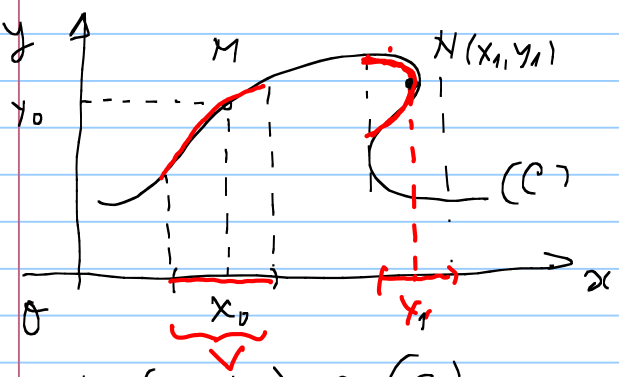
Funcții implicite

Fie $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de două variabile. Atunci $(C): F(x,y)=0$ este o curbă plană.



Fie $M(x_0, y_0) \in (C)$.

Întrebare: Există un punct (x_0, y_0) pe C și o vecinătate V a lui x_0 a.î. porțiunea din graficul lui (C) determinată de V să fie graficul unei funcții?

D1. Fie $F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $A \times B \subseteq D$. O funcție $f: A \to B$ cu proprietatea

$$F(x, f(x)) = 0, \ \forall x \in A,$$

s.n. funcție implicită definită de ecuația

$$F(x,y)=0.$$

Obs. O funcție implicită este o soluție în raport cu necunoscuta y a ecuației $F(x,y)=0$.

Exemplul 1. Considerăm ecuația $x^2+y^2-1=0$.

Atunci: $y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.

Funcțiile: $y_1(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$

$y_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$

$$y_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in A \subseteq [-1,1] \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1,1] \setminus A. \end{cases}$$

sunt funcții implicite definite de ecuația
$$x^2+y^2-1=0 \text{ pe } [-1,1].$$

<u>Exemplul 2</u>. Ecuația
$$x^3+y^3-3x+7=0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$
definește o singură funcție implicită
$$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$
$$y(x)=\sqrt[3]{-x^3+3x-7},\ x\in\mathbb{R}.$$

<u>Întrebare</u>. În ce condiții o ecuație de forma
$$F(x,y)=0$$
definește o funcție implicită $y=f(x)$ într-o vecinătate a unui punct $M(x_0,y_0)$ de pe graficul său?

Un răspuns la această întrebare este dat în următoarea teoremă.

T2 (<u>Teorema funcțiilor implicite - TFI</u>)

Fie $D\subseteq\mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, $F:D\to\mathbb{R}$ și $(x_0,y_0)\in D$. Dacă:

1) $F(x_0,y_0)=0$;
2) $F\in C^1(D)$;
3) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Atunci există o vecinătate deschisă $U\in\mathcal{V}(x_0)$ și o vecinătate deschisă $V\in\mathcal{V}(y_0)$, $U\times V\subseteq D$, și o unică funcție $f:U\to V$ a.î.:

a) $f(x_0)=y_0$;
b) $F(x,f(x))=0,\ \forall x\in U$;
c) $f\in C^1(U)$ and
$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))},\ \forall x\in U.$$

Obs 1) T. 2 spune că ecuația $F(x,y)=0$, în condițiile 1), 2), 3) definește o funcție implicită unică $y=f(x)$, satisfăcând condițiile a), b), c).

2) Dacă în T. 2 funcția F este de clasă C^k atunci f este de asemenea de clasă C^k, $k\geq 1$.

3) Relația c) din T. 2 poate fi obținută derivând ecuația $F(x,y)=0$ în raport cu x, unde presupunem că y este funcție de x.

Într-adevăr avem:

$$F(x,y)=0 \,\Big|'_x \quad \underline{\underline{y=f(x)}}$$

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot y'=0 \Rightarrow$$

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Exemplul 3. Demonstrați că ecuația $y^3+3x^2y-4x=0$ definește o unică funcție implicită $y=f(x)$ într-o vecinătate a lui $(1,1)$. Determinați $f'(1)$ și $f''(1)$.

