Proiectare logică

Curs 3

Algebra booleană. Funcții booleene. Porți logice. Reprezentarea funcțiilor booleene

Cristian Vancea

https://users.utcluj.ro/~vcristian/PL.html

Cuprins

- Algebra booleană
- Funcții booleene
- Funcții booleene elementare (porți logice)
- Reprezentarea funcțiilor booleene

Algebra booleană

- Bazele algebrei booleene au fost puse de George Boole (1815-1864).
- Algebra booleană este folosită pentru a descrie la nivel simbolic comportamentul circuitelor de comutare prin care se transferă, prelucrează și stochează datele din calculator.
- Circuitele de comutare au 2 stări codificate cu valorile binare 1 și 0, de unde denumirea de circuite logice.
- Algebra booleană operează cu propoziții logice *adevărate* (valoarea 1) sau *false* (valoarea 0) => algebra logică.
- Propoziții logice:
  - Simple;
  - Compuse –> se obțin din cele simple prin legături logice: conjuncție ȘI/AND (Λ / •), disjuncție SAU/OR (V / +), negație NOT (⌐ / ¯).

Algebra booleană

Definiție – Algebra booleană este formată din:

- Elementele 0 și 1;
- 2 operații binare: SAU (+), ȘI (•);
- 1 operație unară: NOT (¯).

$x_1 x_2$	SAU $x_1 + x_2$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

$x_1 x_2$	ȘI $x_1 \cdot x_2$
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

x	NOT $\bar{x}$
0	1
1	0

Algebra booleană

Axiome

1. $\forall x_1, x_2 \in \{0, 1\} \Rightarrow x_1 + x_2 \in \{0, 1\}, x_1 \cdot x_2 \in \{0, 1\}$
2. Comutativitate:

$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$

3. Asociativitate:

$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$

4. Distributivitate:

$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3)$
$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3)$

5. Elemente neutre:

$x + 0 = 0 + x = x, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

6. Principiul terțului exclus:

$x + \bar{x} = 1$

7. Principiul contradicției :

$x \cdot \bar{x} = 0$

Algebra booleană

Proprietăți

1. Dubla negație: $\bar{\bar{x}} = x$
2. Idempotența: $x + x = x, x \cdot x = x$
3. Absorția:

$x_1 + (x_1 \cdot x_2) = x_1$
$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1$

4. Consecințe pentru elementele neutre: $x + 1 = 1, x \cdot 0 = 0$
5. Formulele lui De Morgan:

$\overline{x_1 + x_2 + \ \dots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \ \dots \cdot \overline{x_n}$
$\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ \dots \cdot x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ \dots + \overline{x_n}$

5. Teorema lui Shannon (generalizare) – Complementul unei expresii (funcții) booleene de $\boldsymbol{n}$ variabile se obține complementând variabilele și interschimbând + cu ·.
6. Principiul dualității – orice proprietate sau axiomă rămâne valabilă dacă se interschimbă + cu · și 0 cu 1.

Funcții booleene

Definiție – $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}, f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = y$

- Variabilele și rezultatul pot avea doar valoarea 0 sau 1.
- Variabilele x_i reprezintă elemente de comutare cu 2 stări (întrerupător închis/deschis, tranzistor blocat/în conducție).
- Funcțiile caracterizează funcționarea unor circuite construite cu elemente de comutare.
- 2 funcții sunt egale dacă au rezultate identice pentru orice combinație valorică a variabilelor de intrare.
- Pentru n variabile se pot defini 2^{2^n} funcții.

Ex: n = 1 => $f(x_0) : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$. Se pot defini 4 funcții:

$f_1 : f_1(0) = 0, f_1(1) = 0$ – constanta 0

$f_2 : f_2(0) = 0, f_2(1) = 1$ – variabila x_0

$f_3 : f_3(0) = 1, f_3(1) = 0$ – variabila x_0 negat

$f_4 : f_4(0) = 1, f_4(1) = 1$ – constanta 1

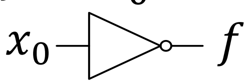
Funcții booleene elementare

Orice funcție booleană se poate realiza cu funcții elementare
=> Orice circuit logic se poate realiza cu circuite de bază (porți logice) care corespund funcțiilor elementare.

