul rezonant prin care momentele magnetice ale nucleelor atomice (echivalente cu magneți mici), pot fi inversate într-un câmp magnetic. Momentul magnetic nuclear poate avea doar câteva orientări posibile discrete relativ la un câmp magnetic aplicat într-o direcție dată. De exemplu, momentul magnetic al unui proton are doar două orientări posibile, una de-a lungul câmpului și cealaltă în sens opus. Există o diferență de energie bine definită între aceste două orientări, corespunzătoare lucrului mecanic efectuat împotriva forțelor magnetice în rotirea momentului magnetic nuclear dintr-o poziție în cealaltă. Această

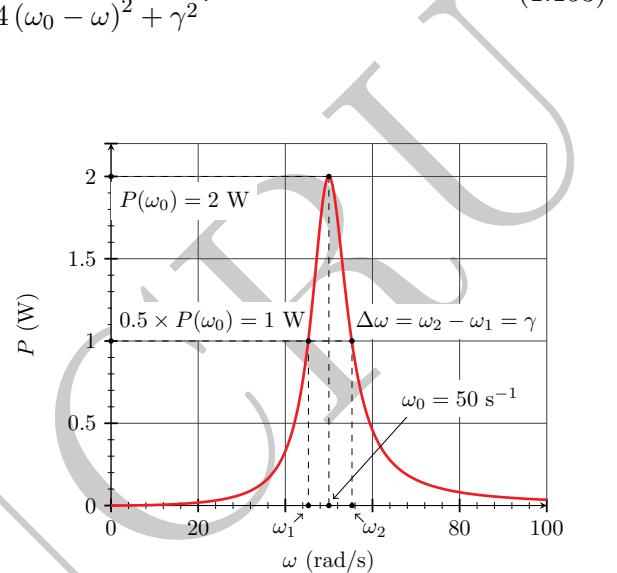


Figura 1.24: Puterea medie transferată unui oscilator (relația 1.153) în funcție de frecvența forței externe, pentru oscilatorul din secțiunea 1.6.

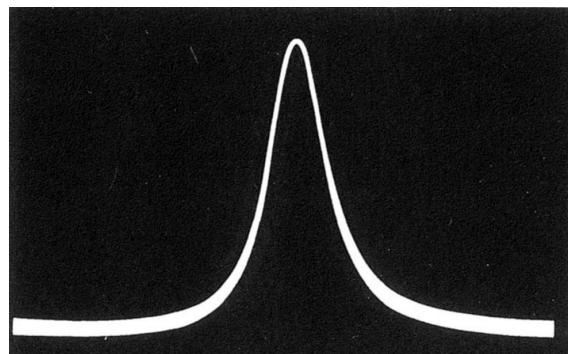


Figura 1.25: Cura de rezonanță magnetică nucleară pentru protonii din apă.

diferență de energie este direct proporțională cu intensitatea câmpului magnetic în care se află nucleul. Dacă transmitem sistemului fotoni de energie (sau frecvență) corespunzătoare acestei diferențe, aceștia pot provoca momentele magnetice nucleare să se treacă de la o orientare la alta. De exemplu, pentru protoni într-un câmp de 0.5 T, frecvența de rezonanță este de 21 MHz. Dacă suficiente momente magnetice nucleare își schimbă orientarea, acestea pot produce prin inducție electromagnetică un semnal care este ușor detectabil. Pe lângă aplicațiile științifice, rezonanța magnetică nucleară are o importanță deosebită și în medicină. În imaginea din figura 1.25 puteți să vedeați curba de rezonanță magnetică nucleară pentru protonii din apă. Pe verticală avem puterea absorbită de specimen, iar pe axa orizontală avem câmpul magnetic. Imaginea este luată din "F. Bloch, The principle of nuclear induction, Nobel Lectures, Physics 1942-1962, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1964".



Exerciții și probleme

1.1. Avem un vector z definit de ecuația $z = z_1 \cdot z_2$, unde $z_1 = a + ib$ și $z_2 = c + id$. Arătați că (a) lungimea lui z este egală cu produsul lungimilor lui z_1 și z_2 . (b) Arătați că unghiul dintre z și axa reală este suma unghiurilor pe care le fac z_1 și z_2 cu axa reală.

1.2. Arătați că înmulțirea oricărui vector complex z cu $e^{i\theta}$ este echivalentă, în termeni geometrici, cu rotirea vectorului z cu un unghi θ fără a modifica lungimea acestuia.

1.3. Dacă $z = Ae^{i\theta}$, arătați că $dz = izd\theta$, reprezentați vectorii z și dz și explicați ce însemnatate geometrică au aceștia.

1.4. Dacă derivăm relația $Ae^{i\theta}$ în funcție de θ , nu facem altceva decât să o înmulțim cu i , adică:

$$\frac{d}{d\theta} (Ae^{i\theta}) = iAe^{i\theta}.$$

Arătați că aceasta este adevărat și în reprezentarea armonică: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

1.5. Folosind reprezentarea exponențială complexă $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, verificați că: (a) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$; (b) $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$; (c) $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$.

1.6. Un corp atașat de un resort oscilează cu o amplitudine de 5 cm și o frecvență de 1 Hz. La momentul $t = 0$ corpul se află în poziția $x = 0$. (a) Scrieți ecuațiile care ne dău poziția, viteza și accelerația corpului atât în formă armonică cât și exponențială. (b) Care este poziția, viteza și accelerația la $t = 2.67$ s (considerăm oscilatorul ca fiind ideal). [R: 4.33 cm; 15.7 cm/s; -170.9 cm/s²]

1.7. Un corp atașat de un resort efectuează o mișcare de oscilație după legea $x = A \cos(\omega t + \delta)$, unde $A = 0.32$ m. La momentul $t = 0$, corpul se află în poziția $x = -0.07$ m și are viteza de $v = -2$ m/s. Energia totală este 5.6 J. Determinați (a) faza inițială, (b) frecvența, (c) constanta resortului și (d) masa corpului (considerăm oscilatorul ca fiind ideal). [R: 1.79 rad; 1.01 Hz; 109 N/m; 2.7 kg]

1.8. Două resorturi de constante k_1 și k_2 , sunt așezate vertical și susțin un corp de masă m . Arătați că frecvența unghiulară a oscilației este $\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)^{1/2}$ dacă resorturile sunt legate în paralel și $\left(\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}\right)^{1/2}$ dacă resorturile sunt legate în serie (considerăm oscilatorul ca fiind ideal).

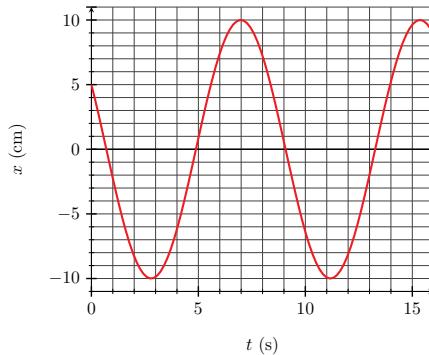
1.9. Un corp de masă $m = 2$ kg oscilează pe o suprafață orizontală, fără frecare, atașat de un resort având $k = 300$ N/m. La momentul $t = 0$, resortul nu este deformat, iar corpul se deplasează cu viteza de 12 m/s pe axa Ox în sens negativ. Scrieți ecuațiile care ne dău poziția, viteza și accelerația corpului atât în formă armonică cât și exponențială.

1.10. O masă de 1.5 kg oscilează la capătul unui resort conform ecuației:

$$x(t) = 7.4 \cos [(4.16s - 1)t - 2.42] \text{ [cm].}$$

Determinați: (a) Perioada mișării; (b) Constanta elastică a resortului; (c) Forța maximă ce acționează asupra corpului; (d) Viteza maximă a corpului; (e) Poziția, viteza și accelerația corpului la momentul $t = 1$ s; (f) Forța ce acționează asupra corpului la acel moment de timp.

1.11. Elongația unui oscilator armonic simplu în funcție de timp este reprezentată în figura de mai jos. Scrieți ecuațiile care ne dă poziția, viteza și accelerația corpului atât în formă armonică cât și exponențială.



1.12. Următoarea metodă a fost folosită pentru a cântări astronauți în spațiu. Un scaun de masă $m = 42.5$ kg este atașat de un resort și este lăsat să oscileze. Acesta are nevoie de 1.3 s pentru a efectua o oscilație completă. Împreună cu un astronaut așezat pe scaun, timpul necesar efectuării unei oscilații complete este de $t = 2.54$ s. Care este masa astronautului?

1.13. O mașină de 950 kg lovește un resort imens cu viteza de $v = 25$ m/s, comprimându-l cu 4 m. (a) Care este constanta resortului? (b) Cât timp este mașina în contact cu resortul înainte de a fi respinsă în sens invers? [R: 3.7×10^4 N/m; 0.5 s]

1.14. Calculați energia cinetică și energia potențială medie pe o perioadă pentru un oscilator armonic simplu și comparați expresiile obținute cu expresia energiei totale. Țineți cont de faptul că valoarea medie pe o perioadă a pătratului funcțiilor armonice simple este $1/2$.

1.15. Să presupunem că avem trei oscilații armonice simple date de $x_1(t) = \sin \omega t$, $x_2(t) = -2 \cos(\omega t - \pi/4)$ și $x_3(t) = \cos \omega t$ care se compun. Scrieți oscilația rezultantă sub forma $x(t) = Re[z(t)]$.

1.16. În cazul unui oscilator amortizat determinați, în funcție de b și m , timpul după care amplitudinea oscilațiilor scade la jumătate.

1.17. Arătați că raportul dintre două maxime succeseive ale elongației unui oscilator armonic amortizat este constant. (Indicație: $x = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$, iar maximele se obțin atunci când cosinus este 1. Pentru simplitate, considerați $\varphi = 0$).

1.18. Frecvența unghiulară a unui oscilator armonic amortizat este de 628 rad/s, iar raportul amplitudinilor dintre două maxime succeseive este $1/2$. Care este frecvența corespunzătoare oscilatorului ideal? [R: 632 rad/s]

1.19. Calculați viteza oscilatorului amortizat. Pentru a simplifica relația finală încercați să folosiți aproximări rezonabile pentru un oscilator slab amortizat.

