Note Title 03.12.2021

Derivate parțiale

1. Definiție. Proprietăți.

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ pct de acumulare a lui I.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

dacă limita există și este finită.

Fie $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție depinzând de $x = (x_1, \dots, x_n)$ și $a = (a_1, \dots, a_n) \in \text{int} A$ un punct fixat.

D1.1 Spunem că f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_k în punctul a dacă

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{x_k - a_k}$$

există și este finită.

Numim limita de mai sus derivata parțială a lui f în raport cu x_k în a și o notăm prin

$$f'_{x_k}(a) \text{ sau } \frac{\partial f}{\partial x_k}(a),\ 1 \le k \le n.$$

O funcție s.n. derivabilă parțial pe o mulțime dacă este derivabilă parțial în fiecare punct al mulțimii.

Obs. Pentru o funcție de două variabile $f(x,y)$ derivatele parțiale într-un punct (a,b) se definesc prin:

$$f'_x(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$$

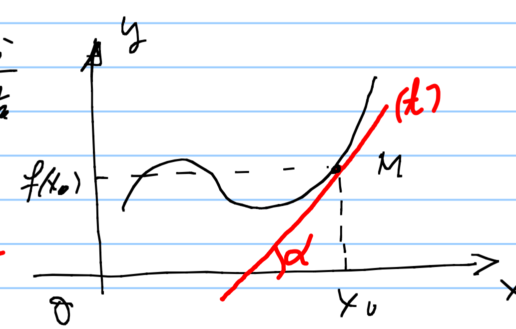
$$f'_y(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}.$$

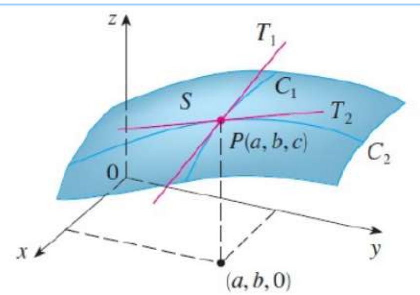
Obs: Pentru calculul derivatei parțiale f'_{x_k} se aplică regulile de derivare pentru funcții de o variabilă considerând celelalte variabile $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ constante.

Interpretare geometrică

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă în $x_0 \in I$.

$$f'(x_0) = tg\,\alpha = m$$





$c = f(a,b)$.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in D$.

- $f'_x(a,b)$ reprezintă panta tangentei T_1 la curba C_1 obținută prin intersecția graficului lui $f(x,y)$ cu planul de ecuație $y = b$.
- $f'_y(a,b)$ reprezintă panta tangenta T_2 la curba C_2 obținută prin intersecția graficului funcției $f(x,y)$ cu planul de ecuație $x = a$.

Obs Există funcții derivabile parțial într-un punct în raport cu toate variabilele care NU sunt continue în acel punct.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Avem: $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$

$f'_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$

Pe de altă parte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există (vezi cursul precedent) $\Rightarrow f$ nu e continuă în $(0,0)$.

- Presupunem că $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are derivată parțială în raport cu x_k și aceasta e derivabilă în raport cu x_i. Atunci se pot defini derivatele de ordinul 2:

$f''_{x_k x_i} = (f'_{x_k})'_{x_i}$ sau $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$

De asemenea

$f''_{x_k^2} = (f'_{x_k})'_{x_k}$ sau $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$

În general dacă $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$, notând $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ se definește

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{sau} \quad f^{|\alpha|}_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}}$$

<u>Exemplu</u>. Fie $f(x,y) = x^4 + 2x^3y^2 + 3y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Avem: $f'_x(x,y) = 4x^3 + 6x^2y^2$

$f'_y(x,y) = 4x^3y + 9y^2$

$f''_{x^2}(x,y) = (f'_x)'_x(x,y) = 12x^2 + 12xy^2$

- $f''_{xy}(x,y) = (f'_x)'_y(x,y) = 12x^2y$
- $f''_{yx}(x,y) = (f'_y)'_x(x,y) = 12x^2y$

$f''_{y^2}(x,y) = (f'_y)'_y(x,y) = 4x^3 + 18y^2$

$f'''_{x^2y} = (f''_{x^2})'_y(x,y) = 24xy$, etc ...

