Научно-технологический университет «Сириус»
Математическое моделирование в биомедицине
и нефтегазовом инжиниринге

# Решение одномерной задачи конвекции-диффузии методом конечных объемов

Выполнили:

**Донской А.Е.**
**Медведев А.С.**
**Попова К.Р.**
**Рамазанов А.Н.**
**Удалова Е.С.**

2023 г.

## Постановка задачи

Задача конвекции-диффузии:

$$P_e \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \forall x \in [0, 1]$$

Краевые условия(граничные условия Дирихле): $u(0) = 0, u(1) = 1$
Pe - число Пекле, безразмерная величина, являющаяся критерием подобия для процессов конвективного теплообмена.
Точное решение:

$$\frac{e^{Pex} - 1}{e^{Pe} - 1}$$

## Схема решения методом конечных объемов

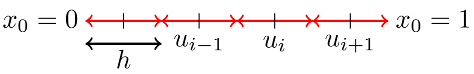



Схема для вычисления слагаемого, отвечающего за диффузию:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

На границах Дирихле:
Левая граница(u(0) = 0 ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

Правая граница(u(0) = 1 ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

### Аппроксимация конвективного члена средним значением ячеек

$$P_e \frac{\partial u}{\partial x} = P_e \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

Левая граница(u(0) = 0 ):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} + u_i - 2u_{i-1}}{2h}$$

Правая граница(u(0) = 1 ):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2u_{i+1} - u_i - u_{i-1}}{2h}$$

### Аппроксимация конвективного члена противопотоковой схемой

$$P_e \frac{\partial u}{\partial x} = P_e \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

Левая граница(u(0) = 0 ):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2u_i - 2u_{i-1}}{h}$$

Правая граница(u(0) = 1 ):

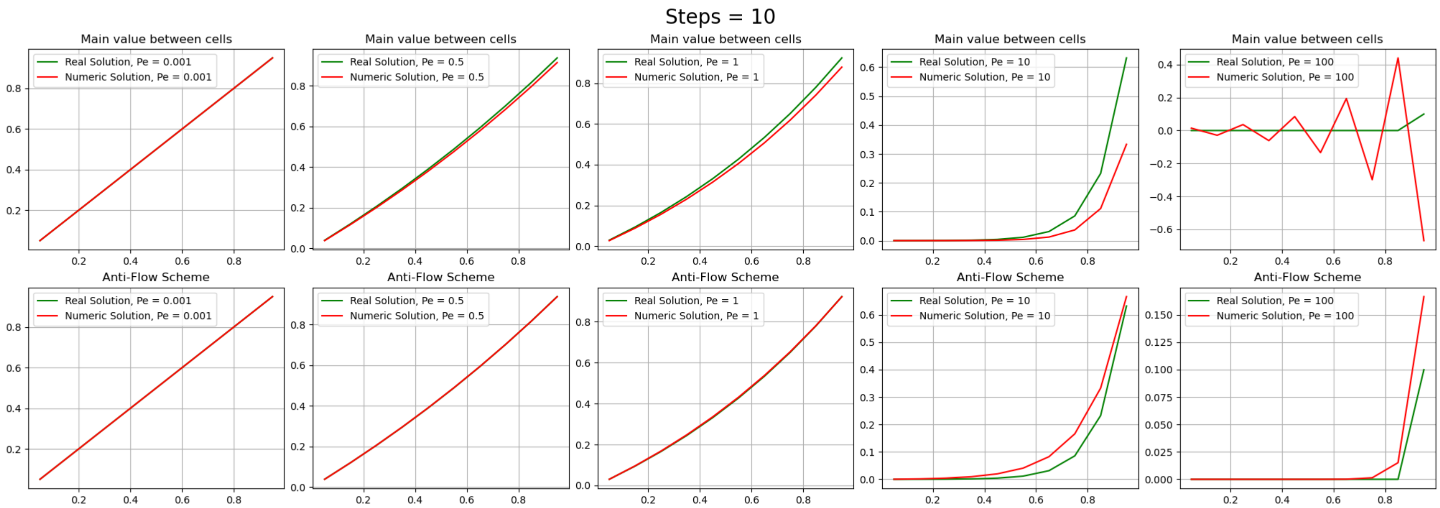
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