1.20. Pentru un oscilator slab amortizat, calculați după câte perioade de oscilație energia totală scade la jumătate.

1.21. Pentru un oscilator amortizat și întreținut, supus unei forțe de rezistență $F_r = -bv$, arătați că amplitudinea de oscilație are un maxim la frecvența unghiulară $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{(2m^2)}}$. La ce frecvență unghiulară viteza are amplitudine maximă?

1.22. Rezolvați problema oscilatorului amortizat întreținut dacă forța externă este de tipul $F = F_0 \sin \omega t$.

1.23. Un corp de masă $m = 0.2$ kg este atașat de un resort de constantă $k = 80$ N/m. Corpul este supus și unei forțe de frecare de tip vâscos dată de $F_r = -bv$, unde $b = 0.8$ Ns/m. (a) Scrieți ecuația diferențială de mișcare pentru acest corp și găsiți perioada de oscilație. (b) Corpul este supus acțiunii unei forțe externe $F = F_0 \sin \omega t$, unde $F_0 = 2$ N, iar $\omega = 30$ rad/s. Care este perioada de oscilație și amplitudinea de oscilație a corpului?

1.24. Considerați un oscilator amortizat pentru care $k = 32$ N/m, $m = 0.5$ kg, iar $b = 1$ Ns/m (coeficientul forței de rezistență). (a) Găsiți soluția ecuației diferențiale de mișcare dacă $x(0) = 2$ m, iar $v(0) = 0$ m/s. (a) Adăugați și o forță externă $F = F_0 \cos \omega t$, pentru care $F_0 = 10$ N, iar $\omega = 2\omega_0$. Găsiți soluția ecuației diferențiale de mișcare.

1.25. Pentru un oscilator întreținut, determinați expresia lui ω_m . Țineți cont că atunci când $\omega = \omega_m$, amplitudinea este maximă, adică numitorul relației care ne dă $A(\omega)$ este minim.

1.26. Considerați un oscilator amortizat pentru care $k = 250$ N/m, $m = 10$ kg, iar $b = 60$ Ns/m (coeficientul forței de rezistență) supus unei forțe $F = F_0 \cos \omega t$, cu $F_0 = 48$ N. Amplitudinea oscilatorului are un maxim în funcție de frecvența unghiulară a forței externe. Frecvența unghiulară pentru care amplitudinea este maximă se numește frecvență de rezonanță ω_m . Determinați frecvență de rezonanță ω_m . Care este amplitudinea și care este diferența de fază la această frecvență? [R: 2.64 rad/s; 0.2 m; 0.72 rad]

1.27. Pentru un oscilator amortizat întreținut pentru care $\gamma \ll \omega_0$, arătați că frecvența unghiulară pentru care amplitudinea este jumătate din amplitudinea la rezonanță, este dată de $\omega \cong \omega_0 \pm \gamma \sqrt{3}/2$.

1.28. Un oscilator amortizat întreținut de masă m are o elongație dată de $x = A \sin \omega t$. Forța de frecare de tip vâscos este dată de $F_r = -bv$. (a) Cât lucru mecanic efectuează forța externă pe parcursul unei perioade? [R: $\pi b \omega A^2$] (b) Pentru o pulsăție ω a forței externe mai mică decât pulsăția naturală (ideală) ω_0 reprezentați grafic energia potențială, energia cinetică și energia totală a oscilatorului pentru o perioadă.

1.29. Puterea pe care trebuie să o transmitem unui oscilator amortizat pentru a întreține oscilațiile este egală cu puterea disipată de forța de frecare. Pentru un sistem mecanic puterea, este dată de $P = Fv$, unde F este forța care efectuează lucru mecanic, iar v este viteza cu care se deplasează corpul. Dacă oscilatorul este supus unei forțe de rezistență $F_r = -bv$, atunci puterea instantanea disipată este $P = -bv^2$ (semnul – ne indică faptul că puterea este disipată). Deci, pentru ca oscilațiile să nu se amortizeze, forța externă care întreține oscilațiile trebuie să transmită oscilatorului o putere instantană egală cu $P = bv^2$. (a) Folosind $x = A \cos(\omega t - \delta)$, arătați că puterea medie transmisă de forță externă per o oscilație completă este $b\omega^2 A^2/2$. (b) Înlocuiți în expresia găsită valoarea lui $A(\omega)$ și determinați relația dintre puterea medie transmisă și pulsăția forței externe. Pentru ce valoarea a lui ω puterea medie transmisă are valoarea maximă?

1.30. Un corp de masă $m = 0.2$ kg este atașat de un resort de constantă $k = 80$ N/m. Corpul

este supus și unei forțe de frecare de tip vâscos dată de $F_r = -bv$, unde $b = 4 \text{ Ns/m}$. Oscilatorul este întreținut de o forță externă $F = F_0 \cos \omega t$, unde $F_0 = 2 \text{ N}$, iar $\omega = 30 \text{ rad/s}$. (a) Care sunt valorile lui A și δ dacă ecuația de mișcare este dată de $x = A \cos(\omega t - \delta)$? [R: 1.3 cm și 2.27 rad] (b) Câtă energie este disipată de forța de frecare într-o perioadă? [R: 63 mJ] (c) Care este puterea medie transferată de forță externă într-o perioadă? [R: 0.3 W]



2 Unde mecanice

Introducere

Probabil că toată lumea înțelege noțiunea de undă (sau val). Exemplul cel mai comun este reprezentat de valurile de pe suprafața apei. Să presupunem că ne aflăm în apropierea unui lac, iar suprafața apei este liniștită. Dacă aruncăm o piatră în mijlocul lacului, o să observăm unde care pornesc din locul unde piatra a atins apă și care se îndepărtează de acel loc. Dacă suntem la malul lacului și nu vedem când piatra a căzut în apă, dar vedem undele care ajung la mal și dacă le studiem cu atenție, adică le măsurăm viteza și direcția de deplasare, am putea în principiu să determinăm când și unde a căzut piatra în apă. În acest sens, spunem că undele *transmit informația* (putem să obținem informații cu privire la sursa undelor). Mai mult, dacă punem un obiect să plutească pe suprafața apei, vedem că undele cauzează ca acesta să oscileze în sus și în jos, adică obiectul o să câștige energie. În acest sens, spunem că undele *transmit energie*. Undele mecanice necesită un mediu elastic pentru a se propaga. Dacă mediu este neelastic atunci undele se vor amortiza. O excepție sunt undele electromagnetice care nu necesită un mediu pentru a se propaga, ele se transmit și în vid. În general spunem că o undă mecanică (sau elastică) reprezintă propagarea unei perturbații într-un mediu elastic. Undele pot să fie *longitudinale*, pentru care particulele mediului oscilează de-a lungul direcției de deplasare a undei, sau *transversale*, pentru care particulele mediului oscilează perpendicular pe direcția de deplasare a undei. Undele de pe suprafața apei sunt unde transversale, iar sunetele, de exemplu, sunt unde longitudinale.

2.1 Unde transversale într-o dimensiune

În continuare o să studiem cel mai simplu caz posibil, unde transversale într-un mediu unidimensional (1D), cum ar fi o coardă subțire elastică. Să presupunem că avem un puls de undă care se deplasează prin coardă de la stânga la dreapta cu viteza c , ca în figura 2.1. Să presupunem că forma pulsului este dată de o funcție

$$y = f(x). \quad (2.1)$$

La momentul inițial $t = 0$ maximul pulsului se află în $x = 0$. atunci maximul pulsului o să fie:

$$y_m = f(0). \quad (2.2)$$

La momentul t pulsul va fi deplasat spre dreapta cu distanța ct , însă forma lui o să fie aceeași. Dacă inițial maximul era în $x = 0$, acum maximul trebuie să fie în $x = ct$, dar maximul se obține dacă argumentul funcției $f(x)$ este zero, adică $y_m = f(0)$. Putem exprima matematic acest lucru în felul următor:

$$y = f(x - ct). \quad (2.3)$$

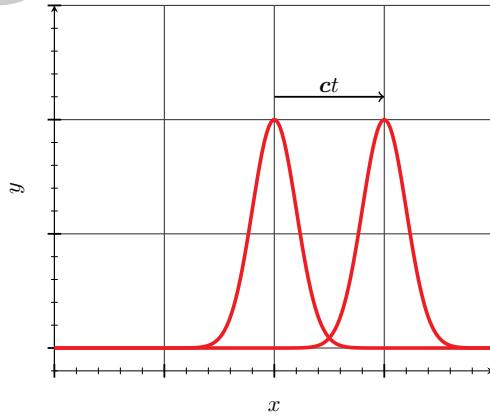


Figura 2.1: Un puls de undă care se deplasează prin coardă, de la stânga la dreapta, cu viteza c . La momentul t maximul pulsului se găsește în ct .

Similar putem arăta că pentru o undă care se deplasează spre dreapta

$$y = f(x + ct). \quad (2.4)$$

Putem observa că $y = f(x, t)$ este o funcție de două variabile, x și t . Aceasta se mai numește și funcție de undă și ne dă forma undei (distanța față de $y = 0$) pentru orice x și t .

Exemplul 2.1. Să presupunem că avem un puls de undă care se deplasează printr-un fir și care are funcția de undă dată de

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3t)^2 + 1} [\text{m}].$$

În ce direcție se deplasează unda și cu ce viteză?

Deoarece în fața lui t avem semnul minus, înseamnă că pulsul se deplasează spre dreapta, în direcția în care x crește, cu viteză de 3 m/s.