Soluție: Fie $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y)=y^3+3x^2y-4x$, și $(x_0,y_0)=(1,1)$. Verificăm condițiile 1), 2), 3) din Teorema 2. Avem:

1) $F(1,1)=0$; 2) $F\in C^2(\mathbb{R}^2)$; 3) $F'_y(x,y)=3y^2+3x^2 \Rightarrow$ $F'_y(1,1)=6\neq 0$.

Rezultă că ecuația $F(x,y)=0$ definește o unică funcție implicită $y=f(x)$ într-o vecinătate a lui $(1,1)$, satisfăcând a), b), c).

Pentru a determina $f'(1)$ și $f''(1)$ derivăm ecuația

$$y^3+3x^2y-4x=0,\quad y=f(x) \qquad (1)$$

în raport cu x. Avem:

$$3y^2y'+6xy+3x^2y'-4=0 \qquad (2)$$

$$y'=\frac{4-6xy}{3(x^2+y^2)}; \qquad (3)$$

Derivând din nou (2) în raport cu x obținem:

$$6y(y')^2+3y^2y''+6y+6xy'+6xy'+3x^2y''=0$$

de unde

$$y''=-\frac{2y(y')^2+2y+4xy'}{x^2+y^2} \quad (4)$$

Pentru $x=y=1$ în (3) $\Rightarrow y'(1)=f'(1)=-\frac{1}{3}$,

iar pentru $x=y=1$, $y'=-\frac{1}{3}$ în (4) avem:

$$y''(1)=f''(1)=-\frac{4}{9}.$$

<u>Exemplul 4</u> Să se determine ecuația tangentei la curba $(C): x^3+y^3-x^2y-7=0$ în punctul $M(1,2)$ de pe curba (C).

<u>Soluție</u> Verificăm dacă $M\in(C)$. Avem:

$$1^3+2^3-1^2\cdot2-7=1+8-2-7=0.$$

Ecuația din enunț definește o funcție implicită $y=f(x)$ într-o vecinătate a punctului M.

Fie $F(x,y)=x^3+y^3-x^2y-7$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Avem $F'_y(x,y)=3y^2-x^2 \Rightarrow F'_y(1,2)=11\neq0$.

Ecuația tangentei la curba (C) în M este:

(t) $y-y_0=m(x-x_0)$, $x_0=1$, $y_0=2 \Rightarrow$

(t) $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

Determinăm $f'(1)$. Derivăm ecuația

$$x^3+y^3-x^2y-7=0$$

în raport cu x, $y=f(x)$. Avem:

$$3x^2+3y^2\cdot y'-2xy-x^2y'=0 \Rightarrow$$

$$y'=\frac{2xy-3x^2}{3y^2-x^2}.$$

Pentru $x=1$, $y=2$ obținem:

$$y'(1)=f'(1)=\frac{1}{11}$$

Deci:

$$(t)\quad y-2=\frac{1}{11}(x-1).$$

Exemplul 5: Să se determine extremele locale ale funcției $y = f(x)$ definită de ecuația

$$x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$$

Soluție Punctele staționare ale lui f se determină din sistemul

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Pentru a determina $f'(x)$ derivăm ecuația din enunț în raport cu x, $y = f(x)$.

Avem:

$$3x^2 + 3y^2y' - 6xy - 3x^2y' = 0 \quad (2)$$

$$y' = \frac{2xy - x^2}{y^2 - x^2}, \quad y \neq \pm x.$$

Sistemul (1) este echivalent cu:

$$\begin{cases} 2xy - x^2 = 0 \\ x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Din ecuația $2xy - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2y - x) = 0$ obținem $x = 0$ sau $x = 2y$.

Pentru $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{3}$

Pentru $x = 2y \Rightarrow 8y^3 + y^3 - 12y^3 - 3 = 0 \Rightarrow y = -1$.

Deci punctele staționare sunt: $(0, \sqrt[3]{3})$; $(-2, -1)$.