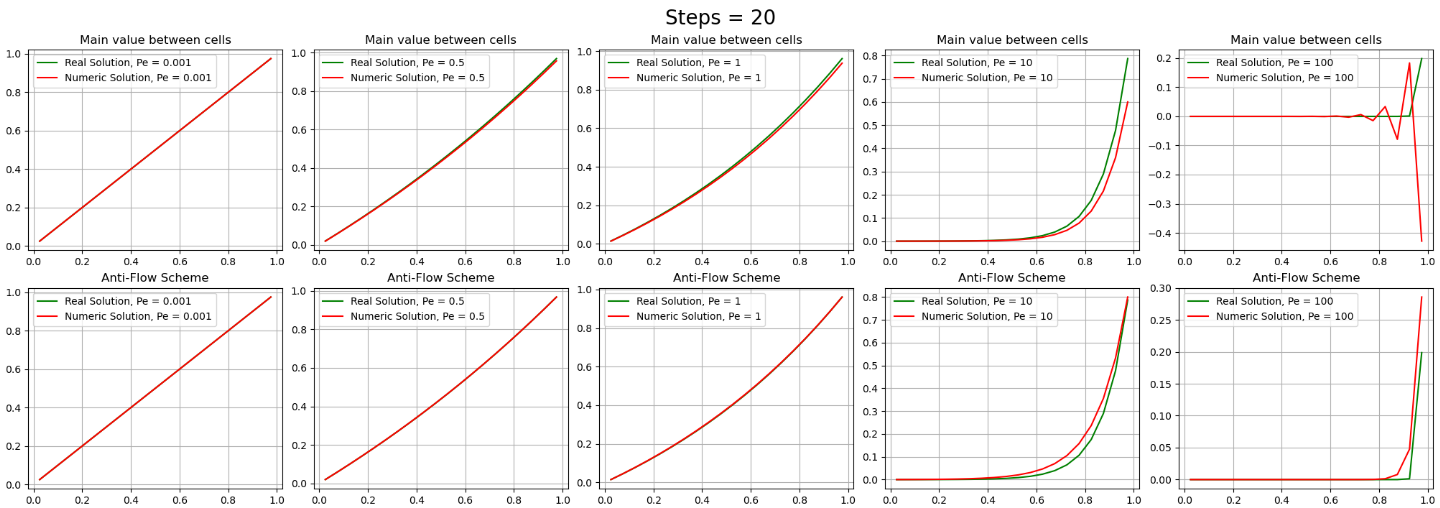
Используя коэффициенты перед слагаемыми $u_{i-1}, u_i, u_{i+1}$, была составлена трёхдиагональная матрица A с диагоналями dl, d, du соответственно. Первый и последний элементы столбца свободных членов заполняем, предполагая, что существует еще одна ячейка (слева, в случае левой границы Дирихле и справа в случае правой). Далее с помощью метода Томаса(прогонки) решается СЛАУ.