Observați că pentru a descrie o undă sau un puls de undă care se deplasează trebuie ca argumentul funcției de undă să poată fi scris ca $x \pm ct$

2.2 Ecuarea de undă

În continuare o să determinăm ecuația care guvernează propagarea undelor într-o coardă 1D. Să presupunem că avem o coardă elastică, de lungime L , tensionată, astfel încât, în poziția de echilibru ea este de-a lungul axei Ox . Deformăm coarda și apoi o eliberăm. Aceasta este situația la momentul initial, pe care o putem observa în figura 2.2. Datorită faptului că firul este tensionat, după ce este eliberat, acesta o să evolueze și vrem să determinăm funcția de undă $y(x, t)$ care ne va da elongația fiecărui segment al corzii (distanța față de poziția de echilibru). O să considerăm un segment mic AB din coardă, segmentul este infinitesimal, astfel că îl putem considera ca fiind

segment drept. Forța netă asupra segmentului AB este $F = F_1 + F_2$, unde F_1 și F_2 sunt forțele de tensiune din fir datorate segmentelor adiacente lui AB. Am ignorat forța de greutate a segmentului deoarece aceasta este mult mai mică decât tensiunea din fir. În modul F_1 și F_2 sunt egale $F_1 = F_2 = F$. Forța netă pe direcția Ox este dată de

$$F_x^{net} = F \cos(\theta + d\theta) - F \cos \theta. \quad (2.5)$$

O să presupunem că amplitudinea de oscilație transversală este mică, astfel încât θ și $d\theta$ sunt mici (mai mici decât 5° , mult mai mici decât unghiurile din reprezentarea schematică din figura 2.2).

Atunci, $\cos(\theta + d\theta) \approx \cos \theta \approx 1$, iar forța netă pe direcția Ox este zero. Pe direcția Oy , forța netă este

$$F_y^{net} = F \sin(\theta + d\theta) - F \sin \theta = F \sin \theta \cos d\theta + F \cos \theta \sin d\theta - F \sin \theta \approx F \cos \theta \sin d\theta \approx F d\theta \quad (2.6)$$

Deoarece $\theta = \theta(x, t)$ (este o funcție de x și t), atunci $d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx$. Mai mult, deoarece θ este mic, putem să-l înlocuim pe $\cos \theta$ cu 1, iar $\theta \approx \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$. Astfel o să obținem

$$F_y^{net} = F \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (2.7)$$

Conform legii a 2-a a lui Newton $F_y^{net} = ma_y$, unde $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ este accelerația pe Oy a elementului AB, iar m este masa elementului și este egală cu μdx , unde μ este densitatea liniară de masă a firului (dacă firul are secțiune constantă $\mu = m_{fir}/L$). Astfel,

$$F_y^{net} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx, \quad (2.8)$$

de unde o să obținem

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t), \quad (2.9)$$

unde am notat $c = \sqrt{F/\mu}$ și am notat explicit dependența de (x, t) a funcției de undă. Cu toate că a fost dedusă într-un caz particular, această ecuație este o ecuație generală, foarte importantă, care se numește ecuația de undă unidimensională. Ea guvernează mișcarea unei palete largi de unde: unde în corzi elastice, unde sonore, unde electromagnetice etc. Aceasta este o ecuație diferențială cu derivate parțiale în funcție de x și t . Pentru o coardă, soluțiile acestei ecuații sunt unde care se deplasează cu viteza $c = \sqrt{F/\mu}$. În anexa de la sfârșitul cursului este descrisă o metodă prin care această ecuație se poate rezolva numeric.

2.3 Soluții ale ecuației de undă. Unde armonice

În continuare o să încercăm să găsim o soluție a acestei ecuații. Să considerăm un fir infinit lung, astfel încât să putem ignora pentru moment fenomenele care au loc la capetele firului. În cazul oscilatorului armonic am avut o ecuație relativ similară, care implica derivata a două a elongației în raport cu timpul și pentru care am găsit o soluție armonică de tipul $\cos \omega t$. Putem să ne așteptăm să găsim o soluție similară, însă trebuie să ținem cont că argumentul trebuie să fie de tipul $x \pm ct$ deoarece unda se propagă prin fir. O să propunem o soluție de tipul

$$y(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t), \quad (2.10)$$

unde k și ω sunt două constante astfel că $c = \omega/k$, iar A_0 este amplitudinea undei. Prin înlocuire putem să observăm că această soluție satisface ecuația de undă deoarece:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A_0 k^2 \cos(kx - \omega t) \quad (2.11)$$

și

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A_0 \omega^2 \cos(kx - \omega t), \quad (2.12)$$

de unde

$$\omega^2 \cos(kx - \omega t) = c^2 k^2 \cos(kx - \omega t). \quad (2.13)$$

Dacă înlocuim $c = \omega/k$ observăm că ecuația de undă este verificată. De fapt, orice funcție $f(u)$ a cărei argument se poate scrie ca $u = x \pm ct$ este o soluție a ecuației de undă.

Lungimea de undă, vectorul de undă, perioada și frecvența. Haideți să vedem care este semnificația soluției

$$y(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t). \quad (2.14)$$

Pentru aceasta o să reprezentăm grafic soluția la un moment t . Pentru simplitate o să alegem $t = 0$, ca în figura 2.3, curba roșie. Putem scrie funcția de undă ca

$$y(x, 0) = A_0 \cos(kx - \omega 0). \quad (2.15)$$

Observăm că funcția de undă are un maxim la $x_1 = 0$ și următorul maxim este la $kx_2 = 2\pi$. Diferența dintre două maxime consecutive este:

$$x_2 - x_1 = \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (2.16)$$

unde am notat această diferență cu λ și pe care o să o numim lungime de undă. Această mărime ne caracterizează periodicitatea spațială a undei. Practic, după parcurgerea unei distanțe λ pe Ox unda se repetă. Observăm că putem scrie

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.17)$$

această mărime se numește număr de undă sau vector de undă și reprezintă frecvența spațială a undei.

Să urmărim mișcarea unui punct de pe coardă de la o anumită coordonată x . Să presupunem pentru simplitate că urmărim punctul de la $x_0 = 0$ în funcție de timp. Funcția de undă se va scrie

$$y(0, t) = A_0 \cos(-\omega t) = A_0 \cos(\omega t) \quad (2.18)$$

Aceasta este ecuația de mișcare pentru un oscilator armonic, ceea ce înseamnă că acest punct, de fapt orice punct de pe direcția undei, execută o mișcare oscillatorie în funcție de timp cu amplitudinea A_0 , frecvența unghiulară ω (frecvență $\nu = \omega/2\pi$) și perioada $T = 2\pi/\omega$.

Să urmărim mișcarea unui punct de pe coardă de la o anumită elongație y . Să presupunem pentru simplitate că urmărim primul punct x_1 de la $y = 0$ în funcție de timp. La momentul initial putem scrie pentru acest punct

$$y(x_1, 0) = A_0 \cos(kx_1) = 0, \quad (2.19)$$

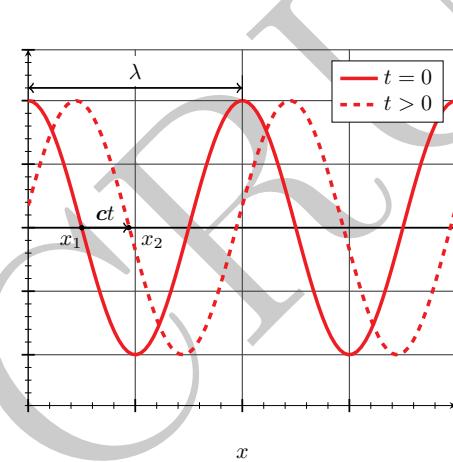


Figura 2.3: Reprezentare grafică a soluției ecuației de undă la momentul inițial $t = 0$ și la un moment t .

de unde

$$x_1 = \pi/2k. \quad (2.20)$$

După un timp t acest punct se va deplasa spre dreapta cu distanța ct , iar

$$y(x_2, t) = A_0 \cos(kx_2 - \omega t) = 0, \quad (2.21)$$

de unde

$$x_2 = (\pi/2 + \omega t)/k \quad (2.22)$$

Cele două puncte x_1 și x_2 sunt indicate în figura 2.3. Deoarece $x_2 - x_1 = ct$, atunci obținem

$$c = \frac{\omega}{k}, \quad (2.23)$$

care ne face legătura dintre frecvența spațială și frecvența temporală a undei. Dacă în relația de mai sus înlocuim ω și k obținem:

$$\lambda = cT \quad (2.24)$$

care ne spune că lungimea de undă este distanța parcursă într-o perioadă.

Observație. Datorită faptului că ecuația de undă 2.9 este valabilă numai în aproximarea unghiurilor mici, amplitudinea A_0 nu poate avea orice valoare. Ea trebuie să fie suficient de mică astfel încât aproximarea să fie valabilă. Din acest motiv, undele care sunt descrise de aceste ecuații sunt mult mai aplăzate decât ceea ce reprezentăm noi de obicei. De fapt, se poate observa că $\tan \theta = 4A_0/\lambda$, adică $A_0 = \lambda \tan \theta/4$ și trebuie să ţinem cont că $\theta \leq 5^\circ$.

La <https://drive.matlab.com/sharing/fc13b9c2-653a-409d-80bc-5439703fcda2> puteți să vedeați o reprezentare grafică ecuației de undă rezolvată numeric pentru un fir semiinfinit lung și al cărui capăt oscilează producând unde sinusoidale care se propagă prin fir.

Viteza și accelerarea particulelor mediului. Fiecare punct de pe coardă execută o mișcare de oscilație pe direcția transversală. Putem foarte simplu să calculăm viteza și accelerarea fiecărui punct:

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \omega A_0 \sin(kx - \omega t), \quad (2.25)$$

$$a(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = -\omega^2 A_0 \cos(kx - \omega t). \quad (2.26)$$

Putem să reprezentăm distribuția vitezei și accelerării punctelor de pe coardă la un anumit moment de timp. Pentru simplitate alegem $t = 0$ și înlocuim în relațiile de mai sus, atunci obținem:

$$v(x, 0) = \omega A_0 \sin(kx), \quad (2.27)$$

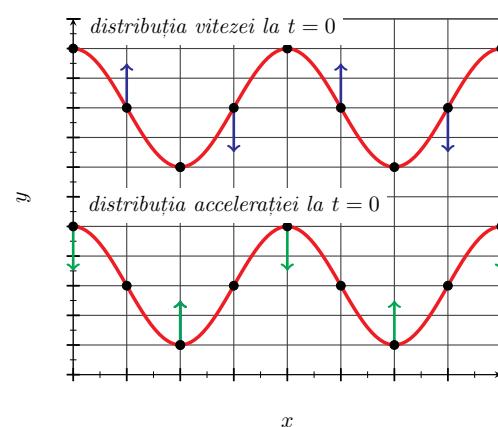


Figura 2.4: Distribuția vitezei și accelerării unor puncte de pe coarda vibrantă, la momentul $t = 0$.

$$a(x, t) = -\omega^2 A_0 \cos(kx). \quad (2.28)$$

Acstea două relații sunt reprezentate grafic în figura 2.4. Observăm că atunci când viteza este maximă, accelerația este zero, iar când viteza este zero, accelerația este maximă.

