UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

Facultatea de Automatică și Calculatoare
Calculatoare și Tehnologia Informației [CA,TI-lic., ro.]
anul 1, seria A (2024/2025, semestrul 2)

ANALIZĂ MATEMATICĂ II
Calcul integral și ecuații diferențiale

conf. univ. dr. **MIRCEA RUS**

Cursul 2: Ecuații diferențiale (2)

1 Ecuații diferențiale ordinare (aspecte generale)

- O *ecuație diferențială ordinară* (*EDO*) este o ecuație diferențială cu o necunoscută (y) care depinde de o singură variabilă (x), deci $y = y(x)$ unde x parcurge o mulțime $D \subseteq \mathbb{R}$ (în cele mai multe situații, D este un interval).
- Forma generală implicită a unei *EDO* este
$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \quad \text{pentru orice } x \in D \tag{1}$$
iar n se numește *ordinul ecuației*.
- În anumite cazuri, ecuația (1) se poate rescrie explicit sub forma
$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \quad \text{pentru orice } x \in D \tag{2}$$
(se mai numește *forma normală* a ecuației (1)).

- Prin *rezolvarea* ecuației (1) (sau (2)) se înțelege obținerea unei relații algebrice între necunoscuta y și variabila x, care să nu conțină derivate ale lui y: $\Phi(x,y)=0$, unde funcția Φ va depinde de un număr de constante arbitrare (numite constante de integrare).
- Atașând ecuației un număr de n condiții inițiale
$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$
se obține o *problemă Cauchy* care, în anumite condiții suplimentare, are o unică soluție (constantele de integrare se vor obține în mod unic din condițiile inițiale).

2 Ecuații diferențiale ordinare integrabile

Se vor discuta la curs și la seminar următoarele tipuri de *EDO* integrabile:

- cu variabile separabile
- omogene (în sensul lui Euler)
- exacte (+ factor integrant)
- liniare de ordinul 1 (omogene și neomogene)
- Bernoulli
- Riccati
- sub formă implicită (Lagrange, Clairaut)
- liniare de oridinul doi cu coeficienți constanți
(omogene și neomogene; metoda variației constantelor)

---

y notează funcția necunoscută

x notează variabila de care depinde y

$y=y(x), \quad x\in I$ interval

E.D.O. **cu variabile separabile**

$y'(x)=f(x)\cdot g(y(x))$ pentru orice $x\in I$; $\quad f,g$ sunt funcții continue

simplificat: $\boxed{y'=f(x)\cdot g(y)}$ se înțelege din context că $y=y(x)$ și $y'=y'(x)$

Soluții constante (singulare):

$y'=f(x)\cdot g(y)=0$ pentru orice $x\in I \Rightarrow y=c\in\mathbb{R}$, unde $g(c)=0$.

Soluția generală:

$y'=f(x)\cdot g(y)\neq 0$ cel puțin într-un punct x

$\Rightarrow$(din continuitate) $y'=f(x)\cdot g(y)\neq 0$ pentru toate valorile x dintr-un interval.

Se separă variabilele (se împarte cu $g(y)\neq 0$), apoi se integrează:

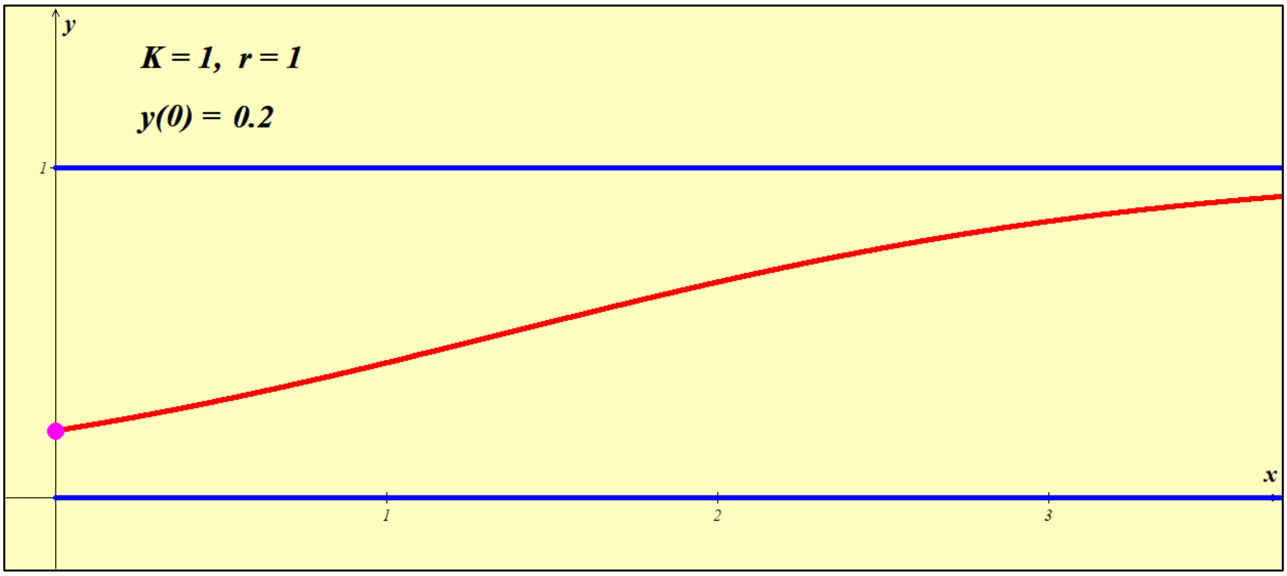
$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{schimbare de variabilă} \rightarrow \quad \boxed{\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

S-au discutat la curs exemplele următoare:

Exemplul 1. Să se rezolve problema Cauchy $y' = 2x(y^2+1)$, $y(0) = 1$.