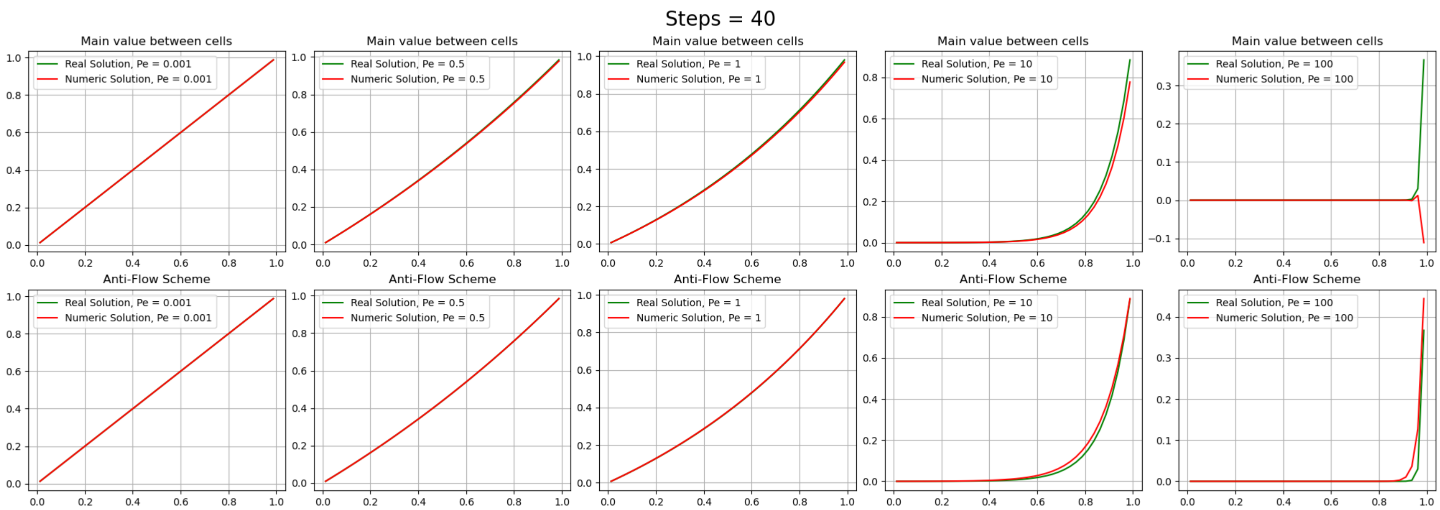
| $u$ | Среднее значение | Противопотоковая аппроксимация |
|---|---|---|
| $u_i$ | $\frac{1}{2h^2}[P_e h(u_{i+1} - u_{i-1}) - 2(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})]$ | $\frac{1}{h^2}[P_e h(u_i - u_{i-1}) - (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})]$ |
| $u_0$ | $\frac{1}{2h^2}[P_e h(u_{i+1} + u_i - 2u_{i-1}) - 2(2u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1})]$ | $\frac{1}{h^2}[P_e h(2u_i - 2u_{i-1}) - (2u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1})]$ |
| $u_N$ | $\frac{1}{2h^2}[P_e h(2u_{i+1} - u_{i-1} - u_{i-1}) - 2(u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1})]$ | $\frac{1}{h^2}[P_e h(u_i - u_{i-1}) - (u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1})]$ |