2.4 Puterea transmisă de undă

Să considerăm o undă care se deplasează printr-o coardă elastică. La un moment dat, particulele mediu lui prin care se deplasează unda sunt într-o anumită stare de mișcare. Mai mult, coarda este alungită relativ la starea de echilibru. Aceasta înseamnă că unda are o energie asociată care este suma dintre o energie cinetică și o energie potențială elastică. Să considerăm un element infinitesimal din coarda prin care se deplasează unda, ca în figura 2.5. Elementul nostru este situat între x și $x + dx$. Masa acestui element este μdx , unde μ este densitatea liniară de masă a corzii. Datorită faptului că elementul are o mișcare de oscilație transversală, acesta o să aibă o energie cinetică dată de:

$$dE_c = \frac{1}{2} \mu dx v(x, t)^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (2.29)$$

Putem să definim densitatea de energie cinetică per unitatea de lungime a firului ca

$$\frac{dE_c}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A_0^2 \sin^2(kx - \omega t), \quad (2.30)$$

unde am folosit relația 2.25. Pentru a determina energia potențială elastică trebuie să determinăm cu cât este alungită coarda la trecerea undei prin ea, relativ la starea de echilibru când este nedeformată. Dacă înmulțim această alungire cu tensiunea din coardă (F - pe care o considerăm constantă) putem determina lucrul mecanic necesar pentru a alungi coarda. Astfel, pentru segmentul infinitesimal o să avem

$$dU = F(ds - dx), \quad (2.31)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}. \quad (2.32)$$

În limita amplitudinilor mici când $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$ putem să folosim aproximarea binomială $[(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x]$ și relația devine

$$ds - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.33)$$

Atunci energia potențială se poate scrie

$$dU = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2.34)$$

iar densitatea de energie potențială per unitatea de lungime a firului

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2}F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2}Fk^2 A_0^2 \sin^2(kx - \omega t). \quad (2.35)$$

Dacă folosim $c^2 = F/\mu$ atunci

$$Fk^2 = F \frac{\omega^2}{c^2} = F \frac{\omega^2}{F} \mu = \mu \omega^2, \quad (2.36)$$

ceea ce ne conduce la

$$\frac{1}{2}\mu \omega^2 A_0^2 = \frac{1}{2}Fk^2 A_0^2. \quad (2.37)$$

Comparând relația 2.29 cu 2.35 și ținând cont de 2.37 putem să concluzionăm că la fiecare x și t densitatea de energie cinetică este egală cu densitatea de energie potențială. De exemplu, când elementul din fir este la elongație maximă acesta nu are energie cinetică deoarece are viteza zero, însă nu are nici energie potențială deoarece panta elementului este zero ($\partial y / \partial x = 0$) și $ds - dx = 0$. Această situație este diferită față de oscilatorul armonic, pentru care, când energia cinetică era maximă energia potențială era zero și invers, astfel încât energia totală era constantă și diferită de zero.

Putem să calculăm densitatea de energie totală $u(x, t)$, definită ca:

$$u(x, t) = \frac{dU}{dx} + \frac{dEc}{dx} = \frac{1}{2}\mu \omega^2 A_0^2 \sin^2(kx - \omega t) + \frac{1}{2}Fk^2 A_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \mu \omega^2 A_0^2 \sin^2(kx - \omega t), \quad (2.38)$$

valoarea medie a acestei energii pe o perioadă reprezintă intensitatea undei

$$I = \langle u(x, t) \rangle = \frac{1}{2}\mu \omega^2 A_0^2, \quad (2.39)$$

unde am ținut cont de faptul că valoarea medie a funcției \sin^2 este $1/2$. Un rezultat important este că intensitatea undei este proporțională cu amplitudinea la pătrat, $I \propto A_0^2$. Acest rezultat este valabil pentru orice fel de unde, nu doar pentru cele mecanice în 1D.

Care este puterea pe care trebuie să o pompeze sursa pentru a produce unde în coardă? Să presupunem că avem o coardă semiinfinită. La un capăt avem sursa de unde care oscilează transversal. Unda se va propaga în fir cu viteza c , ceea ce înseamnă că în fiecare secundă un segment de coardă de lungime $c \cdot 1s$ o să înceapă să oscileze. Energia medie a acestui segment o să fie $\langle u(x, t) \rangle \cdot 1s$, ceea ce înseamnă că energia medie transmisă de sursă per secundă, adică puterea medie, este

$$P = \langle u(x, t) \rangle \cdot c \cdot \frac{1s}{1s} = \langle u(x, t) \rangle \cdot c = \frac{1}{2}\mu \omega^2 A_0^2 c \quad (2.40)$$

aceasta este bineînțeles egală cu *puterea transportată de undă*.

Pentru a înțelege mai bine procesul prin care sursa pompează energie pentru a produce unde urmăriți simularea <https://drive.matlab.com/sharing/fc13b9c2-653a-409d-80bc-5439703fcda2> realizată pentru un fir semifinit lung..

2.5 Superpoziția undelor

În acest moment este util să folosim reprezentarea exponential complexă pentru a descrie undele armonice. Funcția de undă pentru o undă armonică se scrie

$$y(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t), \quad (2.41)$$

iar în reprezentarea exponential complexă funcția de undă devine

$$\psi(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.42)$$

unde

$$y(x, t) = \operatorname{Re}[\psi(x, t)] \quad (2.43)$$

Putem să scriem ecuația de undă 2.9 în reprezentare complexă:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t). \quad (2.44)$$

Observați că această ecuație este o ecuație diferențială liniară (ψ este la puterea 1). În C#6, secțiunea 1.2 am arătat că dacă avem două soluții ψ_1 și ψ_2 pentru o ecuație diferențială liniară, atunci și $\psi_1 + \psi_2$ o să fie o soluție. Ce înseamnă aceasta din punct de vedere fizic? Dacă avem o sursă de unde care produce unda ψ_1 și încă o sursă de unde care produce unda ψ_2 , atunci efectul celor două surse pur și simplu se va aduna și o să avem o undă rezultantă $\psi_1 + \psi_2$. Aceasta este principiul superpoziției și este o consecință a liniarității ecuației de undă.

Interferența undelor de aceeași frecvență

Să presupunem că avem un mediu 1D (o coardă) prin care se propagă în aceeași direcție două unde de aceeași frecvență și amplitudine, însă defazate cu ϕ . Dacă au aceeași frecvență, atunci undele au și aceeași lungime de undă, mai mult, deoarece se deplasează în aceeași direcție au și același vector de undă. Atunci, funcțiile de undă ale celor două unde se vor scrie:

$$\psi_1(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.45)$$

$$\psi_2(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}. \quad (2.46)$$

Prin suprapunerea undelor se va obține unda

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = A_0 (1 + e^{i\phi}) e^{i(kx - \omega t)} = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.47)$$

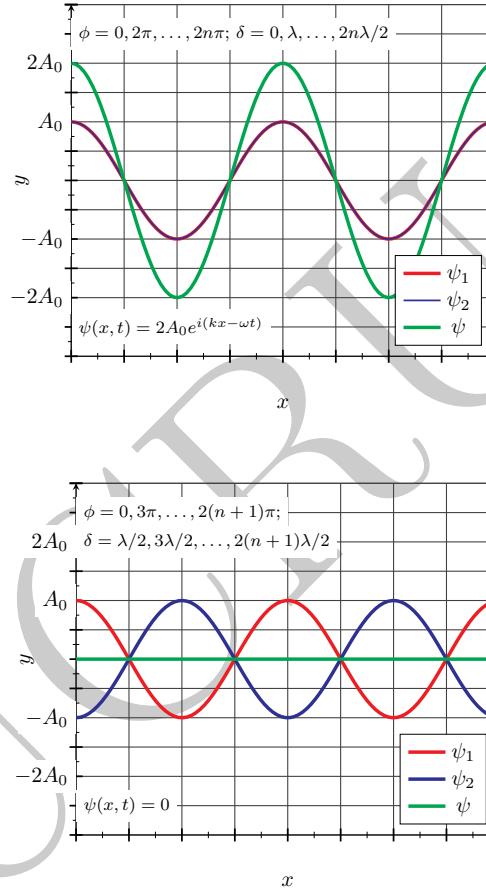


Figura 2.6: Interferența constructivă și destructivă două unde ψ_1 și ψ_2 de aceeași frecvență și amplitudine.

unde am notat $A = A_0 (1 + e^{i\phi})$. Acest rezultat ne spune că unda rezultată o să aibă aceeași

$$\operatorname{Re}[A] = \operatorname{Re} [A_0 (1 + e^{i\phi})] = A_0 (1 + \cos\phi). \quad (2.48)$$

În funcție de unghiul de defazaj dintre cele două unde putem distinge două cazuri particulare, care sunt reprezentate în graficele din figura 2.6 pentru $t = 0$. Dacă $\phi = 0, 2\pi, \dots, 2n\pi$ atunci amplitudinea este $2A_0$ și spunem că avem interferență constructivă. Putem să definim diferența de drum δ dintre cele două unde, adică distanța dintre două maxime. Se poate observa din grafic că dacă $\delta = 0, \lambda, \dots, 2n\lambda/2$ atunci avem interferență constructivă. Dacă $\phi = \pi, 3\pi, \dots, (2n+1)\pi$ atunci amplitudinea este 0 și spunem că avem interferență destructivă. Similar, se poate observa din grafic că dacă $\delta = 0, \lambda/2, \dots, (2n+1)\lambda/2$ atunci avem interferență destructivă.