Exemple de funcții elementare:

Inversor (NOT/INV)

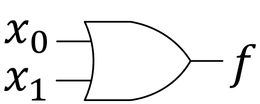
$f = \overline{x_0}$



x_0	f
0	1
1	0

SAU (OR)

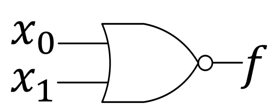
$f = x_1 + x_0$



x_1	x_0	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

SAU-NU (NOR)

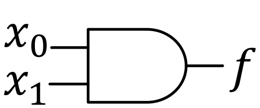
$f = \overline{x_1 + x_0}$



x_1	x_0	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ȘI (AND)

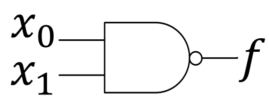
$f = x_1 \cdot x_0$



x_1	x_0	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ȘI-NU (NAND)

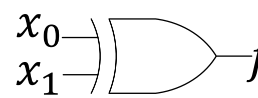
$f = \overline{x_1 \cdot x_0}$



x_1	x_0	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

SAU-EXCLUSIV (XOR)

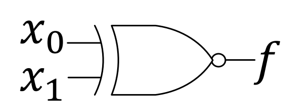
$f = x_1 \oplus x_0$



x_1	x_0	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

COINCIDENȚĂ (XNOR)

$f = \overline{x_1 \oplus x_0}$
$= x_1 \odot x_0$



x_1	x_0	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Funcții booleene elementare

Prioritatea operațiilor

Simbol	Prioritate
$()$	mare
$\overline{}$	
$\bullet$	
$\oplus, \odot$	
$+$	mică

Ex: $(b+c)\cdot\overline{a+(b+a)\cdot\bar{c}}$

1 4 3 1 2 1 <- ordinea operațiilor

Funcții booleene

Formulele de expansiune ale lui Shannon

O funcție $f\colon \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$, se poate extinde după variabila x_i astfel:

$$f(x_{n-1}, \dots, x_i, \dots, x_0) = \left(x_i \cdot f(x_{n-1}, \dots, 1, \dots, x_0)\right) + \left(\overline{x_i} \cdot f(x_{n-1}, \dots, 0, \dots, x_0)\right)$$

= forma duală

$$\left(x_i + f(x_{n-1}, \dots, 0, \dots, x_0)\right) \cdot \left(\overline{x_i} + f(x_{n-1}, \dots, 1, \dots, x_0)\right)$$

Observație: Pentru forma duală s-au interschimbat $+$ cu $\cdot$ și 0 cu 1.

Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea grafică

Tabel de adevăr

- Pentru $\boldsymbol{n}$ variabile sunt $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$ combinații.
- Pentru combinațiile în care funcția nu este specificată se trece **X** în coloana rezultat => funcția este incomplet definită.

x_{n-1}	x_{n-2}	…	x_0	f
0	0	…	0	
0	0	…	1	
		…		
1	1	…	1	

Ex$_1$: $f = x_0 + (x_1 \cdot \overline{x_2})$

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Ex$_2$: funcție incomplet definită

x_1	x_0	f
0	0	X
0	1	1
1	0	X
1	1	0

Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea grafică

Diagramă Karnaugh

- Se pretează pentru funcții cu maxim $\boldsymbol{n = 4}$ variabile.
- Se împart cele $\boldsymbol{n}$ variabile în 2 grupuri cu $\boldsymbol{k}$, respectiv $\boldsymbol{l}$ variabile:

$$k + l = n, k, l > 0, |\mathrm{k} - l| \leq 1.$$

- Se desenează un dreptunghi cu $\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$ celule având $\mathbf{2}^{\boldsymbol{l}}$ linii și $\mathbf{2}^{\boldsymbol{k}}$ coloane.
- Variabilelor din grupul $\boldsymbol{l}$ se dau valori consecutive în cod Gray, care se atașează liniilor (de sus în jos). Similar codurile Gray consecutive ale variabilelor din grupul $\boldsymbol{k}$ se atașează coloanelor (de la stânga la dreapta).
- În celule se introduce valoarea funcției pentru valorile variabilelor asociate la linia și coloana curentă.
- Rândurile și coloanele de la extremități se consideră învecinate.

Ex:

Funcție cu **2** variabile

k=1 (x_0)

l=1 (x_1)

$\boldsymbol{x_1} \backslash \boldsymbol{x_0}$	0	1
0		
1		

$f(0,1)$

Funcție cu **3** variabile

k=2 ($x_1 x_0$)