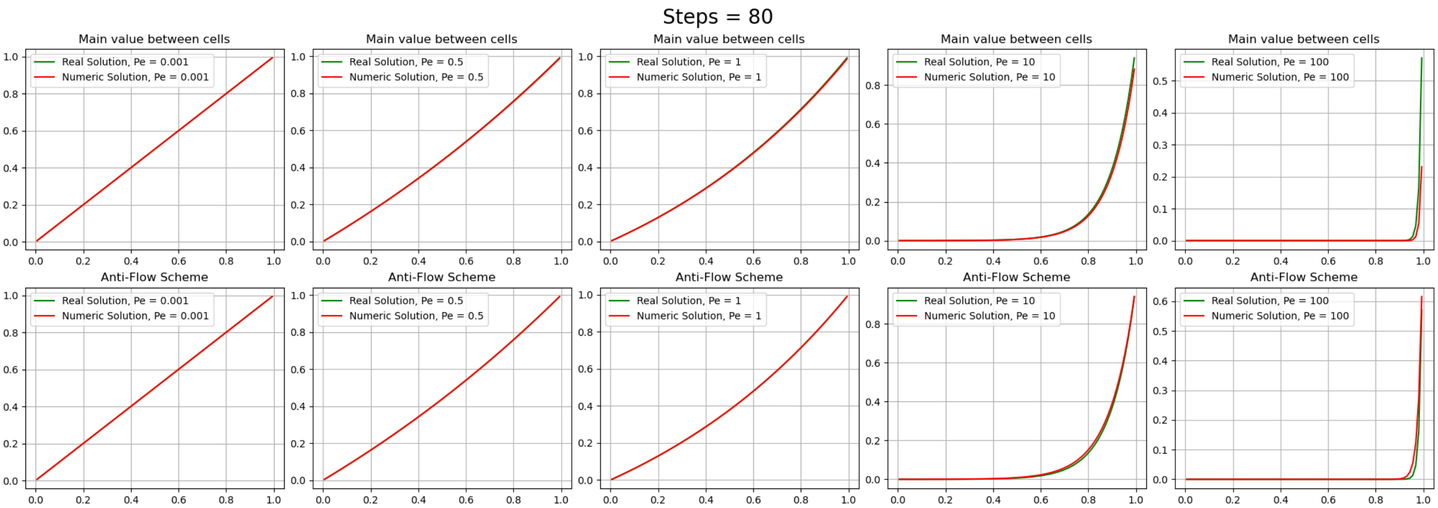
# Численные результаты

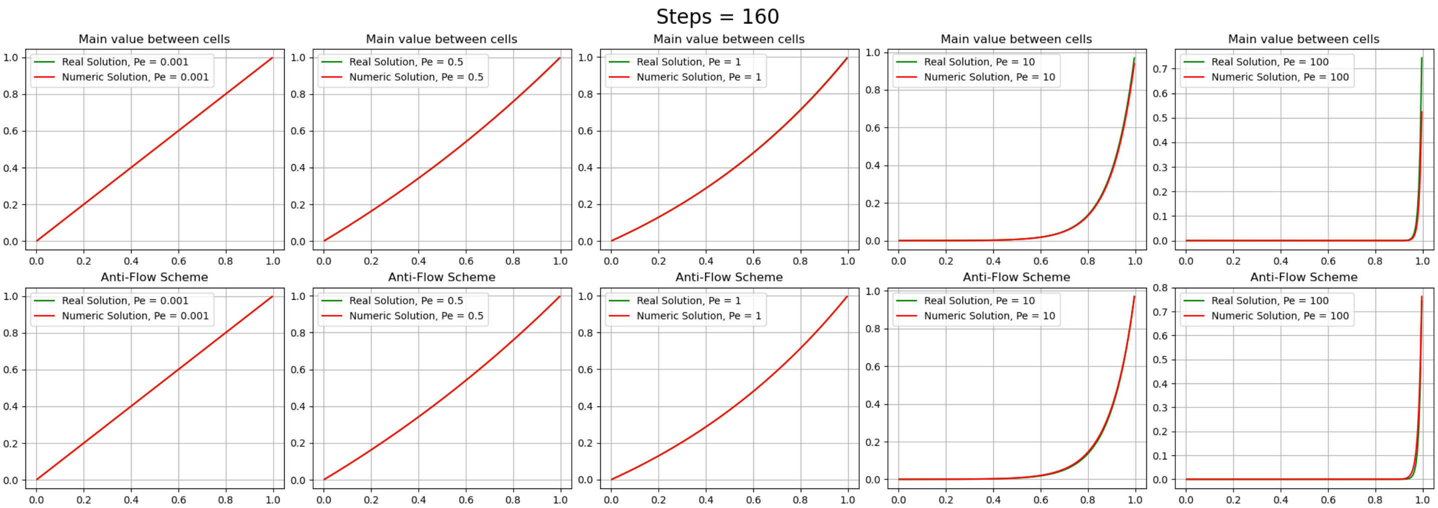
Был произведён расчет на разных размерах сетки и числах Пекле(0.5, 1, 10, 100) Ниже предоставлены графики, на которых изображены полученное нами и точное решения.