Interferență Young

În continuare o să discutăm despre dispozitivul Young, care permite studiul interferenței dintre unde, reprezentat schematic în figura 2.7. Să considerăm un caz concret și să presupunem că vorbim de suprafața unui vas cu apă. Undeva avem o sursă de unde, adică un oscilator care produce unde pe suprafața apei. Undele pleacă dinspre sursă spre exterior ca și cercuri concentrice. Pe suprafața apei este plasat un obstacol cu două fante. La trecerea undelor prin fante acestea se vor comporta ca două noi surse de unde S1 și S2. Undele generate de cele două surse S1 și S2 vor interfera în partea dreaptă a barierei. La o anumită distanță față de fante o să plasăm un detector (de exemplu un corp care plutește pe suprafața apei). Detectorul se poate muta în față și înapoi și cu ajutorul lui o să determinăm amplitudinea undelor care sosesc în zona în care se află detectorul. Întrebarea este: *care este amplitudinea acestor unde?*

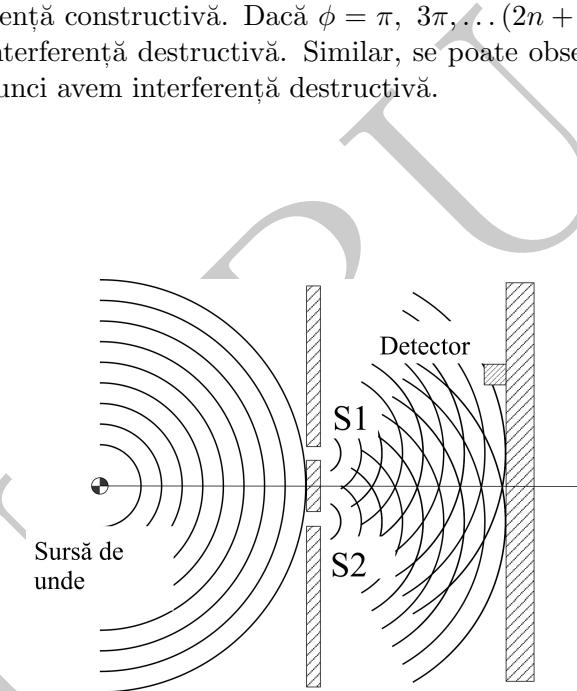


Figura 2.7: Interferometrul Young cu două fante.

Înainte de a răspunde la această întrebare trebuie să facem o distincție importantă între undele în 1D și undele în mai multe dimensiuni. În cazul 1D amplitudinea undelor nu depinde de distanța față de sursă, fie că suntem la 1 m sau la 1000 de m față de sursă, amplitudinea este aceeași. În cazul a două sau mai multe dimensiuni, acest lucru nu mai este valabil. Este evident pentru oricine că dacă, de exemplu, avem un difuzor care produce sunete, intensitatea sunetului depinde de distanța față de difuzor. De ce? În acest caz, puterea radiată de sursă va fi răspândită în mod concentric pe suprafețe sferice de raze din ce în ce mai mari. De aceea în 3D, intensitatea undei o să scadă cu pătratul distanței față de sursă. Bineînțeles, în 2D, deoarece energia se va răspândi în mod concentric pe cercuri de raze din ce în ce mai mari ne așteptăm ca intensitatea să scadă cu distanța față de sursă

$$I \propto 1/r, \quad (2.49)$$

deoarece

$$I \propto A^2, \quad (2.50)$$

amplitudinea undei o să scadă cu distanța față de sursă:

$$A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (2.51)$$

Dar ce se întâmplă cu unde care ajung la detector? Pentru a răspunde la această întrebare o să facem o reprezentare schematică a problemei, ca în figura 2.8. Să presupunem că dorim să determinăm amplitudinea undelor care ajung în punctul P. O să facem o simplificare, presupunem că distanța de la fiecare sursă până în punctul P este mult mai mare decât distanța dintre surse $r_1, r_2 \gg d$. Atunci, chiar dacă amplitudinea undelor scade pe măsură ce se îndreaptă spre punctul P, aceasta o să scadă aproximativ la fel, astfel încât amplitudinile undelor ajunse în punctul P plecând din cele două surse pot fi considerate identice. Atunci, pentru undă care pleacă din S1 și ajunge în P putem scrie

$$\psi_1(r_1, t) = A_0 e^{i(kr_1 - \omega t)}, \quad (2.52)$$

iar pentru undă care pleacă din S2 și ajunge în P o să avem o relație similară:

$$\psi_2(r_2, t) = A_0 e^{i(kr_2 - \omega t)}. \quad (2.53)$$

În urma interferenței, punctul P o să execute o oscilație dată de

$$\psi = \psi_1(r_1, t) + \psi_2(r_2, t). \quad (2.54)$$

Conform figurii 2.8, putem să scriem $r_2 = r_1 + \delta$, unde δ este diferența de drum dintre cele două unde care ajung în punctul P. Astfel, în punctul P o să avem o oscilație dată de

$$\psi = A_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} + A_0 e^{i(kr_1 + k\delta - \omega t)} = A_0 (1 + e^{ik\delta}) e^{i(kr_1 - \omega t)}. \quad (2.55)$$

Dacă $\delta = 0, \lambda, \dots, 2n\lambda/2$ atunci

$$1 + e^{ik\delta} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(2n)\frac{\lambda}{2}} = 1 + e^{i2n\pi} = 2, \quad (2.56)$$

de unde

$$\psi = 2A_0 e^{i(kr_1 - \omega t)}, \quad (2.57)$$

astfel încât în punctul P o să avem un maxim de interferență, de amplitudine $2A_0$.

Dacă $\delta = 0, \lambda/2, \dots, (2n+1)\lambda/2$ atunci

$$1 + e^{ik\delta} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(2n+1)\frac{\lambda}{2}} = 1 + e^{i(2n+1)\pi} = 0, \quad (2.58)$$

de unde

$$\psi = 0, \quad (2.59)$$

astfel încât în punctul P o să avem un minim de interferență, de amplitudine 0.

În cazul în care $d \ll L$ putem să găsim o relație simplă care să ne dea coordonata y a punctului P pentru care avem maxime sau minime de interferență. Din imagine observăm că în acest caz putem considera r_1 și r_2 ca fiind paralele și

$$\delta = d \sin \theta, \quad (2.60)$$

deoarece $d \ll L$, unghiul θ o să fie mic și $\sin \theta \approx \tan \theta = y/L$, de unde

$$\delta = d \frac{y}{L}, \quad (2.61)$$

iar

$$y = \frac{L}{d} \delta. \quad (2.62)$$

Atunci, dacă $\delta = 2n\lambda/2$:

$$y = \frac{L}{d} \cdot 2n \frac{\lambda}{2} \quad (2.63)$$

și avem un *maxim de interferență*, iar dacă $\delta = (2n + 1) \lambda/2$:

$$y = \frac{L}{d} \cdot (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (2.64)$$

și avem un *minim de interferență*. Practic, la distanța L față de surse o să avem alternativ zone în care o să avem maxime și minime de interferență, în funcție de coordonata y .

Pentru a înțelege mai bine, la <https://drive.matlab.com/sharing/fc13b9c2-653a-409d-80bc-5439703fcda2> puteți să vedeti interferența a două unde 2D calculată numeric folosind ecuația undei, fără a folosi aproximările simplificate menționate mai sus. De asemenea, în anexa de la sfârșitul cursului puteți să vedeti o imagine de interferență Young.

2.6 Unde stationare

Să presupunem că avem o coardă în care avem două pulsuri unul negativ și unul pozitiv ce se propagă în sensuri diferite, ca în figura 2.9. Pulsul pozitiv se află în partea stângă și să deplacează de la stânga la dreapta, iar pulsul negativ se află în partea dreaptă și se deplasează de la dreapta la stânga. Conform principiului superpoziției, în momentul când se vor întâlnii, cele două pulsuri se vor anula și coarda o să fie perfect întinsă. După momentul întâlnirii cele două pulsuri vor continua să se deplaseze, cel pozitiv o să treacă în partea dreaptă, iar cel negativ în partea stângă, păstrându-și forma initială.

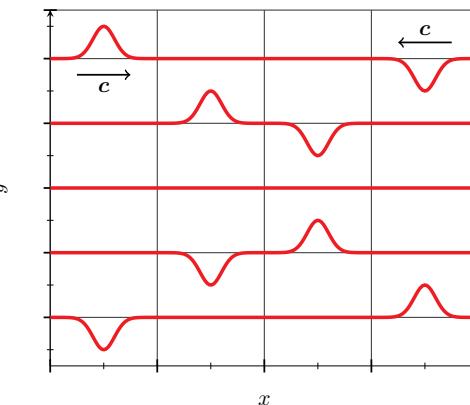


Figura 2.9: Două pulsuri unul negativ și unul pozitiv ce se propagă în sensuri diferite

Să presupunem că avem o coardă fixată de un perete. Ne referim la partea stângă a graficului din figura 2.10. Transmitem un puls pozitiv spre perete. Ceea ce observăm este că în momentul când atinge peretele pulsul dispare, apoi este reflectat înapoi și devine negativ. De ce este reflectat pulsul și de ce devine negativ? Când pulsul ajunge la capătul fixat de perete o să exercite o forță asupra acestuia. Dar acest capăt este fixat. Aceasta înseamnă că peretele trebuie să exercite o forță asupra capătului firului care să compenseze exact forța exercitată de acesta asupra peretelui. Cu alte cuvinte peretele trebuie să producă un puls care să anihileze pulsul incident în momentul când acesta ajunge la capătul fixat. Putem să privim lucrurile similar cu cazul de mai sus reprezentat în figura 2.9 și să spunem că există un puls virtual negativ care se deplasează de la dreapta la stânga și care devine real în momentul când ajunge la capătul fixat de perete și care va continua să se deplaseze de la dreapta la stânga. Pulsul real care se deplaza inițial de stânga la dreapta se va transforma în puls virtual când va atinge peretele și va continua să se deplaseze în aceeași direcție.