Determinăm y'' din (2). Avem:

$$x^2 + y^2y' - 2xy - x^2y' = 0 \,\Big|'_x \Rightarrow$$

$$2x + 2y(y')^2 + y^2 \cdot y'' - 2y - 2xy' - 2xy' - x^2y'' = 0 \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{-2x - 2y(y')^2 + 2y + 4xy'}{y^2 - x^2}$$

Calculăm valoarea lui y'' în punctele staționare, ținând seama că $y' = 0$ în aceste puncte.

Avem:

$$y''(0) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}} > 0 \Rightarrow (0, \sqrt[3]{3}) \text{ e punct de minim.}$$

$$y''(-2) = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow (-2, -1) \text{ e punct de maxim.}$$

Teorema 2 se extinde pentru funcții implicite de mai multe variabile definite de o ecuație de forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$$

unde $F: A \times B \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \subseteq \mathbb{R}$ sunt mulțimi deschise. Are loc următorul rezultat:

(T3) Fie $(x^0, y_0) \in A \times B$. Dacă:

1) $F(x^0, y_0) = 0$;

2) $F \in C^1(A \times B)$;

3) $F'_y(x^0, y_0) \neq 0$.

Atunci există o vecinătate deschisă $U \in \mathcal{V}(x^0)$ și o vecinătate deschisă $V \in \mathcal{V}(y_0)$ și o unică funcție $f: U \to V$ a.î.:

a) $f(x^0) = y_0$;

b) $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in U$;

c) $f \in C^1(U)$ și $f'_{x_k}(x) = -\dfrac{F'_{x_k}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$, $\forall x \in U$, $1 \le k \le m$.

Obs: 1) Dacă în T3 funcția F este de clasă C^k, atunci și f este funcție de clasă C^k.

2) Relația de la punctul c) se poate obține derivând direct ecuația

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$$

în care $y = f(x_1, \dots, x_m)$.

Într-adevăr avem:

$$F'_{x_k}(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y'_{x_k} = 0, \quad 1 \le k \le m,$$

de unde obținem

$$y'_{x_k}(x) = -\frac{F'_{x_k}(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad x = (x_1, \dots, x_m).$$

__Exemplul 6__. Fie $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Presupunem că ecuația

$$F(x - az, y - bz) = 0$$

definește o funcție implicită $z(x, y)$.

Să se demonstreze relația
$$a\cdot z'_x + b\,z'_y = 1.$$

<u>Soluție</u>. Fie $u(x,y,z) = x - az$,
$v(x,y,z) = y - bz$.

Atunci
$$F\big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big) = 0,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad (1)$$

Pentru a determina z'_x, z'_y derivăm ecuația (1) în raport cu x respectiv y, ținând seama că z depinde de x și y. Avem:
$$F'_u\cdot u'_x + F'_v\cdot v'_x = 0 \Longrightarrow$$
$$F'_u\cdot(1 - a z'_x) + F'_v(-b z'_x) = 0 \Rightarrow$$
$$z'_x = \frac{F'_u}{aF'_u + bF'_v} \quad (2)$$

Analog
$$F'_u\cdot u'_y + F'_v\cdot v'_y = 0 \Longrightarrow$$
$$F'_u(-a z'_y) + F'_v(1 - b z'_y) = 0 \Rightarrow$$
$$z'_y = \frac{F'_v}{aF'_u + bF'_v}. \quad (3)$$

Din (2), (3) obținem:
$$a z'_x + b z'_y = a\frac{F'_u}{aF'_u + bF'_v} + b\frac{F'_v}{aF'_u + bF'_v} = 1. \quad \boxtimes$$

<u>Exemplul 7</u> Presupunem că ecuația
$$F\left(x + \frac{z}{y},\ y + \frac{z}{x}\right) = 0$$
definește o funcție implicită $z(x,y)$, unde $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Demonstrați relația
$$x\cdot z'_x + y\cdot z'_y = z - xy. \quad \text{(Temă)}$$

<u>Exemplul 8</u>. Să se determine extremele locale ale funcției $y = f(x)$ definită de ecuația
$$x^2 + y^3 + 2xy - 2x + 1 = 0. \quad \text{(Temă)}$$

<u>Soluție</u>. Se obține punctul staționar $(1,0)$ care e punct de maxim local al lui f.