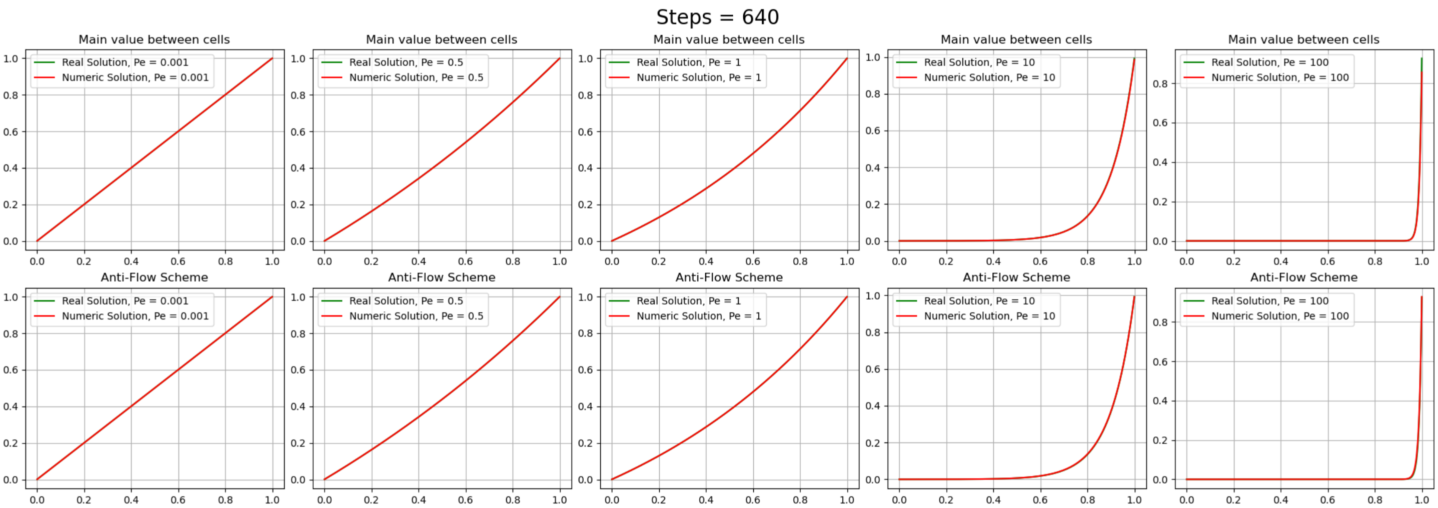




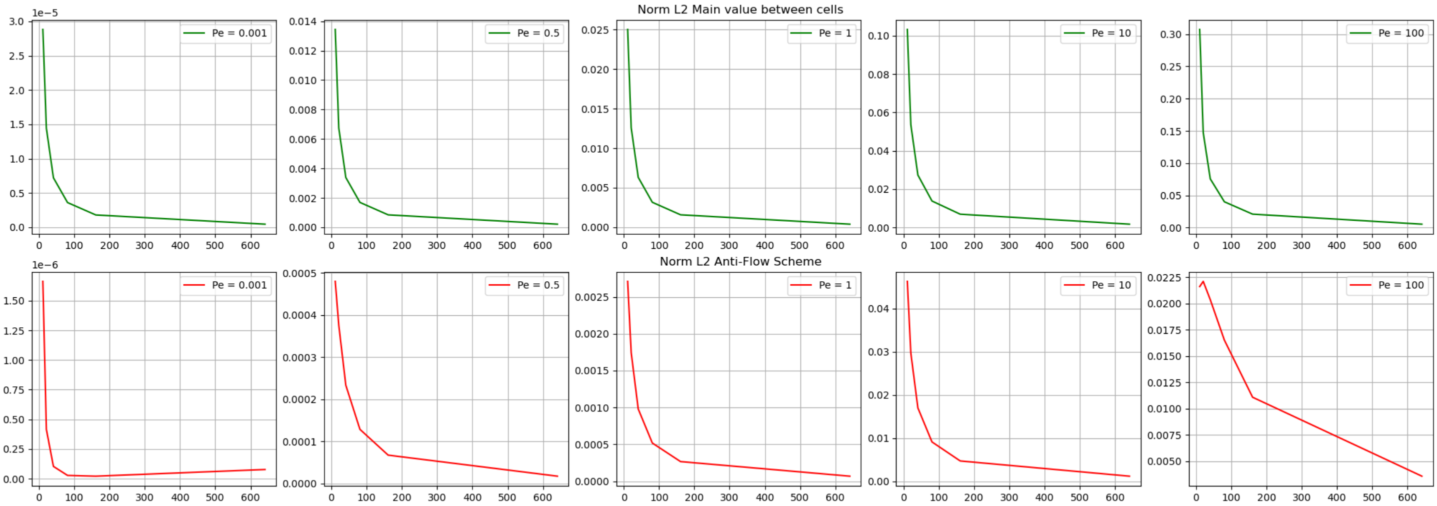




# Анализ выполнения принципа максимума

Как видно из графиков, принцип максимума нарушается при дискретизации с помощью осреденения при достаточно маленьких размерах сетки ( $N = 10, 20, 40$) и при параметре Пекле $Pe = 100$. В этих случаях наблюдаются отрицательные значения.

# Анализ скорости сходимости

В противопоточной схеме при Pe $=0$ выявлена наименьшая ошибка, но при увеличении количества узлов ($N \geq 160$) начинает расти. При Pe $=100$ рост нормы наблюдается при N $\in [10, 20]$




# Выводы

В данной работе использовалось две схемы: осреднение соседних ячеек и противопотоковая аппроксимация. Основное их отличие в том, что при малых размерах сетки и определенном числе Пекле в схеме с осреднением наблюдаются осцилляции. В случае противопотоковой схемы такого не происходит. Наилучшая сходимость наблюдается при числе Pe=10 в обеих схемах.