La <https://drive.matlab.com/sharing/fc13b9c2-653a-409d-80bc-5439703fcda2> puteți să vedeați propagarea și reflexia unui puls într-o coardă, calculate numeric folosind ecuația undei.

Să considerăm în continuare că avem o coardă elastică de lungime L , fixată la ambele capete. O să producem o perturbație la capătul din stânga al corzii și o să observăm modul de propagare al undelor în coardă. În fir se va propaga o undă de la stânga la dreapta, pe care o numim progresivă, dată de

$$\psi_p(x, t) = A_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.65)$$

Unda o să ajungă la capătul din dreapta al corzii și va fi reflectată înapoi. Funcția de undă a acestei unde reflectate, pe care o numim regresivă, este

$$\begin{aligned} \psi_r(x, t) &= -A_0 e^{i(kx + \omega t)} \\ &= A_0 e^{i(kx + \omega t + \pi)}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Observați semnul $+$ din exponent. Aceasta ne indică faptul că unda se deplasează în sens negativ. De asemenea, observați termenul suplimentar π din exponent. Aceasta este datorat faptului că după reflexie unda va avea amplitudine negativă. Aceste două unde se vor suprapune, iar rezultatul suprapunerii o să fie o undă dată

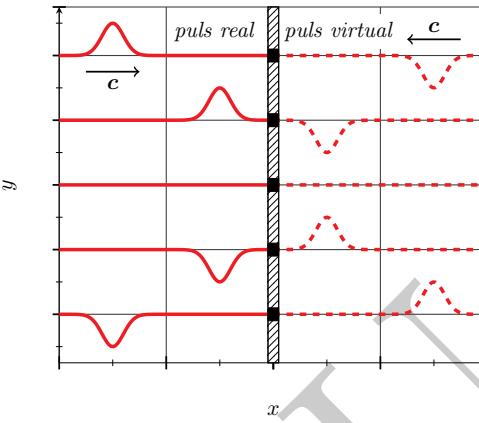


Figura 2.10: Două pulsuri unul real și unul virtual ce se propagă în sensuri diferite

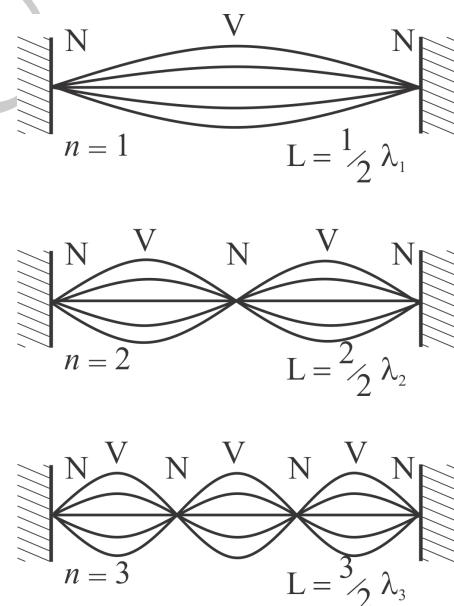


Figura 2.11: Primele trei moduri normale de oscilație ale unei corzi elastice.

de funcția

$$\psi(x, t) = \psi_p(x, t) + \psi_r(x, t) = A_0 e^{ikx} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) = -2iA_0^{ikx} \sin \omega t. \quad (2.67)$$

Deoarece $y(x, t) = \operatorname{Re}(\psi(x, t))$ obținem

$$y(x, t) = 2A_0 \sin kx \sin \omega t. \quad (2.68)$$

Undele descrise de funcția de undă de mai sus se numesc *unde staționare*. Putem observa o diferență esențială între această funcție de undă și $y(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$ care descrie o undă care se propagă într-un fir infinit lung. În cazul funcției $y(x, t) = 2A_0 \sin kx \sin \omega t$, cele două variabile x și t de care depinde funcția de undă intră fiecare în argumentul unei funcții periodice sinus. Aceasta înseamnă că în cazul undelor staționare periodicitățile în timp și în spațiu ale undei sunt separate. Cu alte cuvinte, fiecare particulă a mediului execută o mișcare oscilatorie armonică ($\sin \omega t$), dar cu amplitudine periodică în spațiu dată de

$$A(x) = 2A_0 \sin kx. \quad (2.69)$$

În figura 2.11 se pot observa câteva exemple de astfel de unde. Mai mult, se poate observa că există puncte pentru care amplitudinea de oscilație este zero. Aceste puncte se numesc noduri iar poziția lor (x_N) se poate determina ținând cont că $\sin kx_N = 0$, de unde

$$x_N = \frac{p\pi}{k} = p\frac{\lambda}{2}, \text{ unde } p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

Punctele pentru care avem un maxim de oscilație se numesc vîrte, iar poziția lor (x_V) se determină ținând cont că $\sin kx_V = \pm 1$, de unde

$$x_V = \frac{(2p+1)\pi}{2} \frac{\pi}{k} = (2p+1) \frac{\lambda}{4}, \text{ unde } p = 0, 1, 2, \dots \quad (2.71)$$

În cazul sistemului nostru, adică o coardă elastică fixată la ambele capete, se pot obține unde staționare pentru orice frecvențe sau lungimi de undă? Răspunsul este nu. Observăm că în cazul nostru capetele firului sunt fixe, ceea ce înseamnă că la capetele firului trebuie să avem întotdeauna noduri. Această constrângere geometrică ne cuantifică lungimile de undă și frecvențele pentru care putem să avem unde staționare. Din figura 2.11 putem observa că primul mod de oscilație al firului, pentru care unda staționară are lungimea de undă cea mai mare, se obține când lungimea de undă este de două ori lungimea firului $\lambda_1 = 2L$. Al doilea mod de oscilație se obține când $\lambda_2 = L$, și-md. În general, lungimea de undă a modurilor de oscilație este dată de:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \text{ unde } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.72)$$

iar frecvența:

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L}, \text{ unde } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.73)$$

aici indicele n se referă la modul n de oscilație. Modul pentru care $n = 1$ se numește fundamental iar modurile pentru care $n > 1$ se numesc armonici superioare. Relațiile de mai sus ne cuantifică lungimile de undă și frecvențele pentru care putem să avem unde staționare în coardă. Cuantificarea acestor mărimi fizice înseamnă că nu putem să avem unde staționare pentru orice valori ale acestora, ci numai pentru anumite valori discrete.

Energia undelor staționare Undele staționare nu transportă energie deoarece sunt formate prin suprapunerea a două unde care se propagă și transportă energie în sensuri opuse, iar transportul

net de energie este nul. Însă undele staționare înmagazinează energie. Pentru a calcula energia înmagazinată într-o undă staționară să presupunem că în fir avem o undă staționară ca în figura 2.12. Să considerăm un element dx din fir care se află la distanța x față de origine. Acesta are masa $dm = \mu dx$ și oscilează vertical cu amplitudinea $A(x) = 2A_0 \sin kx$ și frecvența unghiulară $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$ (în cazul din figură, $n = 3$). Deoarece elementul dx efectuează o oscilație armonică energia totală a acestuia este conform C#6:

$$dE = \frac{1}{2}dm\omega_n^2 A(x)^2 = 2\mu\omega_n^2 A_0^2 \sin^2(kx) dx. \quad (2.74)$$

Energia totală a corzii care oscilează în modul n se obține integrând relația de mai sus pe toată lungimea acesteia

$$E_n = \int dE = 2\mu\omega_n^2 A_0^2 \int_0^L \sin^2(kx) dx, \quad (2.75)$$

care se poate integra relativ simplu și se obține

$$E_n = \mu A_0^2 L \omega_n^2 = \frac{\mu A_0^2 \pi^2 c^2}{L} n^2, \text{ unde } n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.76)$$

Ecuația de mai sus ne indică faptul că și energia modurilor, la fel ca și lungimea de undă și frecvența, este cuantificată. De asemenea, se poate observa că modul fundamental are energia cea mai mică și că energia armonicelor superioare crește cu pătratul indicelui n . Este de subliniat faptul că mărurile caracteristice undei sunt cuantificate exclusiv datorită constrângerilor geometrice impuse sistemului (în cazul nostru capetele firului sunt fixate).

La <https://drive.matlab.com/sharing/fc13b9c2-653a-409d-80bc-5439703fcda2> puteți să observați propagarea unei unde într-o coardă și formarea de unde staționare, calculate numeric folosind ecuația de undă.

2.7 Interferența undelor de frecvențe diferite. Bătăi

Să presupunem că avem două unde de frecvențe diferite care se propagă într-o coardă în același sens și au aceeași amplitudine. Funcțiile lor de undă se scriu:

$$\psi_1(x, t) = A_0 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}, \quad (2.77)$$

$$\psi_2(x, t) = A_0 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)}. \quad (2.78)$$

Acstei unde vor interfera și una rezultantă o să fie dată de

$$\psi(x, t) = \psi_1(xt) + \psi_2(x, t) = A_0 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + A_0 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)}. \quad (2.79)$$

O să urmărim oscilația unui anumit punct, pentru simplitate să presupunem că punctul este la $x=0$. Atunci

$$\psi(0, t) = A_0 e^{-i\omega_1 t} + A_0 e^{-i\omega_2 t}, \quad (2.80)$$

putem să forțăm un factor comun, iar

$$\psi(0, t) = A_0 e^{-i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t} \left(e^{-i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t} + e^{i \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t} \right) = 2A_0 e^{-i \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t} \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \quad (2.81)$$

Ne interesează doar partea reală a acestei funcții deoarece

$$y(x, t) = \operatorname{Re} [\psi(x, t)], \quad (2.82)$$

atunci

$$y(0, t) = \operatorname{Re} (\psi(0, t)) = 2A_0 \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t. \quad (2.83)$$

Să considerăm două exemple. Inițial să presupunem că $\omega_1 = 3$ rad/s și $\omega_2 = 2$ rad/s, iar $A_0 = 0.1$ m. În acest caz

$$y(0, t) = 0.2 \cos \frac{5}{2} t \cos \frac{1}{2} t [m]. \quad (2.84)$$

Rezultatul interferenței celor două unde se poate observa în figura 2.13. La momentul inițial cele două oscilații care se suprapun sunt în fază și elongația este $2A_0 = 0.2$ m. După un timp $t = \pi$ oscilațiile sunt în anifază și amplitudinea rezultantă este zero. După $t = 2\pi$ oscilațiile ajung din nou în fază și mișcarea se va repeta. Pentru ca mișcarea punctelor de pe coardă să fie periodică cu perioada T trebuie ca cele două unde să aibă perioade comensurabile, adică trebuie să existe două numere naturale n_1 și n_2 astfel încât

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2, \quad (2.85)$$

în caz contrar mișcarea punctelor de pe coardă nu o să fie periodică. Cu alte cuvinte, trebuie ca cele două oscilații care se compun să aibă o perioadă comună T după care să se repete. În cazul exemplului nostru, perioada oscilației compuse este de 6.29 s.

