Şiruri de numere reale

October 10, 2024

1 Noţiuni teoretice

Definiţie 1 *Se numeşte şir de numere reale o funcţie* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. *Punând* $a_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, *şirul se notează prin* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sau* (a_n).

Un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, se numeşte :
- **mărginit** dacă există $M \geq 0$ astfel încât $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- **crescător (descrescător)** dacă $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- **monoton** dacă este crescător sau descrescător.

Reamintim aici câteva criterii importante în calculul limitelor de şiruri.

Teoremă 1 (Criteriul cleştelui) *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ *şiruri de numere reale cu proprietatea că*

$$a_n \leq b_n \leq c_n, n \geq n_0.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

Teoremă 2 (Stolz-Cesaro I) *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *şiruri de numere reale cu proprietăţile:*
1) $(b_n)_{n\geq 1}$ *este strict monoton şi nemărginit*;
2) *există limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$;
Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teoremă 3 (Stolz-Cesaro II) *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şiruri de numere reale cu proprietăţile:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;
2) $(b_n)_{n\geq 1}$ *este strict monoton*;
3) *există limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$;
Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teoremă 4 (Consecinţa Teoremei lui Stolz-Cesaro) *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, un şir de numere strict pozitive cu proprietatea că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Teoremă 5 (Criteriul raportului) *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere strict pozitive cu proprietatea că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci:*
1) *dacă* $l < 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
2) *dacă* $l > 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
3) *dacă* $l = 1$, *criteriul nu este eficient.*

Şiruri remarcabile

1) Şirul $(e_n)_{n\geq 1}$,
$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
este strict crescător şi are limita e ($e \simeq 2,71828...$).

2) Şirul $(E_n)_{n\geq 1}$,
$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
este strict crescător şi are limita e.

3) Şirul $(\gamma_n)_{n\geq 1}$,
$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$
este strict descrescător şi mărginit inferior. Limita sa notată cu γ se numeşte **constanta lui Euler** ($\gamma \simeq 0,577...$).

Observaţie 1

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2 Exerciţii şi probleme

Ex. 1 *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *dacă, pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

b) $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$;

c) $x_n = \frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n^2}$ *unde* $x \in \mathbb{R}$;

d) $x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{n^k+n+1}+1}$;

e) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k-1)(n+k)}}$;

f) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - n.$

Ex. 2 *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *dacă, pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $x_n = \frac{1^p+2^p+\ldots n^p}{n^{p+1}}$, *unde* $p \in \mathbb{N}^*$;

b) $x_n = \frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 2$;

c) $x_n = \frac{a+\sqrt{a}+\ldots+\sqrt[n]{a}-n}{\ln n}$, *unde* $a > 0$.

Ex. 3 *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *dacă, pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $x_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!8^n}}$, $n \geq 2$;

b) $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, $n \geq 2$;

c) $x_n = \frac{2^n n!}{n^n}$;

d) $x_n = \sqrt[n^2]{(pn)!}$, $p \in \mathbb{N}^*$;

e) $x_n = \left(\frac{(n!)^3}{n^{3n}e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Ex. 4 *Se consideră şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *definit prin relaţia de recurenţă*

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 1, a_1 > 0.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

Ex. 5 *Fie şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *dat prin relaţia de recurenţă* $a_{n+1} = \sin a_n$, *cu* $a_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Arătaţi că*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot a_n = \sqrt{3}.$$

Ex. 6 *Fie şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *dat prin relaţia de recurenţă* $a_{n+1} = \arctan a_n$, *cu* $a_1 > 0$. *Arătaţi că*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot a_n = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ex. 7 *Fie* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *o funcţie descrescătoare şi mărginită inferior. Să se arate că şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *de termen general*

$$a_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) - \int_1^n f(x)dx$$

este convergent.

Ex. 8 *Să se arate că următoarele şiruri sunt convergente, folosind problema precedentă.*

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$;

b) $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$;

c) $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$;

d) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$;

e) $a_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \cdots + \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n)$.

Ex. 9 *Dacă notăm cu l limitele şirurilor de la exerciţiul precedent, să se calculeze limitele următoare:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - l\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} - l\right)$, $\alpha \in (0,1)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\left(1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} - l\right)$, $\alpha > 1$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} - l\right)$.

Ex. 10 *Să se arate că au loc următoarele relaţii:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2\right) = -\frac{1}{4}$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}} - e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\right) = e^{\gamma}$;

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} - e\right) = -1$.

3 Indicaţii şi răspunsuri

Solutie Ex. 1 *Se aplică criteriul cleştelui a)* 1, *b)* $\frac{1}{2}$, *c)* $\frac{x}{2}$, *d)* 1, *e)* $\ln 2$, *f)* $\frac{1}{4}$.

Solutie Ex. 2 *Se utilizează prima teoremă a lui Stolz-Cesaro a)* $\frac{1}{p+1}$, *b)* 1, *c)* $\ln a$.

Solutie Ex. 3 *a)* $\frac{1}{32}$, *b)* e, *c)* 0, *d)* 1, *e)* e^{-2}.

Solutie Ex. 4 *Limita este* $\sqrt{2}$.

Solutie Ex. 5 *$a_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ implică $a_2 \in (0,1) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi prin inducţie matematică avem $a_n \in (0,1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. Pe de altă parte*

$$a_{n+1} - a_n = \sin a_n - a_n < 0, \text{ pentru orice } n \geq 1$$

(inegalitatea $\sin x < x$, pentru orice $x > 0$ este cunoscută). Aşadar şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent, şi fie a limita lui: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in [0,1)$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă $a_{n+1} = \sin a_n$ avem $a = \sin a$, deci $a = 0$. Avem

$$\sqrt{n} \cdot a_n = \sqrt{n a_n^2} = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{a_n^2}}}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Deoarece $\left(\frac{1}{a_n^2}\right)_{n\geq 1}$ este şir crescător şi $\frac{1}{a_n^2} \to \infty$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} \stackrel{Stolz}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 a_n} - \frac{1}{a_n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 \sin^2 a_n}{a_n^2 - \sin^2 a_n} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2 - \sin^2 x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x - \sin x} \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 3,$$

adică

$$\lim \sqrt{n} \cdot a_n = \sqrt{3}.$$

Solutie Ex. 6 *Rezolvarea este similară cu cea a problemei precedente.*

Solutie Ex. 7 *Se arată că şirul este monoton şi mărginit.*

Solutie Ex. 8 *Se ia a) $f(x) = \frac{1}{x}$, b) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, c) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 1$, d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, e) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.*

Solutie Ex. 9 *Se foloseşte a doua teoremă a lui Stloz-Cesaro obţinându-se: a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{1-\alpha}$, d) $\frac{1}{2}$.*