Să observăm că $f''_{xy} = f''_{yx}$. Are loc această egalitate în general? NU.

În anumite condiții asupra lui f are loc relația

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

<u>T1.2</u> (<u>Schwarz</u>). Fie $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție care admite derivatele parțiale mixte f''_{xy} și f''_{yx} într-o vecinătate a unui punct $(x_0, y_0) \in \text{int}\, A$ și acestea sunt continue în (x_0, y_0). Atunci

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

<u>Demonstrație.</u> Fie $a = (x_0, y_0) \in A$ şi fie expresia

$$E(x,y) = f(x,y) - f(x,y_0) - f(x_0,y) + f(x_0,y_0)$$

cu $(x,y) \in D$, $D = \{(x,y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \nu\} \subseteq A$, $\delta > 0$, $\nu > 0$.

Avem

$$E(x,y) = (f(x,y) - f(x,y_0)) - (f(x_0,y) - f(x_0,y_0)).$$

Pentru y fixat considerăm funcţia

$$\varphi(x) = f(x,y) - f(x,y_0), \quad |x - x_0| < \delta.$$

Din teorema lui Lagrange obţinem

$$E(x,y) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = (x - x_0)\varphi'(\xi) = (x - x_0)(f'_x(\xi,y) - f'_x(\xi,y_0)),$$

unde ξ este cuprins între x_0 şi x.

Aplicând din nou teorema lui Lagrange pentru funcţia $f'_x(\xi,\cdot)$ avem

$$f'_x(\xi,y) - f'_x(\xi,y_0) = (y - y_0)f''_{xy}(\xi,\eta)$$

pentru η strict cuprins între y_0 şi y. Deci

$$E(x,y) = (x - x_0)(y - y_0)f''_{xy}(\xi,\eta). \quad (1)$$

Similar, pentru expresia

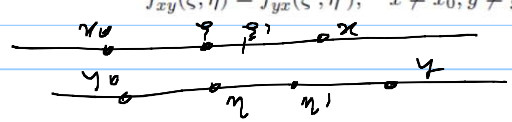
$$E(x,y) = (f(x,y) - f(x_0,y)) - (f(x,y_0) - f(x_0,y_0)),$$

obţinem ξ' între x_0 şi x, η' între y_0 şi y astfel încât

$$E(x,y) = (x - x_0)(y - y_0)f''_{yx}(\xi',\eta'). \quad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$f''_{xy}(\xi,\eta) = f''_{yx}(\xi',\eta'), \quad x \neq x_0, y \neq y_0.$$



Pentru $x \to x_0$, $y \to y_0$ în relaţia de mai sus obţinem

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).$$

ţinând cont de continuitatea lui f''_{xy}, f''_{yx}.

Observaţie 5.1 *Teorema lui Schwarz are loc pentru funcţii de n variabile reale pentru derivate mixte de ordin superior în condiţii analoage.*

De ex: $f'''_{x^2y} = f'''_{yx^2}$; $f'''_{xyz} = f'''_{yzx}$, etc. –

Exemplu de funcţie ce cu derivate mixte diferite.

Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

are proprietatea $f''_{xy}(0,0) = -1$, $f''_{yx}(0,0) = 1$.

Dem. Avem

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Pentru $(x,y) \neq (0,0)$ obținem:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)y}{(x^2+y^2)^2} \\ f'_y(x,y) &= \frac{(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)x}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

și în continuare

$$\begin{aligned} f''_{xy}(0,0) &= (f'_x)'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^5}{y^5} = -1 \\ f''_{yx}(0,0) &= (f'_y)'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^5} = 1. \end{aligned}$$