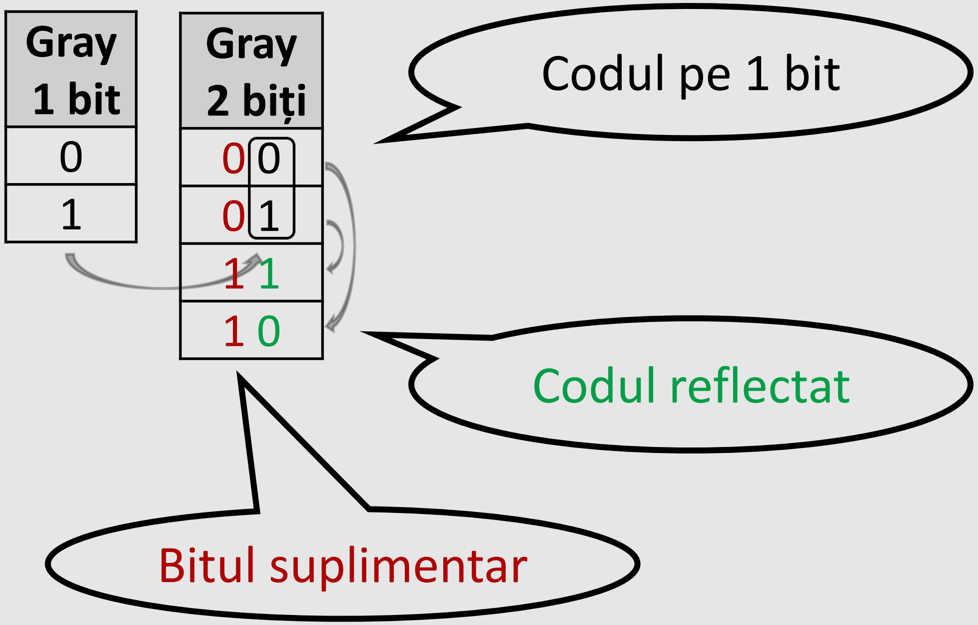
l=1 (x_2)

$f(0,1,1)$

$\boldsymbol{x_2} \backslash \boldsymbol{x_1 x_0}$	00	01	11	10
0				
1				

Codul Gray

- cod **reflectat** – codul pe ***n*** biți se generează prin reflectarea codului pe ***n***-1 biți și adăugarea unui bit suplimentar pe poziția cea mai semnificativă (la stânga): 0 la codul normal și 1 la cel reflectat.
- cod **ciclic** fiindcă oricare **2 coduri consecutive diferă printr-un bit**.



Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea grafică

Celulele verzi reprezintă vecinii celulei maro.

Diagramă Karnaugh

Ex:

Cu **3** variabile

k=1 (x_0)

l=2 $(x_2 x_1)$

$x_2x_1 \backslash x_0$	0	1
00		
01		
11		
10		

$f(0,1,0)$

Cu **4** variabile

k=2 $(x_1 x_0)$

l=2 $(x_3 x_2)$

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$x_3x_2x_1x_0$	f
0 1 0 1	
1 1 0 1	
1 1 1 1	

Observație: 2 celule învecinate pe orizontală sau verticală corespund întotdeauna la 2 combinații valorice care diferă printr-o variabilă.

Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea grafică

Diagramă Karnaugh

Ex: $f = x_0 + (x_1 \cdot \overline{x_2})$

Tabel de adevăr

$x_2 x_1 x_0$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

Diagrama Karnaugh

x_2 \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

$f(0,0,0)$ $f(0,0,1)$ $f(0,1,1)$ ..., etc.

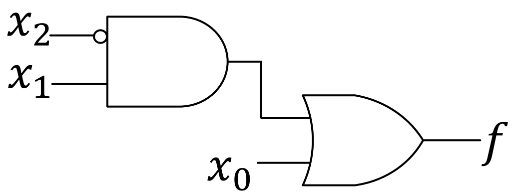
Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea grafică

Schemă logică

- Se utilizează simboluri pentru descrierea circuitelor logice și se folosesc prioritățile operatorilor.

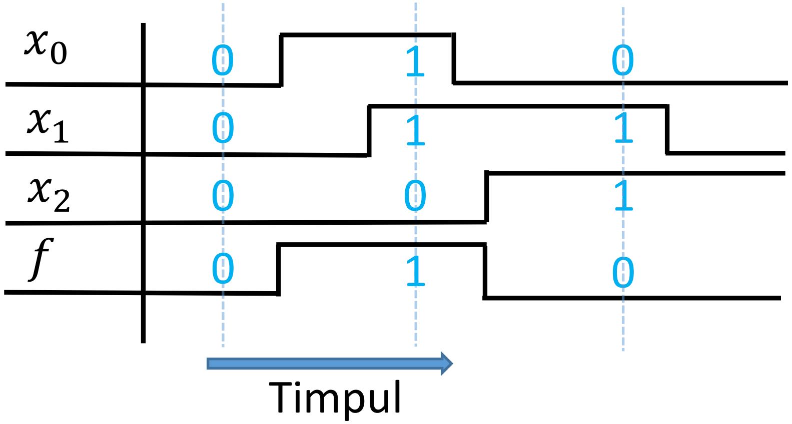
Ex: $f = x_0 + (x_1 \cdot \overline{x_2})$



Diagramă de timp

- Pune în evidență evoluția valorilor circuitului în timp.
- Este utilă la evidențierea unor stări tranzitorii de hazard ale circuitelor logice.