Să considerăm alt exemplu. Să presupunem că frecvențele sunt relativ mari și nu diferă prea mult. De exemplu, $\omega_1 = 270$ rad/s și $\omega_2 = 260$ rad/s, iar $A_0 = 0.1$ m. În acest caz

$$y(0, t) = 0.2 \cos 265t \cos 5t [m]. \quad (2.86)$$

și se produce fenomenul de bătăi, în care avem o oscilație rapidă care are o amplitudine care scade lent la zero și crește lent înapoi la valoarea maximă, așa cum este reprezentat în figura 2.14. Cei care folosesc instrumente muzicale știu că acest fenomen se folosește pentru acordarea acestora.

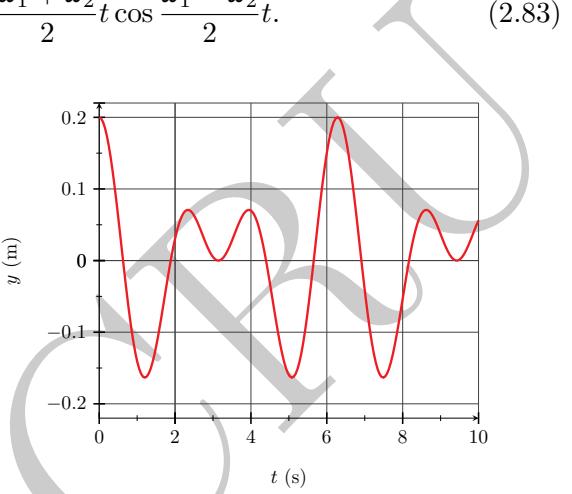


Figura 2.13: Interferența a două unde pentru care $\omega_1 = 3$ rad/s și $\omega_2 = 2$ rad/s, iar $A_0 = 0.1$ m.

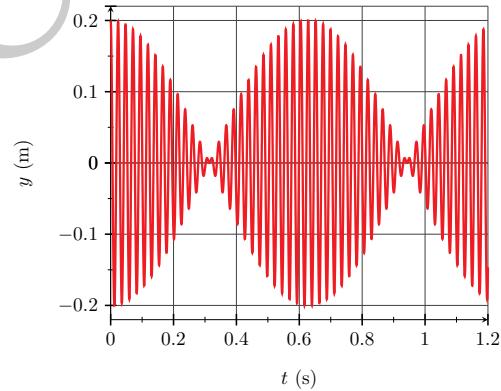


Figura 2.14: Interferența a două unde pentru care $\omega_1 = 270$ rad/s și $\omega_2 = 260$ rad/s, iar $A_0 = 0.1$ m.

Anexă. Rezolvarea numerică a ecuației de undă

Ecuatația diferențială care guvernează propagarea unei unde 1D este

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t),$$

unde c este viteza de propagarea a undei, iar $y(x,t)$ este funcția de undă, adică elongația unui punct x la momentul t .

Funcția de undă depinde de două variabile (x,t) . O să ne definim cele două intervale pe care ne interesează evoluția funcției de undă $x \in [0, L]$ și $t \in [0, t_f]$.

Pentru a determina o soluție numerică aproximativă o să discretizăm cele două intervale și o să trecem de la intervalele continue $[0, L] \times [0, t_f]$ la intervale discrete $\{x_k\} \times t_k$, unde

$$\{x_k\} = \{k\delta_x\}_{k=0,\dots,n_x}, \text{ unde } n_x = L/\delta_x$$

și

$$\{t_k\} = \{k\delta_t\}_{k=0,\dots,n_t}, \text{ unde } n_t = t_f/\delta_t,$$

aici δ_x și δ_t sunt două cantități mici care ne dă rezoluția spațială și temporală a celor două intervale. Astfel, determinarea i ecuației diferențiale se reduce la a determina o matrice:

$$\begin{pmatrix} y(x_0, t_0) & \cdots & y(x_0, t_{n_t}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y(x_{n_x}, t_0) & \cdots & y(x_{n_x}, t_{n_t}) \end{pmatrix},$$

care să conțină toate valorile funcției de undă pentru orice coordonate spațiale și temporale. Putem observa că prima coloană reprezintă elongația tuturor punctelor (funcția de undă la momentul initial), a doua reprezintă elongația tuturor punctelor la momentul δ_t, \dots , ultima coloană reprezintă elongația tuturor punctelor la momentul $n_t\delta_t = t_f$. Prima linie reprezintă elongația punctului $x = 0$ la toate momentele de timp, a doua linie reprezintă elongația punctului $x = \delta_x$ la toate momentele de timp, \dots , ultima linie reprezintă elongația punctului $x = n_x\delta_x = L$ la toate momentele de timp. Pentru a simplifica notația o să scriem

$$y_{i,j} = y(x_i, t_j).$$

Ecuatația diferențială se discretizează folosind formula lui Taylor, de exemplu

$$y(x + \delta_x, t) = y(x, t) + \delta_x \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + \frac{\delta_x^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}(\delta_x),$$

aici $\mathcal{O}(\delta_x)$ reprezintă termenii de ordinul superior, pe care o să-i neglijăm. Cu notația de mai sus, formula Taylor devine

$$y_{i+1,j} \approx y_{i,j} + \delta_x \frac{\partial y_{i,j}}{\partial x} + \frac{\delta_x^2}{2} \frac{\partial^2 y_{i,j}}{\partial x^2}.$$

Putem să scriem formula lui Taylor pentru $y(x - \delta_x, t)$, adică pentru $y_{i-1,j}$

$$y_{i-1,j} \approx y_{i,j} - \delta_x \frac{\partial y_{i,j}}{\partial x} + \frac{\delta_x^2}{2} \frac{\partial^2 y_{i,j}}{\partial x^2}.$$

Dacă adunăm cele două relații o să obținem în final

$$\frac{\partial^2 y_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\delta_x^2} (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}).$$

În mod similar obținem

$$\frac{\partial^2 y_{i,j}}{\partial t^2} \approx \frac{1}{\delta_t^2} (y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j}).$$

De aici putem să scriem ecuația undei

$$y_{i,j+1} = -y_{i,j-1} + \gamma^2 y_{i+1,j} + \gamma^2 y_{i-1,j} + 2(1 - \gamma^2) y_{i,j},$$

unde

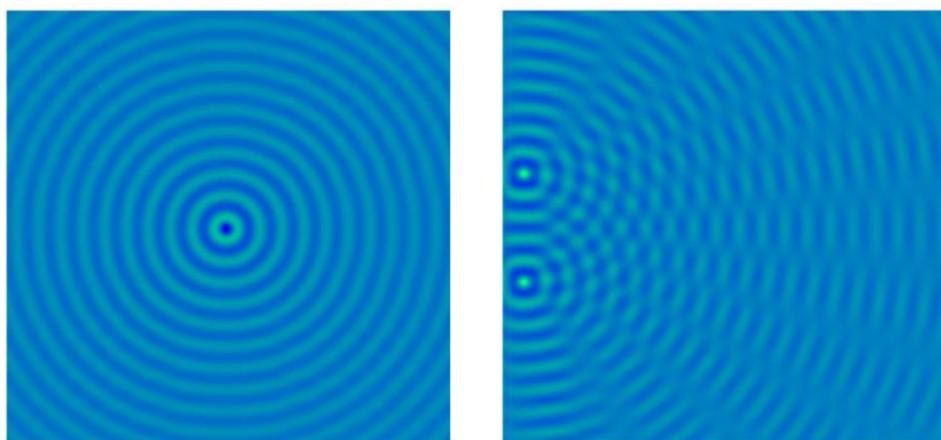
$$\gamma^2 = c^2 \delta_t^2 / \delta_x^2.$$

Relația de mai sus este o relație iterativă care se poate utiliza pentru rezolvarea numerică a ecuației undelor.

Pentru a putea utiliza această relație trebuie să cunoaștem starea inițială a sistemului, viteza inițială a particulelor mediului și condițiile la limită, adică:

$$\begin{aligned} y(x, 0) &\equiv y_{i,1}, \\ v(x, 0) &\equiv \frac{y_{i,2} - y_{i,1}}{\delta_t} \implies y_{i,2} = y_{i,1} + v(x, 0) \delta_t, \\ y(0, t) &\equiv y_{0,i} \quad \text{și} \quad y(L, t) \equiv y_{nx,i}. \end{aligned}$$

Mai jos este prezentată o imagine cu propagarea unei unde în 2D; se poate observa cum amplitudinea scade față de sursă. De asemenea, este prezentată o imagine de interferență pentru două unde în 2D, similar cu dispozitivul Young; se pot observa zonele în care avem interferență constructivă și zonele în care avem interferență destructivă. Imaginele sunt rezultatul unor simulări în Matlab, folosind metoda descrisă mai sus de rezolvare a ecuației de undă. Toate codurile se găsesc la: <https://drive.matlab.com/sharing/fc13b9c2-653a-409d-80bc-5439703fcda2>.