Exemplul 2. Să se integreze ecuația $y' = ry$, $r \in \mathbb{R}^*$ (din cursul anterior).

Exemplul 3. Să se integreze ecuația $y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$, $r \in \mathbb{R}^*, K > 0$ (din cursul anterior).



Exemplul 4. Să se rezolve problema Cauchy

$$x(y+2)y' = 1 + \ln x, \quad y(1) = -1.$$

E.D.O. **omogene**

$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ pentru orice $x \in I$ (interval ce nu-l conține pe 0); f continuă.

Simplificat: $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Metodă: schimbare de funcție $z = \frac{y}{x}$ (se scrie ecuația în z și x, se determină $z = z(x)$, apoi $y = xz$) $\quad y = xz \Rightarrow y' = xz' + z \Rightarrow \underbrace{xz' + z}_{y'} = \underbrace{f(z)}_{f\left(\frac{y}{x}\right)} \Rightarrow \underline{xz' = f(z) - z}$

(*E.D.O.* cu variabile separabile în x și z).

Observație:

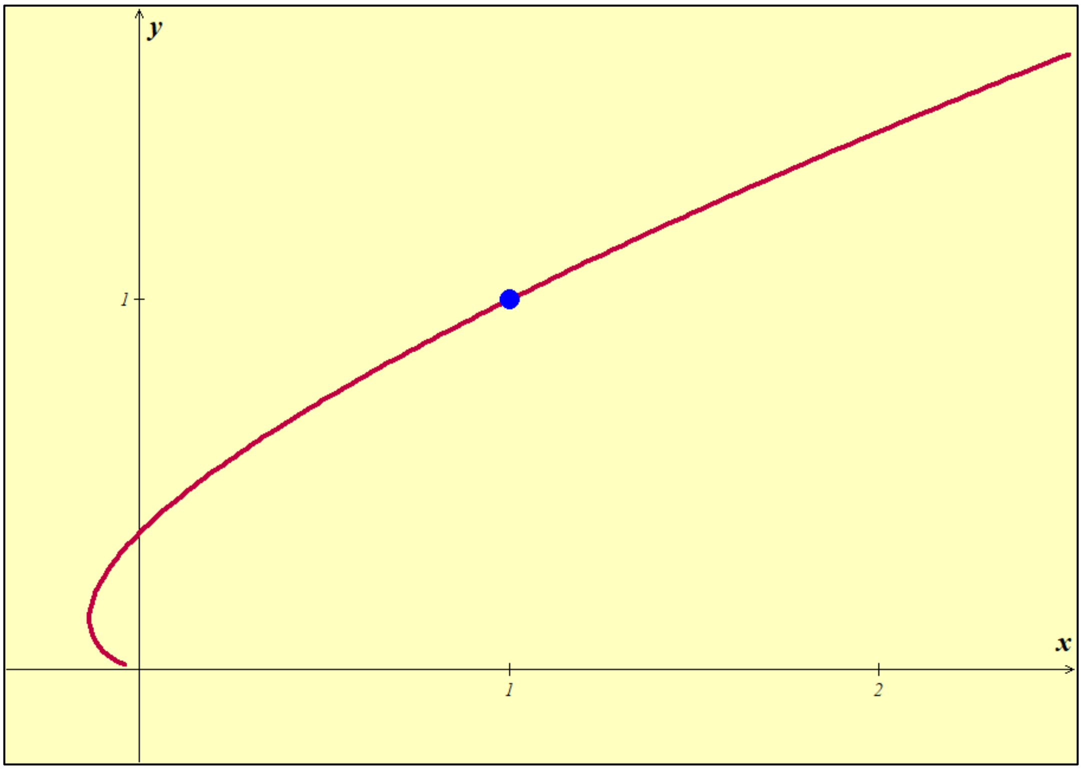
$$xz' = f(z) - z \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{z'}{f(z)-z} \Rightarrow \ln|x| = \underbrace{\int \frac{dz}{f(z)-z}}_{F(z)} + c_1 \Rightarrow x = C \cdot e^{F(z)}, \quad C \in \mathbb{R}^* \text{ constantă.}$$

Dacă ecuaţia nu se poate rezolva pentru a obţine $z = z(x)$, atunci z se poate considera parametru iar soluţia se exprimă parametric: $\begin{cases} \boxed{x = C \cdot e^{F(z)}} \\ \boxed{y = C \cdot ze^{F(z)}} \end{cases}$ (deoarece $y = xz$).

S-au discutat la curs exemplele următoare:

Exemplul 5. Să se integreze ecuația $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}, \quad x > 0.$

Exemplul 6. Să se rezolve problema Cauchy $y' = \frac{y}{x+y}, \quad y(1) = 1.$



Studiu individual:

Problema 1. $y' = e^y + 1$

Problema 2. $y' = y - y^3$

Problema 3. $yy' = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}, \quad y(0) = 1$

Problema 4. $xy^2(xy' + y) = 4$

Problema 5. $xy' \cdot \cos y + \sin y = 0.$

Problema 6. $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y(1) = 1$

Problema 7. $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

Resurse suplimentare:

https://math24.net/separable-equations
https://math.libretexts.org/@go/page/335
https://math.libretexts.org/@go/page/9398
https://math24.net/homogeneous-equations