Ex: $f = x_0 + (x_1 \cdot \overline{x_2})$



Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea analitică

Număr de combinație

- Definiție – Fie $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}, f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = y$. Pentru un set de valori date variabilelor se numește **număr de combinație** valoarea echivalentă în baza 10:

$$i = x_{n-1} \times 2^{n-1} + x_{n-2} \times 2^{n-2} + \ldots + x_0 \times 2^0$$

Ex: $n = 3$ variabile

$x_2 x_1 x_0$	Nr. combinație i
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	2
0 1 1	3
1 0 0	4
1 0 1	5
1 1 0	6
1 1 1	7

Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea analitică

Mintermi

- Definiție – Funcția $P_i: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$,

$$P_i(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0) = \begin{cases} 1, \text{pentru nr. de combinație} = i \\ 0, \text{altfel} \end{cases}$$

se numește contintuent al unității sau minterm.

Ex: $n = 3$ variabile

$P_0(0,0,0) = 1$
$P_0(0,0,1) = 0$
$P_0(0,1,0) = 0$
…

$P_0 = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0}$

$P_1(0,0,0) = 0$
$P_1(0,0,1) = 1$
$P_1(0,1,0) = 0$
…

$P_1 = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0$

. . .

$P_7(0,0,0) = 0$
…
$P_7(1,1,0) = 0$
$P_7(1,1,1) = 1$

$P_7 = x_2 \cdot x_1 \cdot x_0$

P_i = conjuncție de variabile negate dacă apar cu 0 în numărul de combinație $\boldsymbol{i}$ sau nenegate, altfel. conjuncție => minterm

Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea analitică

Maxtermi

- Definiție – Funcția $S_i: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$,

$$S_i(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0) = \begin{cases} 0, \text{pentru nr. de combinație} = i \\ 1, \text{altfel} \end{cases}$$

se numește contintuent al lui zero sau maxterm.

Ex: $n = 3$ variabile

$$S_0(0,0,0) = 0$$
$$S_0(0,0,1) = 1$$
$$S_0(0,1,0) = 1$$
...

$$S_1(0,0,0) = 1$$
$$S_1(0,0,1) = 0$$
$$S_1(0,1,0) = 1$$
...

$\cdots$

$$S_7(0,0,0) = 1$$
...
$$S_7(1,1,0) = 1$$
$$S_7(1,1,1) = 0$$

$$S_0 = \overline{P_0} = x_2 + x_1 + x_0 \quad S_1 = \overline{P_1} = x_2 + x_1 + \overline{x_0} \quad S_7 = \overline{P_7} = \overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0}$$

S_i = $\overline{P_i}$ = disjuncție de variabile negate dacă apar cu 1 în numărul de combinație $\boldsymbol{i}$ sau nenegate, altfel (cf. De Morgan). disjuncție => maxterm

Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea analitică

Forma Canonică Disjunctivă (FCD)

- Orice funcție $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ se poate scrie ca o disjuncție de mintermi corespunzători combinațiilor pentru care funcția $f = 1$.

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0) = \sum_{i \in \mathrm{M}_1} P_i \;\rightarrow$$ Forma Canonică Disjunctivă

(FCD = sumă de produse)

M_1 = mulțimea combinațiilor valorice pentru care $f = 1$.

Mintermii se numesc termeni canonici disjunctivi.

Ex: $n = 3$ $f = x_0 + (x_1 \cdot \overline{x_2})$

$x_2 x_1 x_0$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

x_2 \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

$$f = P_1 + P_2 + P_3 + P_5 + P_7 =$$
$$(\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0) +$$
$$(\overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}) +$$
$$(\overline{x_2} \cdot x_1 \cdot x_0) +$$
$$(x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0) +$$
$$(x_2 \cdot x_1 \cdot x_0)$$

Observație: Fiecare celulă cu valoarea 1 din Diagrama Karnaugh corespunde unui minterm.

Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea analitică

Forma Canonică Conjunctivă (FCC)

- Orice funcție $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ se poate scrie ca o conjuncție de maxtermi corespunzători combinațiilor pentru care funcția $f = 0$.

$$f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0) = \prod_{i \in M_0} S_i$$ → Forma Canonică Conjunctivă (FCC)

(FCC = produs de sume)

M_0 = mulțimea combinațiilor valorice pentru care $f = 0$.