Exerciții și probleme

2.1. Prin înlocuire în ecuația de undă 2.9, arătați că orice funcție $f(u)$ a cărei argument se poate scrie ca $u = x \pm ct$ este o soluție a ecuației de undă.

2.2. Spre deosebire de un oscilator armonic, la elongație maximă energia totală a elementului de coardă este zero. Atunci, de ce acesta continuă să oscileze? De unde ia energie ca să continue oscilația?

2.3. Ecuatia unei unde transversale care se deplasează de-a lungul unui fir este dată de $y(x, t) = 0.3 \sin \pi(0.5x - 50t)$, unde y și x sunt în centimetri, iar t este în secunde. (a) Găsiți amplitudinea, lungimea de undă, numărul de undă, frecvența, perioada și viteza undei. [R: 0.3 cm, 4 cm, 0.25 cm^{-1} , 25 s^{-1} , 0.04 s, 100 cm/s] (b) Găsiți viteza transversală maximă a oricărei particule din fir. [R: $15\pi \text{ cm/s}$] (c) Scrieți ecuația acestei unde sub forma unei exponentiale complexe.

2.4. Scrieți sub forma unei exponentiale complexe și sub formă trigonometrică ecuația unei unde armonice care se deplasează spre stânga cu amplitudinea de 3 mm, frecvența de 5 Hz, și viteza de 300 m/s.

2.5. O undă cu frecvență de 20 Hz are o viteză de 80 m/s. (a) Care este distanța dintre două puncte pentru care diferența de fază este de 30° ? [R: 1/3 m] (b) Într-un punct, care este diferența de fază dintre elongația undei între două momente separate de 0.01 s? [R: 72°]

2.6. Un fir lung și uniform cu densitatea liniară de masă $m = 0.1 \text{ kg/m}$ este întins cu o forță de 50 N. Un capăt al firului ($x = 0$) oscilează transversal (sinusoidal) cu o amplitudine de 0.02 m și o perioadă de 0.1 s. Unda se propagă în direcția $+x$. (a) Care este viteza undei? [R: 22.4 m/s] (b) Care este lungimea de undă? [R: 2.24 m] (c) Scrieți sub forma unei exponentiale complexe și sub formă trigonometrică ecuația acestei unde dacă la momentul initial capătul care oscilează este în punctul $y = 0.01 \text{ m}$ și $dy/dt < 0$.

2.7. S-a observat că un impuls necesită 0.1 secunde pentru a se deplasa de la un capăt la celălalt al unei corzi lungi. Tensiunea în coardă este asigurată prin trecerea acesteia peste un scripete către o greutate care are o masă de 100 de ori mai mare decât masa corzii. (a) Care este lungimea corzii? (b) Care este ecuația celui de-al treilea mod normal?

2.8. Într-o coardă foarte lungă, cu aceeași tensiune și masă pe unitate de lungime ca în problema 2.7, există undă progresivă care are următoarea ecuație:

$$y(x, t) = 0.02 \sin \pi(x - ct),$$

unde x și y sunt în metri, t în secunde, iar c este viteza undei. Găsiți deplasarea transversală și viteza corzii în punctul $x = 5 \text{ m}$ la momentul $t = 0.1 \text{ secunde}$.

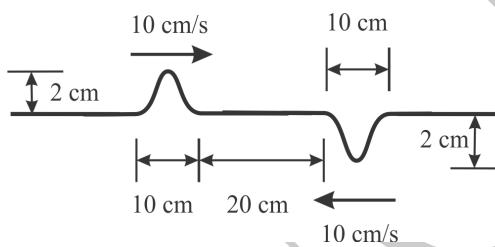
2.9. Două puncte pe o coardă sunt observate în timp ce o undă progresivă trece peste ele. Punctele sunt la $x_1 = 0$ și $x_2 = 1 \text{ m}$. Mișcarea transversală a celor două puncte este dată de:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.2 \sin(3\pi t) \\ y_2 &= 0.2 \sin(3\pi t + \pi/8) \end{aligned}$$

(a) Care este frecvența în hertz? (b) Care este lungimea de undă? (c) Cu ce viteză se propagă unda? (d) În ce direcție se deplasează unda?

2.10. Ecuăția de undă a unei unde transversale care se propagă într-un fir este $\Psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$. Amplitudinea undei este de 0.3 cm, lungimea de undă este 12 cm, iar viteza undei este de 6 cm/s. (a) Scrieți ecuația undei sub formă trigonometrică $y(x, t) = \operatorname{Re}[\Psi(x, t)]$. (a) La momentul $t = 0$ calculați $y(x, 0)$ pentru intervale de 1.5 cm până la $x = 12$ cm (adică pentru $x = 0, 1.5, 3, 3.5, \dots, 12$ cm). Reprezentați grafic rezultatele [$y = f(x)$]. Acestea reprezintă forma firului la momentul $t = 0$. (c) Repetați calculele pentru aceleși valori ale lui x pentru momentele $t = 0.4$ s și $t = 0.8$ s. Reprezentați aceste rezultate pe graficul de la punctul (b). În ce direcție se deplasează unda? (d) Determinați ecuațiile care ne dau viteza și accelerarea particulelor mediului ($v_y = \frac{dy}{dt}$; $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$). (e) Calculați viteza și accelerarea particulelor mediului la momentul $t = 0$ pentru intervale de 1.5 cm până la $x = 12$ cm [adică $v_y(x, 0) = f'(x)$ și $a_y(x, 0) = f''(x)$ pentru $x = 0, 1.5, 3, 3.5, \dots, 12$ cm] și reprezentați-le grafic. (f) Pentru fiecare punct considerat, descrieți în cuvinte dacă particula se mișcă, în ce direcție și dacă viteza îi scade sau crește.

2.11. Două pulsuri identice, dar de amplitudini opuse se propagă printr-un fir, așa cum este indicat în figură, pentru $t = 0$. Reprezentați cum arată firul pentru $t = 1, 1.5, 2$ s.



2.12. Un puls se deplasează printr-un fir și este descris de următoarea ecuație: $y(x, t) = \frac{b^3}{b^2 + (2x - ut)^2}$ unde $b = 5$ cm și $u = 5$ cm/s. (a) Reprezentați pulsul pentru $t = 0$. (b) Care este viteza pulsului și direcția de deplasare? (c) Calculați viteza transversală a pulsului la momentul $t = 0$.

2.13. Două unde se deplasează printr-un mediu elastic. Undele sunt date de următoarele funcții:

$$\Psi_1(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} \quad \text{și} \quad \Psi_2(x, t) = Ae^{i(\Omega t - Kx)}.$$

(a) Arătați că aceste funcții de undă satisfac ecuația de undă diferențială generală. (b) Presupuneți că $\Omega = \omega + \Delta\omega$ și $K = k + \Delta k$, unde $\Delta\omega \ll \omega$ și $\Delta k \ll k$. Ignorați efectele de ordin doi și arătați că partea reală a undei obținută prin interferență undelor de mai sus este:

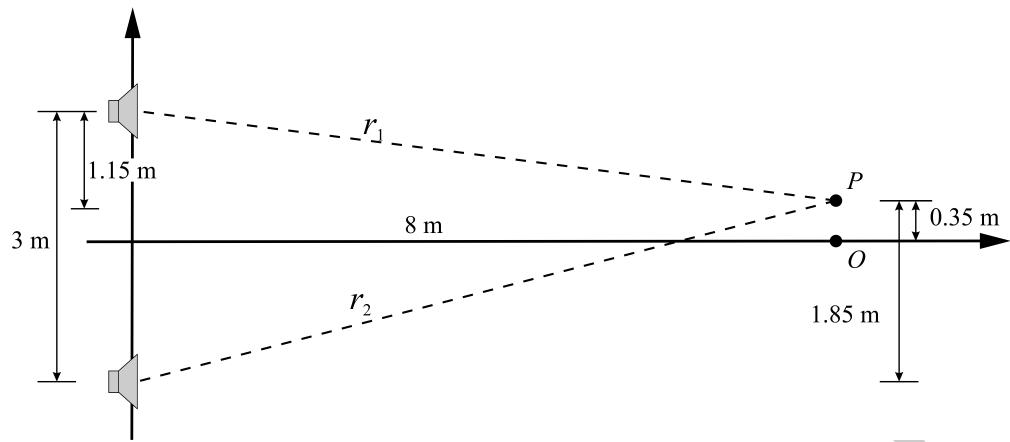
$$Q(x, t) = \operatorname{Re}[\Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t)] \approx 2A \cos \left[\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2} \right] \cos(\omega t - kx).$$

Aceasta este o undă similară cu $\Psi_1(x, t)$, dar care are amplitudinea modulată de

$$\cos \left[\frac{(\Delta\omega)t - (\Delta k)x}{2} \right].$$

(c) Calculați cu ce viteză se propagă modulația (această viteză se numește viteză de grup).

2.14. O pereche de difuzoare amplasate la 3.00 m distanță emit un sunet cu frecvență constantă (vezi figura de mai jos). Un ascultător este inițial în punctul O , care este situat la 8.00 m de centrul liniei dintre cele două difuzoare. Ascultătorul merge apoi spre punctul P , care este la distanța de 0.350 m de O . În acest punct intensitatea sunetului este minimă. Care este frecvența sunetului emis de difuzoare?



- 2.15.** Motoarele care acționează elicele unui avion sunt, în unele cazuri, reglate folosind fenomenul de bătăi (interferență în timp). Motorul produce un sunet care are aceeași frecvență cu elicea.
- (a) Dacă o elice se rotește cu 575 rpm (rotații pe minut) și auziți o bătaie de 2.0 Hz atunci când pornește a doua elice, care sunt cele două frecvențe posibile (in rpm) a celei de-a doua elice? (B) Să presupunem că creșteți viteza celei de-a doua elice ușor și descoperiți că frecvența de bătaie se schimbă la 2.1 Hz. În partea (s), care dintre cele două răspunsuri a fost cel corect?