Maxtermii se numesc termeni canonici conjunctivi.

Ex: $n = 3$ $f = x_0 + (x_1 \cdot \overline{x_2})$

$x_2 x_1 x_0$	f
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

x_2 \ $x_1 x_0$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	1	0

$$f = S_0 \cdot S_4 \cdot S_6 =$$
$$(x_2 + x_1 + x_0) \cdot$$
$$(\overline{x_2} + x_1 + x_0) \cdot$$
$$(\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0)$$

Observație: Fiecare celulă cu valoarea 0 din Diagrama Karnaugh corespunde unui maxterm.

Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea analitică

Forme Canonice

Ex$_1$: $n = 2$ $f = x_0 \oplus x_1$

x_1	x_0	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0	1
1	1	0

$f = P_1 + P_2 = (\overline{x_1} \cdot x_0) + (x_1 \cdot \overline{x_0})$ - FCD

$f = S_0 \cdot S_3 = (x_1 + x_0) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_0})$ - FCC

Ex$_2$: $n = 2$ $f = x_0 + x_1$

x_1	x_0	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$x_1 \backslash x_0$	0	1
0	0	1
1	1	1

$f = P_1 + P_2 + P_3 = (\overline{x_1} \cdot x_0) + (x_1 \cdot \overline{x_0}) + (x_1 \cdot x_0)$ - FCD

$f = S_0 = x_1 + x_0$ - FCC

Reprezentarea funcțiilor booleene

Reprezentarea analitică

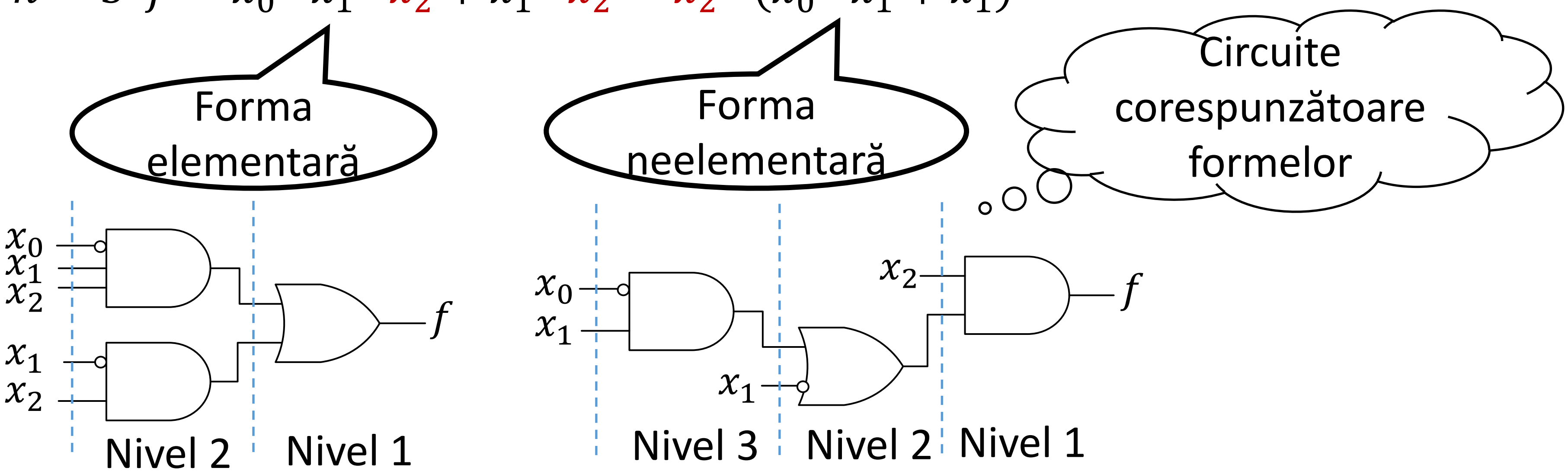
Forma elementară

- Termenii nu conțin toate variabilele de intrare precum la forma canonică.
- Se obține din forma canonică prin tehnici minimizare.

Forma neelementară

- Se obține din alte forme prin extragerea factorului comun unde este posibil.

Ex: $n = 3\ \ f = \overline{x_0} \cdot x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot x_2 = x_2 \cdot (\overline{x_0} \cdot x_1 + \overline{x_1})$



Observație: La forma neelementară scade numărul de intrări ale porților logice (avantaj), dar crește numărul de niveluri logice (dezavantaj).